An Alternative Quantum Mechanics

G. Yu. Nekrasov

Moscow State University, Faculty of Physics, Theoretical Physics Department. Russia,119991, Moscow

E-mail: grygory.nkr@mail.ru

Keywords: the Legendre transform in mechanics of a one particle, first quantization, quantum mechanics, wave-equation, free motion of quantum particles, fermions, spin ½, the Klein-Gordon-Fock equation, the Dirac equation, Schrödinger equation, quantum mechanical regularization, quantum mechanical renormalization, clearly Lorentz-invariant quantum mechanics.

Abstract

An alternative version of the relativistic quantum mechanics of a free particle based on quantization of the Legendre transform in the classical mechanics of a one free particle is considered. As the theory initially does not turn out, the quantum mechanical regularization and the quantum mechanical renormalization of this theory are executed, as a result, the new wave-equation is gained, and it must be subject to experimental verification. It appears that this theory is a combination of the two standard theories of free particles in some sense: the Klein-Gordon-Fock theory and the Dirac theory. The main text of the article will be in Russian.

Введение

Стандартные теории релятивистской квантовой механики свободных частиц известны как своими успехами, так и своими областями применимости. Это такие теории, как теория Клейна-Гордона-Фока (КГФ) и теория Дирака. Первая хорошо описывает свободные пионы (π-мезоны), а вторая – свободные электроны, мюоны и кварки. Эти теории получаются ‘первичным’ квантованием релятивистского выражения для функции Гамильтона свободной частицы. Теория КГФ получается непосредственной заменой всех величин операторами нерелятивистской квантовой механики и действием всего уравнения на волновую функцию, а теория Дирака – это есть в каком-то смысле извлечение квадратного корня из оператора КГФ так, что квадрирование получившегося оператора приводит обратно к теории КГФ. Этот прямой, наиболее простой и красивый подход привел к замечательным результатам: получившиеся волновые уравнения очень точно и просто описывают многие найденные в природе свободные частицы, так что они поддерживают обобщение на случай взаимодействий и даже используются в квантовой теории поля.

Однако существуют другие более сложные и неоднозначные подходы, которые, в том числе, используют как интегральные, так и алгебраические формы преобразования Лежандра в механике одной частицы, которое, как легко убедиться, не подлежит прямому переходу от классического выражения к квантовомеханическому операторному уравнению. Поэтому, очевидно, что такие теории требуют как минимум квантовомеханической регуляризации или даже квантовомеханической регуляризации и квантовомеханической перенормировки. В интегральных теориях существует

неопределенность порядка операторов при переходе от классических уравнений к квантовым операторным уравнениям. А в алгебраической теории такой неопределенности нет, и она кажется наиболее простой, поэтому мы рассмотрели её в данной работе.

I. Подход Лежандра

1. Текущая ситуация

Рассмотрим проблему стандартной теории квантовой механики и классической механики и попытаемся развить новую математику, которая решала бы эту проблему. Вначале рассмотрим преобразование Лежандра в классической механике [1a], связывающее функцию Гамильтона и функцию Лагранжа:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L\,, \tag{1.1.1}$$

где p_i – канонические импульсы механической системы, $\dot{q}_i$ – скорости, H – функция Гамильтона системы, L – функция Лагранжа механической системы. Мы будем рассматривать только одну квантовую частицу. Проквантуем соотношение (1.1.1), заменив все величины в нем операторами:

$$\widehat{H} = \sum \hat{p}_i \hat{\dot{q}}_i - \hat{L}\,. \tag{1.1.2}$$

Рассмотрим теорию Дирака свободной частицы. Поэтому используем Гамильтониан Дирака [2a] в виде

$$\widehat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + m_0 c^2 \beta\,, \tag{1.1.3}$$

где $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$. Гамильтониан Дирака также часто обозначают как $\widehat{H}_D$. Наша задача состоит в том, чтобы построить явно Лоренц-инвариантную квантовую механику. Эту цель мы, вероятно, сможем достичь, если сформулируем квантовую механику Лагранжа ненаблюдаемых операторов. Исходя из этого, мы будем работать с ненаблюдаемыми операторами или операторами ненаблюдаемых физических величин, но в конечном итоге мы должны получить результат, который должен позволять проверить его в эксперименте. Как видно из уравнений (1.1.1) и (1.1.2), одной из таких величин является функция Лагранжа и её оператор.

Оператор скорости в релятивистской квантовой теории Дирака, как известно, можно найти из уравнения Гамильтона для скорости [1a], написанного для операторов:

$$\hat{\dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \equiv \hat{\mathbf{v}}\,, \tag{1.1.4}$$

поэтому оператор скорости выражается в виде:

$$\hat{\mathbf{v}} = c\boldsymbol{\alpha}\,. \tag{1.1.5}$$

Оператор импульса в (1.1.2) в случае одной частицы сводится к просто оператору импульса в квантовой механике, как приведено выше. Подставляя оператор (1.1.5) и оператор канонического импульса в (1.1.2), мы получим уравнение

$$\widehat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} - \hat{L}\,. \tag{1.1.6}$$

В уравнении (1.1.6) порядок множителей в первом слагаемом в правой части не имеет значения, поскольку множители коммутируют. Затем, подставляя в (1.1.6) выражение оператора Гамильтона (1.1.3) и, выражая оператор функции Лагранжа, мы получим

$$\hat{L} = -m_0c^2\beta\,, \tag{1.1.7}$$

т.е. кинетический член полностью коллапсировал. Это показывает, что оператор (1.1.7) плохой и не годится для формулировки новой теории.

2. Квадрирование

Попытаемся обойти эту проблему, возведя в квадрат всё уравнение (1.1.6). Тогда в левой части мы получим квадрат Гамильтониана Дирака, который есть пространственный оператор Клейна-Гордона-Фока, а квадрат правой части соответствует произведению двух скобок, порядок которых неважен:

$$\widehat{H}^2 = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} - \hat{L}\right)\left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} - \hat{L}\right). \tag{1.2.1}$$

Раскрывая скобки в правой части, и учитывая порядок множителей/операторов, мы получим

$$\widehat{H}^2 = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)^2 - c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\hat{L} - c\hat{L}\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{L}^2\,, \tag{1.2.2}$$

при этом мы учитываем, что все операторы являются линейными. Упрощая, получим окончательно

$$\widehat{H}^2 = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)^2 - c\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\hat{L}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\hat{L}\right) + \hat{L}^2\,. \tag{1.2.3}$$

Первое слагаемое в правой части (1.2.3) после подстановки оператора импульса и упрощения с $\boldsymbol{\alpha}$-матрицами с помощью алгебры матриц Дирака [2б]

$$\alpha^i\alpha^k + \alpha^k\alpha^i = 2I\delta_i^k$$

принимает явный вид

$$\left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)^2 \equiv -I\hbar^2c^2\Delta\,, \tag{1.2.4}$$

где I здесь и далее – единичная матрица 4×4, Δ – оператор Лапласа прямоугольной декартовой системы координат. Таким образом, мы всё определили – квадрат оператора Гамильтона в левой части (1.2.3) имеет известный [3] и хороший вид:

$$\widehat{H}^2 = I\left(-\hbar^2c^2\Delta + m_0^2c^4\right). \tag{1.2.5}$$

В уравнении (1.2.3) мы учли, что в свободной теории оператор импульса коммутирует с любым оператором, кроме, конечно, оператора орбитального момента и его квадрата.

Чтобы выразить из (1.2.3) оператор Лагранжа, нам нужно, во-первых, понизить его степень 2, а, во-вторых, как-то избавиться от антикоммутатора во втором слагаемом в этом уравнении. Для этого заметим, что в классической теории имеет место формула [4а], выражающая скорость через импульс:

$$\mathbf{v} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E} \equiv \frac{c^2\mathbf{p}}{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}. \tag{1.2.6}$$

Подставляя в (1.1.1) выражение для скорости (1.2.6) и выражая функцию Лагранжа, получим

$$L = \frac{c^2p^2}{E} - E, \tag{1.2.7}$$

где E – полная энергия свободной частицы, т.е. функция Гамильтона, если энергия выражена через импульс. Но из функции Гамильтона можно выразить

$$c^2p^2 = E^2 - m_0^2c^4,$$

поэтому подставляя это в (1.2.7), получаем

$$L = -\frac{m_0^2c^4}{E},$$

или

$$LE = -m_0^2c^4, \tag{1.2.8}$$

что легко видеть из явного выражения классической функции Лагранжа и энергии частицы [4б]. В операторном виде формула (1.2.8) выглядит так:

$$\hat{L}\hat{H} = -Im_0^2c^4. \tag{1.2.9}$$

Перед тем, как начать размышлять о правильном порядке операторов в этой формуле мы можем легко увидеть, что в классической релятивистской механике есть еще одна формула:

$$\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{v}m_0^2c^2}{L}. \tag{1.2.10}$$

Если в (1.2.10) перейти к операторам в теории Дирака, мы получим

$$-\boldsymbol{\alpha}m_0^2c^3 = \hat{L}\hat{\mathbf{p}}$$

или

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{m_0^2 c^3}\hat{L}\hat{\mathbf{p}}. \tag{1.2.11}$$

Используя (1.2.11) и условие, о котором говорилось выше:

$$\hat{A}\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}\hat{A} = 0, \tag{1.2.12}$$

где в данном случае $\hat{A} \coloneqq \hat{L}$, можно доказать, что коммутатор

$$\hat{L}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}\hat{L} = 0 \tag{1.2.13}$$

для любого порядка операторов в (1.2.11). Но из (1.2.11) легко видеть сразу, что эта формула, переписанная для операторов, не может использоваться в квантовой механике, поскольку невозможно найти такой оператор $\hat{L}$, который при подстановке в уравнение (1.2.11) давал бы матрицы $\boldsymbol{\alpha}$. Поэтому формулу (1.2.11) мы вынуждены отбросить.

Если мы постулируем

$$\hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H} = 0, \tag{1.2.14}$$

то порядок операторов в (1.2.9) будет неважен, поэтому пока примем коммутацию оператора Лагранжа с Гамильтонианом на веру. Итак, у нас есть формула (1.2.9), с помощью которой мы надеемся упростить основное уравнение (1.2.3), возникшее в результате квадрирования исходного уравнения Лежандра для операторов (1.1.6). Для применения формулы (1.2.9) в (1.2.3) нам мешает только первое слагаемое в антикоммутаторе, мы могли бы применить её, если порядок операторов в этом слагаемом изменился на противоположный, поэтому вычислим следующий коммутатор

$$\left[\hat{L}, \hat{v}^k\right], \tag{1.2.15}$$

где индекс $k = (1,2,3)$, и по повторяющимся индексам везде далее подразумевается суммирование. Используя (1.1.6), которое есть прямое квантовое следствие (1.1.1), мы получим результат:

$$\left[\hat{L}, \hat{v}^k\right] = -2m_0 c^2 \beta \hat{v}^k. \tag{1.2.16}$$

Отсюда антикоммутатор получит вид

$$\left\{\hat{L}, \hat{v}^k\right\} = -2m_0 c^2 \beta \hat{v}^k + 2\hat{v}^k \hat{L}. \tag{1.2.17}$$

Теперь у нас есть всё, чтобы записать уравнение (1.2.3) в новом виде: подставляя (1.2.5) в (1.2.3) и используя (1.2.17), а также явный вид оператора импульса, получим

$$-2i\hbar c^2 m_0 \beta \hat{v}^k \partial_k + 2i\hbar \hat{v}^k \partial_k \hat{L} + \hat{L}^2 = I m_0^2 c^4. \tag{1.2.18}$$

Действуя на уравнение (1.2.18) оператором Гамильтона $\widehat{H}$ справа и используя формулу (1.2.9), получим

$$-2i\hbar c^2 m_0 \beta \hat{v}^k \partial_k \widehat{H} + 2i\hbar\left(-m_0^2 c^4\right)\hat{v}^k \partial_k - m_0^2 c^4 \hat{L} = m_0^2 c^4 \widehat{H} .$$

Мы получили операторное уравнение, содержащее первую степень свободно стоящего оператора $\hat{L}$, поэтому теперь мы можем выразить его:

$$\hat{L} = -\frac{2i\hbar}{m_0 c^2}\beta \hat{v}^k \partial_k \widehat{H} - 2i\hbar \hat{v}^k \partial_k - \widehat{H} . \tag{1.2.19}$$

Подставляя явный вид оператора Гамильтона Дирака (1.1.3) и явный вид оператора скорости в этой теории (1.1.5), получим окончательно для оператора Лагранжа в данной теории:

$$\hat{L} = -\frac{2\hbar^2}{m_0}\beta\Delta + i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla - m_0 c^2 \beta . \tag{1.2.20}$$

Как мы видим, выражение (1.2.20) сильно отличается от выражения (1.1.7), таким образом, квадрированная теория при её соединении с линейной теорией образует единую теорию, которая содержит эту нестыковку, которую мы назовем квантовомеханической аномалией. Квантовомеханическая аномалия – это несоответствие в квантовой механике результатов, полученных одним способом и другим способом.

3. Регуляризация

Введем понятие квантовомеханической регуляризации как регуляризации в квантовой механике, а не в квантовой теории поля, как этот термин понимается в обычном смысле, то есть компенсирование квантовомеханической аномалии, чтобы результаты, полученные разными способами, совпадали, т.е. чтобы не было расхождений. Мы можем попытаться устранить найденную выше аномалию, введя регуляризатор $\hat{a}$ в преобразование Лежандра:

$$\hat{L} = \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}} - \widehat{H} + \hat{a} . \tag{1.3.1}$$

Регуляризатор – это оператор, который должен уравновесить или компенсировать вклады от линейной квантовой теории преобразования Лежандра в механике одной частицы и квадрированной теории этого преобразования. Итак, начинаем с (1.3.1): вначале выразим оператор Гамильтона и возведем всё соотношение в квадрат, тогда получим

$$\widehat{H}^2 = \left(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}} - \hat{L} + \hat{a}\right)\left(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}} - \hat{L} + \hat{a}\right). \tag{1.3.2}$$

Затем аккуратно раскроем скобки сохраняя порядок операторов во всех слагаемых

$$\widehat{H}^2 = \left(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}\right)^2 - \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}\hat{L} + \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}\hat{a} - \hat{L}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}} + \hat{L}^2 - \hat{L}\hat{a} + \hat{a}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}} - \hat{a}\hat{L} + \hat{a}^2 , \tag{1.3.3}$$

приведя подобные, мы получим

$$\widehat{H}^2 = \left(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}\right)^2 - \hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\hat{L}\hat{\mathbf{v}}+\hat{\mathbf{v}}\hat{L}\right)+\hat{L}^2+\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\hat{a}\hat{\mathbf{v}}+\hat{\mathbf{v}}\hat{a}\right)-\left(\hat{L}\hat{a}+\hat{a}\hat{L}\right)+\hat{a}^2. \qquad (1.3.4)$$

Подставляя (1.2.4) и (1.2.5), сокращая и применяя краткую запись антикоммутаторов, наше выражение сведется к

$$i\hbar\nabla\cdot\left(\hat{L}\hat{\mathbf{v}}+\hat{\mathbf{v}}\hat{L}\right)+\hat{L}^2+\hat{\mathbf{p}}\cdot\left\{\hat{a},\hat{\mathbf{v}}\right\}-\left\{\hat{L},\hat{a}\right\}+\hat{a}^2 = Im_0^2c^4. \qquad (1.3.5)$$

Как и прежде нам нужен коммутатор (1.2.15). Теперь уже исходя из (1.3.1), найдем его в виде:

$$\left[\hat{L},\hat{v}^k\right] = -2m_0c^2\beta\hat{v}^k+\left[\hat{a},\hat{v}^k\right]. \qquad (1.3.6)$$

А антикоммутатор тогда получит вид:

$$\left\{\hat{L},\hat{v}^k\right\} = -2m_0c^2\beta\hat{v}^k+2\hat{v}^k\hat{L}+\left[\hat{a},\hat{v}^k\right]. \qquad (1.3.7)$$

То есть к прежним выражениям добавляется коммутатор регуляризатора и скорости. Используя (1.3.1), вычислим произведение

$$\hat{L}\hat{a} = \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}\hat{a}-\widehat{H}\hat{a}+\hat{a}^2,$$

и произведение

$$\hat{a}\hat{L} = \hat{a}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}-\hat{a}\widehat{H}+\hat{a}^2.$$

Составим из них коммутатор и упростим его

$$\left[\hat{L},\hat{a}\right] = \hat{\mathbf{p}}\cdot\left[\hat{\mathbf{v}},\hat{a}\right]-\left[\widehat{H},\hat{a}\right], \qquad (1.3.8)$$

а антикоммутатор тогда будет равен

$$\left\{\hat{L},\hat{a}\right\} = \left[\hat{L},\hat{a}\right]+2\hat{a}\hat{L}.$$

Отсюда получаем антикоммутатор в виде:

$$\left\{\hat{L},\hat{a}\right\} = \hat{\mathbf{p}}\cdot\left[\hat{\mathbf{v}},\hat{a}\right]-\left[\widehat{H},\hat{a}\right]+2\hat{a}\hat{L}. \qquad (1.3.9)$$

Запишем уравнение (1.3.5), используя выражение (1.3.9), и изменив знак в коммутаторе скорости и регуляризатора, получим:

$$i\hbar\nabla\cdot\left(\hat{L}\hat{\mathbf{v}}+\hat{\mathbf{v}}\hat{L}\right)+\hat{L}^2+\hat{\mathbf{p}}\cdot\left\{\hat{a},\hat{\mathbf{v}}\right\}+\hat{\mathbf{p}}\cdot\left[\hat{a},\hat{\mathbf{v}}\right]+\left[\widehat{H},\hat{a}\right]-2\hat{a}\hat{L}+\hat{a}^2 = Im_0^2c^4, \qquad (1.3.10)$$

или

$$i\hbar\nabla\cdot\left(\hat{\hat{L}}\hat{\mathbf{v}}+\hat{\mathbf{v}}\hat{\hat{L}}\right)+\hat{\hat{L}}^2+\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\left\{\hat{a},\hat{\mathbf{v}}\right\}+\left[\hat{a},\hat{\mathbf{v}}\right]\right)+\left[\hat{H},\hat{a}\right]-2\hat{a}\hat{\hat{L}}+\hat{a}^2=Im_0^2c^4.$$

Далее используя тождество для коммутатора и антикоммутатора:

$$\left\{\hat{A},\hat{B}\right\}+\left[\hat{A},\hat{B}\right]=2\hat{A}\hat{B} \tag{1.3.11}$$

и выражение для антикоммутатора (1.3.7), упростим полученное выражение и запишем его в явном виде

$$i\hbar\partial_k\cdot\left(-2m_0c^2\beta\hat{v}^k+2\hat{v}^k\hat{\hat{L}}+\left[\hat{a},\hat{v}^k\right]\right)+\hat{\hat{L}}^2+2\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\hat{a}\hat{\mathbf{v}}\right)+\left[\hat{H},\hat{a}\right]-2\hat{a}\hat{\hat{L}}+\hat{a}^2=Im_0^2c^4. \tag{1.3.12}$$

Теперь мы видим, что в полученном конечном уравнении оператор Лагранжа $\hat{\hat{L}}$ стоит свободным справа, так что на него может действовать любой оператор. Подействуем на уравнение (1.3.12) справа оператором Гамильтона $\hat{H}$, как мы это делали в Разделе 2, тогда сразу применяя формулу (1.2.9), получим

$$-2i\hbar c^2m_0\beta\hat{v}^k\partial_k\hat{H}+2i\hbar\hat{v}^k\left(-m_0^2c^4\right)\partial_k+i\hbar\left[\hat{a},\hat{v}^k\right]\partial_k\hat{H}-m_0^2c^4\hat{\hat{L}}+ \tag{1.3.13}$$

$$+2\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\hat{a}\hat{\mathbf{v}}\right)\hat{H}+\left[\hat{H},\hat{a}\right]\hat{H}+2m_0^2c^4\hat{a}+\hat{a}^2\hat{H}=m_0^2c^4\hat{H}.$$

Итак, мы получили уравнение, содержащее первую степень оператора Лагранжа $\hat{\hat{L}}$. Теперь мы можем выразить из него этот оператор:

$$\hat{\hat{L}}=-\frac{2i\hbar}{m_0c^2}\beta\hat{v}^k\partial_k\hat{H}-2i\hbar\hat{v}^k\partial_k+2\hat{a}-\hat{H}+\frac{1}{m_0^2c^4}\left(i\hbar\left[\hat{a},\hat{v}^k\right]\partial_k\hat{H}+\right.$$

$$\left.+2\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\hat{a}\hat{\mathbf{v}}\right)\hat{H}+\left[\hat{H},\hat{a}\right]\hat{H}+\hat{a}^2\hat{H}\right).$$

Таким образом, можно заметить, что этот регуляризованный оператор Лагранжа изменился: помимо той же самой части, как и в исходной теории, которую мы обозначим $\hat{\hat{L}}_0$, в него добавился вклад, целиком зависящий от регуляризационного оператора $\hat{a}$. То есть

$$\hat{\hat{L}}=\hat{\hat{L}}_0+2\hat{a}+\frac{1}{m_0^2c^4}\left(i\hbar\left[\hat{a},\hat{v}^k\right]\hat{H}\partial_k+2\hat{a}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}\hat{H}+\left[\hat{H},\hat{a}\right]\hat{H}+\hat{a}^2\hat{H}\right), \tag{1.3.14}$$

где $\hat{\hat{L}}_0$ есть (1.2.20).

Чтобы регуляризация работала, т.е. чтобы устранить аномалию в этой теории, необходимо приравнять результат, который получается подстановкой (1.1.3) в (1.3.1), т.е.

$$\hat{\hat{L}}=-m_0c^2\beta+\hat{a} \tag{1.3.15}$$

и выражение для оператора Лагранжа (1.3.14). В результате приходим к уравнению:

$$-\frac{2\hbar^2}{m_0}\beta\Delta + i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \hat{a} + \frac{1}{m_0^2c^4}\left(i\hbar\left[\hat{a},\hat{v}^k\right]\widehat{H}\partial_k + 2\hat{a}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{v}}\widehat{H} + \right. \tag{1.3.16}$$

$$\left. + \left[\widehat{H},\hat{a}\right]\widehat{H} + \hat{a}^2\widehat{H}\right) = 0 .$$

Теперь запишем операторы дифференцирования по координатам пространства в этом уравнении в неявном виде – как операторы импульса и подставим оператор Гамильтона Дирака (1.1.3) в явном виде:

$$\frac{2}{m_0}\hat{p}^2\beta - c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{a} + \frac{1}{m_0^2c^4}\left(-c\hat{p}_k\left[\hat{a},\alpha^k\right]\right)\left(c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m_0c^2\beta\right) +$$

$$+2\hat{a}c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left(c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m_0c^2\beta\right) + \left[\left(c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m_0c^2\beta\right),\hat{a}\right]\left(c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m_0c^2\beta\right) +$$

$$+\hat{a}^2\left(c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m_0c^2\beta\right)\Big) = 0 .$$

Здесь мы видим, что данное уравнение содержит квадрат регуляризационного оператора, поэтому если предполагать его алгебраическое решение, то оно будет очень сложным. Поэтому нам нужно каким-то образом понизить степень $\hat{a}$, чтобы это уравнение стало линейным по регуляризатору. Для этого воспользуемся соотношением (1.3.1): выразим из него $\hat{a}$ и с помощью (1.2.9) найдем произведение

$$\hat{a}\widehat{H} = -I\hbar^2c^2\Delta - c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\widehat{H} \equiv Ic^2\hat{p}^2 - c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\widehat{H} , \tag{1.3.17}$$

где второе слагаемое после тождественного равенства равно

$$c\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\widehat{H} = Ic^2\hat{p}^2 + m_0c^3\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\beta . \tag{1.3.18}$$

Тогда (1.3.17) оказывается равным

$$\hat{a}\widehat{H} = -m_0c^3\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\beta . \tag{1.3.19}$$

Отсюда квадратичное слагаемое в (1.3.16) принимает вид

$$\hat{a}^2\widehat{H} = -m_0c^3\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\hat{a}\boldsymbol{\alpha}\right)\beta . \tag{1.3.20}$$

Опираясь на постулат (1.2.14) аналогично вычислим произведение

$$\widehat{H}\hat{a} = Ic^2\hat{p}^2 - c\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\widehat{H}\boldsymbol{\alpha}\right), \tag{1.3.21}$$

где второе слагаемое после явной подстановки (1.1.3) принимает вид

$$c\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\widehat{H}\boldsymbol{\alpha}\right) = Ic^2\hat{p}^2 + m_0c^3\hat{\mathbf{p}}\cdot\left(\beta\boldsymbol{\alpha}\right) . \tag{1.3.22}$$

Тогда принимая во внимание антикоммутацию в теории Дирака:

$$\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha} = 0\,,$$

(1.3.21) оказывается равным

$$\widehat{H}\,\hat{a} = m_0 c^3\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\beta\,. \tag{1.3.23}$$

Из (1.3.19) и (1.3.23) найдем коммутатор

$$\left[\widehat{H},\hat{a}\right] = 2m_0 c^3\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\beta\,. \tag{1.3.24}$$

Подставляя явный вид Гамильтониана, найдем явный вид слагаемого в (1.3.16):

$$\left[\widehat{H},\hat{a}\right]\widehat{H} = -2m_0 c^4\beta\,\widehat{p}^{\,2} + 2m_0^2 c^5\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\,. \tag{1.3.25}$$

Подставляя Гамильтониан Дирака, найдем операторную величину:

$$c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\widehat{H} = Ic^2 p^2 + m_0 c^3\left(\boldsymbol{\alpha}\beta\right)\cdot\hat{\mathbf{p}}\,. \tag{1.3.26}$$

Используя (1.3.19) и подставляя это же выражение, найдем операторную величину, фигурирующую в (1.3.16):

$$\left[\hat{a},\alpha^k\right]\widehat{H} = \hat{a}\alpha^k\widehat{H} + m_0 c^3\,\widehat{p}_i\alpha^k\alpha^i\beta\,. \tag{1.3.27}$$

Теперь используя все эти упрощающие формулы, мы можем записать получившееся уравнение, которое тождественно уравнению (1.3.16); это уравнение первой степени по регуляризатору $\hat{a}$:

$$m_0^2 c^5\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + m_0^2 c^4\hat{a} - c\,\widehat{p}_i\left(\hat{a}\alpha^i\widehat{H} + m_0 c^3\,\widehat{p}_k\alpha^i\alpha^k\beta\right) + 2\hat{a}\left(Ic^2\,\widehat{p}^{\,2} + \right. \tag{1.3.28}$$

$$\left. + m_0 c^3\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\beta\right) - m_0 c^3\,\hat{a}\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\beta = 0\,.$$

В этом уравнении под оператором $\hat{a}$ мы понимаем квадратную матрицу 4×4, которая коммутирует с оператором импульса $\hat{\mathbf{p}}$, а значит с любой степенью этого оператора. Уравнение (1.3.28) является линейным и подлежит алгебраическому решению относительно всех элементов матрицы $\hat{a}$, которые, как следует из него, зависят от компонент оператора $\hat{\mathbf{p}}$, а также от постоянных, фигурирующих в этом уравнении.

Решение уравнения (1.3.28) было найдено на компьютере и имеет вид:

$$\hat{a}=\frac{1}{\hat{p}^2+m_0^2c^2}\begin{pmatrix} m_0c^2\hat{p}^2 & 0 & -\hat{p}_z m_0^2c^3 & \left(i\hat{p}_y-\hat{p}_x\right)m_0^2c^3 \\ 0 & m_0c^2\hat{p}^2 & -\left(i\hat{p}_y+\hat{p}_x\right)m_0^2c^3 & \hat{p}_z m_0^2c^3 \\ -\hat{p}_z m_0^2c^3 & \left(i\hat{p}_y-\hat{p}_x\right)m_0^2c^3 & -m_0c^2\hat{p}^2 & 0 \\ -\left(i\hat{p}_y+\hat{p}_x\right)m_0^2c^3 & \hat{p}_z m_0^2c^3 & 0 & -m_0c^2\hat{p}^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3.29)$$

Его можно записать кратко так:

$$\hat{a}=\frac{c^2}{\hat{H}^2}\left(-m_0^2c^3\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}+m_0c^2\hat{p}^2\beta\right). \quad (1.3.30)$$

Таким образом, оператор Лагранжа теперь имеет вид:

$$\hat{L}=-m_0c^2\beta+\hat{a}\,, \quad (1.3.31)$$

кинетическое слагаемое полностью восстановлено и аномалия устранена. Если мы теперь вычислим коммутатор (1.2.14), то убедимся, что он выполняется. Значит наше предположение о несущественности порядка операторов Гамильтона и Лагранжа, которое мы приняли на веру, было правильным. А если выполняется этот коммутатор, то выполняется и

$$\hat{L}\hat{H}^2-\hat{H}^2\hat{L}=0\,, \quad (1.3.32)$$

что очевидно, и вообще оператор Лагранжа коммутирует с любой степенью Гамильтониана. Также справедливо

$$\hat{L}^2\hat{H}-\hat{H}\hat{L}^2=0\,, \quad (1.3.33)$$

что проверяется прямой подстановкой. Так как справедливо соотношение (1.2.14), оператор $\hat{L}$, поскольку он явно не зависит от времени, оказывается постоянным [5а], т.е.

$$\hat{L}_S=\hat{L}_H\,, \quad (1.3.34)$$

$$\frac{d\hat{L}_H}{dt}=0\,, \quad (1.3.35)$$

где индекс S означает оператор в представлении Шредингера, а индекс H означает оператор в представлении Гейзенберга; можно считать, что выражения для $\hat{a}$ (1.3.29) и (1.3.30) для (1.3.31) и сам оператор записаны в представлении Шредингера. Можно убедиться, что оператор Лагранжа – эрмитов:

$$\hat{L}_S^{\dagger}=\hat{L}_S\,. \quad (1.3.36)$$

Исходя из (1.3.30) и (1.3.31), мы видим, что найденный оператор Лагранжа $\hat{L}$ в координатном представлении является нелокальным, поскольку квадрат оператора канонического импульса, который, по сути, есть оператор Лапласа, находится в знаменателе. Мы не можем записать в общем виде разложение дроби в ряд Тейлора, поскольку в релятивистской теории должен быть доступен весь диапазон импульсов в пространстве импульсов $\mathbb{R}^3$, поэтому этой теории требуется перенормировка.

4. Перенормировка

Нашей целью было построить явно Лоренц-инвариантную квантовую механику, поэтому мы использовали функцию Лагранжа, найдя квантовый оператор, соответствующий этой функции. Чтобы записать явно релятивистски-инвариантное волновое уравнение воспользуемся Лоренц-инвариантной формулой в классической механике [1б], а именно, выражением для действия:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = S . \tag{1.4.1}$$

Действие механической системы S является Лоренц-инвариантным, а функция Лагранжа L сама по себе Лоренц-неинвариантна, но её интеграл по времени – Лоренц-инвариантен. Это также видно из того, что обе части равенства (1.4.1) должны быть Лоренц-инвариантными. Ни функция Лагранжа, ни действие не являются наблюдаемыми физическими величинами, но они – не наблюдаемы. Итак, в (1.4.1) мы переходим к операторам:

$$\int_{t_1}^{t_2} \hat{L}_S dt = \hat{S} , \tag{1.4.2}$$

где $\hat{L}_S$ – постоянен, поэтому мы сразу можем проинтегрировать по времени:

$$\Delta t \hat{L}_S = \hat{S} , \tag{1.4.3}$$

где теперь $\Delta t = t_2 - t_1$. Как известно, действие в квантовой механике квантуется единицами приведенной постоянной Планка $\hbar$ [5б], но в случае свободного движения спектр энергии является непрерывным, поэтому, очевидно, что оператор действия будет иметь вид:

$$\hat{S} = IC\hbar , \tag{1.4.4}$$

где C – безразмерная постоянная. Так в формуле (1.4.4) действие сохраняет свою Лоренц-инвариантность. Отсюда следует, что постоянная C не должна зависеть от конкретной системы отсчета, а должна быть одинаковой во всех инерциальных СО. Тогда мы получаем операторное уравнение:

$$\hat{L}_S = I \frac{C\hbar}{\Delta t} . \tag{1.4.5}$$

В его правой части действие оператора сводится просто к умножению на число. Собственное значение оператора $\hat{L}$ в квантовой теории выражается в виде

$$L = \frac{C\hbar}{\Delta t}. \tag{1.4.6}$$

Если мы теперь подействуем почленно на левую и правую части уравнения (1.4.5) оператором $\widehat{H}^2$, то получим следующее операторное уравнение:

$$\hat{L}_S \widehat{H}^2 = I \frac{C\hbar}{\Delta t} \widehat{H}^2. \tag{1.4.7}$$

Уравнение (1.4.7) оказывается Лоренц-инвариантным, потому что уравнение (1.4.5) – Лоренц-инвариантно. Более того, подействовав на оператор Лагранжа $\hat{L}_S$ квадратом оператора Гамильтона мы произвели квантовомеханическую перенормировку оператора Лагранжа, который был нелокален, как мы установили в Разделе 3, и теперь он стал локальным оператором. Поясним, что такое квантовомеханическая перенормировка. Квантовомеханическая перенормировка – это математическая процедура или действие, которое позволяет избавиться от теоретических патологий в квантовой механике – бесконечных величин, нулевых величин или не локальности аналогично понятию перенормировки в обычном смысле, которое используется в квантовой теории поля. Здесь мы имели патологию не локальности оператора Лагранжа. Под квантовомеханической перенормировкой может пониматься любая математическая процедура, например, как здесь введение контрчлена квадрата оператора Гамильтона $\widehat{H}^2$, которая позволяет избавиться от бесконечных величин, нулевых величин или операторов или не локальности в квантовой механике. Таким образом, мы получили конечное в этой теории волновое уравнение:

$$\hat{L}_S \widehat{H}^2 \Psi = \frac{C\hbar}{\Delta t} \widehat{H}^2 \Psi. \tag{1.4.8}$$

После подстановок и упрощения уравнение (1.4.7) принимает вид:

$$\left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0 c^2 \beta\right) = -I \frac{C\hbar}{\Delta t m_0^2 c^4} \left(-\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4\right). \tag{1.4.9}$$

А волновое уравнение (1.4.8) получается действием этого операторного уравнения на волновую функцию (волновая функция понимается по аналогии с теорией Дирака):

$$\left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m_0 c^2 \beta\right) \Psi = -\frac{C\hbar}{\Delta t m_0^2 c^4} \left(-\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4\right) \Psi. \tag{1.4.10}$$

Это – окончательный результат изложенной выше теории; полученное волновое уравнение не содержит момента времени. Изначально данная теория содержала аномалию, которую мы устранили с помощью регуляризации, и она была нелокальной (нарушающей причинность); нелокальность мы устранили с помощью перенормировки.

Запишем уравнение (1.4.10) с использованием оператора Гамильтона, – в его левой части стоит в точности действие оператора Гамильтона Дирака на волновую функцию:

$$-\frac{C\hbar}{\Delta t m_0^2 c^4}\widehat{H}^2\Psi = \widehat{H}_D\Psi\,. \tag{1.4.11}$$

Временная зависимость в данной теории квантовой механики может быть восстановлена, только если мы учтем, что справедливо уравнение Дирака [2а]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}_D\Psi\,. \tag{1.4.12}$$

Если оно выполняется, то справедливо уравнение в данной теории, содержащее только время

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\Delta t m_0^2 c^4}{C\hbar}\Psi\,. \tag{1.4.13}$$

Уравнение (1.4.13) может быть получено из уравнений (1.4.10) и (1.4.12), поскольку в теории Дирака справедливо уравнение КГФ [2в]:

$$\widehat{H}^2\Psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\,. \tag{1.4.14}$$

Приравнивая временные части (1.4.12) и (1.4.14), согласно уравнению (1.4.11), мы получим уравнение (1.4.13). В данной теории временная и пространственная зависимости волновой функции разделились. Уравнение (1.4.13) записано в шредингероподобном виде, как уравнения Шредингера и Дирака. А уравнение (1.4.10) не может быть записано в шредингероподобном виде, поскольку оно не имеет такого вида, и его невозможно представить в виде уравнения Шредингера [5в]. Это уравнение имеет другую структуру. А значит свободный переход между картинами Шредингера и Гейзенберга в данной теории невозможен. Но если полагаться на Гамильтониан Дирака в правой части (1.4.11), то можно сказать, что частицы, которые описывает данное уравнение и уравнение (1.4.13), имеют спин электрона, т.е. $1/2\,\hbar$. Очевидно, что в уравнении (1.4.13) время t может изменяться только в диапазоне $t\in[t_1,t_2]$, чтобы теория была самосогласованной.

Определим безразмерную постоянную C. Для этого заметим, что поскольку функция Лагранжа в классической механике не зависит от интервала времени движения, а зависит только от скорости частицы, действие S в классической механике, определяющееся произведением $L\Delta t$, должно зависеть от собственного интервала времени движения $\Delta t'$, который является Лоренцевым инвариантом, потому что оно есть инвариант по отношению к преобразованиям Лоренца. Тогда в квантовой механике постоянная C должна быть пропорциональна этому собственному времени, т.е.

$$C \sim \Delta t'\,. \tag{1.4.15}$$

Также действие в классической теории пропорционально массе частицы, поэтому в квантовой механике постоянная C также должна быть пропорциональна массе частицы

$$C \sim m_0 . \tag{1.4.16}$$

Далее пользуясь размерным анализом, в квантовой теории можно составить одну и только одну простейшую безразмерную комбинацию вида:

$$C = \Delta t' \frac{m_0 c^2}{\hbar} . \tag{1.4.17}$$

Тогда действие в квантовой механике примет вид:

$$S = m_0 c^2 \Delta t' , \tag{1.4.18}$$

как видно, оно является Лоренцевым инвариантом. Однако в классической механике функция Лагранжа свободного движения [4б] имеет вид:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} , \tag{1.4.19}$$

где v – скорость частицы, а относительный интервал времени выражается через собственный интервал времени так [4в]:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{1.4.20}$$

Интервал времени в левой части равенства (1.4.3), как и оператор Лагранжа, преобразуется при преобразовании инерциальной системы отсчета (ИСО) по правилу $\Delta t' \to \Delta t$. Это преобразование соответствует переходу из собственной ИСО, в которой мы рассматриваем квантовую частицу, в относительную систему отсчета, в которой частица движется вместе со своей декартовой системой координат. Оператор Лагранжа в этом выражении тоже преобразуется при изменении ИСО, но так, чтобы правая часть равенства (1.4.3) оставалась неизменной. Действие в классической теории, как мы уже упомянули, есть

$$S = L\Delta t . \tag{1.4.21}$$

Подставляя (1.4.19) и (1.4.20) в (1.4.21), получим

$$S = -m_0 c^2 \Delta t' , \tag{1.4.22}$$

и это должен быть Лоренцевый инвариант. Используя соответствие квантовой и классической теорий, мы должны заявить, что выражение (1.4.22) применимо и в квантовой теории; оно отличается от ранее полученного нами выражения с помощью понимания пропорциональности и размерного анализа (1.4.18) только знаком. Мы установили действие в квантовой теории:

$$S = C\hbar . \tag{1.4.23}$$

Тогда из (1.4.22) и (1.4.23) находим безразмерную постоянную:

$$C = -\frac{m_0 c^2}{\hbar}\Delta t' . \tag{1.4.24}$$

И теперь везде в квантовых уравнениях мы должны положить относительный интервал времени равным собственному, инвариантному, поскольку разница между относительным и собственным интервалами времени есть только в классической теории:

$$\Delta t := \Delta t' . \tag{1.4.25}$$

Интервал времени в правой части (1.4.4) не изменяется при преобразованиях ИСО.

Тогда $\Delta t'$ сократится везде в квантовых уравнениях и формулах, и мы исключим его:

$$\frac{1}{m_0 c^2}\left(-\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4\right)\Psi_0 = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi_0 + m_0 c^2 \beta\Psi_0 , \tag{1.4.26}$$

$$\frac{1}{m_0 c^2}\widehat{H}^2\Psi_0 = \widehat{H}_D\Psi_0 , \tag{1.4.27}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = m_0 c^2\Psi . \tag{1.4.28}$$

Решение уравнения (1.4.28) имеет простой вид

$$\Psi = C_1(\mathbf{r})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0 c^2 t\right). \tag{1.4.29}$$

Отсюда очевидно, что функцией, зависящей только от пространственных координат в решении (1.4.29) должна быть волновая функция, которая является решением уравнения (1.4.26)/(1.4.27), т.е. $\Psi_0(\mathbf{r})$. Тогда мы получим решение (1.4.29) в виде

$$\Psi = \Psi_0(\mathbf{r})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0 c^2 t\right). \tag{1.4.30}$$

Волновая функция свободного движения в данной теории (1.4.30) с полной пространственно-временной зависимостью является окончательным решением задачи свободного движения.

5. Уравнение непрерывности

Если домножить уравнение (1.4.28) слева на эрмитово-сопряженную волновую функцию, а эрмитово-сопряженное уравнение домножить справа на волновую функцию (волновые функции понимаются по аналогии с теорией Дирака) и вычесть из первого уравнения второе, то приходим к уравнению:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 , \tag{1.5.1}$$

где

$$\rho = \Psi^{\dagger}\Psi\,. \tag{1.5.2}$$

То есть в свободной теории плотность вероятности постоянна. Если домножить уравнение (1.4.26) слева на эрмитово-сопряженную волновую функцию, а эрмитово-сопряженное уравнение домножить справа на волновую функцию (волновые функции понимаются по аналогии с теорией Дирака) и вычесть из второго уравнения первое, то приходим к уравнению

$$\nabla\cdot\left(im_0c^2\Psi_0^{\dagger}\boldsymbol{\alpha}\Psi_0-\hbar c\left[\Psi_0^{\dagger}\nabla\Psi_0-\nabla\Psi_0^{\dagger}\cdot\Psi_0\right]\right)=0 \tag{1.5.3}$$

или

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=0\,, \tag{1.5.4}$$

где

$$\mathbf{j}=im_0c^2\Psi_0^{\dagger}\boldsymbol{\alpha}\Psi_0-\hbar c\left[\Psi_0^{\dagger}\nabla\Psi_0-\nabla\Psi_0^{\dagger}\cdot\Psi_0\right]. \tag{1.5.5}$$

То есть векторное поле плотности тока вероятности $\mathbf{j}$ является соленоидальным или вихревым. Это означает, что существует такое поле $\mathbf{G}$, что

$$\nabla\times\mathbf{G}=im_0c^2\Psi_0^{\dagger}\boldsymbol{\alpha}\Psi_0-\hbar c\left[\Psi_0^{\dagger}\nabla\Psi_0-\nabla\Psi_0^{\dagger}\cdot\Psi_0\right]. \tag{1.5.6}$$

Как видно из (1.5.1) и (1.5.2), плотность вероятности является строго положительно определенной, – она совпадает с плотностью вероятности в теории Дирака. А плотность тока вероятности является комбинацией с точностью до постоянного множителя плотности тока вероятности в теории Дирака (первое слагаемое) и с точностью до знака и постоянного множителя плотности тока вероятности в теории Клейна-Гордона-Фока (второе слагаемое). Эти величины – плотность вероятности и вектор плотности тока вероятности в данной теории не образуют 4-вектора, как видно из их структуры. Получается, что данная теория – это есть “полуторная” комбинация теорий КГФ и Дирака.

II. Подход уравнения (1.2.9)

Теорию, вывод которой был рассмотрен в Главе I в Разделах 1 – 5, можно получить и другим способом. Выше мы использовали преобразование Лежандра в механике одной частицы, чтобы получить волновое уравнение, которое является альтернативной версией стандартной квантовой механики, но, оказывается, есть и другой подход, приводящий к тому же самому результату.

1. Нулевая регуляризация

Возьмем уравнение (1.2.9) из предыдущего изложения, в котором оператором Гамильтона является Гамильтониан Дирака, и разрешим его относительно всех элементов матрицы 4×4 оператора Лагранжа; при этом мы считаем, что все операторы являются линейными и зависят только от оператора канонического импульса и констант. Для этого

нам понадобятся понятие обратной матрицы и определителя матрицы. В результате мы получим оператор Лагранжа в виде

$$\hat{L}=\frac{1}{\hat{p}^2+m_0^2c^2}\begin{pmatrix} -m_0^3c^4 & 0 & -m_0^2c^3\hat{p}_z & m_0^2c^3\left(i\hat{p}_y-\hat{p}_x\right) \\ 0 & -m_0^3c^4 & -m_0^2c^3\left(i\hat{p}_y+\hat{p}_x\right) & m_0^2c^3\hat{p}_z \\ -m_0^2c^3\hat{p}_z & m_0^2c^3\left(i\hat{p}_y-\hat{p}_x\right) & m_0^3c^4 & 0 \\ -m_0^2c^3\left(i\hat{p}_y+\hat{p}_x\right) & m_0^2c^3\hat{p}_z & 0 & m_0^3c^4 \end{pmatrix}$$

. (2.1.1)

Лагранжиан (2.1.1) можно записать кратко в виде

$$\hat{L}=\frac{c^2}{\hat{H}^2}\left(-m_0^2c^3\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}-m_0^3c^4\beta\right). \tag{2.1.2}$$

Далее используя уравнение (1.4.5) и выражение для постоянной C (1.4.24), получим операторное уравнение

$$\hat{L}=-Im_0c^2, \tag{2.1.3}$$

где в правой части действие оператора сводится просто к умножению на число. Операторное уравнение (2.1.3) записано в собственной ИСО, поэтому интервалы времени, будучи собственными, полностью сократились в левой и правой частях этого уравнения, и мы получили соотношение, выглядящее “неправильно”, где оператор Лагранжа $\hat{L}$, который изменяется при преобразовании ИСО, равен инварианту – энергии покоя, которая не изменяется. Это кажущееся противоречие не должно вводить нас в заблуждение. Подействуем на всё уравнение (2.1.3) квадратом оператора Гамильтона $\hat{H}^2$, тогда получим операторное уравнение

$$\hat{L}\hat{H}^2=-Im_0c^2\hat{H}^2. \tag{2.1.4}$$

Подставляя в него Лагранжиан (2.1.2) и явное выражение (1.2.5) и упрощая, получим уравнение

$$m_0c^2\left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi_0+m_0c^2\beta\Psi_0\right)=\left(-\hbar^2c^2\Delta+m_0^2c^4\right)\Psi_0 \tag{2.1.5}$$

или

$$m_0c^2\hat{H}_D\Psi_0=\hat{H}^2\Psi_0. \tag{2.1.6}$$

Это есть в точности уравнение (1.4.26)/(1.4.27), и мы получили его без регуляризации, воспользовавшись только перенормировкой нелокального оператора Лагранжа (2.1.2). Исходя из (2.1.5)/(2.1.6) можно получить уравнение (1.4.28), как мы это и сделали.

2. Квадрированная теория

Рассмотрим Лоренц-инвариантный подход к преобразованию Лежандра в механике одной частицы с учетом регуляризации (1.3.1), записав его в виде

$$\hat{L} = -g_{\mu\nu}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} + \hat{a}_{\mathrm{LI}}, \tag{2.2.1}$$

где $\hat{p}^{\mu} = \left(\frac{\widehat{H}}{c}, \hat{\mathbf{p}}\right)$, каждый греческий индекс пробегает независимо значения $(0,1,2,3)$ и

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Легко увидеть, что выражение (2.2.1) является Лоренц-неинвариантным вплоть до множителя dt и интегрирования, потому что в классической теории

$$dx^{\mu} = v^{\mu}dt, \tag{2.2.3}$$

где v^{μ} – обычная скорость (не 4-скорость), и

$$dS = Ldt. \tag{2.2.4}$$

Оператор скорости имеет вид

$$\hat{v}^{\mu} = \left(Ic, \hat{\mathbf{v}}\right). \tag{2.2.5}$$

А регуляризационный оператор $\hat{a}_{\mathrm{LI}}$ также как и оператор Лагранжа Лоренц-неинвариантен вплоть до множителя dt и интегрирования, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \hat{a}_{\mathrm{LI}}dt = \mathrm{inv}. \tag{2.2.6}$$

Вначале рассмотрим нерегуляризованную теорию и выясним, нужна ли ей регуляризация. Произведем квадрирование преобразования Лежандра в форме (2.2.1) при условии $\hat{a}_{\mathrm{LI}} = 0$, тогда получим:

$$\hat{L}^2 + g_{\mu\nu}\left(\hat{L}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} + \hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{L}\right) + g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho} = 0. \tag{2.2.7}$$

Используя явный вид Лагранжиана (2.2.1) при этом условии, вычислим произведение

$$\hat{L}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} = -g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu},$$

и произведение

$$\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{L} = -g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}.$$

Отсюда найдем антикоммутатор

$$\left\{\hat{L}, \hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\right\} = -g_{\sigma\rho}\left(\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} + \hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\right). \tag{2.2.8}$$

Используя только что найденный антикоммутатор, перепишем уравнение (2.2.7):

$$\hat{L}^2 - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} = 0. \tag{2.2.9}$$

Чтобы понизить степень оператора Лагранжа $\hat{L}$ воспользуемся основным уравнением в данном подходе (1.2.9), тогда из (2.2.9) получим

$$\hat{L} + \frac{1}{m_0^2 c^4} g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{H}_D = 0. \tag{2.2.10}$$

Из уравнений (2.2.9) и (2.2.10) можно построить строго Лоренц-инвариантные уравнения путем домножения (2.2.9) на dt^2 и интегрирования и (2.2.10) на dt и интегрирования. Покажем это. Уравнение (2.2.9) преобразуется:

$$\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}dt\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}dt' - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1}\hat{p}^{\sigma}d\hat{x}^{\rho}\hat{p}^{\mu}d\hat{x}^{\nu} = 0, \tag{2.2.11}$$

где $d\hat{x}^{\mu} = \hat{v}^{\mu}dt$, что есть операторный Лоренцевый 4-вектор и $\hat{p}^{\mu}$ – операторный Лоренцевый 4-вектор, а интегрирования во втором слагаемом производятся по операторнозначным траекториям Γ_1 и Γ_2 (мировым линиям), и под знаком первого интеграла во втором слагаемом стоят все операторы. Уравнение (2.2.10) преобразуется:

$$\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}dt + \frac{1}{m_0 c^2}g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\int_{\Gamma}\hat{p}^{\sigma}d\hat{x}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{u}^{\nu} = 0, \tag{2.2.12}$$

где во втором слагаемом под знаком интеграла стоят все операторы, и мы воспользовались уравнением, следующим из классического уравнения [4б, 4г, 4д]:

$$Ev^{\mu} = m_0 c^2 u^{\mu}, \tag{2.2.13}$$

где E – релятивистская энергия частицы, u^{μ} – 4-скорость, умноженная на c:

$$\hat{v}^{\mu}\hat{H} = m_0 c^2 \hat{u}^{\mu}, \tag{2.2.14}$$

где $\hat{H} \coloneqq \hat{H}_D$, и интегрирование во втором слагаемом (2.2.12) производится по операторнозначной траектории Γ (мировой линии). Примем именно такой порядок операторов в левой части (2.2.14). Как видно, уравнения (2.2.11) и (2.2.12) являются Лоренц-инвариантными. Таким образом, уравнения (2.2.9) и (2.2.10) одинаково приводят

к Лоренц-инвариантным операторным уравнениям, поэтому их стоит рассматривать, – они с точностью до тождественного преобразования – Лоренц-инвариантные уравнения.

Подставим в уравнение (2.2.11) выражение (1.4.4) с константой (1.4.24) и проинтегрируем по времени, написав интегралы по операторнозначным траекториям (мировым линиям) Γ_1 и Γ_2 через операторы скорости и интегрирования по времени, тогда, поскольку

$$g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} = Im_0^2c^4, \tag{2.2.15}$$

мы получим, что это уравнение выполняется тождественно. Соотношение (2.2.15) является Лоренц-инвариантным, поскольку в его левой части можно образовать инвариант так же, как мы это сделали для уравнения (2.2.9), а в правой части тогда будет двойной интеграл по собственному времени от константы, что есть Лоренцевый-инвариант. Если подставить выражение (2.2.15) в уравнение (2.2.10), то мы получим

$$\hat{L} = -\widehat{H}_D, \tag{2.2.16}$$

что является некорректным, поскольку не согласуется ни с уравнением (2.2.1) ни с уравнением (1.2.9). Если утверждать, что уравнение (1.2.9) выполняется, то действуя на (2.2.16) справа оператором Гамильтона Дирака, мы получим в правой части квадрат Гамильтониана, взятый с обратным знаком, и чтобы выполнялось уравнение (1.2.9) нам тогда необходимо потребовать выполнение условия:

$$\hat{p}^2 = 0, \tag{2.2.17}$$

что является неверным. Таким образом, эта релятивистская теория содержит аномалию и поэтому нуждается в регуляризации.

3. Регуляризация

Попытаемся регуляризовать теорию, построенную в Главе II Разделе 2. Для этого выразим регуляризатор из (2.2.1) и возведем всё соотношение в квадрат. Тогда получим:

$$\left(\hat{L} + g_{\mu\nu}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\right)\left(\hat{L} + g_{\mu\nu}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\right) = \hat{a}_{\mathrm{LI}}^2. \tag{2.3.1}$$

Аккуратно раскроем скобки, сохраняя неизменным порядок операторов:

$$\hat{L}^2 + g_{\mu\nu}\left(\hat{L}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} + \hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{L}\right) + g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho} = \hat{a}_{\mathrm{LI}}^2. \tag{2.3.2}$$

Найдем произведение

$$\hat{L}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} = -g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu} + \hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}$$

и произведение

$$\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{L} = -g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho} + \hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}.$$

Составим из них антикоммутатор

$$\left\{\hat{L},\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\right\}=-g_{\sigma\rho}\left(\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\right)+\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\right). \qquad (2.3.3)$$

Теперь используем (2.3.3) в уравнении второго порядка (2.3.2):

$$\hat{L}^{2}-g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+g_{\mu\nu}\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\right)=\hat{a}_{\mathrm{LI}}^{2}. \qquad (2.3.4)$$

Используем (2.2.15) в (2.3.4), тогда это уравнение упростится до

$$\hat{L}^{2}-Im_{0}^{2}c^{4}+g_{\mu\nu}\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\right)=\hat{a}_{\mathrm{LI}}^{2}. \qquad (2.3.5)$$

Применим к (2.3.5) основное уравнение данной теории (1.2.9), тогда степень 2 Лагранжиана понизится до первой

$$\hat{L}+\widehat{H}_{D}-\frac{1}{m_{0}^{2}c^{4}}g_{\mu\nu}\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\right)\widehat{H}_{D}=-\frac{1}{m_{0}^{2}c^{4}}\hat{a}_{\mathrm{LI}}^{2}\widehat{H}_{D}. \qquad (2.3.6)$$

Применим к этому уравнению уравнение (2.2.1) в правой части

$$\hat{L}+\widehat{H}_{D}-\frac{1}{m_{0}^{2}c^{4}}g_{\mu\nu}\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\right)\widehat{H}_{D}=-\frac{1}{m_{0}^{2}c^{4}}\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{L}\widehat{H}_{D}+\right.$$
$$\left.+g_{\mu\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\widehat{H}_{D}\right),$$

и еще раз уравнение (1.2.9) к произведению оператора Лагранжа на оператор Гамильтона Дирака

$$\hat{L}+\widehat{H}_{D}-\frac{1}{m_{0}^{2}c^{4}}g_{\mu\nu}\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\right)\widehat{H}_{D}=\hat{a}_{\mathrm{LI}}\left(I-\frac{1}{m_{0}^{2}c^{4}}g_{\mu\nu}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\widehat{H}_{D}\right). \qquad (2.3.7)$$

Комбинируя уравнение (2.3.7), полученное с помощью уравнения (1.2.9) и уравнения (2.2.1), с уравнением первого порядка (2.2.1), мы получим систему уравнений относительно всех компонент матрицы, во-первых, регуляризационного оператора $\hat{a}_{\mathrm{LI}}$, а, во-вторых, всех компонент матрицы оператора Лагранжа $\hat{L}$, учитывая, что все эти операторы линейны и зависят только от оператора канонического импульса $\hat{\mathbf{p}}$ и от констант. Эти уравнения в этой системе уравнений дают, и это подтверждается непосредственным компьютерным расчетом, что данная регуляризованная теория, записанная в общих обозначениях, которая легко приводится к явно Лоренц-инвариантному виду, тождественна теории, развитой в Главе I Разделах 3, 4 и 5. То есть решение, которое можно получить из (2.2.1) и (2.3.7), будет полностью совпадать с оператором Лагранжа, полученным в теории с нулевой регуляризацией $\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}=0\right)$, (2.1.2) и с регуляризационным оператором и оператором Лагранжа, полученными в регуляризованной теории в Главе I (1.3.30) и (1.3.31). Таким образом, регуляризованное

преобразование Лежандра в механике одной частицы, которое можно рассматривать как классическое преобразование Лежандра, и уравнение (1.2.8) классической механики полностью совместны в случае квантовой механики, они дают одинаковые результаты и, таким образом, приводят к одной теории.

Домножим уравнение (2.3.7) на квадрат энергии покоя и, согласно частной формуле (2.2.15), восстановим операторный коэффициент перед Гамильтонианом так, как это сделано в уравнении (2.2.10):

$$m_0^2c^4\hat{L}+g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\hat{p}^{\sigma}\hat{v}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\widehat{H}_D-g_{\mu\nu}\left(\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\right)\widehat{H}_D= \tag{2.3.8}$$

$$=\hat{a}_{\mathrm{LI}}\left(Im_0^2c^4-g_{\mu\nu}\hat{p}^{\mu}\hat{v}^{\nu}\widehat{H}_D\right).$$

Теперь мы можем восстановить Лоренц-инвариантное уравнение на основании (2.3.8):

$$m_0^2c^4\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}dt+m_0c^2g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}\int_{\Gamma}\hat{p}^{\sigma}d\hat{x}^{\rho}\hat{p}^{\mu}\hat{u}^{\nu}-g_{\mu\nu}\left(m_0c^2\int_{t_1}^{t_2}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{u}^{\nu}dt+\int_{\Gamma}\hat{p}^{\mu}d\hat{x}^{\nu}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\widehat{H}_D\right)= \tag{2.3.9}$$

$$=m_0c^2\left(m_0c^2\int_{t_1}^{t_2}\hat{a}_{\mathrm{LI}}dt-g_{\mu\nu}\int_{t_1}^{t_2}\hat{a}_{\mathrm{LI}}\hat{p}^{\mu}\hat{u}^{\nu}dt\right).$$

В уравнении (2.3.9) каждое слагаемое, где стоит интеграл, интегрируется полностью, т.е. все операторы входят в подынтегральную операторнозначную функцию, и произведение $\hat{a}_{\mathrm{LI}}\widehat{H}_D$ с учетом интегрирования по операторнозначной траектории (мировой линии) является Лоренц-инвариантным, потому что Гамильтониан преобразуется при преобразовании ИСО так же, как время. Уравнение (2.3.9) является Лоренц-инвариантным и получено с помощью тождественных преобразований из уравнения (2.3.7), поэтому и уравнение (2.3.7) является тождественно Лоренц-инвариантным. Таким образом, мы приходим к пониманию, что оператор Лагранжа (2.1.2) или (1.3.31) с учетом (1.3.30), который мы искали с помощью всей этой теории и который можно кратко записать так:

$$\hat{L}=-\frac{m_0^2c^4}{\widehat{H}^2}\widehat{H}_D, \tag{2.3.10}$$

является правильным – он с точностью до интегрирования по времени Лоренц-инвариантен, как и должно быть. Таким образом, цель данного Раздела была – явно доказать Лоренц-инвариантность предлагаемой теории, что и было сделано. А явно Лоренц-инвариантное волновое уравнение, – результат развитой выше теории, записанное в произвольной СО, имеет вид

$$m_0c^2\widehat{H}_D\Psi_x=\frac{\Delta t'}{\Delta t}\widehat{H}^2\Psi_x, \tag{2.3.11}$$

где $\Psi_x=\Psi_x(\mathbf{r})$, $\Delta t'=t_2'-t_1'$ и время в этой теории может изменяться только в диапазоне $t\in[t_1,t_2]$, чтобы теория была самосогласованной.

4. Минимальное взаимодействие

Автором была проведена проверка этой теории с минимальным взаимодействием, и было установлено, что прямой подход, т.е. такой, какой представлен в Главе I данной статьи не позволяет получить конечный результат – волновое уравнение. Затруднения возникают в промежуточных вычислениях – получается очень сложная, “запутанная” система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно элементов матрицы регуляризационного оператора.

Однако можно ожидать, что теория с минимальным взаимодействием может быть получена ‘обычным’ образом, т.е. с помощью замены оператора 4-градиента на калибровочно-ковариантный 4-дифференциальный оператор в свободной теории [2г, 2д] следующим образом:

$$i\hbar c^2 m_0 \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0\left(\mathbf{r},t\right) \right)^2 \Psi_t , \tag{2.4.1}$$

$$m_0 c^2 \left(-c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) \right) + m_0 c^2 \beta + IeA_0\left(\mathbf{r},t\right) \right) \Psi_x = \tag{2.4.2}$$

$$= \left(c^2 \left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) \right)^2 + m_0^2 c^4 \right) \Psi_x .$$

Здесь волновые функции в общем виде имеют зависимости:

$$\Psi_t = \Psi_t\left(\mathbf{r},t\right), \tag{2.4.3}$$

$$\Psi_x = \Psi_x\left(\mathbf{r},t\right). \tag{2.4.4}$$

То есть в случае минимального взаимодействия в общем виде переменные у волновых функций не разделяются, – зависимость от координат есть у волновой функции, несущей временную зависимость вследствие пространственной зависимости в общем виде четвертой компоненты 4-вектор-потенциала, а зависимость от времени есть у волновой функции, несущей пространственную зависимость вследствие временной зависимости в общем виде 3-вектор-потенциала. Уравнение (2.4.1) справедливо, если выполняется уравнение Дирака (1.4.12), в котором Гамильтониан теперь имеет вид

$$\widehat{H}_D = -c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) \right) + m_0 c^2 \beta + IeA_0\left(\mathbf{r},t\right). \tag{2.4.5}$$

Полная волновая функция тогда должна иметь вид

$$\Psi\left(\mathbf{r},t\right) = \Psi_x\left(\mathbf{r},t\right)\Psi_t\left(\mathbf{r},t\right). \tag{2.4.6}$$

Заключение

В данной работе была рассмотрена одна из теорий квантового преобразования Лежандра в механике одной частицы, проведена регуляризация и перенормировка и получено волновое уравнение для частиц, имеющих спин $1/2\hbar$, т.е. для фермионов,

которое подлежит экспериментальной проверке. На основании полученного результата получены элементы уравнения непрерывности в случае, когда справедливо уравнение Дирака и в случае, когда нет. В этих элементах плотность вероятности является строго положительно определенной, и эта величина и вектор плотности тока вероятности не образуют единого 4-вектора. Эта ситуация аналогична классической электродинамике, где для вектора Умова-Пойтинга, что есть плотность потока импульса, и скаляра плотности энергии существует уравнение непрерывности, хотя эти величины не образуют единого 4-вектора.

Также рассмотрен альтернативный подход к выводу волнового уравнения с использованием оператора Лагранжа, который фигурирует в преобразовании Лежандра, а в этом подходе используется уравнение, связывающее оператор Лагранжа и оператор Гамильтона, которое является основным в данной теории. Это уравнение, как было показано, предоставляет прямой и наиболее быстрый вывод полученных в данной работе результатов.

Было выяснено, что преобразование Лежандра в механике одной частицы можно записать в виде, который позволяет представить его в явно Лоренц-инвариантном виде.

Поскольку данная свободная теория оказалась непростой, а дорога, ведущая к ней – ухабистой, ожидается, что свободные и взаимодействующие теории, опирающиеся на интегральные формы преобразования Лежандра в механике одной частицы, будут еще менее естественными и еще хуже, т.е. менее здоровыми.

Благодарности

Автор очень благодарен Ольге Алексеевне Волковой, специалисту по образованию за помощь в исследовательской работе и написании настоящей рукописи.

Ссылки

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. I. Механика. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007., с. 172, 11.
2. А.С. Давыдов Квантовая механика: учеб. пособие. – 3 изд., стереотипное. – СПб.: БВХ-Петербург, 2011., с. 266, 265, 237, 256, 293.
3. Дж.Д. Бьёркен, С.Д. Дрелл Релятивистская квантовая механика. – М.: Наука, 1978., с. 14.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003., с. 48, 46, 28, 41, 42.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Курс теоретической физики: Учеб. пособие для вузов. В 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория)/ Под ред. Л.П. Питаевского. – 6-е изд. испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008., с. 61, 38, 75.