

SUITES DE NOMBRES PREMIERS CONSECUTIFS ET ORDRE DE BENFORD

René-Louis Clerc (6 mars 2026) (*)

-ABSTRACT

SEQUENCES OF CONSECUTIVE PRIMES AND BENFORD'S ORDER

Prime numbers are essential in various areas of cybersecurity, from encrypted messages to secure payments, HTTPS websites, and RSA cryptography techniques.

Numerous computational and theoretical studies on these “unbreakable” numbers in arithmetic ((+)) are regularly published.

Here we continue the article [15] by considering sequences of consecutive primes of the type considered then, primes with a certain initial digit, primes without a certain digit, primes with a certain digit, primes with a certain last digit, primes with a certain digit in a certain position, etc.

We will calculate the maximum number of consecutive elements in such sequences, as well as the probabilities of obtaining a certain consecutive number from one of these primes. We will also seek to determine whether there is a possible order for the maximum lengths of sequences of such primes with reference to these various digits, and in which cases this may be a Benford-type order (inverse natural order of integers).

We will conclude with some results concerning the maximum differences between any consecutive primes or those possessing a certain property.

- Mathematics Subject Classification-MS2020: 11A41, 11N05, 68W30.

- Keywords: prime numbers, distribution of prime numbers, Benford law's, prime gaps, numerical experiments with prime numbers.

- INTRODUCTION

Les nombres premiers sont essentiels en particulier dans divers domaines de la cybersécurité, des messages chiffrés au paiement sécurisé en passant par les sites en HTTPS ou les techniques RSA de la cryptographie.

De multiples réflexions calculatoires ou théoriques sur ces *incassables* de l'arithmétique ((+)) sont régulièrement publiées.

Nous poursuivons ici l'article [15] en considérant les suites de premiers consécutifs du type de ceux envisagés alors, premiers avec un certain chiffre initial, premiers sans un certain chiffre, premiers avec obligatoirement un certain chiffre, premiers avec un certain dernier chiffre, premiers ayant un certain chiffre dans une certaine position, ...

Nous calculerons les nombres maximums d'éléments consécutifs de telles suites mais aussi les probabilités pour obtenir un certain consécutif de l'un de ces premiers; nous chercherons aussi à déterminer s'il existe un éventuel ordre pour les longueurs maximales des suites de tels premiers en référence à ces divers chiffres, et dans quels cas il peut s'agir d'un ordre de type Benford (ordre naturel inverse des entiers).

Nous terminerons par quelques résultats concernant les écarts maximums entre premiers consécutifs quelconques ou possédant une certaine propriété.

- 1 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS DEBUTANT PAR UN MEME CHIFFRE NON NUL

On s'intéresse ici aux suites de premiers consécutifs débutant par un même chiffre C non nul.

Pour un intervalle donné $[2, M]$, $M = 10^r$, $r > 0$, nous allons déterminer le nombre maximum $n_M(C)$ d'éléments dans de telles suites pour chaque C et classer ces nombres $n_M(C)$; pour tout $n_M(C)$ nous exhiberons le premier terme de la suite de longueur maximale $n_M(C)$ formée des plus petits premiers.

Dans $I(r) = [2, 10^r]$, pour tout $r \geq 6$ un ordre s'établit pour ces $n_M(C)$ et persiste: il s'agit de l'ordre de Benford $O_b (= 1-2-3-4-5-6-7-8-9)$ souvent rencontré dans [15], et qui régissait déjà, en particulier, pour les mêmes intervalles $I(r)$, les nombres de premiers débutant par C.

Nous nous placerons le plus souvent dans $[2, 10^9]$; dans cet intervalle le plus grand premier est proche du milliard (999.999.937) et il est le 50.847.534^{ème} premier, le suivant étant 1.000.000.007.

Dans $I(9)$, on obtient le classement suivant pour les longueurs maximales des suites suivant le C initial
606.028 (1) > 587.252 (2) > 575.795 (3) > 567.480 (4) > 560.981 (5) > 555.949 (6) > 551.318 (7) > 547.572 (8) > 544.501 (9).

Il existe bien sûr plusieurs suites d'une longueur maximale donnée; nous déterminons systématiquement le premier terme de celle constituée des plus petits premiers (on pourra dire par abus la *plus petite suite de longueur maximale*), par exemple la suite de longueur 606.028 formée des plus petits premiers de chiffre initial 1 débute par 10.000.019.

Pour tout C, les premiers termes des telles suites de longueurs maximales précédentes sont, respectivement:

10.000.019, 20.000.003, 30.000.001, 40.000.003, 50.000.017, 60.000.011, 70.000.027, 80.000.023, 90.000.049.

La suite des premiers débutant par 9 par exemple contient les premiers consécutifs suivants
90.000.049, 90.000.059, 90.000.073, 90.000.083, 90.000.089, 90.000.103, 90.000.107, 90.000.109, 90.000.121, 90.000.133, 90.000.149, 90.000.217, 90.000.221, 90.000.233, 90.000.241, 90.000.257, 90.000.269, 90.000.293, 90.000.299, 90.000.301, 90.000.331, 90.000.343, 90.000.373, 90.000.377, ..., 90.170.411, 90.170.429, 90.170.471, ..., 99.999.959, 99.999.971, 99.999.989.

Les longueurs maximales de ces suites de premiers consécutifs sont donc d'autant plus grandes que le chiffre initial de ces premiers est petit.

- PROPRIETE 1 -

Dans $I(r) = [2, 10^r]$, pour tout $r \geq 6$, les nombres maximums $nM(C)$ de termes des suites de premiers consécutifs débutant par $C > 0$ vérifient l'ordre de Benford O_b :

$$nM(1) > nM(2) > nM(3) > nM(4) > nM(5) > nM(6) > nM(7) > nM(8) > nM(9).$$

Si l'on calcule, par exemple, les probabilités d'apparition $\text{proba}(1-C)$ d'un premier débutant par C comme consécutif d'un premier débutant par 1, en restant dans $I(9)$, on obtient

$$\text{proba}(1-1) = 99,99999 \%, \text{proba}(1-2) = 0,00001 \%, \text{proba}(1-C) = 0 \ % \text{ pour tout } C > 2.$$

On aurait aussi, par exemple

$$\text{proba}(2-2) = 99,999995 \ %, \text{proba}(2-3) = 0,000005 \ %, \text{proba}(2-C) = 0 \ % \text{ pour } C = 1 \text{ ou tout } C \in [4, 8],$$

$$\text{proba}(9-9) = 99,999999 \ %, \text{proba}(9-1) = 0,000001 \ %, \text{proba}(9-C) = 0 \ % \text{ pour tout } C \in [2, 8].$$

De manière générale, on aura comme probabilité d'un premier débutant par C non nul, suivi d'un premier consécutif débutant aussi par C, plus de 99 % pour tout C et, par suite, moins de 1 % pour un premier débutant par C suivi d'un premier consécutif débutant par $C + 1$ (ou 10 pour $C = 9$), ainsi que 0 % pour tout autre consécutif.

- PROPRIETE 2 -

Dans $I(r)$, $r \geq 9$, avec une probabilité de plus de 99 %, le consécutif d'un premier débutant par un chiffre positif C est aussi un premier débutant par C.

Dans l'intervalle $I(9)$ les seules 8 paires de consécutifs de type (1-2) sont les suivantes (on pourra les nommer paires 1-2)

(19, 23); (199, 211); (1.999, 2.003); (19.997, 20.011); (199.999, 200.003); (1.999.993, 2.000.003); (19.999.999, 20.000.003); (199.999.991, 200.000.033).

Si l'on va jusqu'à 10^{11} , il y aura 2 paires 1-2 de plus: (1.999.999.973, 2.000.000.011) et (19.999.999.967, 20.000.000.089), soit 10 paires au total, et ainsi de suite.

On pourra appeler ces paires des e-sexy-1-2, e étant l'écart entre les deux premiers de la paire. Les écarts respectifs pour nos 10 e-sexy-1-2 précédents sont 4, 12, 4, 14, 4, 10, 4, 42, 38, 122.

Rappelons un théorème de P. Tchebychev (1850) qui montre que dans un intervalle $[n, 2n]$, $n > 3$, il existe toujours au moins un nombre premier [\(++\)](#).

Il en résulte que dans tout $[10^{m-1}, 10^m[$, $m > 1$, il existe au moins 3 premiers, un entre 10^{m-1} (il débute nécessairement par 1) et $2 \cdot 10^{m-1}$, un entre $2 \cdot 10^{m-1}$ (il peut débiter par 2 ou 3) et $4 \cdot 10^{m-1}$ et un entre $4 \cdot 10^{m-1}$ (il peut débiter par 4,5,6 ou 7) et $8 \cdot 10^{m-1}$ (il y a aussi au moins un premier entre $5 \cdot 10^{m-1}$, qui peut débiter par 5,6,7,8 ou 9, et 10^m).

La probabilité d'un premier débutant par 1 suivi par un premier débutant par 3 étant nulle, on aura très probablement une paire 1-2 dans tout $[10^{m-1}, 10^m[$.

- CONJECTURE 1 -

Dans tout intervalle $[10^{m-1}, 10^m[$, $m > 1$, il y a toujours au moins une paire de type (1-2), ce qui entraîne

l'existence d'une infinité de telles paires de consécutifs.

Pour tout intervalle $[10, 10^m[$, $m > 1$, il existe au moins $m-1$ paires de premiers consécutifs (d'au plus m chiffres) dont le premier élément débute par 1 et le second par 2.

Cette conjecture peut encore se généraliser en remplaçant 1 par $C > 0$ et 2 par $C + 1$:

- CONJECTURE 1' -

Dans tout $[10, 10^m[$, $m > 1$, il existe au moins $m-1$ paires (d'au plus m chiffres) de type $C-C+1$, $C < 9$ (pour $C = 9$, le second élément de la paire dépasse 10^m , par exemple (97, 101) ou (9.973, 10.007)).

On retiendra que les nombres de premiers débutant par un même chiffre C ainsi que les nombres maximaux de premiers consécutifs débutant par un même C suivent l'ordre de Benford en référence à C .

- 2 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS DE TYPE PR DEBUTANT PAR UN MEME CHIFFRE NON NUL

On envisage la même démarche qu'au paragraphe précédent, mais pour des premiers primaires (zeroless primes) que nous notons PR ([14]), c'est-à-dire des premiers dont l'expression décimale (notre seule base utilisée est la base 10) ne contient aucun zéro.

Observons bien qu'ici nous avons une contrainte supplémentaire sur nos premiers: ils ne contiennent jamais de zéro dans leur expression.

Pour tout intervalle $I(r)$, $r \geq 6$, le nombre maximum $\max(1)$ de PR consécutifs débutant par 1 est le plus grand, mais aucun ordre ne se manifeste pour classer les $\max(C)$ en référence à la valeur du chiffre initial C .

Retenons qu'ici, différemment du paragraphe 1, alors que les nombres de PR débutant par C suivent l'ordre de Benford ([15]), les longueurs maximales des suites de tels PR consécutifs ne le suivent pas. Ces suites de PR consécutifs sont, en outre, largement plus courtes que celles du paragraphe précédent; dans $I(9)$, leurs longueurs maximales $\max(C)$ sont respectivement (nous indiquons aussi le plus petit premier terme d'une suite de longueur maximale)

$\max(1) = 76$ (premier terme: 111.155.137),

$\max(2) = 59$ (premier terme: 283.544.113),

$\max(3) = 63$ (premier terme: 3.472.153),

$\max(4) = 58$ (premier terme: 47.874.119),

$\max(5) = 59$ (premier terme: 59.829.131),

$\max(6) = 59$ (premier terme: 68.494.147),

$\max(7) = 59$ (premier terme: 7.545.113),

$\max(8) = 55$ (premier terme: 81.359.321),

$\max(9) = 65$ (premier terme: 95.245.223).

Donnons par exemple la liste des 63 plus petits premiers consécutifs de type PR débutant par 3 dans $I(9)$:

3.472.153, 3.472.169, 3.472.171, 3.472.177, 3.472.211, 3.472.213, 3.472.223, 3.472.229, 3.472.247, 3.472.277, 3.472.289, 3.472.291, 3.472.319, 3.472.321, 3.472.349, 3.472.363, 3.472.367, 3.472.387, 3.472.411, 3.472.423, 3.472.433, 3.472.451, 3.472.453, 3.472.457, 3.472.463, 3.472.493, 3.472.499, 3.472.523, 3.472.531, 3.472.549, 3.472.583, 3.472.591, 3.472.597, 3.472.619, 3.472.627, 3.472.633, 3.472.639, 3.472.643, 3.472.657, 3.472.673, 3.472.717, 3.472.739, 3.472.751, 3.472.757, 3.472.769, 3.472.771, 3.472.787, 3.472.817, 3.472.831, 3.472.853, 3.472.867, 3.472.871, 3.472.883, 3.472.897, 3.472.933, 3.472.943, 3.472.949, 3.472.951, 3.472.957, 3.472.967, 3.472.979, 3.472.993, 3.472.999.

Ces valeurs $\max(C)$ évoluent assez peu, par exemple dans $I(10)$, on obtient

$\max(1) = 79$ (premier terme: 1.571.288.231).

On rappelle ([14]) qu'à côté des premiers primaires (PR), on définit les premiers secondaires (PRS) qui sont les premiers ayant toujours au moins un zéro dans leur expression décimale.

Si l'on calcule les nombres de PR suivi d'un consécutif de type PR (resp. PRS), on obtient dans $I(9)$

$\text{nbPRPR}(10^9) = 22.025.724$, $\text{nbPRPRS}(10^9) = 2.623.594$,

ce qui donne comme probabilités respectives

$\text{proba}(\text{PR-PR}) = 89,36 \%$, $\text{proba}(\text{PR-PRS}) = 10,64 \%$.

Comme plus haut une paire de consécutifs de même type, ici PR-PR (mais sans la contrainte du chiffre initial), est largement plus probable que PR-PRS la probabilité étant légèrement inférieure à 90 %.

On peut observer que de $I(9)$ à $I(11)$ la probabilité de PR-PR décroît lentement de 89,36 % à 88,55 %.

- PROPRIETE 3 -

Dans $I(r)$, $r \geq 9$, avec une probabilité de plus de 88 %, le consécutif d'un premier de type PR est aussi un

PR.

Si maintenant on prend en compte le chiffre initial, en déterminant, dans l'ensemble des seuls PR, les probabilités pour qu'un PR débutant par 1 soit suivi d'un PR débutant par C positif, il vient

$\text{proba}(\text{PR1-PR1}) = 99,9999 \%$,

$\text{proba}(\text{PR1-PR2}) = 7 \cdot 10^{-7}$,

$\text{proba}(\text{PR1-PRC}, C > 2) = 0$.

Pour un PR débutant par 1, suivi d'un PR (ou PRS) débutant aussi par 1, on obtient, toujours dans I(9)

$\text{proba}(\text{PR1-PR1}) = 89,57 \%$,

$\text{proba}(\text{PR1-PRS1}) = 10,43 \%$.

Le plus largement probable est toujours d'avoir un consécutif de même type (sans zéro, ou sans zéro avec un même chiffre initial, ou avec un même chiffre initial); avec un même chiffre initial ou avec un PR de même chiffre initial on dépasse 99 %.

En conclusion de ce paragraphe, si les nombres de premiers de type PR (zeroless primes) débutant par un certain chiffre C, suivent l'ordre de Benford, ce n'est pas le cas pour les nombres maximaux de PR consécutifs débutant par C: ils ne suivent aucun ordre manifeste.

- 3 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS DE TYPE PRS DEBUTANT PAR UN MEME CHIFFRE NON NUL

Nous allons voir qu'ici (contrairement au cas précédent des PR), pour les intervalles I(r), $r \geq 7$, les nombres maximums de PRS consécutifs d'un PRS débutant par un même C suivent l'ordre de Benford comme le faisaient les nombres de PRS débutant par C ([15]).

Dans I(7) ces maximums sont respectivement (on indique pour chaque C le premier terme de la suite de longueur maximale formée des plus petits premiers)

$\text{max}(1) = 8039 (1.000.003)$, $\text{max}(2) = 7651 (2.000.003)$, $\text{max}(3) = 7428 (3.000.017)$; $\text{max}(4) = 7361 (4.000.037)$, $\text{max}(5) = 7162 (5.000.011)$, $\text{max}(6) = 7118 (6.000.011)$, $\text{max}(7) = 7098 (7.000.003)$, $\text{max}(8) = 6935 (8.000.009)$, $\text{max}(9) = 6880 (9.000.011)$;

la liste des premiers commençant par 1 par exemple débute par

1.000.003, 1.000.033, 1.000.037, 1.000.039, 1.000.081, 1.000.099, 1.000.117, 1.000.121, 1.000.133, 1.000.151, 1.000.159, 1.000.171, 1.000.183, 1.000.187, 1.000.193, 1.000.199, 1.000.211, 1.000.213, 1.000.231, ..., 1.110.929, 1.110.931, 1.110.943, ...

Dans I(9) on aura

$\text{max}(1) = 68.830 (10.000.019)$, $\text{max}(2) = 65.930 (20.000.003)$, $\text{max}(3) = 64.481 (30.000.001)$; $\text{max}(4) = 63.451 (40.000.003)$, $\text{max}(5) = 62.593 (50.000.017)$, $\text{max}(6) = 62.072 (60.000.011)$, $\text{max}(7) = 61.470 (70.000.027)$, $\text{max}(8) = 61.237 (80.000.023)$, $\text{max}(9) = 60.754 (90.000.049)$.

On observera aussi que les suites maximales de PRS débutant par un même C sont très nettement plus longues que les suites analogues formées de PR.

- PROPRIETE 4 -

Pour tout $r \geq 7$, dans $I(r) = [2, 10^r]$, les nombres maximums $\text{maxPRS}(C)$ de PRS consécutifs débutant par C positif vérifient l'ordre de Benford O_b :

$\text{maxPRS}(1) > \text{maxPRS}(2) > \text{maxPRS}(3) > \text{maxPRS}(4) > \text{maxPRS}(5) > \text{maxPRS}(6) > \text{maxPRS}(7) > \text{maxPRS}(8) > \text{maxPRS}(9)$.

Si, comme précédemment, on calcule les nombres de PRS suivi d'un consécutif de type PRS (resp. PR), on obtient dans I(9)

$\text{nbPRSPRS}(10^9) = 23.574.623$, $\text{nbPRSPR}(10^9) = 2.623.593$,

ce qui donne comme probabilités

$\text{proba}(\text{PRS-PRS}) = 89,98 \%$, $\text{proba}(\text{PRS-PR}) = 10,02 \%$.

Comme plus haut (paragraphe 1 et 2) une paire de consécutifs de même type, ici PRS-PRS, est largement plus probable que PRS-PR, avec une probabilité de l'ordre de 90 % dès l'intervalle I(9).

Pour I(10) il vient $\text{proba}(\text{PRS-PRS}) = 91,44 \%$,

pour I(11), $\text{proba}(\text{PRS-PRS}) = 92,60 \%$,

et pour I(12), on a $\text{proba}(\text{PRS-PRS}) = 93,56 \%$, ce qui permet de constater que (contrairement à la probabilité PR-PR qui décroît), la probabilité PRS-PRS croît entre I(9) et I(12) de 89,98 % à 93,56 %.

Ces évolutions sont tout à fait en accord avec l'existence d'un M^* ([13]), $M^* = 203.850.433$, tel que pour tout intervalle $[2, M]$, $M > M^*$, les PRS soient en nombre de plus en plus supérieur au nombre de PR (de plus de 6 % pour $M = 10^9$ à plus de 83 % pour $M = 10^{12}$).

Le plus largement probable est toujours d'avoir un consécutif de même type (sans zéro, avec toujours un zéro au moins ou avec un même chiffre initial).

La répartition des premiers ([14]) en PR et PRS montre que les PRS sont à la fois 'plus nombreux' et 'plus respectueux de l'ordre de Benford' que les PR.

- POURQUOI les suites de PR consécutifs débutant par un certain C ne suivent pas l'ordre de Benford comme les analogues formées de premiers ou de PRS ?

On retiendra que les longueurs maximales des suites de PRS (premiers secondaires au sens de [14]) débutant par C suivent l'ordre de Benford mais pas celles analogues construites avec des PR, alors que les nombres de PR ou de PRS débutant par C suivent l'ordre de Benford.

On sait que l'ensemble {PR} est infini d'après le théorème de Maynard ([12]), et d'après ([14]) il en est de même de {PRS}, puisque tout $PR > 11$ engendre toujours au moins un PRS. Mais si ces deux ensembles sont tous les deux infinis, nous avons aussi montré dans [14] que les PR sont plus rares que les PRS (existence d'un M^* rappelé plus haut), ceci expliquant peut-être la différence de comportement entre les suites de PR et celles de PRS.

- 4 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS AVEC UN MEME DERNIER CHIFFRE

On s'intéresse ici aux premiers consécutifs d'un premier se terminant par un certain chiffre D qui appartient nécessairement à {1, 3, 7, 9}.

On sait (paragraphe 10 de [15]) que dans $I(r)$, $r \geq 6$, les nombres de premiers terminés par $D \in \{1,3,7,9\}$ ont une probabilité d'apparition très voisine de $1/4$.

Analysons la terminaison d'un premier consécutif d'un premier terminé par un certain chiffre $D \in \{1,3,7,9\}$.

Par exemple, en se plaçant dans $I(11)$ on peut calculer les nombres de premiers terminés par 1 ayant pour consécutif un premier terminé par 1, respectivement par 3,7,9 (comme 181-191, 211-221, 521-523, 911-919, 941-947):

$$\text{nb}(1-1,10^{11}) = 198.427.749,$$

$$\text{nb}(1-3,10^{11}) = 299.345.638,$$

$$\text{nb}(1-7,10^{11}) = 299.975.746,$$

$$\text{nb}(1-9,10^{11}) = 231.767.997;$$

les probabilités correspondantes sont alors

$$\text{proba}(1-1) = 19,27 \%,$$

$$\text{proba}(1-3) = 29,08 \%,$$

$$\text{proba}(1-7) = 29,14 \%;$$

$$\text{proba}(1-9) = 22,51 \%.$$

(le plus probable consécutif d'un premier terminé par 1 se termine par 7)

On observe ainsi qu'il y a seulement environ 19 % de chances qu'un premier terminé par 1 ait un premier consécutif lui-même terminé par 1 et 81 % de chances que ce dernier soit terminé par 3, 7 ou 9.

Si l'on fait les calculs dans $I(12)$ on obtient

$$\text{proba}(1-1) = 19,65 \%,$$

$$\text{proba}(1-3) = 28,78 \%,$$

$$\text{proba}(1-7) = 28,76 \%,$$

$$\text{proba}(1-9) = 22,81 \%.$$

On pourra noter que de $I(9)$ à $I(12)$, $\text{proba}(1-1)$ et $\text{proba}(1-9)$ croissent alors que $\text{proba}(1-3)$ et $\text{proba}(1-7)$ décroissent, la variation étant légèrement supérieure à 1 %.

On observe la même phénoménologie pour les consécutifs des premiers terminés par 3, 7 ou 9 (dans $I(11)$):

$$\text{proba}(3-3) = 18,79 \%,$$

$$\text{proba}(3-1) = 24,35 \%,$$

$$\text{proba}(3-7) = 27,71 \%,$$

$$\text{proba}(3-9) = 29,14 \%;$$

(le plus probable consécutif d'un premier terminé par 3 se termine par 9)

ou encore

$$\text{proba}(7-7) = 18,79 \%,$$

$$\text{proba}(7-1) = 25,41 \%,$$

$$\text{proba}(7-3) = 26,72 \%,$$

$\text{proba}(7-9) = 29,08 \%$;

(le plus probable consécutif d'un premier terminé par 7 se termine par 9)

et enfin

$\text{proba}(9-9) = 19,27 \%$,

$\text{proba}(9-1) = 30,96 \%$,

$\text{proba}(9-3) = 25,41 \%$,

$\text{proba}(9-7) = 24,35 \%$.

(le plus probable consécutif d'un premier terminé par 9 se termine par 1)

Les situations les plus probables sont donc:

$xx1-xx7$, $xx3-xx9$, $xx7-xx9$, $xx9-xx1$;

on remarquera ainsi que le plus probable comme consécutif d'un xxd pour tout d n'est jamais un premier terminé par d , ni par 3 d'ailleurs.

Finalement, pour des intervalles $I(r)$, $r \geq 3$, un premier terminé par d est suivi par un premier terminé lui-même par d dans moins de 20 % des cas et donc dans plus de 80 % des cas il est suivi par un premier NON terminé par le même d (dans $I(2)$ il n'y a aucun $xxd-xxd$).

- PROPRIETE 5 -

Dans tout intervalle $I(r)$, $r > 2$, étant donné un premier terminé par un chiffre $D \in \{1,3,7,9\}$, son premier consécutif le plus probable n'est jamais lui-même terminé par ce même D .

Ce biais étonnant dans la distribution des premiers consécutifs (on pourrait s'attendre à des probabilités uniformes de $1/4$) a reçu une explication (fondée sur des conjectures de Hardy-Littlewood) par Robert J.Lemke Oliver et Kannan Soundararajan ([10]) qui ont d'ailleurs été les premiers à remarquer cette bizarrerie des nombres premiers.

Bien que, par conséquent, un premier terminé par un certain $D \in \{1,3,7,9\}$ soit assez rarement suivi d'un premier de même chiffre terminal D , des suites de tels premiers existent mais elles sont nettement plus courtes que celles des paragraphes 1 et 3.

Dans $I(9)$, on peut trouver au plus des suites d'environ 10 éléments pour chaque valeur de D ; par ailleurs les maximums des longueurs de ces suites pour les quatre valeurs possibles de D ne suivent aucun ordre manifeste.

On note les 4 plus petits couples de e -sexy d'écart $e = 10$: (181,191); (283,293); (337,347); (139,149).

Si l'on appelle $a1(n)$ le plus petit premier élément d'une suite de n premiers consécutifs terminés par 1, on obtient respectivement

$a1(1) = 11$,

$a1(2) = 181$,

$a1(3) = 4831$,

$a1(4) = 22.501$,

$a1(5) = 216.401$,

$a1(6) = 2.229.971$,

$a1(7) = 3.873.011$,

$a1(8) = 36.539.381$,

$a1(9) = 36.539.311$,

$a1(10) = 196.943.081$.

([A057618](#))

Exemple de liste

$a1(7) = 3.873.011, 3.873.041, 3.873.061, 3.873.071, 3.873.091, 3.873.101, 3.873.151$.

Pour $a3(n)$:

$a3(1) = 3$,

$a3(2) = 283$,

$a3(3) = 6793$,

$a3(4) = 22.963$,

$a3(5) = 752.023$,

$a3(6) = 2.707.163$,

$a3(7) = 44.923.213$,

$a3(8) = 44.923.183$,

$a3(9) = 961.129.823$.

([A057631](#))

Exemple de liste:

$a_3(8) = 44.923.183, 44.923.213, 44.923.223, 44.923.253, 44.923.273, 44.923.283, 44.923.303, 44.923.313.$

Pour $a_7(n)$:

$a_7(1) = 7,$

$a_7(2) = 337,$

$a_7(3) = 1627,$

$a_7(4) = 57.427,$

$a_7(5) = 192.637,$

$a_7(6) = 776.257,$

$a_7(7) = 15.328.637,$

$a_7(8) = 70.275.277,$

$a_7(9) = 244.650.317,$

$a_7(10) = 452.942.837,$

$a_7(11) = 452.942.827.$

([A068150](#))

Exemple de liste

$a_7(6) = 776.257, 776.267, 776.287, 776.317, 776.327, 776.357.$

Et enfin pour $a_9(n)$:

$a_9(1) = 19,$

$a_9(2) = 139,$

$a_9(3) = 3089,$

$a_9(4) = 18.839,$

$a_9(5) = 123.229,$

$a_9(6) = 2.134.519,$

$a_9(7) = 12.130.109,$

$a_9(8) = 23.884.639,$

$a_9(9) = 363.289.219.$

([A057636](#))

Exemple de liste

$a_9(9) = 363.289.219, 363.289.229, 363.289.249, 363.289.259, 363.289.309, 363.289.319, 363.289.349, 363.289.369, 363.289.379.$

- 5 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS PRIVES D'UN CERTAIN CHIFFRE POSITIF OU NUL

On rappelle ([15]) que les nombres de premiers privés d'un certain chiffre S , suivent dans tout $I(r)$, $r \geq 6$, un certain ordre $O_a = (0-8-6-5-4-2-9-7-3-1)$, tout à fait différent de l'ordre de Benford; ceux privés de zéro qui ne sont autres que les PR ([14]), ou *zeroless primes*, sont les plus nombreux, ceux privés de 1 sont les moins nombreux.

Des suites de tels premiers consécutifs existent, même si les longueurs maximales sont assez petites; dans $I(9)$ on obtient au plus une longueur maximale de 76 (entre 31 pour $S = 9$ et 76 pour $S = 0$):

(on indique pour chaque S le premier terme de la suite de longueur maximale formée des plus petits premiers)

$\max(S = 0) = 76, (111.155.137);$

$\max(S = 1) = 32, (530.608.537);$

$\max(S = 2) = 73, (309.597.577);$

$\max(S = 3) = 34, (714.140.417);$

$\max(S = 4) = 68, (219.970.853);$

$\max(S = 5) = 65, (813.601);$

$\max(S = 6) = 67, (199.327.721);$

$\max(S = 7) = 33, (490.508.951);$

$\max(S = 8) = 66, (1.253.909);$

$\max(S = 9) = 31, (222.676.241).$

Le maximum de longueur est obtenu pour les premiers sans 0 (les PR ou *zeroless primes*) et le minimum correspond aux premiers sans 9 (les premiers sans 1 étant en avant-dernière position).

Si l'on se place dans $[2, 4 \cdot 10^9]$, le maximum pour $S = 0$ sera 79 (1.571.288.231) et 75 (3.168.668.303)

pour $S = 2$.

Aucun ordre manifeste ne semble persister ici.

On va s'intéresser, pour tout S , au consécutif d'un premier sans S et déterminer dans $I(9)$ les probabilités pour qu'il soit suivi d'un premier également sans ce même S :

$\text{proba}(S=0-S=0) = 89,36 \%$,

$\text{proba}(S=1-S=1) = 64,47 \%$,

$\text{proba}(S=2-S=2) = 88,43 \%$,

$\text{proba}(S=3-S=3) = 63,76 \%$,

$\text{proba}(S=4-S=4) = 88,21 \%$,

$\text{proba}(S=5-S=5) = 88,21 \%$,

$\text{proba}(S=6-S=6) = 88,28 \%$,

$\text{proba}(S=7-S=7) = 63,91 \%$,

$\text{proba}(S=8-S=8) = 88,75 \%$,

$\text{proba}(S=9-S=9) = 64,98 \%$.

Si l'on se place dans un plus grand intervalle que $I(9)$, ces probabilités ont tendance à décroître légèrement; par exemple $\text{proba}(S=0-S=0)$, qui n'est autre que $\text{proba}(\text{PR}-\text{PR})$ devient $88,94 \%$ dans $I(10)$ et $88,55 \%$ dans $I(11)$, $\text{proba}(S=1-S=1)$ devenant $64,33 \%$ dans $I(10)$ et $64,18 \%$ dans $I(11)$.

On observe essentiellement que le premier consécutif le plus probable (avec au moins 63%) d'un premier privé d'un certain chiffre S dans son expression est un premier privé lui aussi de ce S ; la plus grande de ces probabilités (plus de 89%) correspondant à un PR avec un autre PR comme consécutif ($S = 0$).

Il en résulte aussi qu'un premier sans S suivi d'un premier sans S' ($S' \neq S$) a une probabilité d'apparition strictement inférieure à 50% ; par exemple pour $S = 1$ (en se plaçant dans $I(9)$), le plus probable avec un $S' \neq 1$ est $S' = 0$ avec une probabilité de $44,66 \%$ et seulement $29,02 \%$ pour le moins probable $S' = 9$, tous les autres ayant des probabilités entre 30 et 42% .

On retient encore que le consécutif le plus probable d'un premier d'un certain type (défini ici par la valeur de S) est un premier du même type.

- PROPRIÉTÉ 6 -

Dans tout intervalle $I(r)$, $r > 2$, pour tout chiffre positif ou nul S , le nombre premier consécutif le plus probable d'un nombre premier exprimé sans S est lui aussi privé de S dans son expression décimale.

On pourrait étendre facilement à toute base ...

- 6 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS POSSEDANT TOUJOURS UN CERTAIN CHIFFRE POSITIF OU NUL

On rappelle ([15]) que les nombres de premiers possédant toujours un certain chiffre T , suivent dans tout $I(r)$, $r \geq 6$, un certain ordre $O_a^{-1} = (1-3-7-9-2-4-5-6-8-0)$, inverse du précédent O_a et tout à fait différent de l'ordre de Benford; ceux possédant toujours au moins un zéro qui ne sont autres que nos premiers secondaires PRS ([14]), sont les moins nombreux, les plus nombreux étant ceux possédant toujours au moins un 1 (situation inverse du paragraphe précédent).

Des suites de tels premiers consécutifs existent, avec des longueurs comparables à celles des paragraphes 1 et 3.

On cherche à exhiber le premier terme des plus petites suites de longueur maximale.

Dans $I(9)$ on obtient comme longueurs maximales respectives ($S = 0$ correspond aux PRS):

(on indique pour chaque S le premier terme de la suite de longueur maximale formée des plus petits premiers)

$\max(T = 0) = 601.726$ (debut 100.000.007),

$\max(T = 1) = 606.029$ (debut 9.999.991),

$\max(T = 2) = 587.252$ (debut 20.000.003),

$\max(T = 3) = 575.796$ (debut 30.000.001),

$\max(T = 4) = 567.480$ (debut 40.000.003),

$\max(T = 5) = 64.336$ (debut 5.000.011),

$\max(T = 6) = 63.799$ (debut 6.000.011),

$\max(T = 7) = 63.130$ (debut 6.999.997),

$\max(T = 8) = 62.712$ (debut 8.000.009),

$\max(T = 9) = 69.048$ (debut 8.888.927).

Le maximum de longueur est obtenu pour les premiers avec toujours un 1 et le minimum correspond aux premiers avec toujours un 8. Aucun ordre manifeste ne semble persister ici.

On va s'intéresser au consécutif d'un premier avec toujours T et déterminer dans I(9) les probabilités pour qu'il soit suivi d'un premier s'exprimant également avec toujours au moins un T pour tout T:

$\text{proba}(T=0-T=0) = 89,99 \%$,

$\text{proba}(T=1-T=1) = 83,22 \%$,

$\text{proba}(T=2-T=2) = 91,30 \%$,

$\text{proba}(T=3-T=3) = 82,73 \%$,

$\text{proba}(T=4-T=4) = 91,06 \%$,

$\text{proba}(T=5-T=5) = 91,04 \%$,

$\text{proba}(T=6-T=6) = 91,07 \%$,

$\text{proba}(T=7-T=7) = 82,66 \%$,

$\text{proba}(T=8-T=8) = 91,40 \%$,

$\text{proba}(T=9-T=9) = 83,13 \%$.

On observe essentiellement que le premier consécutif le plus probable (avec au moins 82 %) d'un premier ayant un certain chiffre T dans son expression est un premier ayant aussi T dans son expression.

Pour $T = 2,4,5,6,8$ on a une probabilité supérieure à 91 %, pour les autres elle est supérieure à 82 %, avec 89,99 % pour $T = 0$.

Si l'on se place dans I(10) ces probabilités ont tendance à croître quelque peu, par exemple $\text{proba}(T=9-T=9)$ devient 85,46 % et $\text{proba}(T=0-T=0)$ passe à 91,44 %; cette dernière qui n'est autre que $\text{proba}(\text{PRS}-\text{PRS})$ devient 93,55 % dans I(11).

On retiendra encore que le consécutif le plus probable d'un premier d'un certain type (défini ici par la présence de T dans son expression) est un premier du même type.

- PROPRIÉTÉ 7 -

Dans tout intervalle $I(r)$, $r > 2$, pour tout chiffre positif ou nul T, le nombre premier consécutif le plus probable d'un nombre premier ayant toujours au moins un chiffre T dans son expression possède lui aussi toujours T dans son expression décimale.

En référence à ces deux derniers paragraphes on peut constater

$\text{proba}(\text{sansS}-\text{sansS}) > \text{proba}(\text{sansS}-\text{tjS})$ pour tout S,

$\text{proba}(\text{sansS}-\text{tjS}') > \text{proba}(\text{sansS}-\text{sansS}')$ pour tout S' différent de S.

- 7 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS SANS UN CHIFFRE S ET DEBUTANT PAR UN D NON NUL

On sait ([15]) que les nombres respectifs de ces premiers vérifient l'ordre de Benford en référence au chiffre initial D.

On cherche à exhiber le premier terme des plus petites suites de longueur maximale pour les couples SD. Considérons les suites de premiers sans $S = 1$ et débutant par $D = 2, 3, \dots, 9$.

Dans I(9) les nombres maximums d'éléments vont de 24 à 29.

$a_{ij}(n)$ désignera le plus petit premier débutant une suite de n premiers consécutifs sans un chiffre i et débutant par un chiffre j différent de i.

Cas $S=1$, $D=2$:

$a_{12}(1) = 2$, $a_{12}(2) = 23$, $a_{12}(3) = 229$, $a_{12}(4) = 227$, $a_{12}(5) = 223$, $a_{12}(6) = 2027$, $a_{12}(7) = 2677$, $a_{12}(8) = 20.353$, $a_{12}(9) = 20.347$, $a_{12}(10) = 20.807$, $a_{12}(11) = 20.789$, $a_{12}(12) = 20.773$, $a_{12}(13) = 248.473$, $a_{12}(14) = 263.227$, ..., $a_{12}(24) = 206.795.383$, $a_{12}(25) = 209.497.423$, $a_{12}(26) = 238.736.623$, $a_{12}(27) = 253.760.293$.

La plus longue suite est $a_{12}(27) = 253.760.293$.

Cas $S=1$, $D=3$:

$a_{13}(1) = 3$, $a_{13}(2) = 389$, $a_{13}(3) = 383$, ..., $a_{13}(20) = 33.662.459$, ..., $a_{13}(25) = 35.803.529$.

La plus longue suite est $a_{13}(25) = 35.803.529$.

Cas $S=1$, $D=4$:

$a_{14}(1) = 47$, $a_{14}(2) = 43$, $a_{14}(3) = 443$, ..., $a_{14}(20) = 4.447.529$, ..., $a_{14}(29) = 4.447.423$.

La plus longue suite est $a_{14}(29) = 4.447.423$.

Cas $S=1$, $D=5$

La plus longue suite est $a_{15}(27) = 530.608.609$.

Cas $S=1$, $D=6$

La plus longue suite est $a_{16}(29) = 642.297.233$.

Cas $S=1$, $D=7$

La plus longue suite est $a_{17}(26) = 7.929.637$.

Cas $S=1$, $D=8$

La plus longue suite est $a_{18}(24) = 83.444.293$.

Cas $S=1$, $D=9$

La plus longue suite est $a_{19}(28) = 929.658.253$.

Quelques cas avec $S = 2$

Cas $S=2$, $D=1$:

La plus longue suite est $a_{21}(63) = 1.753.309$

Cas $S=2$, $D=3$:

La plus longue suite est $a_{23}(73) = 309.597.577$

Cas $S=2$, $D=9$:

La plus longue suite est $a_{29}(49) = 9.986.351$

Les autres cas ont un comportement tout à fait similaire

Aucun ordre manifeste ne semble persister ici.

- PROPRIÉTÉ 8 -

Les suites de premiers consécutifs privés d'un même chiffre S et débutant par un même chiffre différent D ont des longueurs maximales assez petites (deux chiffres dans $I(9)$) et aucun ordre ne se manifeste en référence à D .

- 8 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS POSSEDANT TOUJOURS UN CERTAIN CHIFFRE T ET DEBUTANT PAR UN CERTAIN CHIFFRE D NON NUL

On sait ([15]) que les nombres respectifs de ces premiers vérifient l'ordre de Benford en référence au chiffre initial D .

Les suites des cas $D = T$ se réduisent à celles du paragraphe 1 et pour tout T donné, elles seront strictement plus longues que celles avec $D \neq T$.

Le cas $T = 0$ correspond aux PRS du paragraphe 3.

Il existe des suites de tels premiers consécutifs de longueurs très supérieures aux précédentes du paragraphe 7.

Nous donnerons, à titre d'exemple, les résultats complets pour $T = 1$ dans $I(9)$.

On note $b_{ij}(n)$ le plus petit premier débutant une suite de n premiers consécutifs ayant toujours un chiffre i et débutant par un chiffre j ; pour un couple ij , on notera n^* la longueur maximale pour une suite de l'intervalle considéré.

Dans $I(9)$ les n^* et les premiers termes $b_{1j}(n^*)$ pour $j \in [1, 9]$ sont respectivement:

$b_{11}(5.317.482) = 100.000.007$

$b_{12}(520.916) = 210.000.017$,

$b_{13}(510.685) = 310.000.037$,

$b_{14}(503.767) = 409.999.991$,

$b_{15}(498.435) = 510.000.011$,

$b_{16}(493.948) = 609.999.941$,

$b_{17}(490.143) = 710.000.021$,

$b_{18}(487.315) = 810.000.011$,

$b_{19}(485.027) = 910.000.031$.

Il apparaît un ordre de Benford en référence au chiffre j de début pour les premiers ayant toujours un 1 dans leur expression.

Si l'on note $n^*(1j)$ les longueurs maximales correspondant aux suites précédentes on a

$$n^*(11) > n^*(12) > n^*(13) > n^*(14) > n^*(15) > n^*(16) > n^*(17) > n^*(18) > n^*(19).$$

On peut encore dire que parmi les premiers dont l'expression décimale contient toujours un 1, les plus nombreux et donc les plus probables sont ceux qui débutent par 1, puis ceux qui débutent par 2, ...

A condition de se placer dans des intervalles $I(r)$, $r > 6$, on obtient le même type de résultat pour tout autre valeur possible de T (> 1), le $n^*(ii)$ étant toujours le plus grand, les autres suivant l'ordre de Benford (sur les 8 valeurs restantes).

Ainsi, par exemple pour $T = 2$, les plus nombreux sont ceux qui débutent par 2, puis ceux débutant par 1, puis par 3, ...

$n^*(22) > n^*(21) > n^*(23) > n^*(24) > n^*(25) > n^*(26) > n^*(27) > n^*(28) > n^*(29)$,
 les premiers termes correspondants $b_{2j}(n^*)$ étant respectivement dans $I(7)$
 $b_{22}(67.883) = 2.000.003$,
 $b_{21}(7.085) = 1.200.007$,
 $b_{23}(6.691) = 3.200.003$,
 $b_{24}(6.510) = 4.200.013$,
 $b_{25}(6.493) = 5.200.007$,
 $b_{26}(6.425) = 6.200.003$,
 $b_{27}(6.347) = 7.200.007$,
 $b_{28}(6.278) = 8.200.007$,
 $b_{29}(6.260) = 9.200.017$.

Ces résultats sont assurés pour tous les couples T, D dans les intervalles $I(r)$, $r \geq 7$.

- PROPRIETE 9 -

On se place dans l'ensemble des premiers s'exprimant avec toujours un certain chiffre t et débutant par un certain chiffre d non nul et différent de t ; pour tout t donné, dans tout intervalle $I(r)$, $r > 6$, en référence au chiffre d , les nombres respectifs de ces premiers ainsi que les longueurs maximales $n^*(td)$ de tels premiers consécutifs suivent l'ordre de Benford; pour ces dernières le $n^*(tt)$ est toujours le plus grand et les 8 autres valeurs $n^*(td)$, $d \neq t$, suivent l'ordre de Benford

$$n^*(tt) > n^*(t1) > n^*(t2) > \dots > n^*(t8) > n^*(t9).$$

Pour tout t le cas particulier $d = t$ est toujours le plus grand tant en nombre de premiers qu'en nombre maximal de consécutifs.

- 9 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS AVEC UN MEME CHIFFRE EN DEBUT ET EN FIN D'EXPRESSION

On considère ici les nombres premiers ayant le même chiffre en début et en fin de leur expression (décimale); ce chiffre appartient nécessairement à $\{1,3,7,9\}$.

Pour un intervalle donné $I(r)$, $r > 1$, on notera $ndf(i,r)$ le nombre de premiers débutant et finissant par le chiffre i dans $I(r)$.

Par exemple, la liste des premiers commençant et finissant par 9 ([A062335](#)) débute par 919, 929, 9029, 9049, 9059, 9109, 9199, 9209, 9239, 9319, 9349, 9419, 9439, 9479, 9539, 9619, 9629, 9649, 9679, 9689, 9719, 9739, 9749, 9769, 9829, 9839, 9859, 9929, 9949, ...

Dès l'intervalle $I(5)$ un ordre s'installe et persiste.

Les calculs dans $I(5)$ montrent que les nombres de ces premiers $ndf(i,5)$ vérifient

$$ndf(1,5) = 296 > ndf(3,5) = 278 > ndf(7,5) = 264 > ndf(9,5) = 245;$$

dans $I(9)$ il vient

$$ndf(1,9) = 1.500.910 > ndf(3,9) = 1.433.999 > ndf(7,9) = 1.379.175 > ndf(9,9) = 1.362.970;$$

dans $I(10)$ on obtient

$$ndf(1,10) = 13.344.414 > ndf(3,10) = 12.811.208 > ndf(7,10) = 12.374.435 > ndf(9,10) = 12.244.431.$$

On peut vérifier numériquement que dès $r \geq 5$, cet ordre de type Benford pour les chiffres possibles est toujours respecté.

En particulier dans tous ces intervalles les premiers débutant et finissant par 1 sont toujours les plus nombreux.

- PROPRIETE 10 -

Dans tout intervalle $I(r)$, $r > 4$, les nombres $ndf(d,r)$ de premiers débutant et finissant par le même chiffre d ($d \in \{1,3,7,9\}$) vérifient

$$ndf(1,r) > ndf(3,r) > ndf(7,r) > ndf(9,r),$$

c'est-à-dire qu'ils suivent (en référence au chiffre d) un ordre de type Benford (1-3-7-9).

Ce résultat est assez normal (voire intuitif), si l'on se souvient ([15]) que les premiers débutant par C suivent l'ordre de Benford en référence à C et que par ailleurs les premiers terminés par C ont une probabilité d'apparition qui tend très vite vers l'uniformité.

- 10 - SUITES DE PREMIERS CONSECUTIFS DEBUTANT PAR DEUX MEMES CHIFFRES

On a vu dans [15] que, dans les intervalles $[10, M]$, $M \geq 10^{11}$, les nombres de premiers débutant par deux chiffres donnés (soit de 10 à 99) suivent l'ordre naturel inverse des entiers formés de ces deux chiffres:

$$\text{ndeb}(10) > \text{ndeb}(11) > \text{ndeb}(12) > \dots > \text{ndeb}(99).$$

Nous chercherons ici à déterminer des suites de tels premiers et à analyser les longueurs maximales de ces suites suivant l'entier constitué des deux chiffres initiaux.

Il semblerait assez normal que les maximums de ces longueurs suivent aussi l'ordre précédent, bien que l'on ait vu le cas des PR du paragraphe 2 (les nombres de PR suivent l'ordre de Benford mais pas les nombres maximaux de PR consécutifs).

Faut-il analyser l'organisation des premiers à travers les suites de premiers (ou le nombre de ces premiers [15]) ayant une même propriété (chiffre de début, de fin, chiffre absent, ...)?

Dans I(8) on aura (on exprime longueur maximale et premier terme de la suite avec les plus petits premiers)

$$\text{max}10 = 61.938 \text{ (10.000.019)}$$

$$\text{max}11 = 61.543 \text{ (11.000.027)}$$

$$\text{max}16 = 60.184 \text{ (16.000.057)}$$

$$\text{max}59 = 55.801 \text{ (59.000.003)}$$

$$\text{max}75 = 55.307 \text{ (75.000.007)}$$

$$\text{max}99 = 54.332 \text{ (99.000.007)}$$

Dans I(9)

$$\text{max}10 = 541.854 \text{ (100.000.007)}$$

$$\text{max}11 = 538.339 \text{ (110.000.017)}$$

$$\text{max}16 = 528.625 \text{ (160.000.003)}$$

$$\text{max}59 = 495.159 \text{ (590.000.003)}$$

$$\text{max}75 = 489.038 \text{ (750.000.007)}$$

$$\text{max}99 = 482.825 \text{ (990.000.023)}$$

Le consécutif d'un CCxx le plus probable sera aussi de type CCxxx (90 % dès I(4) et plus de 99 % pour $r > 7$)

- PROPRIETE 11 -

Si l'on considère dans I(r), $r > 6$, les ensembles de premiers débutant par deux chiffres donnés, leurs nombres maximums de consécutifs suivent l'ordre de Benford généralisé ([15]) en référence à l'entier initial formé de ces deux chiffres

$$\text{max}(10) > \text{max}(11) > \text{max}(12) > \dots > \text{max}(98) > \text{max}(99).$$

Ce résultat devrait s'étendre aux ensembles de premiers débutant par m chiffres, $m > 2$, conformément à [15] qui indique que les nombres de premiers débutant par m chiffres suivent l'ordre naturel inverse des entiers constitués de ces m chiffres, ce qui donnera

$$\text{max}(10) > \text{max}(11) > \text{max}(12) > \dots > \text{max}(98) > \text{max}(99) > \text{max}(100) > \text{max}(101) > \dots > \text{max}(999) > \dots$$

- 11 - ECARTS ENTRE DEUX PREMIERS CONSECUTIFS

Classiquement, on appelle *écart premier* (prime gap) la différence entre deux nombres premiers consécutifs p_n, p_{n+1} ,

$$g_n = p_{n+1} - p_n, n > 0.$$

Par définition tout premier est donc tel que

$$p_{n+1} = 2 + \sum_{i=1}^n g_i.$$

Ajoutons que d'après le postulat de Bertrand cité plus haut, on a $g_n < p_n$.

On sait depuis Edouard Lucas (Théorie des nombres, 1891) qu'il existe des écarts premiers aussi grands que l'on veut; pour le montrer, il suffit de considérer la suite des nombres composés successifs, pour tout $n > 0$,

$$n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n;$$

elle appartient nécessairement à un écart premier de longueur au moins n, et même $n+1$ si $n!+1$ n'est pas un nombre premier (comme pour $n = 11$ par exemple, cf. [A002981](#)); la suite (g_n) comme (p_n) est donc non bornée.

Mise à part l'écart 1 pour 2-3, tous les autres écarts premiers sont pairs et la liste est facilement calculable ([A001223](#)):

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 2, 4, 14, 4, 6, 2, 10, 2, 6, 6, 4, 6, 6, 2, 10, 2, 4, 2, 12, 12, 4, 2, 4, 6, 2, 10, 6, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 10, 14, 4, 2, 4, 14, 6, 10, 2, 4, 6, 8, 6, 6, 4, 6, 8, 4, 8, 10, 2, 10, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 12, 8, 4, 8, 4, 6, 12, ...

Avec les notations de [11],

$G(X) = \max(p_{n+1} - p_n), p_{n+1} \leq X$,
le théorème FGKMT [11] montre que
pour tout X suffisamment grand on a

$$G(X) \gg \log X \log_2 X \log_4 X / \log_3 X,$$

avec $\log_2 X = \log \log X$, $\log_3 X = \log \log \log X$, $\log_4 X = \log \log \log \log X$.

Nous nous intéressons ici, à l'écart premier noté $e(r)$ entre deux premiers consécutifs d'un intervalle $I(r) = [2, 10^r]$, $r > 0$, et en particulier à l'écart premier maximum (maximal prime gap) noté $e^*(r) (= G(10^r))$ précédent).

A partir de $r > 3$, les premiers consécutifs ne diffèrent que par assez peu de chiffres, et l'écart maximum $e^*(r)$ entre deux premiers consécutifs dans $I(r)$ croît strictement avec r :

(pour chaque e^* on donne le couple des plus petits premiers d'écart e^*)

$$e^*(1) = 2 \text{ (3 - 5),}$$

$$e^*(2) = 8 \text{ (89 - 97),}$$

$$e^*(3) = 20 \text{ (887 - 907),}$$

$$e^*(4) = 36 \text{ (9.551 - 9.587),}$$

$$e^*(5) = 72 \text{ (31.397 - 31.469),}$$

$$e^*(6) = 114 \text{ (492.113 - 492.227),}$$

$$e^*(7) = 154 \text{ (4.652.353 - 4.652.507),}$$

$$e^*(8) = 220 \text{ (47.326.693 - 47.326.913),}$$

$$e^*(9) = 282 \text{ (436.273.009 - 436.273.291),}$$

$$e^*(10) = 354 \text{ (4.302.407.359 - 4.302.407.713),}$$

$$e^*(11) = 464 \text{ (42.652.618.343 - 42.652.618.807),}$$

... (cf. [A038460](#)).

D'après B.Nyman (2003) on sait que dans $[10^{15}, 5 \cdot 10^{16}]$ l'écart premier maximum est 1.184, soit $e^*(17) \geq 1.184$, en fait $e^*(17) = 1.220$.

En 2025 (novembre), le plus grand écart premier maximum répertorié était $e^*(20) = 1.724$ pour 68.068.810.283.234.182.907 et 68.068.810.283.234.184.631.

En poussant les calculs beaucoup plus loin, on a pu obtenir pour $r = 1.135$ (nombre de chiffres de 500!), un $e(1.135) = 21.144$ pour les premiers consécutifs suivants: (les 1.129 premiers chiffres sont communs) 1220136825991....000223753 - 1220136825991....000244897.

On peut dire que $e^*(1.135) \geq 21.144$.

Entre $120 \cdot 10^{1132}$ et $122 \cdot 10^{1132}$ on obtient 13 écarts supérieurs à 6.000 dont 3 supérieurs à 14.000: 6.118, 8.552, 7.710, 6.160, 8.684, 7.512, 6.918, 6.074, 6.794, 21.244, 14.338, 7.960, 18.538.

Avec 2.568 chiffres (nombre de chiffres de 1000!), on peut obtenir

$$e(2.568) = 25.398 \text{ pour le couple de premiers consécutifs}$$

$$40238726007709...00071359 - 40238726007709...00096757;$$

$$\text{on a } e^*(2.568) \geq 25.398 \text{ et le mérite (écart}/\ln(n)) \text{ est } M(25.398) = 4,296.$$

On peut donc déterminer des $e(r)$ (et des $e^*(r)$) aussi grands que l'on veut.

Cette croissance de $e^*(r)$ avec la taille r de l'intervalle traduit la croissance de la rareté des premiers dès que l'on envisage des nombres de plus en plus grands, même si l'on peut admettre que l'écart moyen est $\ln(n)$, soit par exemple 5.912 pour le dernier cas.

- PROPRIETE 12 -

L'écart maximum $e^*(r)$ entre deux premiers consécutifs dans $[2, 10^r]$ croît strictement avec $r > 0$.

Citons une conjecture concernant $e^*(r)$, $r > 3$, énoncée dans ([A038460](#))

$$e^*(r) \leq 6^*(r-1) \cdot (r-2);$$

elle aurait l'avantage d'entraîner la conjecture de Brocard ([A050216](#))

$$\Pi(p_{n+1}^2) - \Pi(p_n^2) \geq 4 \text{ pour } n \geq 2,$$

($\Pi(X)$ désigne classiquement le nombre de premiers inférieurs ou égaux au réel X).

Ces deux conjectures sont parfaitement vérifiées aussi bien pour les valeurs connues que pour nos résultats présents.

On peut particulariser (comme dans les paragraphes précédents) les premiers considérés, et déterminer les écarts maximums de tels premiers consécutifs.

Nous calculerons ces écarts pour $r \in [9, 11]$ pour les comparer avec les $e^*(r)$ précédents

$$e^*(9) = 282, e^*(10) = 354, e^*(11) = 464.$$

Pour $r \in [9, 11]$, tous ces écarts seront assez homogènes entre 210 et 464.

- a) - Ecart maximums $e^*_t(r)$ entre premiers de même chiffre terminal t dans $I(r)$
(ce sont nécessairement des multiples de 10)

$e^*_1(9) = 250, e^*_3(9) = 250, e^*_7(9) = 260, e^*_9(9) = 240.$

$e^*_1(10) = 310, e^*_3(10) = 330, e^*_7(10) = 340, e^*_9(10) = 330.$

$e^*_1(11) = 390, e^*_3(11) = 420, e^*_7(11) = 450, e^*_9(11) = 400.$

Les écarts sont assez voisins, le cas $t = 7$ correspondant toujours au plus grand pour un r donné.

On a assez naturellement, $e^*(r) > e^*_t(r)$ pour tout $t \in \{1, 3, 7, 9\}$ et tout $r > 0$.

- b) - Ecart maximums $e^*_{tt}(r)$ entre premiers avec chiffre initial et final identiques dans $I(r)$
(ce sont nécessairement des multiples de 10)

$e^*_{11}(9) = 210, e^*_{33}(9) = 250, e^*_{77}(9) = 240, e^*_{99}(9) = 240.$

$e^*_{11}(10) = 260, e^*_{33}(10) = 270, e^*_{77}(10) = 280, e^*_{99}(10) = 280.$

$e^*_{11}(11) = 330, e^*_{33}(11) = 360, e^*_{77}(11) = 350, e^*_{99}(11) = 390.$

- c) - Ecart maximums $e^*_d(r)$ entre premiers de même chiffre initial d dans $I(r)$
(ce ne sont pas nécessairement des multiples de 10)

$e^*_{d1}(9) = 248, e^*_{d2}(9) = 234, e^*_{d3}(9) = 250, e^*_{d4}(9) = 282, \dots, e^*_{d7}(9) = 250, e^*_{d8}(9) = 246, e^*_{d9}(9) = 260.$

$e^*_{d1}(10) = 292, e^*_{d2}(10) = 320, e^*_{d3}(10) = 336, e^*_{d4}(10) = 354, \dots, e^*_{d7}(10) = 326, e^*_{d8}(10) = 340, e^*_{d9}(10) = 330.$

$e^*_{d1}(11) = 382, e^*_{d2}(11) = 456, e^*_{d3}(11) = 444, e^*_{d4}(11) = 464, \dots, e^*_{d7}(11) = 390, e^*_{d8}(11) = 432, e^*_{d9}(11) = 410.$

On remarquera que les plus petits premiers correspondant à $e^*(r)$ pour $r \in [6, 11]$ débutent tous par 4 et donc que ces $e^*(r) = e^*_{d4}(r)$.

- d) - Ecart maximums $e^*_{PR}(r)$ entre premiers de type PR dans $I(r)$

$e^*_{PR}(9) = 248, e^*_{PR}(10) = 336, e^*_{PR}(11) = 450.$

- e) - Ecart maximums $e^*_{PRS}(r)$ entre premiers de type PRS dans $I(r)$

$e^*_{PRS}(9) = 260, e^*_{PRS}(10) = 354, e^*_{PRS}(11) = 456.$

On observe, assez normalement (cf. [14]), que les $e^*_{PRS}(r)$ sont supérieurs aux $e^*_{PR}(r)$ pour $r > 8$.

Tous ces écarts maximums entre premiers particuliers consécutifs vérifient (comme les $e^*(r)$) la Propriété 12: ils sont strictement croissants avec r et donc non bornés.

- CONCLUSION

Le premier consécutif d'un premier d'un certain type sera le plus souvent (avec une probabilité supérieure à 50 %) un premier de même type (sans un certain chiffre, avec toujours un certain chiffre, débutant par un certain chiffre); sauf pour un premier de dernier chiffre D qui est suivi le plus souvent (dans plus de 80 % des cas) par un premier qui n'est pas terminé par le même D (donc de 'type différent').

Les suites de nombres premiers consécutifs avec une certaine propriété, incluant le même chiffre initial, ont des longueurs maximales qui suivent un ordre de type Benford, sauf dans le cas des PR (zeroless primes).

Finalement, mis à part le biais du dernier chiffre ([10] et paragraphe 4 plus haut), le premier consécutif le plus probable d'un premier avec une certaine propriété est un premier avec cette même propriété.

Ce phénomène semble intuitivement assez normal et révèle une certaine *régularité* chez les premiers qui s'ajoute à un ordre de type Benford (ordre naturel inverse des entiers) souvent rencontré ici et dans [15].

Enfin, on peut retenir que les écarts premiers maximums entre premiers (quelconques ou de type PR ou PRS ou possédant une des propriétés signalées plus haut) d'un intervalle $I(r)$ sont tous strictement croissants avec r .

(+) J.-B. Hiriart-Urruty, Ah ! les nombres premiers... 57 pintxos sur ces "incassables" de l'arithmétique, Ed. Cepadues de Toulouse, 2024.

(++) Ce résultat est la démonstration du postulat de J. Bertrand (1845) et il a été lui-même amélioré par un théorème de P. Erdos (1932): il existe au moins 2 nombres premiers entre $n > 5$ et $2n$.

(*) Professeur honoraire Université Paul Sabatier, Toulouse, France, webmaster du site SAYRAC, E-

-REFERENCES

- [1] S. Newcomb, Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers, *Journal américain de mathématiques*, Vol. 4, n° 1, pp. 39-40, (<https://doi.org/10.2307/2369148>), 1881.
- [2] F. Benford, The law of anomalous numbers, *Proceedings of the American Philosophical Society*, Vol. 78, No. 4, pp. 551-572, (<https://www.jstor.org/stable/984802>), 1938.
- [3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1960.
- [4] B. J. Flehinger, On the Probability that a Random Integer has Initial Digit A , *Amer. Math. Monthly*, 73, pp. 1056-1061, 1966.
- [5] H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences*, Vol. 1, Oxford, 1966.
- [6] R.L. Duncan, Remarque sur le problème du chiffre initial, pp.474-475, (<https://fq.math.ca/Scanned/7-5/duncan.pdf>), 1969.
- [7] R.E. Whitney. Chiffres initiaux de la suite de nombres premiers. *The American Mathematical Monthly*, vol. 79, n° 2, p. 150-152, (<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00029890.1972.11993008>), 1972.
- [8] T. P. Hill, A statistical derivation of the significant-digit law, *Statistical Science*, 10, n°4, pp. 354-363, 1995.
- [9] T.P. Hill, The first digit phenomenon, *Amer. Sci*, 86, pp. 358-363, 1998.
- [10] Robert J. Lemke Oliver, Kannan Soundararajan, Unexpected biases in the distribution of consecutive primes. *Proc Natl Acad Sci U S A.*, 113(31), 2016.
- [11] K. Ford, B. Green, S. Konyagin, J. Maynard, T. Tao, Long gaps between primes, *Journal of the American Mathematical Society*, 2018.
- [12] J. Maynard, Nombres premiers à chiffres restreints, *Invent. math.* 217, 127-218, [Primes with restricted digits](#), 2019.
- [13] R. L. Clerc, Nombres premiers à peu de chiffres non nuls, <https://hal.science/hal-04892415>, 2025.
- [14] R. L. Clerc, Nombres premiers primaires et nombres premiers secondaires, <https://hal.science/hal-05029352>, 2025.
- [15] R. L. Clerc, L'ordre de Benford, un pas vers un ordre caché dans les nombres premiers, <https://https://hal.science/hal-05344369>, 2025.
- [OEIS1] Primes not containing the digit '0', Zak Seidov, <https://oeis.org/A038618>, 2015.
- [OEIS2] Naught-y primes, primes with noughts (or zeros), Robert G. Wilson, [A056709](#), 2000.