

- Deep learning Reveals Breakthroughs in Fluid Dynamics Equations -

- L'Apprentissage Révèle des Avancées Majeures dans les Equations de la Dynamique des Fluides -

par Javier Gómez-Serrano¹ & Ágata A. Timon²

TRADUIT DE L'ESPAGNOL PAR ABDELMAJID BEN HADJ SALEM*

ABSTRACT. A new approach finds solutions to fluid dynamics equations and could be applied to solve one of the Millennium Prize Problems.

RÉSUMÉ: Une nouvelle approche permet de trouver des solutions aux équations de la dynamique des fluides et pourrait être appliquée à la résolution de l'un des problèmes du prix du millénaire.

Keywords: Incompressible fluid dynamics, singularities, Euler and Navier-Stokes Equations.

2020 Mathematics Subject Classification: 76B03, 76D05.

*To my wife **Wahida**, my daughter **Sinda**, my son **Mohamed Mazen**
and my granddaughter **Rayhane***

Les équations d'Euler³, proposées en 1752, et les équations de Navier-Stokes⁴, établies entre 1822 et 1842, sont des outils fondamentaux pour décrire mathématiquement le comportement des fluides incompressibles, c'est-à-dire des fluides qui ne peuvent être comprimés, comme l'eau. Elles nous permettent de comprendre des phénomènes naturels⁵ tels que l'écoulement des rivières et le déferlement des vagues⁶. Cependant, la résolution de ces équations, même avec l'aide d'ordinateurs puissants, est extrêmement difficile et coûteuse. Deux cent cinquante ans après leur formulation, elles demeurent encore un

¹Email: javier_gomez_serrano@brown.edu

²Email: agata.timon@icmat.es

³[https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Euler_\(fluidos\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Euler_(fluidos)).

⁴https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Navier-Stokes.

⁵<https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=492>.

⁶<https://www.agenciasinc.es/Noticias/Matematicos-espanoles-resuelven-el-problema-de-describir-como-rompe-una-ola>.



FIGURE 1. Image satellite d'une tempête tropicale - ouragan, cyclone ou typhon.(Getty Images/ISTockphoto)

énigme mathématique.

L'une des questions fondamentales concernant ces équations est de savoir si, à partir de conditions initiales peu contraignantes — par exemple, une mer calme —, une singularité — un tsunami — peut se produire après un laps de temps fini. Mathématiquement, une singularité⁷ survient lorsque les variables modélisant le phénomène physique, telle que la vitesse ou la pression, passent de valeurs finies à des valeurs infinies en un temps fini. Il s'agit de l'un des problèmes dits du « prix du millénaire » — les équations de Navier-Stokes⁸ — dont la résolution est récompensée par un million de dollars.

Malgré quelques avancées partielles⁹ (comme ici¹⁰ et là¹¹), toutes les tentatives pour résoudre ce problème ont échoué jusqu'à présent⁸. L'une des raisons est que les singularités sont encore mal comprises. Par exemple, nous ignorons la vitesse de formation d'un vortex et son emplacement.

⁷https://es.wikipedia.org/wiki/Singularidad_matem.

⁸<https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation/>.

⁹<https://elpais.com/ciencia/2020-09-07/grandes-retos-en-las-ecuaciones-de-los-fluidos.html>.

¹⁰https://elpais.com/elpais/2020/02/17/ciencia/1581937921_028634.html.

¹¹<https://projecteuclid.org/journals/annals-of-mathematics/volume-194/issue-3/Finite-time-singularity-formation-for-C1alpha-solutions-to-the-incompressible/10.4007/annals.2021.194.3.2.short>.

Grâce à l'ordinateur, nous pouvons affiner notre compréhension de ces objets par des simulations numériques qui approchent au plus près certaines solutions de l'équation, solutions susceptibles de présenter des singularités – c'est-à-dire de prendre des valeurs infinies en un temps fini. Au fil des années, la communauté scientifique a identifié plusieurs solutions numériques de ce type. Avec l'augmentation de la puissance de calcul, ces solutions candidates ont été invalidées, validées ou complétées par d'autres.

En 2014, Guo Luo (chercheur à l'université Hang Seng de Hong Kong) et Thomas Y. Hou (université Caltech) ont réalisé une simulation¹² d'un fluide à l'intérieur d'un cylindre qui, dans certaines conditions initiales, semblait donner lieu à une singularité.

Luo et Hou ont affirmé que leur singularité était d'un type particulier, dite localement auto-similaire. Dans ce type de solution, à l'approche du point de singularité, un zoom à l'échelle appropriée révèle la même solution, comme s'il s'agissait d'une fractale.

Malgré le caractère prometteur de l'approche, leurs simulations prenaient des mois à exécuter et étaient difficiles à reproduire. De plus, elles n'offraient qu'un seul type de solution, dite stable, qui, selon le consensus général de la communauté mathématique, ne permettait pas de résoudre le problème de Navier-Stokes. Récemment, près de dix ans plus tard, un groupe de chercheurs interdisciplinaires – composé d'un mathématicien espagnol¹³, d'un mathématicien australo-britannique¹⁴ et de deux géophysiciens (un chinois¹⁵ et un taïwanais¹⁶) – a confirmé la proposition de Luo et Hou, en trouvant des solutions auto-similaires pour plusieurs types d'équations de la dynamique des fluides¹⁷. Certaines de ces solutions sont instables, c'est-à-dire du type de solutions susceptibles de résoudre le problème du prix du millénaire. Cette nouvelle méthode permet de comprendre où et comment se forme la singularité et la forme de la solution à tout moment avant l'explosion, voire un instant avant. Pour ce faire, ils ont utilisé des techniques d'apprentissage automatique en mathématiques appliquées¹⁸. Plus précisément, les chercheurs partent d'une solution approchée qu'ils affinent à l'aide d'un réseau de neurones. À chaque itération, le réseau évalue la qualité de l'approximation par rapport aux équations, dans le but d'améliorer la solution. Par exemple, si l'augmentation de la valeur de la solution en un point donné réduit l'erreur d'approximation de l'équation, le réseau neuronal tentera de trouver une nouvelle solution candidate dans cette direction.

C'est la première fois que l'apprentissage automatique est utilisé pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides. Selon l'équipe de scientifiques, cette approche leur a permis d'obtenir une meilleure approximation de la solution de l'équation étudiée,

¹².<https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.1405238111>.

¹³.<https://web.math.princeton.edu/~jg27/index.html>.

¹⁴.<https://cims.nyu.edu/~tristanb/>.

¹⁵.https://scholar.google.com/citations?user=_Hskk60AAAAJ&hl=en.

¹⁶.<https://icyphysics.stanford.edu/>.

¹⁷.<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.130.244002>.

¹⁸.<https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.aaw4741>.

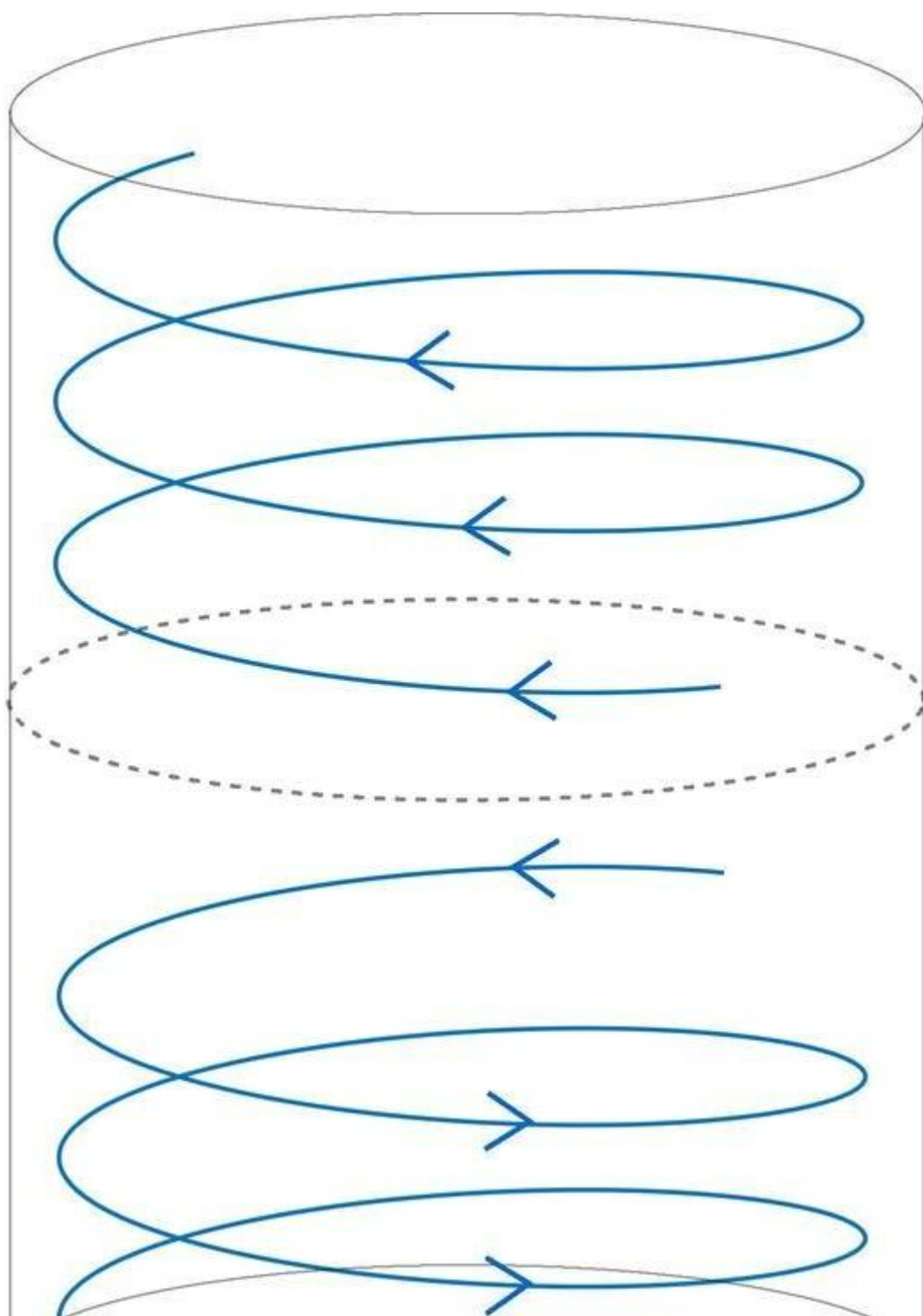


FIGURE 2. Représentation de la simulation de Luo et Hou, dans laquelle le fluide se déplace à l'intérieur d'un cylindre.(J.G.S)

tout en consommant beaucoup moins de ressources de calcul. Ainsi, des calculs qui prenaient auparavant des mois avec un cluster peuvent désormais être effectués en quelques heures avec un ordinateur portable. Les auteurs affirment que cela ouvre une nouvelle ère d'interaction entre l'informatique traditionnelle et les outils de calcul les plus modernes.

De plus, bien que les équations aient été étudiées dans un cas confiné – à l'intérieur d'un cylindre, comme proposé par Luo et Hou – les conclusions obtenues peuvent servir à mieux analyser le cas général, même dans des situations modélisées par d'autres équations. En particulier, elles peuvent également s'appliquer à l'étude du problème de Navier-Stokes – le problème du millénaire – qui exige, entre autres différences techniques, que le fluide soit non confiné. Par conséquent, nous ne pouvons pas encore affirmer que ces techniques d'apprentissage automatique permettront de trouver la singularité tant convoitée des équations de Navier-Stokes, mais les derniers résultats dans ce domaine sont très prometteurs, et il ne reste peut-être plus qu'à trouver la solution candidate idéale pour résoudre ce célèbre problème.

A. BEN HADJ SALEM
RÉSIDENCE BOUSTEN 8, AV. MOSQUÉE RAUDHA,
BLOC B, APPART. B8
1181 SOUKRA-RAUDHA, SOUKRA, TUNISIA
Email address: abenhadjsalem@gmail.com