The Klein-Gordon-Fock equation correct for the description of the particle

Grigory Yu. Nekrasov[1]

Federal State University of Education
ul. Very Voloshinoi 24, 141014, Mytishchi, Moscow region, Russia

Abstract

The quantum mechanical Klein-Gordon-Fock equation in the space-time curved by the background sources is considered. The comparative analysis of this equation and the same equation in the flat Minkowski space-time is made. The Klein-Gordon-Fock equation is solved for the case of the microscopic Schwarzschild black hole near the event horizon. It is supposed that in curved spaces of special type this equation will describe the quantum particle, as then the fourth component of the probability current density – to within a multiplier the probability density will be strictly positive. The solution provided in this article is applicable for the description of a massive particle with spin 0 near the event horizon of the microscopic black holes. The main text of the article will be provided in Russian.

Key words: quantum mechanics, special theory of relativity, massive quantum particle, zero spin, general theory of relativity, gravitational field, the black hole of Schwarzschild, Klein-Gordon-Fock equation, approximation in relativistic quantum mechanics in the curved space-time

Введение

Уравнение Клейна-Гордона-Фока [1, 2, 3] было первым скалярным релятивистски-инвариантным уравнением квантовой механики одной частицы. Написанное и примененное впервые Э. Шредингером для атома водорода, это уравнение дало неверный результат для дискретных уровней энергии этого атома [4]. Как было впоследствии выяснено потому, что оно не описывает полуцелый спин электрона, а имеет нулевой спин. Однако это уравнение, как говорит Роджер Пенроуз [5], применимо при некоторых оговорках к описанию пионов и бозона Хиггса потому, что эти частицы имеют нулевой спин, или, как говорят, являются скалярными частицами. Вообще уравнение Клейна-Гордона-Фока было предложено позднее О. Клейном и В. Гордоном, и независимо от них В. А. Фоком. Оно описывает массивные частицы с нулевым спином: для нейтральных частиц скалярная волновая функция, стоящая в этом уравнении, является действительной, а для заряженных частиц скалярная волновая функция является комплексной, поскольку заряженные частицы всегда описываются комплексными функциями в квантовой механике.

Однако, не смотря на свое ранее появление в 1926 году это уравнение не дало решения задачи объединения квантовой механики и специальной теории относительности потому, что в нем содержится фундаментальная проблема: плотность вероятности в уравнении непрерывности, получаемого из него, не является строго положительной, – факт, из-за которого многие ученые считали это уравнение вообще не описывающим реальных частиц [6].

[1] grygory.nkr@mail.ru

Как предлагает автор данной статьи, эту проблему можно решить хотя бы отчасти, если рассмотреть уравнение Клейна-Гордона-Фока в искривленном пространстве-времени, таким образом, завуалировав его явную неспособность описывать квантовую частицу геометрическими особенностями определенных областей пространства-времени, которые имеют отличные от остальных/обычных областей пространства-времени физические и геометрические свойства.

Общее рассмотрение уравнения Клейна-Гордона-Фока и его частное применение

Уравнение Клейна-Гордона-Фока в плоском псевдоевклидовом пространстве-времени не описывает квантовую частицу, так как плотность вероятности, получаемая из этого уравнения и стоящая в уравнении непрерывности, не является строго положительной. Для того, чтобы уравнение Клейна-Гордона-Фока не вызывало вопросов относительно его применимости для описания частицы, необходимо чтобы получаемая из него плотность вероятности, входящая в уравнение непрерывности, соответствующему исходному уравнению, была строго положительной. Добиться этого выбирая другую систему отсчета в специальной теории относительности и соответственно модифицируя это уравнение не представляется возможным, поскольку уравнение Клейна-Гордона-Фока является инвариантным – оно состоит из инвариантного при преобразованиях системы отсчета оператора Д’Аламбера, инвариантной массы, также называемой массой покоя и скалярной, а значит инвариантной волновой функции (которая может быть в общем случае комплексной). Но в рассмотрении квантовой частицы в общей теории относительности, то есть находящейся в гравитационном поле оказывается возможным хотя бы в некоторых случаях держать плотность вероятности положительной, если входящий в уравнение метрический тензор искривленного пространства-времени фоновой материей или энергией, который входит также в получаемое из него уравнение непрерывности, имеет нужный вид.

Уравнение Клейна-Гордона-Фока в искривленном пространстве-времени имеет вид

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi\,. \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) порождает ковариантное уравнение непрерывности

$$\nabla_\mu j^\mu = 0 \tag{1.2}$$

с контравариантным 4-током вероятности

$$j^\mu = \frac{\hbar}{2m} g^{\mu\nu}\left(\Psi^*\partial_\nu\Psi - \Psi\partial_\nu\Psi^*\right). \tag{1.3}$$

Мы видим, что плотность вероятности, таким образом, может быть положительной из-за её суммирования с метрическим тензором. Это указывает на то, что в определенных искривленных пространствах уравнение Клейна-Гордона-Фока может описывать квантовую частицу. Также помимо этого факта, в общей теории относительности: (1) j^4

может быть нулем или отрицательной величиной; j^{μ} есть контравариантный вектор, он удовлетворяет условию общей ковариантности по своей структуре; (2) рассматривается весь вектор j^{μ} целиком как контравариантный вектор и не выделяется какая-либо из его компонент, например, плотность. Этот вектор имеет одинаковую структуру для всех четырех компонент. Данную ситуацию в общей теории относительности можно проиллюстрировать на примере дифференциалов координат риманова пространства-времени. В этой теории, например, dx_4 имеет характер времени, если g_{44} всегда положительно.

В частном случае плоского псевдоевклидового пространства-времени, имеем

$$j^{\mu} = \frac{\hbar}{2m}\eta^{\mu\nu}\left(\Psi^{*}\partial_{\nu}\Psi - \Psi\partial_{\nu}\Psi^{*}\right), \tag{1.4}$$

где $\eta^{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства-времени Минковского. Выберем его таким

$$\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(1,1,1,-1\right), \tag{1.5}$$

это есть его главная диагональ, остальные компоненты равны нулю. Отсюда находим величины плотности тока вероятности и плотности вероятности

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2m}\left(\Psi^{*}\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^{*}\right), \tag{1.6}$$

$$\rho = -\frac{\hbar}{2mc}\left(\Psi^{*}\partial_{4}\Psi - \Psi\partial_{4}\Psi^{*}\right). \tag{1.7}$$

Далее введем мнимую единицу *i*, чтобы привести ρ и $\vec{j}$ к одинаковому виду, но с разными константами. Тогда получим

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^{*}\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^{*}\right), \tag{1.8}$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc}\left(\Psi^{*}\partial_{4}\Psi - \Psi\partial_{4}\Psi^{*}\right). \tag{1.9}$$

В уравнении непрерывности умножение величин, входящих в это уравнение, на *i* эквивалентно ρ и $\mathbf{j}$ без умножения на мнимую единицу. А с точки зрения этих величин самих по себе, их необходимо умножить на *i*. Это легко установить, если использовать главное решение уравнения Клейна-Гордона-Фока в плоском пространстве-времени – плоскую волну

$$\Psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}\cdot\vec{r}\right)\right). \tag{1.10}$$

Тогда, подставляя (1.10) и сопряженную функцию в (1.9), получим плотность в виде

$$\rho = \frac{E}{mc^2}, \qquad (1.11)$$

отсюда также видна причина появления множителя $1/2$ в (1.6) и (1.7).

Частицами с нулевым спином и нулевым электрическим зарядом являются: нейтральный пион, нейтральные каоны (псевдоскалярные частицы) и бозон Хиггса. Все эти частицы описываются уравнением Клейна-Гордона-Фока.

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона-Фока (1.1) в пространстве-времени стационарной черной дыры Шварцшильда. Рассмотрим квантовую частицу в стационарном состоянии, тогда волновая функция представима в виде

$$\Psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi\left(r,\theta,\varphi\right). \qquad (1.12)$$

Найдя метрический тензор и рассчитав все символы Кристоффеля в решении Шварцшильда уравнений Эйнштейна, получим уравнение (1.1) в виде

$$\gamma\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\left(\theta\right)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{2}{r}\gamma\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\mathrm{ctg}\left(\theta\right)}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \left(\frac{E^2}{\gamma\hbar^2c^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0, \quad (1.13)$$

где $\gamma = 1 - \frac{r_g}{r}$, и $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус. Представляя волновую функцию стационарного состояния в виде

$$\psi\left(r,\theta,\varphi\right) = R\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\varphi\right), \qquad (1.14)$$

и подставляя её в уравнение Клейна-Гордона-Фока в виде (1.13), получаем уравнения для радиальной, полярной и азимутальной волновых функций

$$rR'' - 2R' + \gamma^{-1}R\left(\frac{r}{\hbar^2}\left(\frac{E^2}{c^2\gamma} + m^2c^2\right) - \frac{C_1}{r}\right) = 0, \qquad (1.15)$$

$$\sin\left(\theta\right)^2\Theta'' - \sin\left(\theta\right)\cos\left(\theta\right)\Theta' - \left(C_1 + C_2\right)\Theta = 0, \qquad (1.16)$$

$$\Phi'' = -C_2\Phi. \qquad (1.17)$$

Нормировка решения последнего уравнения на дельта-функцию, имеющая вид

$$\int_0^{2\pi}\Phi^*_{m_l}\Phi_{m'_l}d\varphi = K^2 2\pi\delta_{m_l m'_l}, \qquad (1.18)$$

приводит к нормировочной постоянной азимутальной волновой функции в виде

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Из граничных условий или условий периодичности для однозначного задания этой функции следует, что $C_2 = m_l^2$, где m_l – магнитное квантовое число аналогичное в решении уравнения Шредингера для одного электрона в сферически симметричном, кулоновском поле (модель атома водорода с ядром бесконечно большой массы).

Таким образом, азимутальная волновая функция имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}. \tag{1.19}$$

Решение уравнения (1.16) имеет вид

$$\Theta = \frac{1}{2}\exp\left(-\sqrt{1+C_1+m_l^2}\ \mathrm{Arctgh}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)\times \tag{1.20}$$

$$\times\left(2C\left[1\right]+\frac{\exp\left(2\sqrt{1+C_1+m_l^2}\ \mathrm{Arctgh}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)C\left[2\right]}{\sqrt{1+C_1+m_l^2}}\right)\left|\sin\left(\theta\right)\right|,$$

где $C\left[1\right]$ и $C\left[2\right]$ – постоянные интегрирования.

Четвертая, временная компонента плотности 4-тока вероятности, вычисляемая из формулы (1.4) имеет форму

$$j^4 = -\frac{iE}{mc}\gamma^{-1}\psi\psi^*. \tag{1.21}$$

Отсюда видна необходимость введения в четвертую компоненту (1.4) мнимой единицы, как это сделано в (1.9). Тогда получим

$$j^4 = \frac{i\hbar}{2m} g^{4\nu}\left(\Psi^*\partial_\nu\Psi - \Psi\partial_\nu\Psi^*\right). \tag{1.22}$$

Плотность вероятности будет иметь вид

$$\rho = \frac{E}{mc^2}\gamma^{-1}\psi\psi^*. \tag{1.23}$$

Так как движение финитное, энергия частицы будет всегда отрицательной, т.е. $E<0$, но гамма-фактор над горизонтом событий $\gamma>0$, а под горизонтом событий $\gamma<0$, на самом горизонте имеем сингулярность для плотности вероятности $\rho=\infty$, потому что $\gamma=0$. Поэтому из этой формулы можно сделать вывод, что частица Клейна-Гордона-Фока не существует над горизонтом событий, т.е. когда $r>r_g$, и не имеет смысла рассматривать внешнюю Вселенную для $r\in\left(r_g,\infty\right)$.

Плотность вероятности удовлетворяет условию нормировки

$$\frac{E}{mc^2}\int\gamma^{-1}\psi\psi^*\sqrt{-g}d^3x = 1. \tag{1.24}$$

Но в данном пространстве-времени $\sqrt{-g} = r^2 \sin(\theta)$, поэтому учитывая разложение волновой функции (1.14), (1.24) запишется в виде

$$\frac{E}{mc^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\gamma^{-1}RR^*\Theta\Theta^*\Phi\Phi^* r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\varphi = 1. \tag{1.25}$$

Это условие нормировки можно разбить на три условия для каждой компоненты волновой функции. Первое условие для азимутальной волновой функции

$$\int_0^{2\pi}\Phi\Phi^* d\varphi = 1, \tag{1.26}$$

подставляя (1.19), получаем тождество, что говорит о правильности нормировки азимутальной волновой функции, которая была сделана при её нормировании на дельта-функцию. Второе условие для полярной волновой функции

$$\int_0^{\pi}\Theta\Theta^*\sin(\theta)\,d\theta = 1. \tag{1.27}$$

Условие нормировки для радиальной волновой функции

$$\frac{E}{mc^2}\int_0^{r_g-\varepsilon}\gamma^{-1}RR^* r^2 dr = 1, \tag{1.28}$$

верхний предел интегрирования здесь определен с учетом существования частицы только под горизонтом событий и асимптотического поведения обратного гамма-фактора при приближении к горизонту событий; ε – малое число, которое, как мы увидим, будет играть важную роль в дальнейшем решении задачи.

Постоянная $C[1]$ или $C[2]$ в решении (1.20) может быть исключена условием нормировки (1.27). Рассмотрим тонкий шаровой слой толщиной ε ниже горизонта событий, когда

$$r \in [r_g, r_g - \varepsilon], \tag{1.29}$$

где $\varepsilon \to 0$. Нашим масштабом будет $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус. Заметим, что размерность постоянной $[C_1] = 1$. Далее разложим в ряд функцию, которая является множителем при R в (1.15) в точке близкой к горизонту событий со стороны ненаблюдаемой части Вселенной, т.е. в точке $r_g - \varepsilon$; ограничимся первой степенью разложения, получим

$$F = A_0 + A_1(r - r_g + \varepsilon) + O(r - r_g + \varepsilon)^2, \tag{1.30}$$

где коэффициенты

$$A_0 = \frac{E^2\left(r_g-\varepsilon\right)^3 + c^2\varepsilon\left(C_1\hbar^3 - m^2c^2\left(r_g-\varepsilon\right)^2\right)}{\hbar^3c^2\varepsilon^2}, \tag{1.31}$$

$$A_1 = \frac{E^2\left(r_g-\varepsilon\right)^2\left(2r_g+\varepsilon\right) + m^2c^4\varepsilon\left(\varepsilon^2-r_g^2\right) + \hbar^3c^2\varepsilon C_1}{\hbar^3c^2\varepsilon^3}. \tag{1.32}$$

Подставляя первые два слагаемые из (1.30) вместо множителя при R в (1.15), получим уравнение

$$rR'' - 2R' + R\left(A_0 + A_1\left(r - r_g + \varepsilon\right)\right) = 0, \tag{1.33}$$

которое имеет решение

$$R(r) = r^3 e^{-i\sqrt{A_1}r}\left(C[3]U\left(a,4,2i\sqrt{A_1}r\right) + C[4]L_n^3\left(2i\sqrt{A_1}r\right)\right), \tag{1.34}$$

где $U(a,b,x)$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция, также называемая гипергеометрической функцией Трикоми; $L_n^a(x)$ – обобщенные полиномы Лагерра. Данная гипергеометрическая функция имеет следующее интегральное представление

$$U(a,b,z) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-zt}t^{a-1}\left(1+t\right)^{b-a-1}dt. \tag{1.35}$$

А обобщенные полиномы Лагерра $y = L_n^a(x)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению

$$xy'' + \left(a+1-x\right)y' + ny = 0. \tag{1.36}$$

В этих специальных функциях:

$$a = -\frac{i\left(-A_0 + 4i\sqrt{A_1} + A_1r_g - A_1\varepsilon\right)}{2\sqrt{A_1}}, \tag{1.37}$$

$$n = -a. \tag{1.38}$$

Условие нормировки (1.28) определяет одну из констант $C[3]$ или $C[4]$ в решении (1.34). Таким образом, наш результат с точностью до пяти произвольных постоянных будет:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}r^3 e^{i\left(m_l\varphi - \sqrt{A_1}r\right)}\left(C[3]U\left(a,4,2i\sqrt{A_1}r\right) + C[4]L_n^3\left(2i\sqrt{A_1}r\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\sqrt{1+C_1+m_l^2}\ \mathrm{Arctgh}\left(\cos(\theta)\right)\right)\times \tag{1.39}$$

$$\times\left(2C[1]+\frac{\exp\left(2\sqrt{1+C_1+m_l^2}\,\mathrm{Arctgh}\left(\cos(\theta)\right)\right)C[2]}{\sqrt{1+C_1+m_l^2}}\right)\left|\sin(\theta)\right|.$$

Заключение

Данное решение для *черной дыры Шварцшильда* доказывает, что в этом искривленном пространстве уравнение Клейна-Гордона-Фока имеет смысл для описания массивной частицы с нулевым спином в области пространства только под горизонтом событий. В области Вселенной вне черной дыры, т.е. над её горизонтом событий это уравнение не описывает квантовую частицу, поскольку тогда плотность вероятности будет отрицательной из-за отрицательной квантованной энергии частицы. Отрицательные собственные значения энергии возникают с необходимостью, как следствие финитного движения частицы. Сам горизонт событий представляет собой с точки зрения квантовой частицы сингулярную поверхность, окружающую черную дыру, поскольку на ней плотность вероятности обнаружить частицу бесконечна.

Однако это не означает, что мы получили неверный ответ, так как интеграл этой величины по области, включающей горизонт событий (шаровой слой) может сходиться. Вопрос об этом не рассматривается в рамках данной статьи. Исходя из этого, можно сделать вывод, что частица наиболее часто будет обнаруживаться очень близко к горизонту событий внутри черной дыры или на самой этой поверхности, если бы у нас была возможность заглянуть внутрь черной дыры. Для того, чтобы полученное решение имело хоть какой-то физический смысл, черная дыра должна быть микроскопической, тогда квантовая частица может «выйти на орбиту вокруг сингулярности» и существовать как электрон в атоме водорода. Это решение работает только внутри объекта и на малом расстоянии от горизонта событий. А коллапсировать волновая функция квантовой частицы внутри черной дыры не может, поскольку гравитационному притяжению подвержена только материя и энергия, а не неопределенность (вероятность).

Расчеты по уравнению Клейна-Гордона-Фока доказывают, что фоновые источники искривления, такие как, например, черная дыра влияют на частицу Клейна-Гордона-Фока и могут приводить к возможностям описания этим уравнением квантовой частицы, что не ожидается в случае плоского псевдоевклидового пространства-времени Минковского.

Благодарности

Автор очень благодарен специалисту по образованию Ольге Волковой за помощь в написании этой работы.

Ссылки

1. O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926).
2. В. Фок, Z. Phys. **38**, 242 (1926); **39**, 226 (1926).
3. W. Gordon, Z. Phys. **40**, 117 (1926).
4. Вайнберг С. Квантовая теория поля Т.1. Общая теория / Пер. с англ; Под ред. В.Ч. Жуковского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 19, 20.

5. Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 521, 522.
6. Дайсон Ф. Релятивистская квантовая механика. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 20, 21.