

Singularités en 3D : Le défi mathématique d'Euler et de Navier-Stokes *par* Diego Cordoba Gazolaz¹ & Luis Martinez Zoroa²

TRADUIT DE L'ESPAGNOL PAR ABDELMAJID BEN HADJ SALEM*

ABSTRACT. The Euler and Navier-Stokes equations describe the motion of fluids, but it is still unknown whether their smooth solutions (with C^∞ regularity) can develop singularities in finite time. This enigma, one of the «Millennium Prize Problems», poses fundamental mathematical and physical challenges. In this article, we review what singularities are, the main mechanisms proposed for their formation (selfsimilar solutions and vorticity cascades) as well as recent advances that shed new light on this problem in three dimensions.

RÉSUMÉ: Les équations d'Euler et de Navier-Stokes décrivent le mouvement des fluides, mais on ignore encore si leurs solutions régulières (de régularité C^∞) peuvent présenter des singularités en temps fini. Cet énigme, l'un des «problèmes du prix du millénaire», pose des défis mathématiques et physiques fondamentaux. Dans cet article, nous passons en revue la nature des singularités, les principaux mécanismes proposés pour leur formation (solutions auto-similaires et cascades de vorticité) ainsi que les avancées récentes qui apportent un nouvel éclairage sur ce problème en trois dimensions.

Keywords: Incompressible fluid dynamics, singularities, Euler and Navier-Stokes Equations.

2020 Mathematics Subject Classification: 76B03, 76D05.

*To my wife **Wahida**, my daughter **Sinda**, my son **Mohamed Mazen** and my granddaughter **Rayhane***

1. Le problème de l'explosion dans les fluides incompréhensible : approches actuelles

Les équations d'Euler et de Navier-Stokes sont depuis des siècles les piliers fondamentaux de la dynamique des fluides incompressibles. Elles régissent le comportement des fluides et apparaissent dans d'innombrables applications, de l'aérodynamique à l'océanographie. Cependant, l'analyse théorique soulève l'un des défis majeurs en mathématiques : l'existence (ou non) de singularités dans ses solutions, également connue sous le nom le problème de la *main explosive* (*blow-up*). En particulier, les singularités qui se forment à l'intérieur du fluide, sans intervention de la frontière, sont d'un intérêt particulier. Cet énigme, toujours non résolu, fait partie des sept « Problèmes du Millénaire » proposés par le Clay Institute (<https://is.gd/1Jv4ET>).

Une singularité dans un système d'équations différentielles se produit lorsque certaines quantités, comme la vitesse du fluide ou son gradient, deviennent infinies en un temps fini. Dans le

¹Email:dcg@icmat.es

²Email:luis.martinezzoroa@cunef.edu

contexte des équations d'Euler et de Navier-Stokes, l'existence de singularités en trois dimensions impliquerait qu'il est possible que des transitions abruptes se produisent dans l'évolution temporelle d'un fluide, ce qui changerait notre compréhension actuelle de la turbulence et du comportement des fluides aux échelles microscopiques et macroscopiques.

Aujourd'hui, une intense carrière mathématique est menée pour répondre à cette question, avec cinq groupes de Tacados qui ont proposé des stratégies novatrices pour aborder le problème :

a) L'équipe de Thomas Hou (Institut Technologique de California) et Jiajie Chen (Université de New York) explore la possibilité d'une singularité auto-similaire dans les fluides axisymétriques. Leur approche repose sur des simulations numériques de haute précision, utilisées ensuite pour construire un test rigoureux avec assistance informatique (preuve assistée par ordinateur, PAO). Cette méthode a déjà été employée avec succès dans le cas d'une singularité à la frontière du domaine, comme détaillée dans les travaux de Chen et Hou (2025a) et Chen et Hou (2025b).

b) Le groupe de Tristan Buckmaster (Université de New York) et Javier Gómez-Serrano (Université de Dad de Brown) a adopté une stratégie similaire à celle de T. Hou, mais avec une approche plus moderne : l'utilisation de réseaux neuronaux pour identifier les configurations initiales qui mènent à l'entraînement des singularités. Cette méthodologie innovante a été présentée dans des médias spécialisées telles que Quanta Magazine (<https://is.gd/NYBLob>).

c) Terence Tao (Université de Californie à Los Angeles), l'un des esprits les plus brillants des mathématiques contemporaines, a proposé une approche différente, recherchant des singularités dans le cadre des variétés compactes riemanniennes. Cependant, jusqu'à présent, il n'y a pas eu de progrès concrets dans cette direction. Sa proposition peut être consultée sur son blog personnel (<https://is.gd/S9LFKo>).

d) Tarek Elgindi (Université de Duke) a réalisé un exploit historique : prouver sans assistance informatique l'existence d'une singularité auto-similaire dans les équations d'Euler 3D pour des solutions axisymétriques sans spin dans les espaces Hölder $C^{1,\alpha}$ avec α supérieur à zéro et très petit, $0 < \alpha \ll \epsilon$ (Elgindi, 2021 et Elgindi et al., 2021). Ses avancées comprennent, également, des singularités auto-similaires pour des flots axisymétriques avec rotation dans le même référentiel de régularité (Elgindi & Pasqualotto, 2023).

e) Le groupe ICMAT (www.icmat.es), au sein duquel les auteurs, en collaboration avec Fan Zheng, Andrés Laín Sanclemente et José Antonio Lucas Manchón, ont développé et travaillent sur une stratégie alternative pour démontrer, par la méthode traditionnelle, la formation de singularités sans recourir à l'autosimilarité. Le mécanisme d'explosion consiste à générer une cascade de couches de vorticités situées aux points où la singularité se développe. Les auteurs ont re-complexifié le résultat d'Elgindi (2021) dans un texte plus général, démontrant l'existence de singularités non auto-similaires (Córdoba, Martínez Zoroa & Zheng, 2025). Córdoba, Martínez Zoroa & Zheng, 2025. . De plus, grâce à l'introduction d'une force extérieure, leur méthode a permis d'obtenir des singularités sur des fluides plus réguliers : fluides non axisymétriques avec force $C^{1,1/2-\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$ (Córdoba & Martínez Zoroa, 2023) et fluides axisymétriques avec rotation force en $C^{1,\sqrt{4/3}-1-\epsilon}$ (Córdoba, Laín Sanclemente & Martínez Zoroa, 2025). De même, ils ont pu l'extension de ces résultats aux fluides hypodissipatifs à viscosité fractionnaire (Córdoba et al., 2024).

Nous sommes à un moment charnière de l'histoire, où des singularités ont été démontrées pour la première fois des solutions classiques à énergie finie pour les équations d'Euler en 3D, offrant de nouvelles stratégies pour construire des solutions qui explosent dans un cadre C^∞ (c'est-à-dire avec des données initiales et une force extérieure admettant des taux de variation infinis). La lutte pour résoudre ce problème est ouverte et chacune de ces approches offre des perspectives différentes sur la complexité du phénomène. L'une de ces équipes parviendra-t-elle à démontrer définitivement l'existence de singularités dans les équations d'Euler et de Navier-Stokes dans le cadre C^∞ ? Le dénouement de cette course passionnante pourrait changer notre compréhension de la mécanique des fluides et, par conséquent, débloquent le développement de nombreuses applications en sciences et en ingénierie.

Dans les sections suivantes, sont présentées en détail les équations d'Euler et de Navier-Stokes, qui régissent la dynamique des fluides incompressibles, et le « Problème du Millénaire » énoncé par l'Institut Clay des Mathématiques. Ensuite, le concept de solutions axisymétriques est décrit, en distinguant les cas avec et sans rotation, qui jouent un rôle important dans les scénarios de formation récente concernant les singularités. Enfin, une vision générale des deux principaux mécanismes de développement des singularités identifiés à ce jour est proposée : les lumières auto-similaires et les cascades de vorticité, qui illustrent différentes manières dont la concentration de vorticité peut conduire à l'effondrement de la régularité en un temps fini.

2. Origines de la théorie mathématique de la dynamique des fluides

La théorie mathématique de la dynamique des fluides remonte au XVIIe siècle avec les travaux d'Isaac Newton, qui appliqua pour la première fois ses lois de la mécanique du mouvement des fluides. Plus tard, en 1755, Leonhard Euler formula les équations différentielles qui décrivent la dynamique d'un fluide parfait, c'est-à-dire sans dissipation par interaction moléculaire. Plus tard, C. Navier (1822) et G. Stokes (1845) incorpor rent le terme viscoélastique, donnant naissance aux équations que nous connaissons aujourd'hui, comme les équations de Navier-Stokes.

Considérons un fluide dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et supposons l'hypothèse du milieu continu, qui établit en tout point de Ω les propriétés du fluide sont continues dans l'espace et le temps.   chaque instant t , les particules du fluide sont décrites par les coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Nous caractérisons le fluide par :

* La plage de la vitesse.

$$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)) \in \mathbb{R}^3$$

* La pression $p(x, t) \in \mathbb{R}$.

* La masse volumique $\rho(x, t) \in \mathbb{R}$.

Les équations de Navier-Stokes sont dérivées de la deuxième loi de Newton et de la conservation de la masse :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nu \Delta u + f$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

où f est la force extérieure à laquelle il est exposé le fluide (comme, par exemple, la gravité) et $\nu \geq 0$ représente la viscosité cinématique. Dans le cas particulier $\nu = 0$, on obtient les équations d'Euler.

3. Classification des fluides et conditions aux limites

Dans l'étude mathématique des fluides, il est utile de les synthétiser selon certaines propriétés physiques qui symétrisent les équations qui les décrivent :

* **Fluide incompressible** : Il est caractérisé par le fait que son volume ne varie pas avec le temps, ce qui se traduit mathématiquement par la condition de divergence nulle du champ de vitesse : $\nabla \cdot u = 0$. Cette subdivision est valable, par exemple, pour les liquides comme l'eau dans la plupart des situations courantes.

* **Fluide parfait** : C'est un fluide sans viscosité, c'est-à-dire, où le paramètre ν est nul. Cette idéalisation permet de se concentrer sur les effets purement inertiels du mouvement du fluide.

* **Fluide homogène** : Il a une densité constante, typiquement normalisée à $\rho = 1$ par souci de simplicité. Cette hypothèse élimine les variations de densité de l'analyse.

* **Fluide idéal** : C'est un fluide qui remplit simultanément les trois conditions précédentes. Bien qu'aucun fluide réel ne les remplisse exactement, le modèle du fluide idéal le fait. La connaissance du fluide idéal est essentielle pour comprendre les phénomènes fondamentaux du mouvement des fluides.

Les conditions aux limites constituent un autre aspect clé dans la formulation des problèmes de mécanique des fluides et varient selon l'environnement physique considéré. Par exemple, dans un récipient fixe, la paroi du domaine est rigide et immobile, et on impose généralement que le fluide ne la traverse pas. En revanche, si l'on considère l'interaction entre deux fluides non miscibles (comme l'eau et l'huile), la frontière qui les sépare, appelée interface, peut se déformer et se déplacer avec l'écoulement.

Ces conditions aux limites influencent profondément le comportement du fluide et, en particulier l'apparition d'éventuelles singularités. Par exemple, en deux dimensions, le caractère libre ou rigide de la frontière peut complètement modifier la dynamique du système. Même si le fluide est initialement très régulier à l'intérieur du domaine, des singularités peuvent se former à la frontière, souvent en raison d'une configuration instable. Un exemple classique est le cas où un fluide plus dense se trouve au-dessus d'un fluide moins dense sous l'action de la gravité, ce qui génère des instabilités telles que celles du phénomène de Rayleigh-Taylor¹.

Cependant, les scénarios les plus intrigants d'un point de vue mathématique sont ceux où des singularités émergent de conditions stables, sans source apparente d'instabilité initiale. Trois exemples de formation de singularités se développent sur la frontière libre dans une configuration stable (c'est-à-dire avec la garantie de l'existence de solutions pour des temps courts) sont présentés dans Castro et al. (2013), Agrawal (2024) et Córdoba et al. (2023).

Dans le problème que nous étudierons dans les sections suivantes, nous considérons un domaine infini : l'espace tridimensionnel entier $\mathbb{R}^3$, ou le tore tridimensionnel $\mathbb{T}^3$, qui représente un espace périodique. Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, il est nécessaire d'imposer des conditions de décroissance à l'infini, ce qui garantit, entre autres, que l'énergie totale du système est finie et que le problème a une signification physique.

1. L'instabilité de Rayleigh-Taylor se produit lorsqu'un fluide plus dense est placé au-dessus d'un fluide moins dense en présence d'un champ de forces (généralement la gravité). Cette configuration est instable, de sorte que la moindre perturbation provoque un mélange caractéristique des fluides.

4. Le Problème du Millénaire de l'Institut Clay de Mathématiques

À la fin du siècle dernier, à l'aube du nouveau millénaire, la communauté scientifique s'est penchée sur les problèmes fondamentaux non résolus qui devraient guider les recherches intellectuelles du XXI^e siècle.

Dans ce contexte, l'Institut Clay de Mathématiques a proposé en 2000 une liste de sept problèmes mathématiques, connus sous le nom de **Problèmes du Millénaire**, chacun étant récompensé par **un prix d'un million de dollars**.

Parmi ces problèmes, celui de l'existence et de la régularité des solutions régulières des équations de Navier-Stokes en trois dimensions occupe une place centrale, tant par sa profondeur mathématique que par sa pertinence physique.

Ci-dessous, l'énoncé officiel du Problème du Millénaire est reproduit tel qu'il apparaît dans l'article de Fefferman, disponible à l'adresse <https://is.gd/MGQGrC> :

Considérons un fluide visqueux ($\nu > 0$), homogène et incompressible :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u + f, & (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0) \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases}$$

Les données initiales doivent vérifier les conditions de régularité suivantes :

$$(4.2) \quad |\partial_x^\beta u_0| \leq C_{\beta,k}(1 + |x|)^{-k}, \quad \forall \beta, k > 0$$

et pour la force extérieure f , il faut donner que:

$$(4.3) \quad |\partial_x^\beta \partial_t^m f| \leq C_{\beta,k,m}(1 + |x| + t)^{-k}, \quad \forall \beta, k, m > 0$$

Ici, $C_{\beta,k}$ et $C_{\beta,k,m}$ sont des constantes bornées qui dépendent des paramètres β, k et m .

Les solutions admissibles au problème sont :

* Pour $x \in \mathbb{R}^3, (u, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ avec décroissance à l'infini de la pression et énergie finie, c'est-à-dire:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 ds < +\infty, \forall t$$

* Ou solutions $(u, p) \in C^\infty(\mathbb{T}^3 \times (0, \infty))$ pression moyenne périodique et nulle.

Problème de Clay : Démontrer l'une des deux affirmations suivantes :

a) Soient u_0 et la force extérieure f satisfaisant les conditions de régularité (2) et (3). Alors, il existe toujours des solutions admissibles à (1).

b) Trouver u_0 et une force extérieure f satisfaisant les conditions de régularité (2) et (3) et tel qu'il n'existe aucune solution admissible à (1) avec la valeur initiale u_0 .

L'énoncé formel ci-dessus est techniquement exact, mais pour saisir l'esprit du problème, une explication plus accessible est utile. Les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement d'un fluide visqueux, comme l'eau ou le miel, ses équations constituent l'un des piliers de la

mécanique des fluides.

Cependant, d'un point de vue mathématique, nous ignorons encore si ces équations admettent toujours une solution régulière (c'est-à-dire sans discontinuité, conservant la régularité initiale à tout instant) à partir de conditions initiales raisonnables. La question fondamentale est la suivante : un fluide initialement au repos ou en mouvement régulier peut-il évoluer au cours du temps, développant une turbulence si intense que la solution mathématique devienne incohérente ? Cette incertitude, à la frontière entre le connu et l'inconnu, fait du problème de Navier-Stokes l'un des plus grands défis mathématiques de notre époque.

5. Fluides idéaux sans frontières et solutions classiques

Nous nous intéresserons d'abord à l'étude des fluides idéaux, c'est-à-dire des fluides de densité constante (normalisée à $\rho = 1$), de viscosité nulle et sans frontière. Ce type d'idéalisation nous permet de nous concentrer sur les mécanismes internes de l'écoulement sans nous soucier des effets de frontière ni de la dissipation de la viscosité.

De plus, nous considérons les solutions classiques des équations d'Euler incompressibles, c'est-à-dire les champs de vitesse $u(x, t)$ de classe C^1 en espace et en temps. Sous ces conditions de régularité, il est possible de montrer que l'énergie cinétique totale du système est conservée au cours du temps, en l'absence de forces extérieures. Mathématiquement, cela s'exprime comme :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \cdot f(x, t) dx$$

où f représente une force extérieure. En l'absence d'une telle force ($f = 0$), l'énergie est conservée :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx = \text{constante}$$

En revanche, si la force $f \in L^2$, c'est-à-dire si elle satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(x, t)|^2 dx < \infty$$

Pour tout $t \geq 0$, alors, si l'énergie cinétique initiale du fluide est bornée, elle reste bornée pour le reste du temps.

Un outil fondamental pour comprendre la dynamique des fluides est **la vorticit  **, d  finie comme

$$\omega = \nabla \wedge u$$

La vorticit   mesure la rotation locale de l'  coulement, et son   volution dans le temps r  v  le les structures cl  s de l'  coulement. En trois dimensions, l'  quation d'  volution de la vorticit   est :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u$$

o   le terme $\omega \cdot \nabla u$ repr  sente l'  tirement de la vorticit  , un m  canisme qui peut amplifier son amplitude et conduire    la formation de structures de plus en plus fines. Ce ph  nom  ne est l'un des principaux m  canismes de formation des singularit  s dans les   quations d'Euler.

Cependant, en *deux dimensions*, une annulation cruciale se produit: le terme d'étirement disparaît et la vorticité satisfait simplement une équation de transport :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$$

Cela implique que la norme de vorticité est conservée tout au long de l'écoulement, empêchant ainsi la formation de singularités en temps fini. En effet, il a été démontré que des solutions d'Euler régulières existent en 2D pour tout temps (voir Wolibner, 1933 et Hölder, 1933).

En trois dimensions, le critère de *Beale-Kato-Majda* (BKM) (1984) fournit une condition nécessaire et suffisante pour l'apparition d'une singularité. Si T^* est la durée de vie maximale d'une solution régulière, alors la condition suivante doit être satisfaite :

$$\int_0^{T^*} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty} dt = \infty$$

Autrement dit, une solution régulière ne peut s'effondrer en un temps fini que si la norme L^∞ de la vorticité devient incontrôlable.

Lorsqu'on étudie la régularité d'une solution d'une équation différentielle - c'est-à-dire son degré de régularité - il est nécessaire de disposer d'une méthode précise pour mesurer le bon comportement de cette solution. L'un des outils les plus utilisés dans ce contexte, est celui des *espaces de Hölder*, qui permettent de décrire des fonctions qui non seulement possèdent des dérivées, mais dont *les dérivées varient de manière contrôlée et progressive*.

Une fonction appartient à l'espace C^k si elle est continue et si ses dérivées sont continues jusqu'à l'ordre k . Cependant, cela ne suffit pas pour comprendre plus en détail *la variation* de ces dérivées. Par exemple, une fonction peut avoir une dérivée continue, mais avec des changements très abrupts qui rendent son contrôle difficile. C'est là qu'intervient le raffinement $C^{k,\alpha}$.

On dit qu'une fonction appartient à l'espace $C^{k,\alpha}$ si :

- * Elle admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre k , et
- * les dérivées d'ordre k sont des fonctions de Hölder continues d'exposant $\alpha \in (0, 1]$.

Cela signifie que non seulement ces dérivées existent, mais aussi qu'elles n'oscillent pas trop rapidement. Plus précisément, il existe une constante C telle que, pour deux points proches x et y , la différence entre les valeurs de la dérivée d'ordre k en ces points satisfait à l'équation suivante :

$$|\partial^k f(x) - \partial^k f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

Autrement dit, les dérivées existent et sont continues, et leur comportement est prévisible à petite échelle.

Par exemple :

* Si une fonction appartenant à $C^{1,1}$, alors sa dérivée est continue (d'ordre 1) et lipschitzienne, c'est-à-dire qu'elle varie au plus linéairement avec la distance. Par exemple, la fonction $f(x) = \text{sign}(x)x^2$ appartient à $C^{1,1}$ (et aussi à $C^{1,1/2}$).

* Cependant, $f(x) = x^{3/2}$ appartient à $C^{1,1/2}$ sur son domaine, mais pas à $C^{1,1}$.

D'un point de vue fonctionnel, le système d'Euler 3D est bien formulé localement dans le temps dans les espaces de Hölder — c'est-à-dire que les données initiales u_0 et la force extérieure appartiennent aux espaces $C^{k,\alpha}$, avec $k \geq 1$ et $\alpha \in (0, 1)$) (voir Gunther (1927) et Lichtenstein

(1930)). Dans ces espaces, il est garanti l'existence et l'unicité des solutions régulières sur un intervalle de temps dépendant de la norme des données initiales (en présence de viscosité, voir Navier-Stokes, Leray, 1934) sont des points importants. La question ouverte majeure est de savoir si ces solutions sont permanentes ou si elles peuvent présenter une singularité en un temps fini. Dans le cadre des équations d'Euler tridimensionnelles, on s'intéresse aux singularités et à l'existence, en un certain point, d'une solution qui cesse d'appartenir à un espace $C^{k,\alpha}$. Ceci indique que la fonction, ou ses dérivées, sont devenues trop irrégulières, ce qui correspond à la formation d'une singularité.

6. Écoulements axisymétriques

Dans l'étude des équations d'Euler 3D incompressibles, il est possible d'exploiter la structure géométrique de certaines solutions pour obtenir une formulation plus simple. En particulier, nous considérons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , où la base orthonormée est donnée par :

$$e_r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0 \right), \quad e_\theta = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0 \right), \quad e_z = (0, 0, 1)$$

avec $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. On dit qu'un champ de vitesses $\mathbf{u}$ est axisymétrique s'il a la forme :

$$\mathbf{u} = u^r(r, z, t)e_r + u^\theta(r, z, t)e_\theta + u^z(r, z, t)e_z$$

La vorticité correspondante $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$ de ces flux est donnée par :

$$\boldsymbol{\omega} = -u_z^\theta e_r + \underbrace{(u_z^r - u_r^z)}_{\omega^\theta} e_\theta + \frac{1}{r}(ru^\theta)_r e_z$$

Cette réduction est significative car elle transforme le problème initial en trois dimensions en un problème essentiellement bidimensionnel, puisque les équations régissantes ne dépendent que de (r, z) et non de θ . Si, en outre, le champ des vitesses est axisymétrique sans composante azimutale (de rotation), c'est-à-dire si $u_\theta \equiv 0$, les équations d'Euler tridimensionnelles se réduisent à une équation plus simple pour la composante ω_θ de la vorticité :

$$\omega_t^\theta + u^r \frac{\partial \omega^\theta}{\partial r} + u^z \frac{\partial \omega^\theta}{\partial z} = \omega^\theta \frac{u^r}{r}$$

Dans ce cas, la dynamique des flux est entièrement déterminée par l'évolution de la vorticité angulaire ω^θ , qui suit une équation de transport avec un terme source proportionnel à ω^θ/r , qui reflète l'effet de la géométrie cylindrique.

De plus, cette formulation joue un rôle fondamental dans l'étude de la formation possible des singularités dans les solutions d'Euler, car c'est dans ce cadre que certaines des conjectures les plus importantes liées à l'explosion en temps fini de la vorticité ont été formulées. En particulier, la présence du terme ω^θ/r suggère un possible mécanisme d'amplification de la vorticité près de l'axe de symétrie ($r = 0$), ce qui a motivé de nombreuses études théoriques et numériques dans la recherche de scénarios de *blow-up*.

D'un point de vue analytique, la réduction axisymétrique sans rotation permet l'utilisation de techniques développées pour les équations de transport et d'advection en deux dimensions. Pour ce type de solutions sans rotation, il a été démontré que, dans certaines conditions, les solutions sont globales dans le temps. Plus précisément, les travaux d'Ukhovskii et Iudovich (1968), puis de Danchin (2007), établissent que si les données initiales appartiennent à l'espace de Hölder $C_c^{1,1/3+}$, alors la solution persiste globalement dans le temps. L'espace $C_c^{1,1/3+}$ désigne les fonctions à support compact et différentiables avec une exigence supplémentaire de régularité

pour la dérivée, la vorticité initiale ω_0^θ étant continue au sens de Hölder avec un exposant supérieur à $1/3$. Ce seuil de régularité est crucial, car il garantit que la solution ne développe pas de singularités en temps fini dans le modèle axisymétrique sans rotation. Toutefois, le résultat laisse ouverte la question des données initiales avec une régularité $C_c^{1,\alpha}$ avec $0 < \alpha \leq 1/3$, où il existe une possibilité de formation de singularités en temps fini.

7. Particularités 3D d'Euler

Au cours des dernières années, plusieurs mécanismes de formation de singularités en temps fini ont été développés pour le système incompressible tridimensionnel d'Euler, dans le cadre des solutions classiques $C^{1,\alpha}$.

Les solutions construites possèdent une énergie finie et présentent une concentration de vorticité à l'intérieur du fluide. À ce jour, cinq scénarios différents sont connus. Deux d'entre eux présentent une structure auto-similaire, tandis que les trois autres sont basés sur des mécanismes de type cascade, où des couches successives de vorticité s'accumulent à des échelles de plus en plus petites près du point d'explosion.

7.1. Singularités auto-similaires. Une solution ω est dite exactement auto-similaire si elle a la forme auto-similaire :

$$\omega(x, t) = \frac{1}{1-t} F\left(\frac{x}{(1-t)^\xi}\right)$$

pour une constante $\xi > 0$. À mesure que t s'approche de $t = 1$ à partir de valeurs inférieures, la fonction ω développe une singularité du type $|x|^{-\beta}$ près de l'origine, pour un petit $\beta > 0$.

Dans ce contexte, la fonction F satisfait une équation indépendante du temps, obtenue après avoir redimensionné de manière appropriée l'espace et le temps dans l'équation de vorticité. Ce type de scénario permet, en principe, de saisir la géométrie fine de l'explosion; cependant, sa construction rigoureuse représente un défi considérable, tant sur le plan technique que conceptuel.

Il convient de rappeler que divers travaux ont établi des critères d'inexistence de solutions auto-similaires dans les équations d'Euler et de Navier-Stokes sous certaines conditions de décroissance spatiale. Dans le cas d'Euler, ces résultats exigent généralement que la vorticité ne décroisse pas trop rapidement à l'infini, ce qui limite l'applicabilité du scénario auto-similaire exact à des contextes à énergie infinie.

7.1.1. Singularités auto-similaires de solutions axisymétriques sans rotation en $C^{1,\alpha}$ ($\alpha \ll 1$). Dans un travail pionnier, Elgindi (2021) a été le premier à démontrer la formation de singularités en temps fini dans les équations d'Euler. Son analyse s'est concentrée sur les écoulements axisymétriques sans rotation, en considérant les profils de vitesse dans l'espace de Hölder $C^{1,\alpha}$, avec α un nombre très petit, et qui sont C^∞ en dehors d'un ensemble de mesure nulle. Ses résultats établissent l'existence de solutions avec *blow-up* auto-similaire exact, mais avec une énergie infinie (la décroissance dans l'espace de la vorticité n'est pas suffisamment rapide) et sans influence de forces externes.

Il est important de souligner qu'en introduisant une force externe $C^{1,\alpha}$ non nulle, il est possible de construire des solutions avec *blow-up* et énergie finie, comme mentionné dans l'observation 1.4 d'Elgindi (2021). Dans un travail ultérieur, Elgindi et al. (2021) ont étendu ces résultats en

démontrant que ces solutions auto-similaires de *blow-up* peuvent être localisées. En analysant leur stabilité, ils ont confirmé l'existence de singularités en temps fini dans les équations d'Euler sans forces externes ($f = 0$) pour des solutions d'énergie finie en $C^{1,\alpha}$. Récemment, des progrès significatifs ont été réalisés dans ce contexte en présence d'une frontière, y compris des tests assistés par ordinateur sur la stabilité des singularités auto-similaires dans les écoulements axisymétriques (voir Elgindi et Jeong (2019), Chen et Hou (2021), Chen et Hou (2025a) et Chen et Hou (2025b)).

7.1.2. Blow-up auto-similaire dans les écoulements axisymétriques avec rotation. Plus récemment, Elgindi et Pasqualotto (2023) ont examiné le cas des écoulements axisymétriques avec rotation et ont démontré l'existence de solutions avec *blow-up* auto-similaire en $C^{1,\alpha}$, où la singularité se produit loin de l'origine. La construction nécessite de valider numériquement l'inversibilité d'un opérateur linéaire essentiel dans l'analyse, à l'aide de méthodes assistées par ordinateur. Cette étape est cruciale pour garantir la validité du profil auto-similaire et sa stabilité, et marque une tendance croissante à l'interaction entre l'analyse rigoureuse et la vérification informatique dans l'étude des singularités.

7.2. Singularités dues à une cascade de couches de vorticité.   l'ICMAT, nous avons développé une stratégie alternative pour démontrer la formation de singularités, sans recourir à l'autosimilarité, qui trouve son origine dans la thèse de doctorat de Luis Martínez Zoroa. Cette stratégie consiste à générer une cascade de couches de vorticité $\omega_n(x, t) \in C_c^\infty$ localisées dont le support qui diminuent à mesure qu'elles s'accumulent au point où se développe la singularité. L'augmentation de l'amplitude d'une couche est principalement due à son interaction avec la couche qui la précède. La forme fonctionnelle et géométrique des variables du fluide dans chaque couche est choisie de manière à ce que les termes quadratiques purs (c'est-à-dire les auto-interactions) s'annulent à l'ordre zéro. La solution peut être décrite par un nombre infini de couches:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x, t)$$

qui se concentrent en un point.

L'une des principales difficultés dans les estimations consiste à quantifier l'évolution de l'interaction d'une couche avec celles qui apparaissent par la suite. Dans le cas d'un fluide axisymétrique sans rotation, nous pouvons démontrer que, dans certaines conditions, ces interactions sont faibles. Dans les deux autres scénarios (non axisymétriques et axisymétriques avec rotation), les couches sont introduites séquentiellement dans le temps, c'est-à-dire qu'au début ($t = 0$), il n'existe qu'une seule couche et, au fur et à mesure que le temps passe, d'autres couches apparaissent dans la construction. La succession d'instants auxquels les couches sont introduites, que nous désignons par t_n , a un point d'accumulation, le temps de *blow-up*, que nous fixons à $t = 1$.

Cette méthode génère une explosion caractérisée par la divergence de l'intégrale:

$$\int_0^t |\nabla \cdot u| ds \longrightarrow +\infty, \quad \text{quand } t \longrightarrow 1$$

ce qui indique une croissance infinie des dérivées de la solution, bien que celle-ci reste régulière dans tout le domaine, sauf au point d'explosion.

Nous présentons ci-dessous les trois scénarios, conceptuellement différents, dans lesquels ce mécanisme s'est révélé efficace.

7.2.1. *Blow-up non auto-similaire pour les solutions axi-symétriques sans rotation.* Dans les travaux de Córdoba, Martínez Zoroa et Zheng (2025), des solutions sont construites pour les équations d'Euler 3D incompressibles sans force externe dans le domaine $\mathbb{R}^3 \times [-T, 0]$ pour un temps $T > 0$, avec des profils de vitesse dans l'espace fonctionnel:

$$C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \cap C^{1,\beta} \cap L^2, \text{ avec } 0 < \beta < \frac{1}{3} \text{ et } t \in (-T, 0)$$

Ces solutions sont douces dans tout le domaine, à l'exception d'un point singulier de régularité $C^{1,\beta}$ (avec $\beta > 0$ et très petit) et développent un *blow-up* en $t = 0$. De plus, elles sont composées d'une succession de régions ou de couches de vorticité qui se rapprochent progressivement de l'origine, formant une structure en chaise hyperbolique au centre. Cette configuration génère un mouvement et une déformation qui affectent les vorticités des couches suivantes. Dans ce régime, la dynamique d'Euler peut être approchée par un système infini d'équations différentielles ordinaires, ce qui permet une analyse précise du comportement dans le temps et une démonstration détaillée du *blow-up*. Concrètement, l'amplitude x_n de la couche numéro n satisfait l'équation différentielle ordinaire:

$$\dot{x}_n = x_n(x_0 + \dots + x_{n-1}) + Error$$

où l'erreur est faible et contrôlable. Ce système peut être résolu explicitement en obtenant les conditions nécessaires pour avoir une singularité à l'instant $t = 0$:

$$x_n(0) = A^n \longrightarrow +\infty \quad (A > 1, n \longrightarrow \infty)$$

De plus, les auteurs obtiennent le comportement asymptotique suivant dans le temps :

$$x_n(t) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty, t < 0)$$

Ce phénomène implique une régularisation instantanée dans le sens temporel. Cependant, en raison de la réversibilité temporelle des équations, le même mécanisme génère une singularité lorsqu'on considère l'évolution vers des temps futurs. Les auteurs travaillent avec la troncature.

En d'autres termes, ils suppriment les valeurs de l'équation qui sont les plus éloignées dans le temps.

$$\omega_N(x, t) = \sum_{n=0}^N \omega_n(x, t)$$

dont l'existence locale, associée à des estimations a priori de l'énergie, implique que la succession tronquée ω_N converge vers une solution lisse ω dans l'espace C^∞ sauf à l'origine. La solution obtenue est continue selon Hölder, présentant un *blow-up* dans la norme L^∞ de la vorticité. L'analyse montre en outre que la norme croît proportionnellement à:

$$1/|Ct| \leq \max |\omega(., t)| \leq C/|t|$$

avec C une constante.

7.2.2. Blow-up dans les solutions non axisymétriques avec force externe. Dans un autre travail, Córdoba et Martínez Zoroa (2023) présentent un mécanisme d'explosion pour les équations d'Euler tridimensionnelles avec force externe, en se concentrant sur les solutions non axisymétriques. Des solutions sont construites dans $\mathbb{R}^3$ dans l'espace fonctionnel $C^{3,1/2} \cap L^2$ dans l'intervalle de temps $[0, T)$, avec $T > 0$ fini et soumises à une force externe dans $C^{1,1/2-\epsilon} \cap L^2$. Leur mécanisme n'utilise pas de coordonnées auto-similaires et permet de construire des singularités dans des solutions avec une régularité supérieure à $C^{1,1/3+}$, ce qui serait impossible dans le contexte des solutions axisymétriques sans rotation.

Pour étudier ce scénario de *blow-up*, ils commencent par considérer une solution $\omega(x, t)$ de l'équation d'Euler 3D dans la formulation de la vorticité qui satisfait $\omega(0, t) = 0$, $D^1\omega(0, t) = 0$ et $u(\omega(0, t)) \approx (x_1 - x_2, 0)$, où $D^i\omega$ désigne les dérivées partielles d'ordre i de ω . Ensuite, en ajoutant une petite perturbation autour de l'origine $\omega_\lambda(x) = g(\lambda x)$, nous obtenons formellement, pour λ très grand, l'équation d'évolution:

$$\begin{aligned} \partial_t \omega_\lambda(x, t) + (u(\omega_\lambda) + (x_1, -x_2, 0)) \cdot \nabla \omega_\lambda &= \\ = \omega_\lambda \cdot \nabla (u(\omega_\lambda) + (x_1, -x_2, 0)), & \quad \omega_\lambda(x, 0) = g(\lambda x) \end{aligned}$$

En choisissant $g(\lambda x) = (g_1(\lambda x), 0, g_3(\lambda x))$, cela se simplifie en:

$$\begin{aligned} \partial_t \omega_{1,\lambda} + (u(\omega_\lambda) + (x_1, -x_2, 0)) \cdot \nabla \omega_{1,\lambda} &= \omega_\lambda \cdot \nabla u(\omega_{1,\lambda}) + \omega_{1,\lambda}, \\ \partial_t \omega_{3,\lambda} + (u(\omega_\lambda) + (x_1, -x_2, 0)) \cdot \nabla \omega_{3,\lambda} &= \omega_\lambda \cdot \nabla u(\omega_{3,\lambda}), \\ \omega_{1,\lambda}(x, 0) &= g_1(\lambda x), \quad \omega_{3,\lambda}(x, 0) = g_3(\lambda x) \end{aligned}$$

Enfin, en faisant l'hypothèse (assez optimiste) que les termes quadratiques par rapport à $\omega_\lambda(x, t)$ restent faibles pendant un temps suffisamment long, ils obtiennent les équations d'évolution simplifiée:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \partial_t \omega_{1,\lambda} + (x_1, -x_2, 0) \cdot \nabla \omega_{1,\lambda} &= \omega_{1,\lambda} \\ \partial_t \omega_{3,\lambda} + (x_1, -x_2, 0) \cdot \nabla \omega_{3,\lambda} &= 0 \\ \omega_{1,\lambda}(x, 0) &= g_1(\lambda x), \quad \omega_{3,\lambda}(x, 0) = g_3(\lambda x) \end{aligned}$$

Ce système d'équations peut être étudié explicitement et il est relativement simple de trouver des conditions initiales où $D^1 u(\omega_1, \lambda)$ croît de manière significative. La stratégie pour démontrer le *blow-up* serait la suivante :

* On choisit $\omega(x, t)$ de telle sorte que sa vitesse génère un flux hyperbolique autour de l'origine, avec $\omega(0, t) = \partial_{x_j} \omega(0, t) = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. On appelle $\omega(x, t)$ la couche à grande échelle.

* Une petite perturbation $\omega_\lambda(x)$ est ajoutée à l'origine, appelée couche à petite échelle. On considère $\omega_\lambda(x, t)$ comme solution de (7.4).

* Il est vérifié que $\omega(x, t) + \omega_\lambda(x, t)$ est une solution de l'équation d'Euler 3D incompressible forcée dans la formulation de la vorticité. Si toutes ces approximations pour obtenir (7.4) sont raisonnables, la force requise devrait être faible et relativement régulière.

* Si $\omega_\lambda(x, t)$ est choisi de manière appropriée, $\omega(x, t) + \omega_\lambda(x, t)$ peut produire un flux hyperbolique très fort autour de l'origine pour ≈ 1 , en respectant également:

$$\omega(0, t) + \omega_\lambda(0, t) = \partial_{x_j} (\omega(0, t) + \omega_\lambda(0, t)) = 0$$

* Ce flux hyperbolique plus puissant peut être utilisé pour amplifier encore plus rapidement une nouvelle perturbation. En répétant ce processus à l'infini, on obtient un *blow-up*.

Cependant, il existe des complications importantes. Tout d'abord, il est nécessaire de vérifier que (7.4) fournit réellement une solution à l'équation d'Euler 3D incompressible forcée.

Plus important encore, les termes quadratiques en $\omega\lambda(x, t)$, c'est-à-dire:

$$u(\omega_\lambda(x, t)).\nabla\omega_\lambda(x, t), \quad \omega_\lambda(x, t)).\nabla u(\omega_\lambda(x, t))$$

doivent être petits. Cependant, cela semble entrer en conflit avec nos hypothèses selon lesquelles ω_λ est hautement localisé et que $D^1u(\omega_\lambda(x, t))$ augmente de manière significative. Pour résoudre ce problème, nous recherchons un $\omega_\lambda(x, t)$ où il y a une certaine annulation dans les termes quadratiques, les rendant beaucoup plus petits que ce à quoi on pourrait s'attendre en général.

7.2.3. Cascade de vorticité dans les écoulements axisymétriques avec rotation. Nous décrivons ci-dessous un mécanisme de formation de singularités en temps fini pour les équations d'Euler incompressibles en 3D, dans le contexte des écoulements axisymétriques avec rotation, avec une force externe de régularité $C^{1, \sqrt{4/3}-1-\epsilon}$. Ce résultat (voir Córdoba, Laín Sanclemente et Martínez Zoroa, 2025) peut être considéré comme analogue, bien qu'avec des différences significatives, à celui développé dans le scénario précédent : non axisymétrique avec une force $C^{1, 1/2-\epsilon}$.

Les deux scénarios partagent certains principes structurels. En particulier, dans les deux cas, on construit une famille de couches imbriquées avec un support décroissant, dont l'interaction séquentielle dans le temps donne lieu à la croissance de la vorticité. L'activation de chaque couche dépend principalement de son interaction avec la couche immédiatement précédente et son support reste toujours contenu dans celui de la couche précédente. De plus, la dépendance fonctionnelle des couches du fluide est choisie de manière à ce que les termes quadratiques purs (les auto-interactions) s'annulent à l'ordre zéro, ce qui est crucial pour contrôler les non-linéarités dominantes dans les premières phases de l'évolution. On observe également que le degré de perte de régularité au moment du *blow-up* est comparable dans les deux contextes.

Tant dans le cas axisymétrique avec rotation que dans le cas non axisymétrique, la dynamique du système repose sur la formation et la persistance d'un point hyperbolique, autour duquel se produit la croissance couche par couche. Cependant, il existe une différence géométrique essentielle dans la manière dont la déformation se produit : dans le cas non axisymétrique, la déformation des couches est unidirectionnelle (une fois déformées, les structures ne retrouvent pas leur forme initiale), tandis que dans le cas axisymétrique avec rotation, la déformation est bidirectionnelle (les couches se déforment initialement, mais reprennent ensuite la forme qu'elles avaient lorsqu'elles ont été activées). Ce comportement réversible est une caractéristique distinctive du régime axisymétrique.

Une autre différence fondamentale réside dans le fait que, dans le cas axisymétrique, les centres des couches subissent un déplacement spatial au fil du temps. Cette translation n'est pas purement esthétique : elle est nécessaire à la survenue du *blow-up*. En fait, cette dynamique de translation est intimement liée à la géométrie inhérente au système axisymétrique et n'a pas d'équivalent dans le cas non axisymétrique.

De plus, dans le régime axisymétrique avec rotation, les variables de vitesse angulaire (u^θ) et de vorticité angulaire (ω_θ) agissent, dans un certain sens, comme des variables indépendantes. Cela se traduit par le fait que leurs comportements dans le temps sont nettement différents : alors

que l'amplitude de la couche de vitesse angulaire augmente d'abord puis diminue, l'amplitude de la couche correspondante de vorticité angulaire augmente de manière soutenue jusqu'au moment du *blow-up*. Cette dissociation n'est pas observée dans le scénario non axisymétrique .

Un autre aspect exclusif du cas axisymétrique est qu'à chaque instant, seule une couche de vitesse est active, tandis que toutes les couches de vorticité introduites jusqu'à ce moment-là restent actives simultanément. Une conséquence intéressante de cela est que la dérivée temporelle de la vitesse angulaire, dont l'intégrale temporelle diverge en $t = 1$, s'annule dans une séquence de temps qui s'accumule au moment du *blow-up*. Ce phénomène n'a pas non plus d'équivalent dans le cas non axisymétrique.

D'un autre côté, bien que dans les deux contextes le temps d'explosion soit fini, le taux de croissance diffère de manière non tabulaire. Dans le cas axisymétrique avec rotation, le rythme d'explosion est, au plus, de type potentiel, tandis que dans le cas non axisymétrique, une explosion est atteinte plus rapidement que toute loi de puissance (par exemple, de type exponentiel ou même superexponentiel).

Enfin, il convient de noter que dans le cas axisymétrique, on utilise un modèle idéal explicite qui détecte à la fois la déformation et la translation de chaque couche. Dans ce modèle, les « dégénérés inversés » jouent un rôle central dans la dynamique de croissance. Il n'existe pas de construction similaire pour le cas non axisymétrique.

Ces mécanismes représentent les avancées les plus récentes scientifiques aujourd'hui dans la compréhension de la formation des singularités dans les équations d'Euler tridimensionnelles bien que chacun de ces scénarios offre de nouvelles perspectives sur l'explosion possible en temps fini dans un contexte mou C^∞ , le problème général reste ouvert et fait l'objet de recherches intensives . Il est pertinent de souligner que, récemment dans Córdoba et Martínez Zoroa (2024), il a été démontré la formation de singularités par le biais d'un cas-à-dire chaque vorticité dans un contexte complet mou (c'est-à-dire avec des données initiales et une force externe dans C^∞) pour les équations de milieux incompressibles poreux. Ce résultat suggère la possibilité qu'un mécanisme similaire puisse également se produire des singularités dans les équations tridimensionnelles d'Euler.

Singularités liées à la viscosité : le cas des équations de Navier-Stokes fractionnaires

Nous nous demandons maintenant ce qui se produit si l'on introduit une dissipation fractionnaire dans les équations d'Euler, dans le même scénario de formation de singularités non axisymétriques que nous avons décrit précédemment. Autrement dit, nous considérons le problème de Cauchy suivant pour les équations de Navier-Stokes fractionnaires dans $\mathbb{R}^3$:

$$(7.5) \quad \begin{aligned} u_t + u \cdot \nabla u + \nabla P + \nu |\nabla|^\alpha u &= f, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

avec les données initiales $u_0 = u(x, 0)$, où $\nu > 0$ est la viscosité et l'opérateur fractionnaire $|\nabla|^\alpha$ est défini par son symbole de Fourier comme:

$$\widehat{|\nabla|^\alpha g}(\xi) = |\xi|^\alpha \hat{g}(\xi), \quad \text{c'est à dire } |\nabla|^\alpha g \equiv (-\Delta)^{\alpha/2} g$$

Lorsque $\alpha = 2$, on retrouve les équations de Navier-Stokes classiques. Si $0 < \alpha < 2$, on parle d'équations hypodissipatives, où la dissipation d'énergie est plus faible que celle fournie par le laplacien complet. En revanche, si $\alpha > 2$, on a affaire à des équations hyperdissipatives. Enfin, le cas $v = 0$ correspond aux équations d'Euler.

Pour des solutions régulières, il est possible d'obtenir une identité de conservation de l'énergie en multipliant l'équation par la vitesse u et en intégrant par parties. On obtient alors l'égalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx + v \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left| |\nabla|^{\alpha/2} u(x, s) \right|^2 dx ds = \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, 0)|^2 dx + v \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u(x, s) \cdot f(x, s) dx ds \end{aligned}$$

Dans cette identité, le premier terme représente l'énergie cinétique à l'instant t , tandis que le second terme reflète la dissipation d'énergie due aux effets visqueux. Cette dissipation est négligeable dans le cas des équations d'Euler ($v = 0$), où, en l'absence de forces extérieures, l'énergie totale est conservée au cours du temps.

En prenant le rotationnel de l'équation, on obtient sa formulation en termes de vorticit   $\omega = \nabla \wedge u$:

$$(7.6) \quad \omega_t + u \cdot \nabla \omega + v |\nabla|^\alpha \omega = \nabla \wedge f + \omega \cdot \nabla u$$

L'analyse de ces   quations r  v  le un seuil critique pour $\alpha = 5/2$. On sait que si $\alpha \geq 5/2$, toute solution r  guli  re des   quations de Navier-Stokes fractionnaires est globalement r  guli  re (voir Lions, 1969). De plus, ce seuil a   t     tendu logarithmiquement    des valeurs l  g  rement inf  rieures de α (voir Tao, 2009). Par ailleurs, Hou (2023) apporte des preuves num  riques de la formation de singularit  s pour $\alpha = 2$.

Dans leurs travaux, C  rdo  ba et al. (2024) montrent que, m  me dans le r  gime d'existence locale des   quations de Navier-Stokes hypodissipatives, il est possible de construire des solutions classiques qui perdent leur r  gularit   en un temps fini. Leur principal r  sultat est le suivant :

Theorem 7.1. (C  rdo  ba et al., 2024). *Il y a une valeur:*

$$\alpha_0 = \frac{22 - 8\sqrt{7}}{9} > 0$$

de sorte que, pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0)$, il existe une solution des   quations de Navier-Stokes fractionnaires incompressibles avec force ext  rieure (7.5) dans $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$, avec $v > 0^2$ et avec une force ext  rieure dans $L_t^1([0, 1])C_x^{1, \epsilon} \cap L_t^\infty L_x^2$ pour un certain $\epsilon > 0$, telle que :

** la vitesse $u \in L_{t,x}^\infty \cap L_t^\infty L_x^2$,*

** pour $0 \leq t < 1$, la solution u est r  guli  re en x et satisfait :*

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^\infty} ds = \infty$$

La d  monstration de ce r  sultat repose sur un m  canisme similaire    celui utilis   dans le cas non axisym  trique d'Euler : une cascade de vorticit   g  n  r  e par une infinit   de couches d'  chelles spatiales diff  rentes. Chaque couche active la croissance de la suivante par interaction

2. En utilisant un argument de r   chelonnement, si le r  sultat est valable pour un certain $v > 0$, alors il est valable pour tout $v > 0$.

directe, permettant une dynamique cumulative. En sélectionnant judicieusement les couches de vorticité, on obtient des compensations utiles dans leur interaction, ce qui conduit à une équation d'évolution du premier ordre efficace décrivant l'amplification du système.

Cependant, l'introduction d'une dissipation fractionnaire introduit des difficultés supplémentaires importantes. Prem irement, la diffusion s'oppose à la croissance de la vorticité et, pour compenser cet effet, les solutions doivent développer un comportement plus singulier. Plus précisément, si la dissipation est de l'ordre de α , la régularité de la vitesse au moment du *blow-up* est inférieure à $C^{1-\alpha}$, alors que dans Córdoba et Martínez Zoroa (2023), une régularité arbitrairement proche de C^1 pouvait être obtenue. Cette perte de régularité rend le système plus difficile à contrôler, notamment en ce qui concerne les auto-interactions des couches, qui, a priori, se situent en d   du régime de régularité souhaité.

De plus, la dissipation limite les fréquences possibles associées à chaque couche. En particulier, la séparation exponentielle des fréquences utilisée dans le cas non visqueux n'entraîne plus de croissance sous diffusion, quel que soit l'ordre des fréquences. Par ailleurs, le choix de fréquences permettant une croissance en présence de diffusion tend à amplifier les erreurs d'interaction entre les couches, générant des termes d'ordre supérieur qui doivent être contrôlés avec précision.

Enfin, il est nécessaire de construire des approximations explicites de l'opérateur de diffusion fractionnaire qui puissent être intégrées à l'évolution du premier ordre sans altérer la structure des solutions. Autrement, ces corrections risqueraient de perturber les autres estimations intervenant dans l'analyse.

Ce résultat démontre qu'en présence d'une dissipation fractionnaire suffisamment faible, le mécanisme de cascade de vorticité décrit dans le scénario d'Euler non axisymétrique persiste et peut engendrer un *blow-up*, même dans un contexte où l'équation admet une existence locale. En ce sens, notre construction fournit un contre-exemple à la régularité globale dans le régime hypodissipatif sous-critique et montre que le frottement introduit par $|\nabla|^\alpha$ n'est pas toujours suffisant pour empêcher la formation de singularités.

Perspectives d'avenir

Malgré les progrès considérables réalisés au cours de la dernière décennie, le problème de l'existence et de la régularité des équations de Navier-Stokes en trois dimensions demeure ouvert. La communauté mathématique poursuit le développement de nouveaux outils et approches afin de mieux comprendre les mécanismes susceptibles d'engendrer des singularités, ou d'établir des barrières garantissant leur absence dans certaines situations. Cet effort, nourri par une interaction de plus en plus riche entre l'analyse mathématique, la dynamique des fluides et les simulations numériques, est devenu un exemple paradigmatique de la convergence possible entre mathématiques pures et appliquées autour d'une même question fondamentale.

Pour marquer le 25 me anniversaire de la formulation des Problèmes du Millénaire, l'Institut Clay de Mathématiques a organisé **la Conférence de Recherches Clay 2025**, qui s'est tenue à l'Université d'Oxford du 29 septembre au 3 octobre 2025. Lors de cette conférence, des séances plénières ont été consacrées aux sept Problèmes du Millénaire, afin de revenir sur les progrès accomplis au cours du dernier quart de siècle et d'envisager les perspectives d'avenir

(<https://is.gd/rCOUAX>). Un atelier spécialisé sur les équations aux dérivées partielles et la dynamique des fluides a également été organisé, axé sur le problème de régularité des équations de Navier-Stokes (<https://is.gd/dI95nj>). Cette rencontre a permis aux groupes de recherches les plus importants et les plus actifs dans le domaine de présenter leurs résultats les plus récents et d'en discuter avec d'autres experts.

La compréhension complète du comportement des fluides demeure l'un des plus grands défis intellectuels de notre époque. Les années à venir, portées par des initiatives comme celle-ci, seront cruciales pour résoudre l'une des grandes énigmes des mathématiques du XXI^e siècle.

Références

Agrawal, S. (2024). Angled crested like water waves with surface tension II: Zero surface tension limit. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 293(1458), v+124. <https://doi.org/10.1090/memo/1458>

Beale, J. T., Kato, T. & Majda, A. (1984). Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Comm. Math. Phys.*, 94(1), 61-66.
<http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103941230>

Castro, A., Córdoba, D., Fefferman, C., Gancedo, F. & Gómez-Serrano, J. (2013). Finite time singularities for the free boundary incompressible Euler equations. *Ann. of Math.* (2), 178(3), 1061-1134. <https://doi.org/10.4007/annals.2013.178.3.6>

Chen, J. & Hou, T. Y. (2021). Finite time blowup of 2D Boussinesq and 3D Euler equations with $C^{1,\alpha}$ velocity and boundary. *Comm. Math. Phys.*, 383(3), 1559-1667.
<https://doi.org/10.1007/s00220-021-04067-1>

Chen, J. & Hou, T. Y. (2025a). Stable nearly self-similar blowup of the 2D Boussinesq and 3D Euler equations with smooth data I: Analysis. *Multiscale Model. Simul.*, 23(1), 25-130.

Chen, J. & Hou, T. Y. (2025b). Stable nearly self-similar blowup of the 2D Boussinesq and 3D Euler equations with smooth data II: Rigorous numerics. *Multiscale Model. Simul.*, 23(1), 25-130. <https://doi.org/10.1137/23M1580395>

Córdoba, D., Enciso, A. & Grubic, N. (2023). Finite-time singularity formation for angled-crested water waves. Preprint arXiv:2303.00027. Aceptado en *Duke Math. J.*

Córdoba, D., Laín Sanclemente, A. & Martínez Zoroa, L. (2025). Finite-time singularity via multi-layer degenerate pendula for the 2D Boussinesq equation with uniform

$4/3 - 1 - \epsilon \cap L^2$ force. *Advances in Mathematics*, (480). Consultado el 20-11-2025, en <https://is.gd/nIR1Ic>

Córdoba, D. & Martínez Zoroa, L. (2023). Blow-up for the incompressible 3D-Euler equations with uniform $C^{1,1/2-\epsilon} \cap L^2$ force. Preprint arXiv:2309.08495.

Córdoba, D. & Martínez Zoroa, L. (2024). Finite time singularities of smooth solutions for the 2D incompressible porous media (IPM) equation with a smooth source. Preprint

arXiv:2410.22920.

Córdoba, D., Martínez Zoroa, L. & Zheng, F. (2024). Finite time blow-up for the hypodissipative Navier Stokes equations with a force in $L_t^1 C^{1,x} \cap L_t^\infty L^2$ Preprint arXiv:2407.06776.

Córdoba, D., Martínez Zoroa, L. & Zheng, F. (2025). Finite time singularities to the 3D incompressible Euler equations for solutions in $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus 0) \cap C^{1,\alpha} \cap L^2$. *Annals of PDE*, 11(2). Paper No. 19, 56.

Danchin, R. (2007). Axisymmetric incompressible flows with bounded vorticity. *Uspekhi Mat. Nauk*, 62(3), 73-94. <https://doi.org/10.1070/RM2007v062n03ABEH004412>

Elgindi, T. M. & Pasqualotto, F. (2023). From instability to singularity formation in incompressible fluids. Preprint arXiv:2310.19780.

Elgindi, T. (2021). Finite-time singularity formation for $C^{1,\alpha}$ solutions to the incompressible Euler equations on $\mathbb{R}^3$. *Ann. of Math.* (2), 194(3), 647-727. <https://doi.org/10.4007/annals.2021.194.3.2>

Elgindi, T. M., Ghoul, T.-E. & Masmoudi, N. (2021). On the stability of self-similar blow-up for $C^{1,\alpha}$ solutions to the incompressible Euler equations on $\mathbb{R}^3$. *Camb. J. Math.*, 9, 1035-1075.

Elgindi, T. M. & Jeong, I. (2019). Finite-time singularity formation for strong solutions to the axisymmetric 3D Euler equations. *Ann. PDE*, 5(2), Paper No. 16, 51. <https://doi.org/10.1007/s40818-019-0071-6>

Gunther, N. (1927). On the motion of fluid in a moving container. *Izvestia Akad. Nauk USSR, Ser. Fiz. Mat.*, 20(1), 1323-1348.

Hölder, E. (1933). Über die unbeschränkte Fortsetzbarkeit einer stetigen ebenen Bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen Flüssigkeit. *Math. Z.*, 37(1), 727-738. <https://doi.org/10.1007/BF01474611>

Hou, T. Y. (2023). Potentially singular behavior of the 3D Navier-Stokes equations. *Found. Comput. Math.*, 23(6), 2251-2299. <https://doi.org/10.1007/s10208-022-09578-4>

Leray, J. (1934). Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63(1), 193-248. <https://doi.org/10.1007/BF02547354>

Lichtenstein, L. (1930). Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. *Math. Z.*, 32(1), 608-640. <https://doi.org/10.1007/BF01194657>

Lions, J. L. (1969). Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris.

Tao, T. (2009). Global regularity for a logarithmically supercritical hyperdissipative Navier-Stokes equation. *Analysys of PDEs*, 2(3), 361-366. <https://doi.org/10.2140/apde.2009.2.>

361

Ukhovskii, M. R. & Iudovich, V. I. (1968). Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space. J. Appl. Math. Mech., 32, 52-62. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(68\)90147-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(68)90147-0)

Wolibner, W. (1933). Un theoreme sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. Math. Z., 37(1), 698-726. <https://doi.org/10.1007/BF01474610>

A. BEN HADJ SALEM
RÉSIDENCE BOUSTEN 8, AV. MOSQUÉE RAOUDHA,
BLOC B, APPART. B8
1181 SOUKRA-RAOUDHA, SOUKRA, TUNISIA
Email address: abenhadjsale@gmail.com