

Moti Orbitali

Stefano Giardinelli

3 febbraio 2026

Indice

1	Orbita circolare intorno ad un corpo massiccio	2
2	La legge di Keplero	3
3	Considerazioni sull'energia	3
4	Orbite ellittiche e traiettorie “fly-by”	4
5	Eccentricità di un'orbita ellittica	6
6	Satelliti artificiali	7
7	Orbita di trasferimento alla Hohmann	8
8	Un problema interessante	11
9	Analisi dettagliata di un'orbita ellittica	13
10	Manovre impulsive e propellente	15
11	Spinta del motore (Thrust)	16
12	Effetto di una spinta radiale	17
13	Sfera di influenza gravitazionale e punti di Lagrange	19
14	Moto iperbolico	21
15	Deflessione asintotica	24
16	Considerazioni generali sull'equazione delle coniche	25
17	Trasferimento da orbita terrestre ad orbita solare	26
18	Missione Marte	28
19	Fionda gravitazionale (Gravity Assist)	31

1 Orbita circolare intorno ad un corpo massiccio

Lavoriamo con un modello semplificato in cui consideriamo il moto di un corpo di massa m “attratto” da una grande massa $M \gg m$ posta nell’origine di un sistema di riferimento cartesiano. La massa M è da considerarsi distribuita in un volume sferico di raggio $R \gg z_g$, dove $z_g = \frac{2GM}{c^2}$ = raggio di Schwarzschild. In questo modo ci troviamo in regime non relativistico e possiamo usare la fisica di Newton. Il sistema solare è un buon esempio di questa approssimazione. Consideriamo dunque un pianeta ideale di massa m che si muove in un’orbita perfettamente circolare a distanza R dal Sole di massa M . Sia v la velocità orbitale del pianeta. La forza di gravità che agisce sul pianeta è diretta verso il sole ed il suo modulo è:

$$F_g = \frac{GMm}{R^2}$$

La forza centrifuga causata dalla velocità di rivoluzione orbitale è diretta radialmente e vale in modulo:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} \quad (1.1)$$

Nel moto orbitale, le due forze si bilanciano esattamente dunque possiamo scrivere:

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \quad (1.1)$$

da cui ricaviamo il valore della velocità orbitale:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (1.2)$$

in cui G è la costante di gravitazione universale di Newton.

Come abbiamo detto, questo risultato vale solo per un pianeta di massa molto minore del Sole che si muove in un’orbita circolare. La Terra è un buon esempio di questo tipo; calcoliamo dunque la sua velocità orbitale utilizzando i seguenti valori numerici: $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, $M \simeq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $R \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Si trova: $v = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 30 \text{ km/s}$.

È interessante capire come sia potuto “pesare” il Sole. Riscriviamo la 1.2 in modo diverso, elevandola al quadrato e ricavando la massa M :

$$M = \frac{Rv^2}{G} \quad (1.3)$$

Possiamo poi esprimere la velocità orbitale della Terra come rapporto tra la circonferenza di una intera rivoluzione attorno al sole ed il tempo T impiegato per percorrerla (1 anno espresso in secondi). Dunque:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (1.4)$$

Sostituendo la 1.4 nella 1.3 si ottiene:

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{R^3}{T^2} \quad (1.5)$$

La distanza Terra - Sole R si ricava da osservazioni e calcoli di geometria elementare, T è noto (l’anno in secondi), G è la costante di gravitazione ed il gioco è fatto. Prima di proseguire, una precisazione importante: ci occuperemo sempre e soltanto di moti che si svolgono in un unico piano.

2 La legge di Keplero

Circa 80 anni prima che Newton enunciasse la legge della gravitazione universale, Keplero, basandosi su osservazioni astronomiche e ipotesi matematiche, ricavò una legge empirica che recitava: “il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al sole è proporzionale al cubo della sua distanza media dal sole stesso”. All’epoca nessuno seppe dare una spiegazione logica di questa strana relazione. Noi lo abbiamo fatto con pochi passaggi scrivendo la 1.5, infatti riscriviamola in questa forma:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) R^3 \quad (2.1)$$

Il fattore in parentesi è costante per il moto di tutti i pianeti, dunque ecco che per ogni corpo che ruota intorno al Sole il periodo di rivoluzione al quadrato è proporzionale al cubo della sua distanza dal sole.

3 Considerazioni sull’energia

Nel nostro modello approssimato di pianeta visto come oggetto puntiforme in moto circolare uniforme attorno ad un corpo molto massiccio (Sole), poniamo quest’ultimo fermo nel suo sistema di riferimento e calcoliamo l’energia totale del corpo orbitante come somma di due componenti:

$$\text{Energia totale} = \text{Energia cinetica} + \text{Energia gravitazionale}$$

L’energia cinetica è semplicemente:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

L’energia gravitazionale può essere trovata calcolando il lavoro necessario per portare m dalla sua orbita distante R dal sole, fino ad una distanza infinita (dove m non sente più l’influenza gravitazionale di M):

$$L = \int_R^\infty F_g dr = \int_R^\infty \frac{-GMm}{r^2} dr = GMm \left[\frac{1}{r} \right]_R^\infty = -\frac{GMm}{R}$$

dunque l’energia gravitazionale del corpo orbitante è:

$$E_g = -\frac{GMm}{R} \quad (3.2)$$

L’equazione dell’energia totale per il nostro pianeta in orbita vale dunque:

$$E = E_k + E_g = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \quad (3.3)$$

Da notare che questa equazione è stata ricavata per una qualsiasi posizione di m a distanza R dal Sole, dunque vale, punto per punto, per qualsiasi traiettoria, non solo per l’orbita circolare in cui R è costante.

Applicheremo in seguito la 3.3 ad orbite ellittiche e/o a traiettorie paraboliche e iperboliche, ma per adesso restiamo al caso di orbite circolari. Ricaviamo v dalla 1.2 e sostituiamo il suo valore nella 3.3 ottenendo:

$$E = -\frac{GMm}{2R} \quad (3.4)$$

Questo importante risultato ci dice che l'energia di un corpo in orbita circolare è sempre negativa. In generale questo è vero per ogni sistema “legato” quindi per ogni corpo che si muove in orbita chiusa.

4 Orbite ellittiche e traiettorie “fly-by”

Immaginiamo di avere il nostro pianeta ideale che si muove in orbita circolare attorno al sole (linea nera continua). In ogni punto della circonferenza esso si muove con velocità v data dalla 1.2 (vedi ad esempio il punto Q).

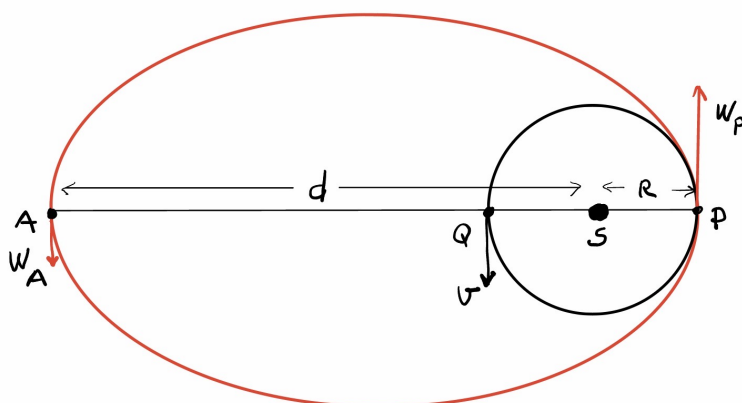


fig.1

Supponiamo adesso che il pianeta in P abbia invece una velocità $w_p > v$ tale da fargli abbandonare la vecchia cara orbita circolare. Come vedremo, se w_p è troppo grande il pianeta avrà un'energia positiva che lo porterà ad una traiettoria di uscita dal sistema solare, dunque, per il momento pensiamo ad una velocità w_p più grande di v , ma “non troppo”, in modo da avere il pianeta in un'orbita ellittica contenente la vecchia orbita circolare.

Per rendere quantitativo il nostro ragionamento dobbiamo invocare un altro principio di conservazione oltre a quello dell'energia: la conservazione del momento delle quantità di moto o semplicemente momento angolare.

Questo principio ci dice che per un corpo in moto su cui agiscono solo “forze centrali” ovvero dirette verso un unico punto (centro di forze di un sistema di riferimento), il prodotto della massa del corpo per la sua velocità per il braccio di tale velocità rispetto al centro di riferimento è costante.

Riferendoci alla fig. 1, il pianeta che si muove nell'orbita ellittica (rossa), quando si trova in P (punto più vicino al sole = perielio) ha un momento angolare:

$$L_p = m \cdot w_p \cdot R \quad (4.1)$$

Quando invece si trova in A (punto più lontano dal *Sole* = *afelio*) il suo momento angolare è:

$$L_A = m \cdot w_A \cdot d \quad (4.2)$$

Ma in A e P le forze in gioco (gravitazionale e centrifuga) sono entrambe centrali quindi non creano momento ed il momento angolare si conserva, dunque dalle 4.1 e 4.2 si ha:

$$L_p = L_A \rightarrow w_A = w_p \cdot \frac{R}{d} \quad (4.3)$$

Scriviamo adesso la conservazione dell'energia per l'orbita ellittica utilizzando la 3.3 applicata ai due punti P ed A:

$$\frac{1}{2}mw_p^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mw_A^2 - \frac{GMm}{d} \quad (4.4)$$

Dalla 4.3 otteniamo $w_A = w_p \frac{R}{d}$ che messa nella 4.4 (dopo aver eliminato m), fornisce:

$$\begin{aligned} w_p^2 - \frac{2GM}{R} &= w_p^2 \cdot \frac{R^2}{d^2} - \frac{2GM}{d} \\ w_p^2(1 - \frac{R^2}{d^2}) &= \frac{2GM}{R}(1 - \frac{R}{d}) \\ w_p^2(1 + \frac{R}{d}) &= \frac{2GM}{R} \\ w_p^2 &= \frac{GM}{R} \cdot \frac{2}{1 + \frac{R}{d}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ricordando la 1.2, dalla 4.5 possiamo ricavare:

$$w_p = v \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R}{d}}} \quad (4.6)$$

Fermiamoci a contemplare la 4.6. Innanzitutto essa ci dice che nel caso limite in cui l'ellisse si riduce alla nostra circonferenza ovvero $d = R$, si ha ovviamente $w_p = v$ come deve essere. Vediamo il limite opposto, ovvero ci chiediamo che valore deve avere w_p affinché l'ellisse diventi enorme con d tendente all'infinito (parabola), si ha con $d \rightarrow \infty$, $R/d \rightarrow 0$ quindi:

$$w_p|_{d \rightarrow \infty} = \sqrt{2} \cdot v \quad (4.7)$$

Abbiamo così risposto alla domanda che ci facevamo a inizio capitolo: quanto grande può essere w_p per continuare ad avere un'orbita chiusa? La risposta è ora chiara. Ecco i casi:

- a) $w_p = v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$: orbita circolare (caso limite)
- b) $v < w_p < \sqrt{2}v$: orbita ellittica
- c) $w_p = \sqrt{2}v$: traiettoria parabolica (caso limite)
- d) $w_p > \sqrt{2}v$: traiettoria iperbolica

Calcoliamo l'energia in ognuno dei casi:

a) $E = -\frac{GMm}{2R}$

b) $-\frac{GMm}{R} < E < 0$

c) $E = 0$

d) $E > 0$

Nei casi a) e b) (stati legati) il pianeta è “prigioniero” del Sole, nei casi c) e d) (stati liberi) il corpo (non pianeta) passa in “fly-by” a distanza R dal Sole.

5 Eccentricità di un'orbita ellittica

Ci proponiamo adesso di mettere in relazione quanto trovato nel capitolo 4 con le caratteristiche geometriche di una ellisse. In particolare vogliamo capire come è legata la velocità al perielio w_p all'eccentricità dell'ellisse. Innanzitutto ricordiamo che l'eccentricità è definita come il rapporto tra la distanza tra i due fuochi e l'asse maggiore:

$$e = \frac{\overline{FS}}{\overline{AP}} \quad (5.1)$$

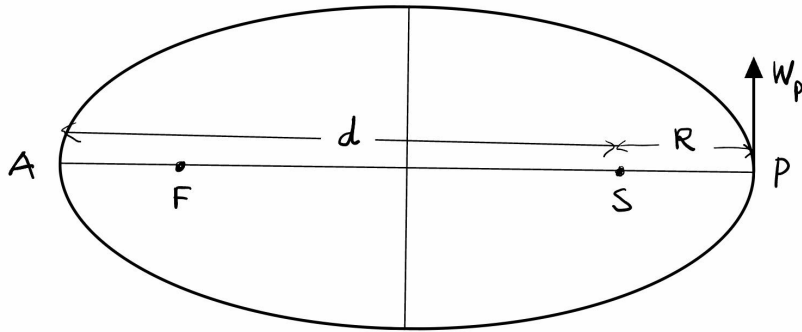


fig. 2

Il sole occupa uno dei fuochi e l'altro si trova in posizione simmetrica, dunque ricordando che $\overline{AS} = d$ e $\overline{PS} = R$, la 5.1 diviene:

$$e = \frac{d - R}{d + R} \quad (5.2)$$

moltiplicando ambo i membri per $(d + R)$:

$$e \cdot d + e \cdot R = d - R$$

e dividendo ora tutto per d :

$$e + e \frac{R}{d} = 1 - \frac{R}{d} \implies \frac{R}{d} = \frac{1 - e}{1 + e} \quad (5.3)$$

Sostituiamo la 5.3 nella 4.6 ed otteniamo:

$$w_p = v \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1-e}{1+e}}} = v \sqrt{1+e} \quad (5.4)$$

La 5.4 ci dice che velocità deve avere il pianeta al perielio per percorrere un'orbita ellittica con una data eccentricità. Per esempio, per avere un'orbita circolare ($e = 0$) dovrà essere:

$$w_p = v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

risultato noto. Per avere invece una ellisse grandissima, con $\overline{PS} \ll \overline{AP}$ dobbiamo avere $\overline{FS} \simeq \overline{AP} \rightarrow e = 1$. Ovvero:

$$w_p = \sqrt{2}v$$

(risultato altrettanto noto). Possiamo invertire la 5.4:

$$e = \left(\frac{w_p}{v}\right)^2 - 1 \quad (5.5)$$

che risponde al quesito: data una certa velocità al perielio, quale sarà l'eccentricità dell'orbita?

6 Satelliti artificiali

Tutto quanto visto finora si applica, ovviamente, non solo al sistema solare, ma anche a qualunque sistema gravitazionale costituito da una massa centrale molto grande rispetto ai corpi che gli si muovono attorno. In questo capitolo e oltre lavoreremo sui satelliti artificiali. Il nostro modello sarà dunque relativo ad un satellite (corpo di massa m) sottoposto all'influenza gravitazionale di un unico corpo di massa $M \gg m$. M potrà di volta in volta essere il Sole, la Terra, Marte...

In ogni caso opereremo in una approssimazione che vede sempre e soltanto un'unica massa M come centro di attrazione gravitazionale. Chiariamo il concetto con un esempio. Supponiamo di avere un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Terra ad un'altezza $h = 300 \text{ km}$ dal suolo. Ci chiediamo cosa possiamo fare per immetterlo in una traiettoria di fuga dalla Terra. Appliciamo la 1.2 con:

$$R \approx 6370 + h \approx 6670 \text{ km} = 6.67 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M = M_T \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Si trova $v = 7.8 \text{ km/s}$. La velocità che il satellite dovrebbe avere in P per trovarsi in una traiettoria parabolica di fuga è $w_p = \sqrt{2}v = 11.0 \text{ km/sec}$. Dunque se vogliamo trasferire il satellite orbitante verso una traiettoria di fuga, dobbiamo accendere i motori per aggiungere un incremento di velocità tangenziale:

$$\Delta v = w_p - v = 3.2 \text{ km/s} \quad (6.1)$$

Attenzione! In questo esempio stiamo considerando un satellite orbitante attorno alla Terra immaginata ferma al centro del sistema di riferimento. Questo è ragionevole

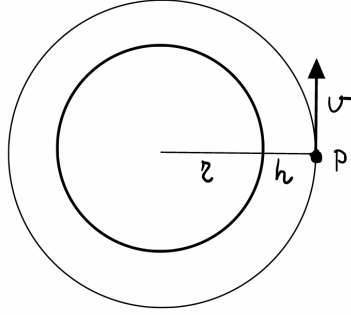


fig. 3

finché il satellite orbita attorno alla Terra. Quando esso entra nella traiettoria di fuga ed esce dall'influenza gravitazionale terrestre, dobbiamo spostarci nel riferimento del Sole e considerare il satellite in moto con velocità uguale alla somma vettoriale della velocità di fuga rispetto alla Terra più la velocità della Terra rispetto al sole che come abbiamo visto nel capitolo 1 è di circa 30km/s. Esamineremo a fondo questo problema nei prossimi capitoli.

Calcoliamo il periodo di rivoluzione del nostro satellite attorno alla Terra:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 5370 \text{ s} \simeq 1^h 30^m$$

Molto veloce! Il giro del mondo in un'ora e mezza.

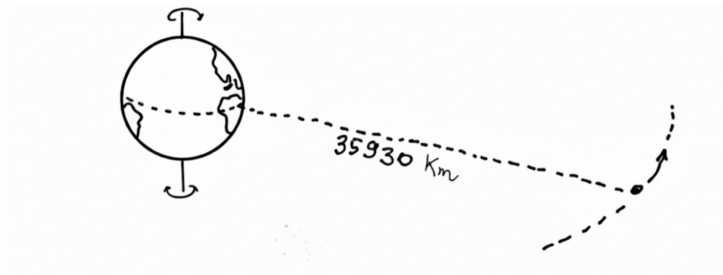


fig. 4

È interessante il caso dei satelliti geostazionari (fig.4). Si tratta di satelliti che sono “fermi” sulla verticale rispetto ad un punto sull'equatore. Per avere un satellite geostazionario dobbiamo posizionarlo in un'orbita circolare equatoriale ad un'altezza h tale per cui il periodo orbitale T sia uguale a 24 ore. Dalla 2.1 ricaviamo:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 42300 \text{ km} \quad (6.2)$$

da cui

$$h_{geo} = R - r_T = 42300 - 6370 = 35930 \text{ km}$$

7 Orbita di trasferimento alla Hohmann

Nel capitolo 4 abbiamo studiato il passaggio da un'orbita circolare ad una ellittica ottenuto aumentando la velocità orbitale della quantità $\Delta v = w_p - v$. Nel capitolo 5 abbiamo esaminato il caso limite di passaggio da orbita circolare a traiettoria di fuga parabolica.

Trent'anni prima del lancio dello Sputnik (il primo satellite artificiale) Hohmann, un ingegnere tedesco, ideò un metodo per trasferire un satellite artificiale da un'orbita circolare "base" ad un'altra orbita circolare più "alta".

Vediamone il funzionamento. Supponiamo che inizialmente il nostro satellite stia percorrendo con velocità v l'orbita circolare a distanza R dal centro della Terra. Sappiamo che per portare il satellite su un'orbita ellittica con distanza d dalla Terra all'apogeo occorre un incremento di velocità $\Delta v = w_p - v$. Utilizzando la 4.6 per w_p troviamo:

$$\Delta v_1 = v \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R}{d}}} - 1 \right) \quad (7.1)$$

Dunque azionando i razzi, aumentiamo la velocità tangenziale del satellite in P della quantità data dalla 7.1 trasferendo il satellite stesso nell'orbita ellittica (in rosso nel disegno).

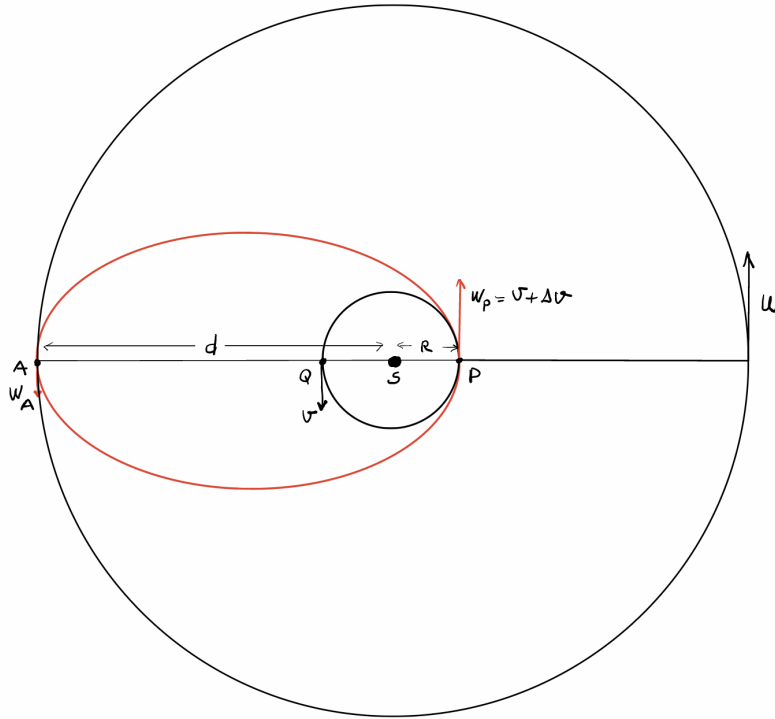


fig. 5

Quando il satellite si trova in A (apogeo) ha velocità $w_A = w_p \cdot R/d$ (vedi 4.3), in quel preciso momento azioniamo nuovamente i razzi per aumentare nuovamente la velocità e portarla da w_A a $u = \sqrt{\frac{GM}{d}}$ che è la velocità del moto orbitale circolare di raggio d .

Per la precisione l'incremento di velocità è:

$$\begin{aligned}
 \Delta v_2 &= u - w_A = \sqrt{\frac{GM}{d}} - v \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R}{d}}} \cdot \frac{R}{d} = \\
 &= \sqrt{\frac{GM}{d}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R}{d}}} \cdot \frac{R}{d} = \\
 &= \sqrt{\frac{GM}{d}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{d}{R}}} \right) = v \sqrt{\frac{R}{d}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{d}{R}}} \right) \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

Ricapitolando, supponiamo di avere un satellite in orbita circolare di raggio R con velocità $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ e di volerlo immettere in un'orbita circolare di raggio $d > R$. Si opera nel seguente modo:

1. Si aggiunge una velocità tangenziale Δv_1 data dalla 7.1 a v , immettendo il satellite nell'orbita ellittica con apogeo distante d dalla Terra.
2. Si aspetta che il satellite percorra mezza orbita ellittica e quando esso si trova all'apogeo A si effettua un secondo aumento di velocità tangenziale Δv_2 dato dalla 7.2.

Come conseguenza il satellite entra nell'orbita circolare di raggio d .

Come esempio studiamo il caso di un trasferimento da un'orbita bassa equatoriale alla corrispondente orbita geostazionaria.

Con il termine orbita bassa si intende un'orbita compresa tra i 160 km e 2000 km di altezza, cioè il limite tra gli strati alti dell'atmosfera e le fasce di Van Allen. Supponiamo di avere un satellite in orbita circolare equatoriale bassa a 2000 km di altezza, ovvero a distanza $R = 8370$ km dal centro della Terra. Abbiamo visto nel capitolo 6 che il raggio dell'orbita geostazionaria è $d = 42300$ km.

Dalla 1.2 troviamo la velocità orbitale del satellite in orbita bassa:

$$v = 6.9 \text{ km/s}$$

Sostituiamo i valori di R, d e v nella 7.1 ricavando:

$$\Delta v_1 = 2.0 \text{ km/s}$$

Con tale impulso il satellite entra nell'orbita ellittica di trasferimento ed una volta giunto all'apogeo applichiamo il secondo aumento di velocità (eq. 7.2):

$$\Delta v_2 = 1.3 \text{ km/s}$$

L'incremento complessivo di velocità è dato dalla somma dei due:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 3.3 \text{ km/s}$$

Interessante notare che il dispendio energetico che serve per effettuare il trasferimento alla Hohmann è superiore a quello richiesto per immettere il satellite dall'orbita bassa alla traiettoria parabolica di fuga. Infatti, dalla 4.7 ricaviamo che nel nostro caso la velocità di fuga è:

$$v_f = w_p|_{d \rightarrow \infty} = \sqrt{2} \cdot v = 9.7 \text{ km/s}$$

dunque in questo caso l'incremento di velocità richiesto è:

$$\Delta v_f = w_p - v = 2.8 \text{ km/s} < \Delta v = 3.3 \text{ km/s}$$

In estrema sintesi: costa meno lanciare via un satellite dal campo gravitazionale terrestre che spostarlo in un'orbita più alta!! Sembra un paradosso ma è la verità. D'altra parte la cosa è chiara se immaginiamo il lancio sulla traiettoria parabolica come trasferimento verso un'orbita circolare a distanza infinita.

8 Un problema interessante

Un satellite percorre un'orbita circolare intorno alla Luna. Un asteroide con massa uguale al satellite cade radialmente verso la Luna partendo da grande distanza con velocità trascurabile. L'asteroide collide con il satellite, lo penetra e rimane incastrato all'interno di esso. Dopo l'impatto il satellite (con l'asteroide al suo interno) percorre un'orbita ellittica che lo porta a sfiorare la superficie della Luna. Qual'era il raggio dell'orbita prima dell'impatto? (Si dia la risposta espressa come multiplo del raggio lunare r).

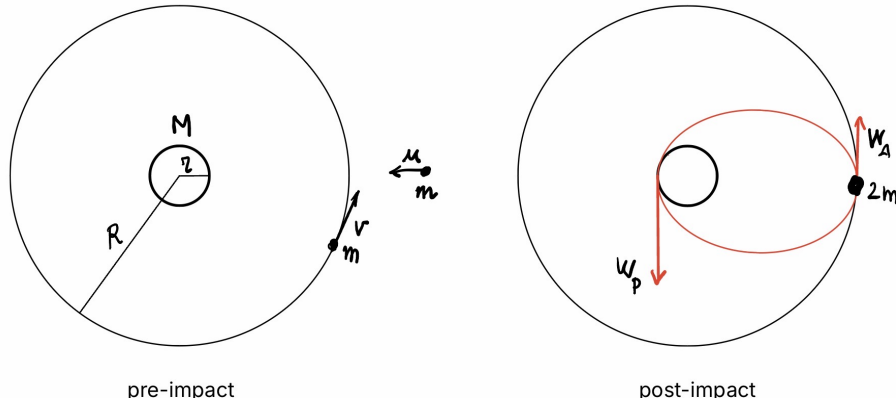


fig. 6

Soluzione:

L'asteroide giunge all'impatto con velocità radiale di caduta u che si ottiene dalla conservazione dell'energia (3.3):

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \quad (\text{perché a grande distanza } E_k = E_g = 0) \quad (8.1)$$

da cui:

$$u = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (8.2)$$

la velocità orbitale tangenziale del satellite è (1.2):

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (8.3)$$

Dalle 8.1 e 8.2 si ha:

$$u = \sqrt{2}v \quad (8.4)$$

Scriviamo adesso la conservazione della quantità di moto:

1. Componente radiale:

$$-mu = 2mw_r$$

da cui si ricava la velocità radiale post-impatto dell'aggregato (satellite + asteroide):

$$w_r = -\frac{u}{2} \quad (8.5)$$

2. Componente tangenziale:

$$mv = 2mw_t$$

da cui si ricava la velocità tangenziale post-impatto dell'aggregato:

$$w_t = w_A = \frac{v}{2} \quad (8.6)$$

L'urto è anelastico dunque non si ha conservazione dell'energia tra prima e dopo impatto, ma dopo l'impatto possiamo scrivere la conservazione dell'energia lungo l'orbita ellittica dell'aggregato. In particolare possiamo uguagliare le energie dei due punti: apogeo lunare e perigeo lunare:

$$\frac{1}{2} \cdot 2m(w_r^2 + w_t^2) - \frac{GM \cdot 2m}{R} = \frac{1}{2} \cdot 2mw_p^2 - \frac{GM \cdot 2m}{r} \quad (8.7)$$

Sostituendo le 8.3, 8.4, 8.5 e 8.6 nella 8.7 otteniamo:

$$w_p^2 = 2v^2 \left(\frac{R}{r} - \frac{5}{8} \right) \quad (8.8)$$

Adesso usiamo la conservazione del momento angolare (4.3) all'orbita ellittica:

$$2m \cdot w_A R = 2m \cdot w_p r \quad (8.9)$$

Combinando la 8.9 con la 8.6 si ha:

$$w_p = \frac{v}{2} \frac{R}{r} \quad (8.10)$$

Finalmente, sostituendo la 8.10 nella 8.8 otteniamo:

$$\left(\frac{R}{r} \right)^2 - 8 \left(\frac{R}{r} \right) + 5 = 0$$

Risolviamo la semplice equazione di secondo grado:

$$\frac{R}{r} = 4 \pm \sqrt{11} = 7,32 \quad \text{o} \quad 0,68$$

Ovviamente $\frac{R}{r} > 1$ dunque scartiamo la soluzione 0,68 e la risposta finale al problema è che il raggio dell'orbita circolare del satellite è pari a 7,32 volte il raggio lunare.

9 Analisi dettagliata di un'orbita ellittica

Vogliamo calcolare la velocità orbitale $V(r)$ in un punto generico dell'orbita. Per la conservazione dell'energia del satellite nel punto P ed in un punto generico Q vale l'uguaglianza:

$$\frac{1}{2}mw_p^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mV(r)^2 - \frac{GMm}{r} \quad (9.1)$$

utilizzando la 4.6 per w_p e posto $\frac{GM}{R} = v^2$ si ha:

$$V(r) = v \sqrt{\frac{2}{1 + R/d} - 2 + \frac{2R}{r}}$$

da cui, eseguendo i passaggi algebrici:

$$V(r) = v \sqrt{\frac{2R}{r} - \frac{2R}{R+d}}$$

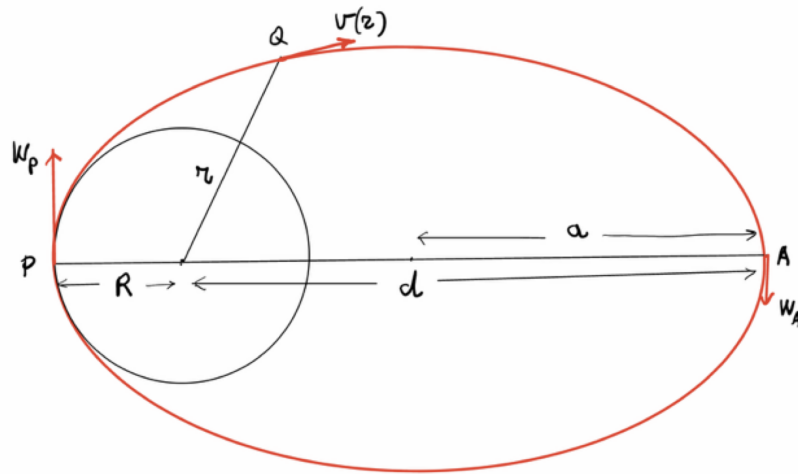


fig. 7

in definitiva si ottiene:

$$V(r) = v \sqrt{\frac{R}{a} \left(\frac{2a}{r} - 1 \right)} \quad (9.2)$$

in cui $a = \frac{R+d}{2}$ è il semiasse maggiore della ellisse. Verifichiamo la validità della 9.2 in casi particolari:

1. L'ellisse è il cerchio di raggio R , ovvero $d = R$:

$$V(r) = v \sqrt{\frac{R}{R} \left(\frac{2R}{R} - 1 \right)} = v$$

2. Velocità al perigeo ($r = R$):

$$V(R) = v \sqrt{\frac{R}{a} \left(\frac{R+d}{R} - 1 \right)} = v \sqrt{\frac{2}{1 + R/d}} = w_p$$

3. Velocità all'apogeo ($r = d$):

$$V(d) = v \sqrt{\frac{R}{a} \left(\frac{R+d}{d} - 1 \right)} = v \frac{R}{d} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R}{d}}} = \frac{R}{d} w_P = w_A$$

Dunque abbiamo verificato che la 9.2 permette di calcolare la velocità orbitale del satellite/pianeta in ogni punto dell'orbita ellittica. Cerchiamo adesso una formula per il calcolo della energia del corpo orbitante. Poiché l'energia si conserva, conviene calcolarla in un punto “facile”, per esempio il perielio. Dunque:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m w_p^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m \left(\frac{GM}{R} \frac{2}{1 + R/d} \right) - \frac{GMm}{R} = \\ &= \frac{GMm}{R} \left(\frac{d}{R+d} - 1 \right) = \frac{GMm}{R} \left(\frac{-R}{R+d} \right) = -\frac{GMm}{R+d} \end{aligned}$$

Riscriviamo l'ultimo importante risultato:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (9.3)$$

L'equazione 9.3 ci dice che l'energia di un corpo in orbita ellittica dipende solo dal semiasse maggiore dell'ellisse. Questo ci permette di calcolare il periodo orbitale di qualunque orbita ellittica, mediante il seguente ragionamento:

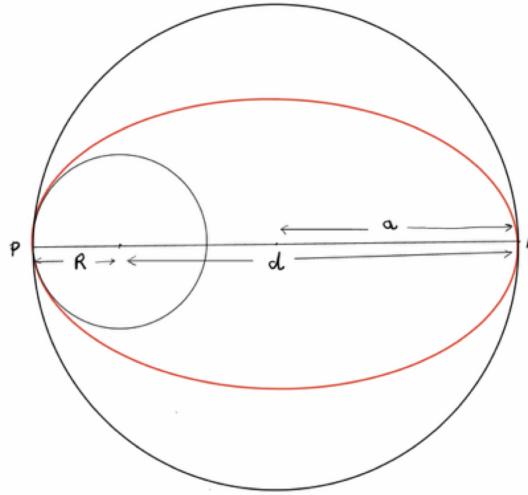


fig. 8

Poiché il tempo e l'energia sono due grandezze fisiche coniugate ed abbiamo visto che l'energia del moto ellittico dipende solo dal semiasse maggiore a , lo stesso dovrà valere per il periodo orbitale T . Per trovare il periodo orbitale dell'ellisse come in fig. 8 basterà semplicemente calcolare il periodo orbitale relativo alla circonferenza di raggio a che “contiene” l'ellisse. A tale scopo usiamo la 2.1 per ottenere:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (9.4)$$

Come applicazione della 9.4 calcoliamo il tempo di trasferimento dall'orbita base a quella geostazionaria per il caso trattato nel capitolo 7. Avevamo:

$$R = 8370 \text{ km}, \quad d = 42300 \text{ km}, \quad a = \frac{R + d}{2} = 25335 \text{ km}$$

quindi:

$$T = 40052 \text{ s} \simeq 11 \text{ ore}$$

In realtà il satellite deve percorrere solo metà orbita, quindi $t_{trasf} = 5,5$ ore.

Come conseguenza della 9.4 possiamo asserire che la legge di Keplero, che avevamo dedotto nel caso di orbite circolari, vale in generale per qualsiasi orbita chiusa (ellittica), considerando invece del raggio il semiasse maggiore.

10 Manovre impulsive e propellente

Finora abbiamo parlato di incrementi di velocità necessari per cambiare orbite, ma non si è detto niente su come ottenerli. A tale scopo descriviamo adesso l'utilità di motori a reazione che usano del propellente.

Nei capitoli scorsi abbiamo identificato la massa costante di un corpo orbitante con la lettera m . Adesso, che abbiamo a che fare con masse variabili (per l'espulsione di gas di reazione) chiamiamo m_0 la massa iniziale del satellite in orbita prima dell'inizio di una manovra ed m la sua massa in un generico istante durante la manovra stessa.

Supponiamo di avere il nostro satellite di massa m_0 in orbita e calcoliamo la spinta che esso riceve azionando un razzo per un intervallo di tempo piccolo rispetto al periodo orbitale. Questa condizione corrisponde al concetto di "manovra impulsiva", ovvero ci permette di considerare quasi immobile il satellite nel breve intervallo di accensione del motore. Il razzo deve essere orientato in modo da fornire una spinta tangenziale al satellite.

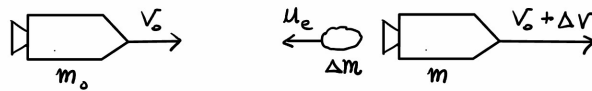


fig. 9

Nell'intervallo di tempo Δt il razzo espelle una quantità di combustibile bruciato (gas) Δm con velocità u_e rispetto al satellite, tipica per ogni propellente. Nei nostri esempi useremo il kerosene che ha una velocità di eiezione $u_e = 3 \text{ km/s}$. Come reazione, per la conservazione della quantità di moto, il satellite acquista un incremento di velocità Δv ricavabile dal bilancio (fig. 9):

$$mv_0 = m(v_0 + \Delta v) + \Delta m \cdot u_e \quad (10.1)$$

Risolvendo si trova:

$$\Delta v \approx -u_e \frac{\Delta m}{m} \quad (10.2)$$

Il segno meno emerge dal fatto che stiamo considerando u_e positiva e Δm negativa in quanto perdita di massa del satellite. Passando al limite ed integrando su tutta la manovra si ha:

$$\int dv = -u_e \int \frac{dm}{m} \implies v = -u_e \ln m + \text{costante}$$

ma poiché al tempo $t = 0$ (inizio della manovra) si ha $v = v_0$ e $m = m_0$, allora:

$$\text{costante} = v_0 + u_e \ln m_0$$

e dunque:

$$v = v_0 + u_e \ln \frac{m_0}{m}$$

ovvero:

$$\Delta v = v - v_0 = u_e \ln \frac{m_0}{m} \quad (10.3)$$

La 10.3 ci permette di calcolare la quantità di propellente necessaria per ottenere un certo incremento di velocità. Invertendo la formula:

$$\Delta m = m_0(1 - e^{-\Delta v/u_e}) \quad (10.3 \text{ bis})$$

Per esempio, con riferimento all'esempio del capitolo 7, dove per iniziare la manovra di trasferimento del satellite dall'orbita di 2000 km a quella geostazionaria occorre un incremento Δv_1 di velocità pari a 2.0 km/s, supponendo una massa iniziale $m_0 = 200$ kg per il satellite, applicando la 10.3bis troviamo che occorre una quantità di kerosene:

$$\Delta m = 200 \cdot (1 - e^{-2.0/3.0}) \simeq 97 \text{ kg}$$

ovvero, essendo la densità del kerosene $\rho \approx 0.8 \text{ kg/dm}^3$, circa 120 litri.

Il carico utile del satellite (massa al termine della manovra) è $M_u = m_0 - \Delta m = 103 \text{ kg}$.

11 Spinta del motore (Thrust)

Per un motore a reazione operante nel vuoto, come nei nostri casi orbitali, esistono due parametri fondamentali che ne descrivono il funzionamento: il primo, che abbiamo già incontrato, è la velocità di eiezione del gas combusto u_e , il secondo è la forza o spinta F che esso è capace di generare (thrust).

Dunque per ogni motore a razzo dobbiamo conoscere la coppia di parametri (u_e, F) . Per esempio, un satellite artificiale potrebbe essere dotato di un motore con $u_e = 3 \text{ km/s}$ ed $F = 6000 \text{ N}$. La spinta F del motore ci consente di calcolare il tempo di accensione necessario per completare una manovra.

Vediamo come. Dividiamo la 10.2 per Δt :

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} \simeq u_e \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (11.1)$$

ma in assenza di forze esterne tangenziali (come accade in orbita) possiamo scrivere:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F \quad (\text{spinta}) \quad (11.2)$$

quindi inserendo la 11.2 nella 11.1 otteniamo:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{u_e} \quad (11.3)$$

Applicando la 11.3 al caso già esaminato (Capitolo 10), abbiamo:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{6000 \text{ N}}{3000 \text{ m/s}} = 2 \text{ kg/s}$$

e poichè abbiamo visto che per la manovra occorreano 97 kg di propellente, il corrispondente tempo di accensione del motore sarà:

$$\Delta t = \frac{97 \text{ kg}}{2 \text{ kg/s}} \simeq 48 \text{ s}$$

Non ci resta che verificare se questo intervallo di tempo è effettivamente molto minore del periodo orbitale T del satellite nell'orbita bassa di partenza. Dalla 9.4 troviamo $T = 7630 \text{ s}$ ed abbiamo conferma che $\Delta t \ll T$, ovvero la manovra può essere sicuramente considerata di tipo impulsivo. Durante il tempo di accensione del motore il satellite percorre una frazione di appena:

$$48/7630 \simeq 6/1000$$

ovvero 6 per mille dell'orbita.

12 Effetto di una spinta radiale

Ci chiediamo ora quale sia l'effetto di una manovra di accensione di un razzo orientato perpendicolarmente all'orbita, verso l'esterno, ma sempre in modalità complanare.

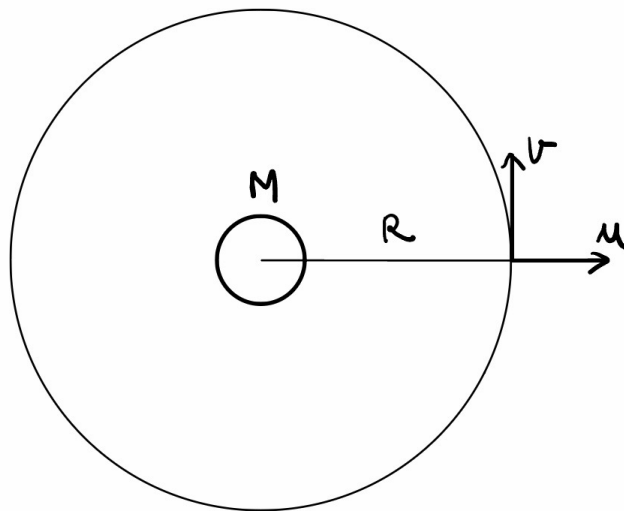


fig. 10

Intuitivamente verrebbe da pensare che tale manovra sia vantaggiosa rispetto alla spinta tangenziale per allontanare un satellite dalla Terra. Vedremo che non è così.

Consideriamo come al solito un satellite in orbita iniziale circolare di raggio R ed agiamo su di esso con una manovra impulsiva che genera una velocità radiale u_r .

Come risultato il satellite si porta in una orbita ellittica con semiasse maggiore a . Per calcolare il valore di a scriviamo il bilancio energetico, utilizzando la 9.3. Prima della accensione del razzo l'energia totale del satellite era:

$$E_i = -\frac{GMm}{2R} \quad (12.1)$$

Al termine della manovra l'energia sarà:

$$E_f = -\frac{GMm}{2a} \quad (12.2)$$

la differenza fra le due energie deve uguagliare l'energia cinetica radiale generata dal razzo:

$$E_f - E_i = \frac{1}{2}m(w^2 - v^2) = \frac{1}{2}mu_r^2 \quad (12.3)$$

La 12.3 può essere riscritta:

$$\frac{GM}{R} \left(1 - \frac{R}{a}\right) = u_r^2$$

ovvero usando la 1.2:

$$\left(\frac{u_r}{v}\right)^2 = 1 - \frac{R}{a}$$

ma $a = \frac{R+d}{2}$ quindi (5.2): $e = \frac{d-R}{d+R} = 1 - \frac{R}{a}$ quindi:

$$e = \left(\frac{u_r}{v}\right)^2 \quad (12.4)$$

È molto interessante analizzare questo risultato confrontandolo al caso della spinta tangenziale visto nel capitolo 5. Avevamo trovato la 5.4 da cui ricaviamo:

$$w_p = v + u_t = v\sqrt{1+e}$$

in cui u_t è l'incremento di velocità tangenziale applicato al satellite, dunque $u_t = v(\sqrt{e+1}-1)$ ed elevando al quadrato:

$$e = \left(1 + \frac{u_t}{v}\right)^2 - 1 = \left(\frac{u_t}{v}\right)^2 + 2\frac{u_t}{v} \quad (12.5)$$

Possiamo, a questo punto, confrontare i due casi vedendo che relazione intercorre tra u_r e u_t per ottenere una certa eccentricità data. A tale scopo sostituiamo la 12.5 nella 12.4 trovando:

$$\left(\frac{u_r}{v}\right)^2 = \left(\frac{u_t}{v}\right)^2 + 2\frac{u_t}{v} \quad (12.6)$$

dunque si ha sempre $u_r > u_t \rightarrow$ manovre radiali inefficienti!!

Se per esempio ci riferiamo al caso del capitolo 6 in cui volevamo immettere un satellite inizialmente in orbita circolare bassa (300km) in una traiettoria limite di fuga parabolica avevamo $u_t = 3.2 \text{ km/s}$. Se volessimo utilizzare, per lo stesso scopo, una manovra impulsiva radiale, in base alla 12.6 avremmo:

$$u_r = \sqrt{(3.2)^2 + 2 \cdot 3.2 \cdot 7.8} \approx 6.3 \text{ km/s}$$

Per comodità riscriviamo le due formule che ci forniscono le velocità tangenziale e radiale da aggiungere alla velocità orbitale circolare v per ottenere un'orbita ellittica con eccentricità e .

a) Caso tangenziale: $u_t = v(\sqrt{e+1} - 1)$

b) Caso radiale: $u_r = v\sqrt{e}$

Si vede chiaramente che, per ogni valore di e , si ha:

$$\sqrt{e+1} - 1 < \sqrt{e}$$

infatti

$$\sqrt{e+1} < \sqrt{e} + 1 \implies e+1 < e+1 + 2\sqrt{e}$$

quindi per ogni valore di e , $u_t < u_r$ e ancora una volta confermiamo che le manovre impulsive radiali complanari all'orbita sono assolutamente inefficienti, dunque inutili.

13 Sfera di influenza gravitazionale e punti di Lagrange

Consideriamo tre corpi: due principali con masse M e m ($M \gg m$) ed uno piccolo con massa $\mu \ll m \ll M$. Sia m un pianeta (es. la Terra) orbitante attorno ad M (Sole), ci chiediamo qual è il raggio di influenza gravitazionale di m su μ ovvero la zona entro la quale la massa μ può trovarsi attorno alla Terra senza sentire l'influenza del Sole.

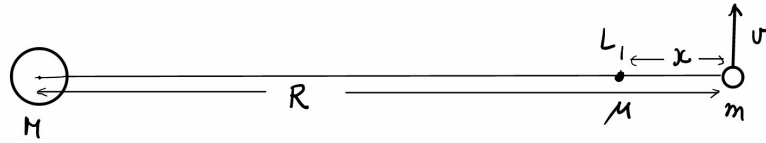


fig. 11

Con riferimento alla fig. 11, cerchiamo il punto L_1 (distante x dalla Terra) in cui la massa μ è in equilibrio sotto l'effetto delle forze in gioco. Considerando positiva verso destra la direzione di x , le forze gravitazionali su μ causate dal Sole e dalla Terra sono rispettivamente:

$$F_M = -\frac{GM\mu}{(R-x)^2} \quad \text{e} \quad F_m = \frac{Gm\mu}{x^2}$$

ad esse dobbiamo aggiungere la forza centrifuga F_c che agisce sulla massa μ mentre essa ruota intorno al Sole insieme alla Terra:

$$F_c = \mu\omega^2(R-x)$$

Per l'equilibrio deve valere:

$$F_M + F_m + F_c = 0$$

dove $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$ ovvero:

$$-\frac{GM\mu}{(R-x)^2} + \frac{Gm\mu}{x^2} + \mu\frac{GM}{R^3}(R-x) = 0$$

Usando ancora la 1.2 e svolgendo le semplificazioni del caso si ottiene:

$$\left(1 - \frac{x}{R}\right)^{-2} - \frac{m}{M \left(\frac{x}{R}\right)^2} - \left(1 - \frac{x}{R}\right) = 0 \quad (13.1)$$

La 13.1 può essere sviluppata al 1° ordine tenendo conto che $x \ll R$, dunque:

$$1 + \frac{2x}{R} - \frac{m}{M \left(\frac{x}{R}\right)^2} - 1 + \frac{x}{R} \simeq 0 \implies \frac{3x}{R} \simeq \frac{m}{M \left(\frac{x}{R}\right)^2}$$

da cui:

$$\frac{x}{R} \simeq \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} \quad (13.2)$$

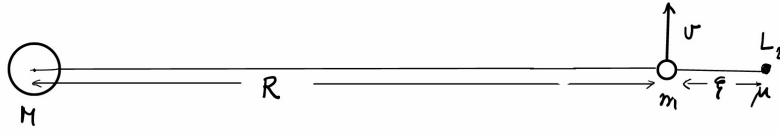


fig. 12

Vediamo cosa succede posizionando la massa μ all'esterno della Terra rispetto al Sole. Sia ξ la distanza del punto di equilibrio L_2 dalla Terra, l'equazione questa volta è:

$$-\frac{GM\mu}{(R + \xi)^2} - \frac{Gm\mu}{\xi^2} + \mu\omega^2(R + \xi) = 0$$

ovvero:

$$-\left(1 + \frac{\xi}{R}\right)^{-2} - \frac{m}{M \left(\frac{\xi}{R}\right)^2} + \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) = 0 \quad (13.3)$$

Anche questa volta sviluppiamo la 13.3 al primo ordine:

$$-\left(1 - \frac{2\xi}{R}\right) - \frac{m}{M \left(\frac{\xi}{R}\right)^2} + 1 + \frac{\xi}{R} = 0 \implies -1 + \frac{2\xi}{R} - \frac{m}{M \left(\frac{\xi}{R}\right)^2} + 1 + \frac{\xi}{R} = 0$$

da cui:

$$\frac{\xi}{R} \simeq \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} \quad (13.4)$$

esattamente uguale alla 13.2. Dunque possiamo tracciare la sfera di influenza gravitazionale della massa m individuata dai due punti L_1 ed L_2 che vengono chiamati punti di Lagrange.

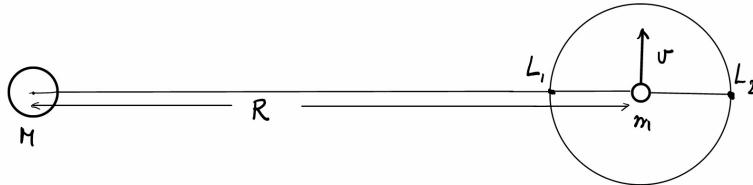


fig. 13

È evidente che essi sono punti di equilibrio instabile perché basta spostare leggermente la posizione della massa μ affinché essa inizi a muoversi verso M oppure verso m .

Il diametro della sfera di Lagrange è:

$$\overline{L_1 L_2} = 2R \left(\frac{m}{3M} \right)^{1/3} \quad (13.5)$$

Nel caso Sole / Terra si ha:

$$\overline{L_1 L_2} = 2 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{6 \cdot 10^{24}}{3 \cdot 2 \cdot 10^{30}} \right)^{1/3} \simeq 0.02R$$

ed essendo $R = 150$ Mkm si ha che $L_1 L_2 \simeq 3$ Mkm.

14 Moto iperbolico

Fin qui abbiamo studiato in dettaglio le orbite chiuse circolari ed ellittiche. Abbiamo anche visto che la traiettoria parabolica è il caso limite di una ellisse con semiasse maggiore infinito ed eccentricità $e = 1$. Per $e > 1$ e velocità al perigeo $w_p > \sqrt{2}v$ si hanno traiettorie aperte di tipo iperbolico. Studiamone le caratteristiche. Consideriamo un corpo con massa m che si avvicina alla grande massa M ($m \ll M$). Supponiamo che m arrivi da grande distanza (infinita) viaggiando a velocità v_∞ con una “distanza di impatto” b dalla parallela a v_∞ passante per M .

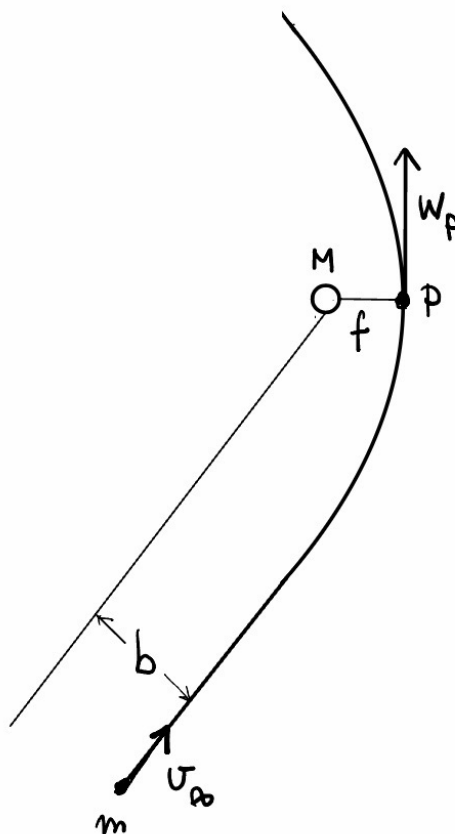


fig. 14

Quando m è molto lontano da M la forza gravitazionale è trascurabile, quindi la sua energia totale è tutta cinetica:

$$E_{\infty} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2$$

Quando m passa per il perigeo P , la energia totale sarà:

$$E_p = \frac{1}{2}mw_p^2 - \frac{GMm}{f}$$

dunque per la conservazione dell'energia $E_p = E_{\infty}$, si ha:

$$v_{\infty}^2 = w_p^2 - \frac{2GM}{f} \quad (14.1)$$

Scriviamo adesso la conservazione del momento angolare per unità di massa L calcolato rispetto alla posizione di M :

$$L = v_{\infty} \cdot b = w_p \cdot f \quad (14.2)$$

Unendo la 14.1 e la 14.2 si ricava:

$$v_{\infty}^2 = v_{\infty}^2 \frac{b^2}{f^2} - \frac{2GM}{f}$$

ovvero:

$$v_{\infty}^2 f^2 + 2GMf - v_{\infty}^2 b^2 = 0 \quad (14.3)$$

da cui:

$$f = \frac{-GM + \sqrt{(GM)^2 + v_{\infty}^4 b^2}}{v_{\infty}^2}$$

anche:

$$f = \frac{GM}{v_{\infty}^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{v_{\infty}^2 b}{GM} \right)^2} - 1 \right] \quad (14.3)$$

Con queste formule, conoscendo la velocità all'infinito del corpo in arrivo e la sua distanza d'impatto b , si trova la distanza minima da M che il corpo raggiunge nella sua traiettoria di fly-by.

Analizziamo due casi estremi: 1) $v_{\infty}^2 b \ll GM$ (bassa velocità asintotica e/o breve distanza di impatto)

$$f = \frac{GM}{v_{\infty}^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{v_{\infty}^2 b}{GM} \right)^2} - 1 \right] \simeq \frac{GM}{v_{\infty}^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\infty}^2 b}{GM} \right)^2 - 1 \right] = \frac{v_{\infty}^2 b^2}{2GM}$$

2) $v_{\infty}^2 b \gg GM$ (alta velocità asintotica e/o lunga distanza di impatto)

$$f \simeq \frac{GM}{v_{\infty}^2} \left[\frac{v_{\infty}^2 b}{GM} - 1 \right] \simeq b$$

risultato ovvio: nessuna deflessione.

In generale possiamo dunque scrivere che:

$$\frac{v_{\infty}^2 b^2}{2GM} < f < b \quad (14.4)$$

con il valore esatto di f dato dalla 14.3.

Riscriviamo la 14.3 in una forma utile per studiare le caratteristiche geometriche dell'iperbole, essendo $v_\infty b = L$, moltiplicando ambo i membri per $\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty^2 b}{GM}\right)^2}\right)$ ricaviamo f :

$$f = \frac{L^2/GM}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty L}{GM}\right)^2}} \quad (14.5)$$

L'iperbole (come l'ellisse, la circonferenza e la parabola) è una conica, ovvero è il luogo dei punti tali che il rapporto delle loro distanze da un punto fisso F (fuoco) ed una retta (direttrice) è costante:

$$\frac{r}{d} = k = \text{costante}$$

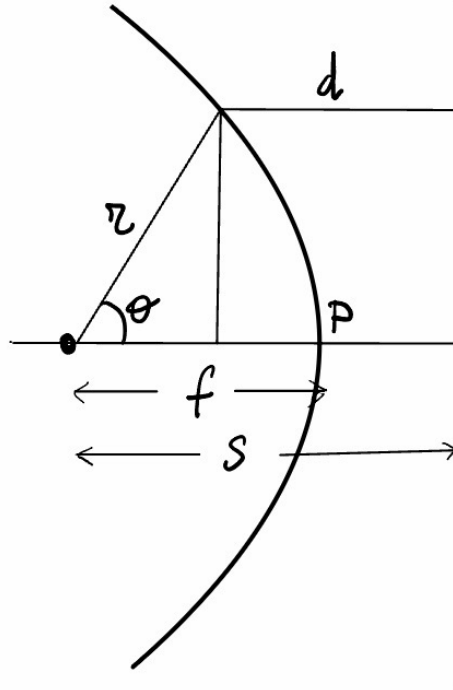


fig. 15

$$d = s - r \cos \theta \implies r = k(s - r \cos \theta) \implies r = \frac{ks}{1 + k \cos \theta}$$

e in definitiva, ponendo $s/k = p$ e $k = e$, si ha l'equazione della conica espressa in coordinate polari:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (14.6)$$

Come si vede, la distanza minima da F è proprio f quando $\theta = 0$, da cui:

$$r_{min} = f = \frac{p}{1 + e} \quad (14.7)$$

Confrontando la 14.7 con la 14.5 troviamo:

$$p = L^2/GM \quad (14.8)$$

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty^2 b}{GM}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty L}{GM}\right)^2} \quad (14.9)$$

15 Deflessione asintotica

Riprendiamo l'analisi della traiettoria iperbolica studiata nel capitolo precedente. Siamo interessati a calcolare l'angolo di deflessione δ , ovvero l'angolo tra la direzione di entrata e quella di uscita del corpo di massa m dopo il fly-by con la massa M .

Dall'equazione polare della conica (14.6), sappiamo che la distanza r tende all'infinito quando il denominatore si annulla:

$$1 + e \cos \theta_\infty = 0 \implies \cos \theta_\infty = -\frac{1}{e} \quad (15.1)$$

L'angolo θ_∞ rappresenta l'angolo tra l'asse di simmetria dell'iperbole (passante per il perigeo) e gli asintoti.

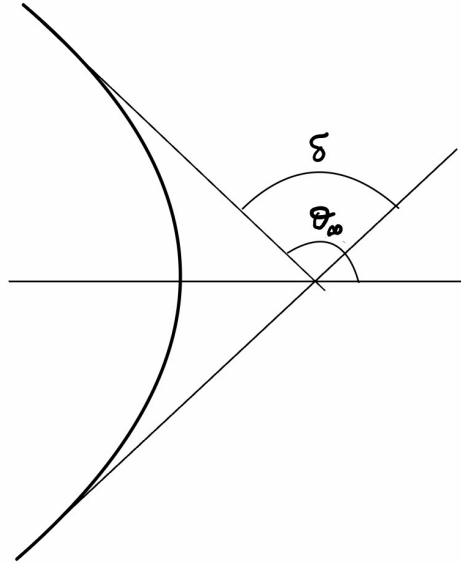


fig. 16

Dalla geometria della figura 16, si vede chiaramente che l'angolo di deflessione totale δ è legato a θ_∞ dalla relazione:

$$\delta = 2\theta_\infty - \pi \quad (15.2)$$

Utilizzando l'identità trigonometrica $\cos(\delta/2 + \pi/2) = -\sin(\delta/2)$, dalla 15.1 otteniamo:

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{e} \quad (15.3)$$

Sostituendo l'espressione dell'eccentricità e trovata nella 14.9, possiamo mettere in relazione la deflessione con i parametri fisici del moto:

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty^2 b}{GM}\right)^2}} \quad (15.4)$$

Dalla 15.4 si ricava una formula molto utile per calcolare la deflessione asintotica in funzione della distanza di impatto b :

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{GM}{v_\infty^2 b} \quad (15.5)$$

Questa formula conferma quanto discusso qualitativamente nel capitolo 14:

- Se b è molto grande (passaggio lontano), $\tan(\delta/2) \rightarrow 0$, quindi $\delta \rightarrow 0$ (nessuna deflessione).
- Se v_∞ è molto grande (velocità elevatissima), la deflessione è minima.
- La deflessione massima si ottiene per piccoli valori di b (passaggio radente) e basse velocità asintotiche.

È importante notare che, sebbene la direzione della velocità cambi di un angolo δ , il modulo della velocità all'infinito in uscita è identico a quello in entrata (v_∞), coerentemente con la conservazione dell'energia totale.

16 Considerazioni generali sull'equazione delle coniche

Rivisitiamo la 14.6 in coordinate Cartesiane. Ponendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ essa diventa:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - ex$$

ovvero:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx = p^2$$

Ed ecco che appaiono evidenti le diverse coniche in funzione del parametro e (“eccentricità”):

$$\begin{aligned} e = 0 & : x^2 + y^2 = p^2 \quad (\text{circonferenza}) \\ 0 < e < 1 & : (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx = p^2 \quad (\text{ellisse}) \\ e = 1 & : y^2 + 2px = p^2 \quad (\text{parabola}) \\ e > 1 & : y^2 - (e^2 - 1)x^2 + 2epx = p^2 \quad (\text{iperbole}) \end{aligned} \quad (16.1)$$

Riprendiamo adesso la 14.6 ed invertiamola per ricavare l'eccentricità:

$$e = \frac{p/r - 1}{\cos \theta} \quad (16.2)$$

Possiamo usare la 16.2 per capire che tipo di traiettoria percorre un corpo che si muove con velocità v a distanza r da una massa M con una distanza di impatto b .

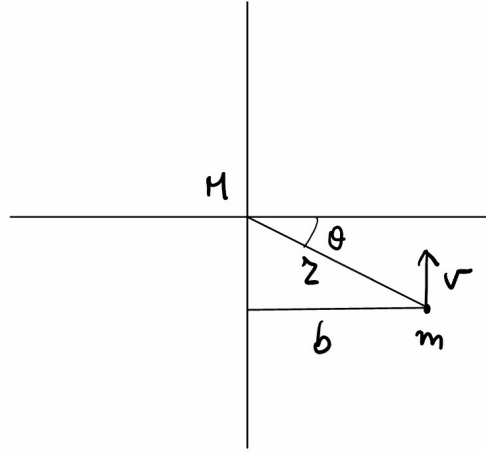


fig. 17

Dalla fig. 17 si evince che $r \cos \theta = b$. Ricordando la 14.8 ($p = v^2 b^2 / GM$), la 16.2 diventa:

$$e = \frac{v^2 b}{GM} - \frac{r}{b} \quad (16.3)$$

Come esempio studiamo il caso di un corpo che si muove con velocità $v = 80 \text{ km/s}$ ad una distanza $r = 200 \text{ Mkm}$ con distanza di impatto $b = 100 \text{ Mkm}$. Applicando la 16.3 troviamo:

$$e = \frac{(8 \cdot 10^4)^2 \cdot 10^{11}}{1.327 \cdot 10^{20}} - \frac{2 \cdot 10^{11}}{10^{11}} \simeq 4.81 - 2 = 2.81 \quad (\text{iperbole})$$

Dunque il corpo segue una traiettoria iperbolica con una deflessione:

$$\delta = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2.81} \right) \simeq 41^\circ$$

17 Trasferimento da orbita terrestre ad orbita solare

Uno dei problemi da risolvere per progettare un volo interplanetario è quello di trasferire una sonda spaziale da un'orbita terrestre di "parcheggio" ad un'orbita solare di trasferimento alla Hohmann verso un altro pianeta. Nel prossimo capitolo studieremo in dettaglio una missione verso Marte, ma restiamo per il momento a queste prime fasi di uscita dalla sfera di influenza gravitazionale della Terra.

Supponiamo dunque di avere un satellite in una orbita di parcheggio di raggio R intorno alla Terra e di volerlo inserire in una traiettoria di uscita dalla sfera di influenza terrestre in direzione parallela al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Vogliamo fare questo perché, come abbiamo visto in precedenza, per immettersi in una orbita ellittica di trasferimento alla Hohmann, dobbiamo aggiungere un incremento di velocità tangenziale al satellite. Ma in questo caso l'orbita di trasferimento avviene attorno al Sole, dunque il satellite dovrà avere un incremento di velocità tangenziale ΔV_T rispetto a $V_T = 30 \text{ km/s}$ di velocità orbitale di rivoluzione della Terra attorno al Sole, come schematizzato in fig. 18.

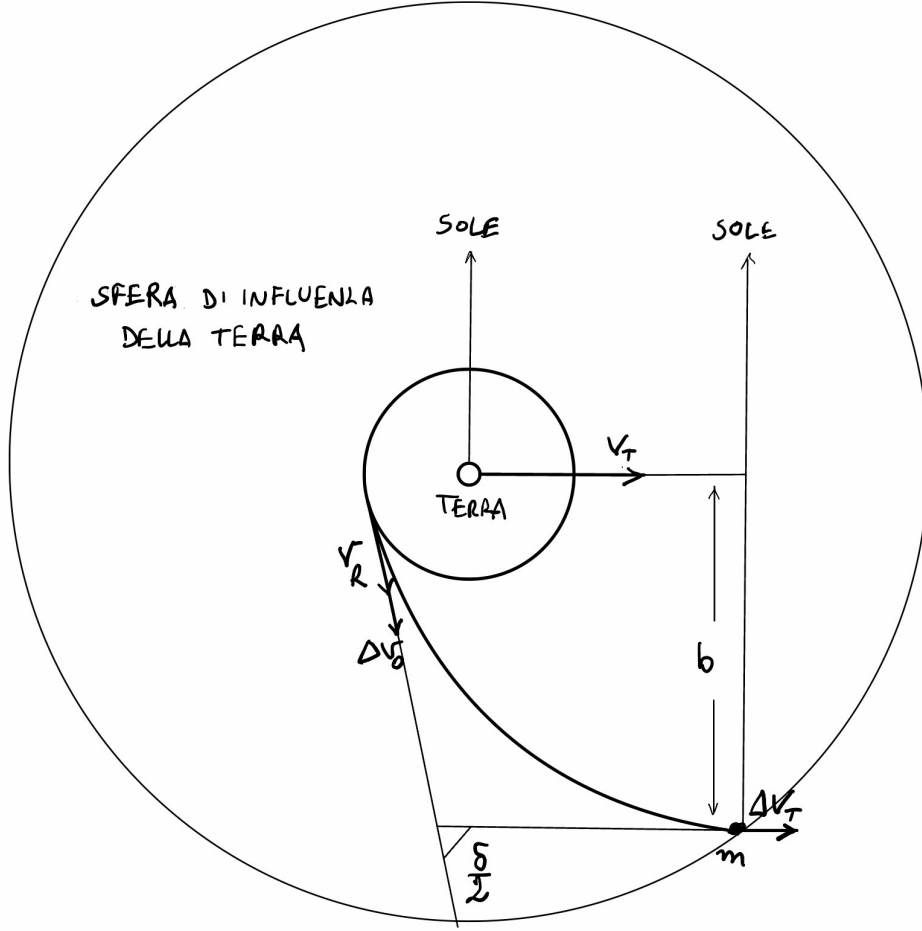


fig. 18

Si tratta dunque di trovare una traiettoria iperbolica attorno alla Terra con perielio distante R dal centro della Terra e che porti il satellite fuori dalla sfera di influenza gravitazionale terrestre con velocità ΔV_T rispetto alla Terra e $V_T + \Delta V_T$ rispetto al sole (notare che i due vettori V_T e ΔV_T sono paralleli e entrambi perpendicolari alla direzione Terra - Sole). A tale scopo aggiungiamo una velocità tangenziale Δv_0 alla velocità orbitale v_R che immette il satellite nella traiettoria iperbolica che ci interessa. Anche se le proporzioni della fig. 18 possono ingannare, nel capitolo 13 avevamo trovato che il raggio di influenza gravitazionale terrestre è circa 1,5 milioni km, dunque molto molto maggiore del raggio orbitale R e quindi possiamo usare l'equazione 14.1 per il nostro moto iperbolico, dove in questo caso $v_\infty = \Delta V_T$ e $w_p = v_R + \Delta v_0$, dunque:

$$\Delta V_T^2 = (v_R + \Delta v_0)^2 - \frac{2GM}{R} \quad (17.1)$$

e ricordando che $GM/R = v_R^2$ dopo semplici calcoli si ottiene:

$$\Delta v_0 = v_R \left(\sqrt{2 + \left(\frac{\Delta V_T}{v_R} \right)^2} - 1 \right) \quad (17.2)$$

La 17.2 ci dice quale incremento tangenziale dobbiamo fornire alla velocità orbitale di parcheggio per portare il satellite ad uscire dalla sfera di influenza gravitazionale terrestre con una velocità ΔV_T diretta perpendicolarmente alla congiungente Terra - Sole, ovvero

tangenziale rispetto al moto orbitale della Terra attorno al Sole. La velocità ΔV_T è calcolata rispetto alla Terra, dunque, rispetto al Sole il satellite si muoverà con velocità tangenziale $V_T + \Delta V_T$ entrando così in un'orbita ellittica di trasferimento alla Hohmann.

Per completare questo capitolo, dopo aver ricavato l'entità della manovra impulsiva, ovvero l'incremento di velocità Δv_0 da fornire al satellite orbitante, dobbiamo calcolare quando attuare tale manovra. Come si vede confrontando la fig. 18 con la fig. 16, l'angolo tra i vettori Δv_0 e ΔV_T , utile per decidere il momento dell'accensione del motore, è $\delta/2$ ovvero (usando la 15.4):

$$\delta/2 = \arcsin(1/e) \quad (17.3)$$

L'eccentricità dell'iperbole si trova con alcuni passaggi algebrici usando la 14.9 e la 17.2:

$$e = 1 + \left(\frac{\Delta V_T}{v_R} \right)^2 \quad (17.4)$$

che inserita nella 17.3 produce infine:

$$\delta = 2 \arcsin \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta V_T}{v_R} \right)^2} \right] \quad (17.5)$$

18 Missione Marte

Arrivati a questo punto abbiamo tutti gli elementi per progettare il volo di una sonda che, partendo da un'orbita bassa di parcheggio intorno alla Terra, giunga ad effettuare un incontro con Marte.

Vediamo in dettaglio i vari passaggi.

Supponiamo che la nostra sonda si trovi inizialmente in un'orbita bassa di parcheggio a 500 km di altezza attorno alla Terra con velocità orbitale (data dalla 1.2) $v = 7,63 \text{ km/s}$. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, per spostare la sonda in un'orbita di trasferimento alla Hohmann attorno al Sole occorre prima introdurla in una traiettoria iperbolica rispetto alla Terra. Per fare questo, dobbiamo prima trovare l'incremento di velocità da dare alla sonda rispetto alla velocità di rivoluzione orbitale con cui essa è trascinata dalla Terra intorno al Sole (30 km/s). Le orbite di Terra e Marte sono pressoché circolari con raggio rispettivo di 1 u.a. e $1,52 \text{ u.a.}$, dunque, con riferimento alla figura 5, utilizzando l'equazione 7.1, troviamo:

$$\Delta v_1 = 30 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{1 + 1,52}} - 1 \right) \simeq 3 \text{ km/s} \quad (18.1)$$

Questo risultato sarebbe corretto se la sonda fosse già in orbita attorno al Sole insieme alla Terra ma fuori dall'influenza gravitazionale di quest'ultima. Ma ciò non è vero perché la sonda si trova in orbita di parcheggio attorno alla Terra. Dobbiamo dunque utilizzare i risultati del capitolo 17 ed in particolare la 17.2 per calcolare l'incremento di velocità necessario:

$$\Delta v_0 = 7,63 \cdot \left(\sqrt{2 + \left(\frac{3}{7,63} \right)^2} - 1 \right) \simeq 3,57 \text{ km/s} \quad (18.2)$$

Confrontando la 18.2 con la 18.1 si vede che l'estrazione dall'orbita di parcheggio ha un "costo aggiuntivo" di $0,57 \text{ km/s}$ per l'immissione della sonda in orbita ellittica solare di trasferimento rispetto al caso in cui la sonda fosse già in orbita circolare intorno al sole appena fuori dalla influenza gravitazionale terrestre.

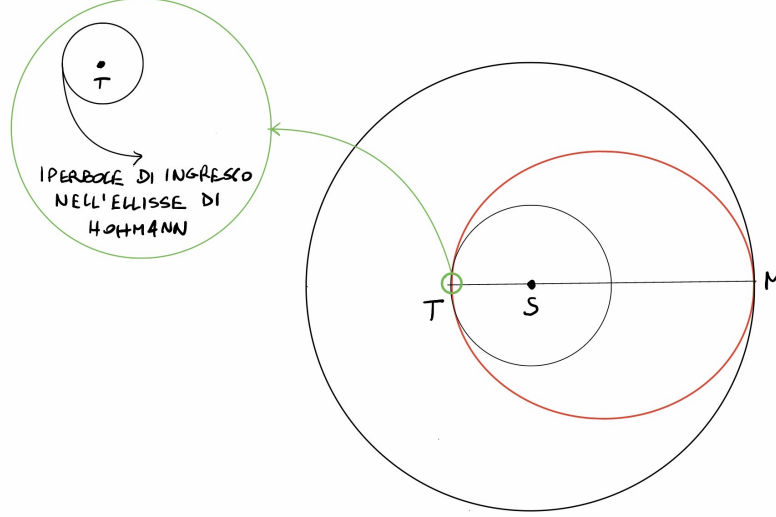


fig. 19: Traiettoria iperbolica di ingresso nell'orbita ellittica alla Hohmann

Abbiamo calcolato l'incremento Δv_0 per portare la sonda dall'orbita terrestre di parcheggio alla traiettoria iperbolica di uscita che la immette nell'orbita solare ellittica di trasferimento alla Hohmann. A quel punto la sonda percorrerà la semi-ellisse in rosso in fig. 19 fino ad incontrare Marte nel punto M. Se volessimo realizzare un rendez-vous con Marte per mettere la sonda in orbita attorno al pianeta dovremmo effettuare una seconda manovra impulsiva con un secondo incremento di velocità tangenziale in M. Questa azione immetterebbe la sonda nella stessa orbita circolare di Marte attorno al Sole consentendo poi una successiva manovra di ingresso in orbita marziana. Ma la missione consiste nel realizzare solo un fly-by rispetto a Marte, quindi una volta incontrato Marte in M, possiamo considerare conclusa la nostra missione.

Calcoliamo, tramite la 10.3bis, la quantità di Kerosene necessaria per la nostra missione supponendo di voler raggiungere Marte con un carico finale di massa $m_f = 200 \text{ kg}$. Essendo la massa iniziale della sonda $m_0 = m_f + \Delta m$, si ha:

$$\Delta m = m_f \cdot \left(e^{\frac{\Delta v}{u_e}} - 1 \right) \quad (18.3)$$

essendo $m_f = 200 \text{ kg}$, $\Delta v = 3,57 \text{ km/s}$ e $u_e = 3 \text{ km/s}$, troviamo: $\Delta m \simeq 457 \text{ kg}$ di Kerosene (571 litri).

La durata della manovra si ottiene con la 11.3. Se la spinta del motore è di 6000 N , si ha:

$$\Delta t = \frac{u_e \cdot \Delta m}{F} = \frac{3.000 \text{ m/s} \cdot 457 \text{ kg}}{6000 \text{ N}} \simeq 228 \text{ s}$$

Dobbiamo infine determinare l'istante di accensione del motore per dare inizio alla missione. Innanzitutto vediamo in quale punto dell'orbita terrestre deve trovarsi la sonda

utilizzando l'equazione 17.5. Si ottiene:

$$\xi = \arcsin \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{3,57}{7,63} \right)^2} \right) \simeq 60^\circ$$

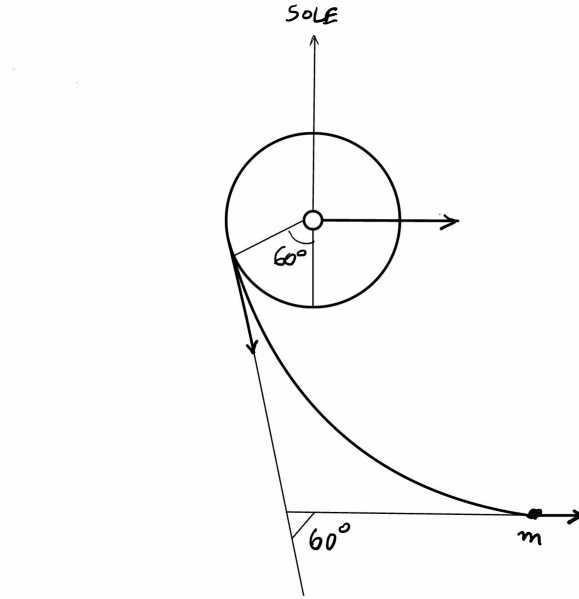


fig. 20: Posizione di accensione della sonda

Poi dobbiamo calcolare il punto in cui deve trovarsi Marte in questo momento di inizio missione. A tale scopo calcoliamo il tempo di percorrenza della semi-ellisse di Hohmann. Essa ha un semiasse maggiore:

$$a = \frac{R_T + R_M}{2} = \frac{1 + 1,52}{2} = 1,26 \text{ u.a.} = 1,85 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Il tempo di percorrenza di metà orbita è:

$$t = \frac{\pi \sqrt{a^3}}{\sqrt{GM}} \simeq 2,17 \cdot 10^7 \text{ s} \simeq 251 \text{ giorni}$$

Quanta strada farà Marte in questo periodo di tempo? Utilizzando la legge di Keplero sappiamo che il rapporto tra i quadrati dei periodi orbitali di due pianeti è uguale al rapporto tra i cubi delle loro distanze dal Sole, dunque:

$$T_M = T_T \cdot \left(\frac{R_M}{R_T} \right)^{3/2} = 365 \cdot 1,52^{3/2} \simeq 684 \text{ giorni} \quad (18.4)$$

Nel periodo $t = 251 \text{ giorni}$, Marte percorrerà una frazione della sua orbita attorno al Sole pari a un angolo:

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{251}{684} \simeq 132^\circ \quad (18.5)$$

Nello stesso tempo la Terra percorrerà un angolo:

$$\beta = 360^\circ \cdot \frac{251}{365} \simeq 248^\circ \quad (18.6)$$

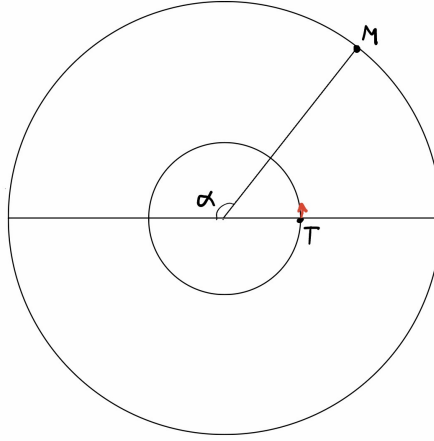


fig. 21: Inizio missione

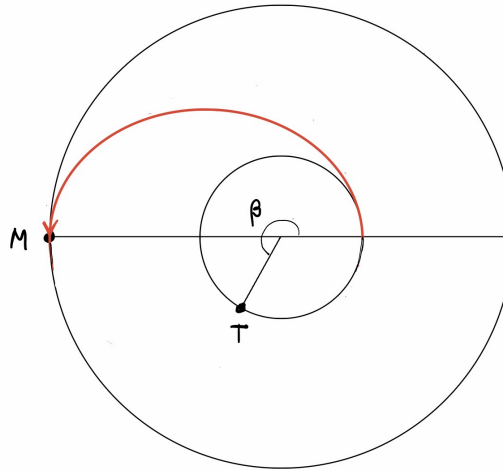


fig. 22: Incontro con Marte

Ecco la situazione riassunta nelle figure 21 (inizio missione) e 22 (incontro con Marte).

19 Fionda gravitazionale (Gravity Assist)

Nelle missioni spaziali può spesso risultare utile sfruttare la spinta gravitazionale dei pianeti per accelerare il moto di una sonda. Chiariamo questo concetto con un esempio. Supponiamo di aver una sonda che entri nella sfera di influenza gravitazionale di un pianeta P con una velocità relativa al pianeta stesso $\vec{v}_{-\infty}$. La sonda percorre una traiettoria iperbolica di eccentricità e per uscire poi dalla sfera di influenza con velocità $\vec{v}_{+\infty}$. Ovviamente, rispetto al sistema di riferimento del pianeta, per la conservazione dell'energia,

deve essere $|\vec{v}_{-\infty}| = |\vec{v}_{+\infty}|$. Vediamo cosa succede invece nel sistema di riferimento del Sole.

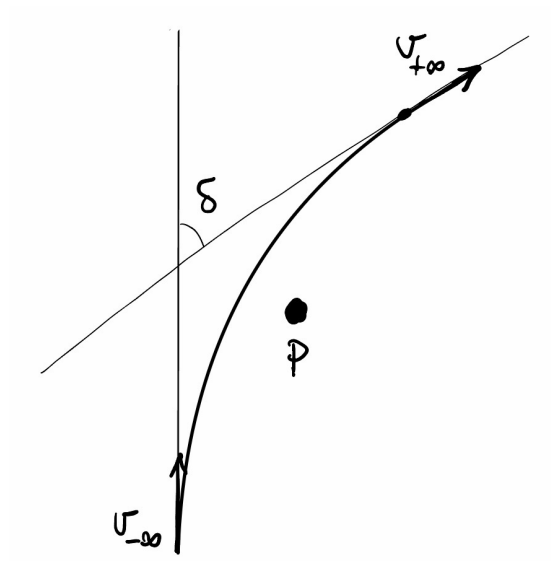


fig. 23a: sistema di riferimento del pianeta

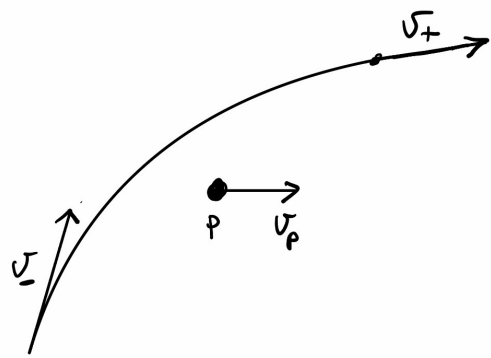


fig. 23b: sistema di riferimento del Sole

Le velocità in gioco sono legate dalle relazioni:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_p + \vec{v}_{-\infty} \quad (19.1)$$

$$\vec{V}_f = \vec{V}_p + \vec{v}_{+\infty} \quad (19.2)$$

Esse sono equazioni vettoriali, dunque la somma si effettua con la regola del parallelogramma:

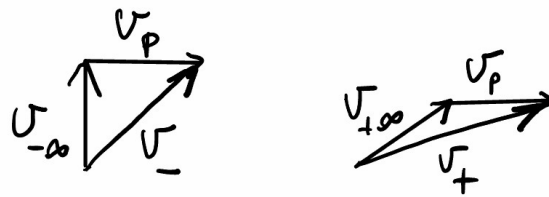


fig. 24

E si vede che $|\vec{V}_f| > |\vec{V}_i|$, dunque abbiamo incrementato il modulo della velocità della sonda e quindi la sua energia, gratuitamente.

Come è possibile? Non viene violata la conservazione dell'energia? No! Perché l'energia guadagnata dalla sonda viene sottratta al pianeta che rallenta quindi impercettibilmente dato che la sua massa è molto maggiore di quella della sonda.

Ma vediamo un esempio concreto, riprendendo la missione Marte del capitolo 18. Avevamo detto che la missione sarebbe finita con un generico incontro con il pianeta rosso, mentre adesso aggiungiamo una parte finale creando un effetto fionda.

Marte si muove nella sua orbita con velocità:

$$V_M = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_M}} \simeq 24,4 \text{ km/s}$$

mentre la nostra sonda arriva all'afelio in prossimità di Marte con velocità:

$$V_i = (V_T + \Delta v_1) \cdot \frac{R_T}{R_M} = 33 \cdot \frac{1}{1,52} \simeq 21,7 \text{ km/s}$$

dunque verrebbe lasciata indietro dal pianeta. Effettuiamo una manovra impulsiva fornendo alla sonda un incremento di velocità pari a 4 km/s in modo da farla entrare nella sfera di influenza di Marte con una velocità residua $v_{-\infty} = 1,3 \text{ km/s}$.

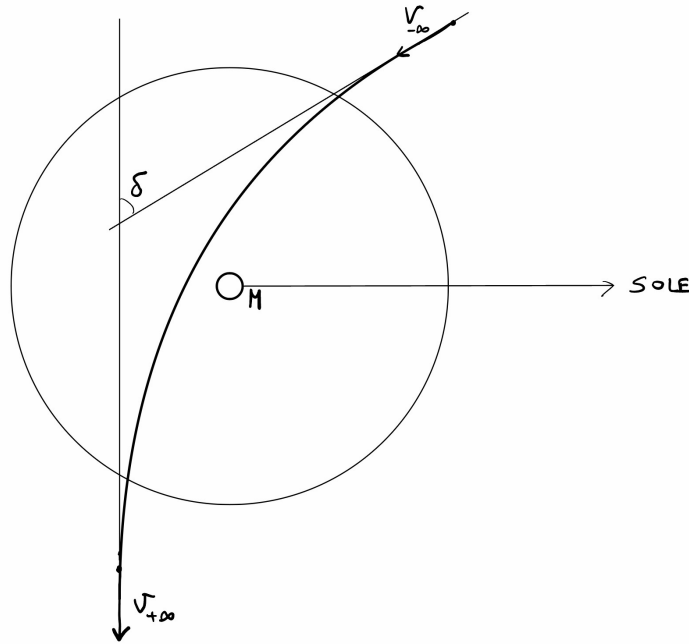


fig. 25

Con passaggio a distanza minima dal centro del pianeta:

$$f = 30.000 \text{ km}$$

L'eccentricità dell'iperbole si ricava dalla 14.9 con gli stessi passaggi fatti per ricavare la 17.4 ed essendo $M_M = 6,4 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ la massa di Marte, si ottiene:

$$e = 1 + \frac{v_{-\infty}^2 f}{GM_M} = 1 + \frac{(1,3 \cdot 10^3)^2 \cdot 3 \cdot 10^7}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,4 \cdot 10^{23}} \simeq 2,19$$

ed usando la 15.4 troviamo l'angolo di deflessione asintotica tra arrivo e partenza:

$$\delta = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2,19} \right) \simeq 54^\circ$$

Per semplicità supponiamo che la sonda entri nella sfera di influenza di Marte proprio con questo angolo in modo che esca con $\vec{v}_{+\infty}$ diretta parallelamente alla velocità orbitale di Marte (vedi fig. 25).

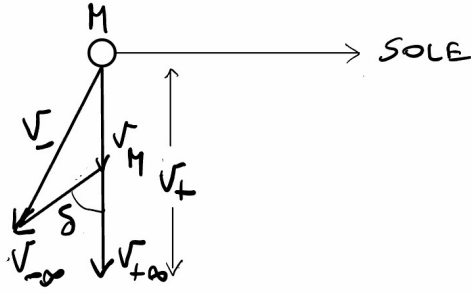


fig. 26

Se ora ci mettiamo nel sistema di riferimento eliocentrico(fig.26), componendo le velocità abbiamo:

$$|\vec{V}_+| = |\vec{V}_M| + |\vec{v}_{+\infty}| = 24,4 + 1,3 = 25,7 \text{ km/s}$$

mentre:

$$|\vec{V}_-| = \sqrt{|\vec{V}_M|^2 + |\vec{v}_{-\infty}|^2 - 2|\vec{V}_M||\vec{v}_{-\infty}|\cos\delta} \simeq 23,6 \text{ km/s}$$

Dunque a seguito del fly-by la fionda gravitazionale incrementa il modulo della velocità di $2,1 \text{ km/s}$ rispetto al Sole.