

ECOLE SUPÉRIEURE PRIVÉE DE
L'AÉRONAUTIQUE ET DES
TECHNOLOGIES (ESAT)

*Sujets d'Examens et de Devoirs
de Géodésie et Analyse
Numérique*

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur
Géographe Général

Version 1. Janvier 2026

Abstract : This booklet covers several topics from geodesy and numerical analysis exams given to engineering students studying geomatics at ESAT school.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Résidence Bousten 8, Bloc B, Avenue Mosquée Raoudha,
1181 Soukra Raoudha,

Tunisia.

E-mail : abenhadjsale@gmail.com

A Tous Mes Professeurs et Enseignants
A Mes Amis Afif Ben Yahia et Faouzi Soussia

Table des matières

1	Géodésie	1
1	EXAMEN 1	1
2	EXAMEN 2	3
3	EXAMEN 3	5
4	EXAMEN 4	7
5	EXAMEN 5	9
2	Analyse Numérique	11
1	EXAMEN 6	11
2	EXAMEN 7	13

1 EXAMEN 1

3GT1-3GT2, Année Universitaire 2014-2015

Examen de Géodésie - 13 janvier 2015 -

- 2 pages - Documents non autorisés - Calculatrices autorisées -

Durée : 2h00

Exercice (8pts) : Soit la surface (S) définie par :

$$M = \begin{cases} X = a(1 + \cos\varphi)\cos\lambda, \\ Y = a(1 + \cos\varphi)\sin\lambda, \\ Z = a\sin\varphi \end{cases} \quad a \text{ une constante positive}$$

1- Calculer les expressions des vecteurs :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda}$$

2- Calculer les coefficients : E , F et G . Donner l'expression de ds^2 .

3- Les coordonnées (φ, λ) sont-elles orthogonales, sont-elles symétriques ? Justifier.

4- Quel changement de variables fait-on pour obtenir un couple de coordonnées orthogonales et symétriques. (On ne demande pas de faire l'intégration).

Problème (12pts) : On considère deux points A et B de coordonnées géodésiques dans le système géodésique WGS84 du GPS :

$$A : (\varphi'_A = 36.6306 \text{ gr}; \lambda'_A = 10.7896 \text{ gr}; h'_A = 137.50 \text{ m})$$

$$B : (\varphi'_B = 36.6317 \text{ gr}; \lambda'_B = 10.7915 \text{ gr}; h'_B = 171.33 \text{ m})$$

1- Calculer les coordonnées tridimensionnelles $(X', Y', Z')_A$, $(X', Y', Z')_B$ des points A et B dans le système géodésique WGS84. Les paramètres de l'ellipsoïde WGS84 sont : $a = 6\,378\,137.00 \text{ m}$, $e^2 = 0.0066\,9438$.

2- On pose : $\Delta X' = X'_B - X'_A$; $\Delta Y' = Y'_B - Y'_A$; $\Delta Z' = Z'_B - Z'_A$. Calculer les coefficients $\Delta X'$, $\Delta Y'$ et $\Delta Z'$. Sachant que l'azimut géodésique de la direction AB est donné par la formule :

$$tgAz'_g = \frac{-\Delta X' \sin \lambda'_A + \Delta Y' \cos \lambda'_A}{\Delta Z' \cos \varphi'_A - \sin \varphi'_A (\Delta X' \cos \lambda'_A + \Delta Y' \sin \lambda'_A)} \quad (1)$$

Calculer la valeur numérique de Az'_g .

3- On considère que le passage du système GPS au système géodésique terrestre national est donné par la formule :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{X}'$$

où $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$ représentant la position d'un point M dans le système géodésique terrestre national, $\mathbf{X}' = (X', Y', Z')^T$ celle dans le système GPS et $\mathbf{T} = (T_x, T_y, T_z)^T$ le vecteur translation entre les deux systèmes, dont les composantes sont :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} +263.3 \text{ m} \\ -14.4 \text{ m} \\ -434.1 \text{ m} \end{pmatrix}$$

Calculer les coordonnées géodésiques tridimensionnelles $(X, Y, Z)_A$ et $(X, Y, Z)_B$ de A et B dans le système géodésique terrestre national.

4- Calculer les coordonnées géodésiques (φ, λ) du point A dans le système géodésique terrestre national. On déterminera (φ, λ) à cinq chiffres après la virgule en *gr*. On donne les paramètres de l'ellipsoïde de référence du système géodésique terrestre national : $(a = 6\,378\,249.20 \text{ m}, e^2 = 0.0068\,03487)$.

5- On pose $\Delta X = X_B - X_A$; $\Delta Y = Y_B - Y_A$; $\Delta Z = Z_B - Z_A$.

a- Calculer les coefficients ΔX , ΔY et ΔZ .

b- Déterminer en utilisant la formule (1) l'azimut géodésique Az_g de la direction AB en utilisant les coordonnées dans le système géodésique terrestre national.

6- Calculer la valeur numérique de $Az'_g - Az_g$. Que pensez-vous.

On rappelle :

$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda,$$

$$Y = (N + H) \cos \varphi \sin \lambda,$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi.$$

2 EXAMEN 2

3GT1-3GT2, Année Universitaire 2014-2015

Examen de Géodésie - 13 janvier 2015 -

- 2 pages - Documents non autorisés - Calculatrices autorisées -

Durée : 2h00

Exercice 1 (3pts) :

- Citer quelques systèmes géodésiques en usage en Tunisie.
- Donner l'expression de la latitude de Mercator.

Exercice 2 (5pts) :Soit une surface (S) définie par :

$$\begin{cases} X = u - v, \\ Y = u + v, \\ Z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

1- Calculer les expressions des vecteurs :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$$

2- Calculer les coefficients : E, F et G . Donner l'expression de ds^2 .3- Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales, sont-elles symétriques ? Justifier.**Problème (12 pts) :**

Soit (S) la sphère de rayon R . A un point $p(\varphi, \lambda)$ de (S) , on lui fait correspondre le point $P(X, Y)$ du plan OXY , muni d'une base orthonormée, par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$P(X, Y) = \begin{cases} X = R.\lambda, \\ Y = R.\text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

où (φ, λ) sont en **radians** et Log désigne le logarithme népérien.

1. Quelles sont les images des méridiens (quand $\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) et celles des parallèles (quand $\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$).
2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS^2 en fonction de $\varphi, \lambda, d\varphi$ et $d\lambda$.

3. Le module linéaire m est donné par $m = \frac{dS}{ds}$, avec ds^2 la première forme fondamentale de la sphère. Montrer que le module linéaire m est tel que :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 + d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2}$$

4. En déduire les modules linéaires m_1 le long du méridien ($\lambda = \text{constante}$) et m_2 le long du parallèle ($\varphi = \text{constante}$).

5. On suppose que le point p décrit sur la sphère (S) une courbe (Γ) telle que φ et λ sont liées par la relation :

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\lambda \quad (2)$$

Pour $\lambda = 0\text{ gr}, 2\text{ gr}, 4\text{ gr}, 6\text{ gr}, 8\text{ gr}$ et 10 gr , dresser un tableau donnant les valeurs de φ correspondantes.

6. Sachant que $R = 1000\text{ m}$, calculer les coordonnées (X, Y) de la représentation plane donnée par (1) pour les valeurs de φ et λ de la question 5.

7. Rapporter à l'échelle $1/100$ sur le plan OXY , les positions (X, Y) calculées ci-dessus. Que pensez-vous de l'image de la courbe (Γ).

Nota : Le plan orthonormé OXY est tel que OX vers l'Est, OY vers le Nord.

3 EXAMEN 3

4GT1, Année Universitaire 2014-2015

Examen - Les Représentations Planes - 21 mai 2015 -
- Seules les calculatrices sont autorisées - Durée : 1h 30 mn

Exercice (6 pts) :

On donne le modèle bidimensionnel suivant, de transformation entre deux systèmes géodésiques, défini par :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21.662 \text{ m} \\ -627.748 \text{ m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.999\,988\,149 & -0.000\,025\,928 \\ -0.000\,025\,928 & 0.999\,988\,149 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

1. S'agit-il du modèle bidimensionnel de Helmert ? Justifier.
2. Donner les valeurs numériques respectivement du facteur d'échelle et de l'angle de la rotation entre les deux systèmes.

Problème (14 pts) :

Pour une représentation plane, on dit qu'elle est **équivalente** si le produit des modules linéaires m_1 et m_2 suivant les directions principales vérifient :

$$m_1.m_2 = 1$$

Soit le modèle terrestre représenté par la sphère de rayon R qu'on note $\mathbb{S}^2$. Au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = 2R.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\cos\lambda \\ Y = 2R.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\sin\lambda \end{cases} \quad (1.1)$$

1. Qu'elle est l'image du pôle nord P_N ?
2. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) est une droite dont on donne l'équation.

3. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$) est un cercle dont on précise l'équation.

4. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.

5. Soit ds la longueur infinitésimale correspondante sur la sphère, donner l'expression de ds^2 .

6. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan. Montrer que :

$$dS^2 = R^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi^2 + 4R^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) d\lambda^2$$

7. En déduire le carré du module linéaire m^2 .

6. Calculer le module linéaire m_1 le long du parallèle.

7. Calculer le module linéaire m_2 le long du méridien.

8. La représentation plane définie par (1) est-elle équivalente. Justifier votre réponse.

4 EXAMEN 4

4GT1, Année Universitaire 2014-2015

Devoir surveillé - Les Représentations Planes - 13 avril 2015 -
- Documents et calculatrices non autorisés - Durée : 1h

Exercice : (6 points)

A - Donner l'expression de la latitude de Mercator.

B - Donner les expressions des coordonnées polaires de la représentation Lambert (R, Ω) .

Problème :(14 points)

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = 2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda \\ Y = -2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda \end{cases}$$

1. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) est une droite dont on donne l'équation.

2. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$) est un cercle dont on précise l'équation.

3. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.

4. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS .

5. Sachant que sur la sphère $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi . d\lambda^2$, calculer le module linéaire m .

6. En déduire le module linéaire m_1 le long du méridien.

7. En déduire le module linéaire m_2 le long d'un parallèle.
8. Comparer m_1 et m_2 . Conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

5 EXAMEN 5

ESAT
4GT1

Année Universitaire
2014-2015

Contrôle Continu n°1 : Les Représentations Planes
Durée : 25 mn - Documents et Calculatrices non autorisés

-

Question n°1 :

Ecrire la définition du module linéaire d'une représentation plane donnée.

Question n°2 :

Ecrire la définition de l'altération linéaire en un point d'une représentation plane donnée.

Question n°3 :

Ecrire l'expression exacte du carré de l'élément infinitésimal de longueur d'une sphère de rayon R :

- $ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2 + R^2 d\lambda^2,$

- $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \varphi d\lambda^2,$

- $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2.$

Question n°4 :

Ecrire l'expression exacte du carré de l'élément infinitésimal de longueur d'un ellipsoïde $E(a, e)$:

- $ds^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2 + N^2 d\lambda^2,$

- $ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2,$

- $ds^2 = N^2 d\varphi^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi d\lambda^2.$

Question n°5 :

Les fonctions suivantes sont-elles analytiques ? Justifier ?

$$- f(x, y) = x^2 - y^2 + x + i(2xy - y),$$

$$- g(x, y) = x^2 - y^2 + i(1 + 2xy).$$

On peut re-écrire f, g en utilisant les variables complexes $z = x + iy$ et/ou $\bar{z} = x - iy$.

Analyse Numérique

1 EXAMEN 6

3GT1- 3GT2

Année Universitaire 2014-2015

Examen d'Analyse Numérique et Mathématiques Appliquées

08 janvier 2015 – 2 pages

Documents non autorisés - Calculatrices autorisées

Durée : 2 h 00

Exercice 1 (4pts) :

Parmi ces matrices, laquelle est inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (8pts) :E désigne l'espace vectoriel réel engendré par les fonctions $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$. Soit T l'application de E dans lui même définie par $T(f) = f'$ c'est-à-dire la dérivée de f .

- 1- L'application T est-elle linéaire de E vers E ?
- 2- La fonction $l(x) = \cos(x + \varphi)$, où φ est une constante, est-elle un élément de E ?
- 3- Calculer $T(f_1)$ et $T(f_2)$.
- 4- Trouver par rapport à la base $B = (f_1, f_2)$ de E, la matrice de T , puis de $T^2 = T \circ T$.
- 5- Soit dans E l'opérateur $\langle g, h \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)h(x)dx$ de $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire dans E. Calculer $\langle f_1, f_1 \rangle$, $\langle f_2, f_2 \rangle$ et $\langle f_1, f_2 \rangle$. Les deux vecteurs de la base B sont-ils orthogonaux ?

Exercice 3 (8pts): Soit A la matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1- La matrice A est-elle symétrique ?

- 2- On cherche une factorisation de Cholesky de A sous la forme $A = L.L^T$ où L est une matrice triangulaire inférieure. Montrer que la matrice L est donnée par :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3- La matrice A est-elle définie positive ? Justifier.

- 4- Résoudre le système linéaire $A.X = b$, avec :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1.25 \\ -1.78 \\ 0.43 \\ 2.21 \end{pmatrix}$$

2 EXAMEN 7

3GT1- 3GT2

Année Universitaire 2014-2015

Examen d'Analyse Numérique et Mathématiques Appliquées
08 janvier 2015 – 2 pages
Documents non autorisés - Calculatrices autorisées
Durée : 2 h 00

Exercice 1 (4pts) :

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (6pts) :

On considère les applications suivantes :

a- de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, à $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow T(u) = v = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + y \end{pmatrix}$,

b- de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, à $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow T(u) = v = \begin{pmatrix} 2y \\ x - y + 2 \end{pmatrix}$,

c- de $\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, où $\mathbb{P}$ désigne l'espace vectoriel réel des polynômes de degré ≤ 2 , à P appartenant à $\mathbb{P}$, on lui associe le polynôme $T(P)(x) = P(x-1) - P(x)$.

1. Dans chaque cas, montrer si l'application en question T est linéaire ou non.**Problème (10pts):** Soit A la matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1- La matrice A est-elle symétrique ?2- On cherche une factorisation de Cholesky de A sous la forme $A = L.L^T$ où L est une matrice triangulaire inférieure. Montrer que la matrice L est donnée par :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3- La matrice A est-elle définie positive ? Justifier.

4- Résoudre le système linéaire $A.X = b$, avec :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1.25 \\ -1.78 \\ 0.43 \\ 2.21 \end{pmatrix}$$