

RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES AVEC LES CORRIGÉS:

ASTRONOMIE, GÉODÉSIE ET LA THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS

- POUR LES ELÈVES INGÉNIEURS EN GÉOMATIQUE -

This is my second book. It includes 72 exercises and problems with solutions, in astronomy, topography, geodesy, celestial mechanics and least squares theory, for geomatics students. I hope that students find the book very interesting.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Ancien Ingénieur Général Géographe Retraité de
l'Office de Topographie et du Cadastre de Tunisie

Edition Janvier 2026

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

*Résidence Bousten 8, Bloc B, Mosquée Er-Raoudha, 1181 Soukra Er-Raoudha
Tunisia.*

E-mail: abenhadsalem@gmail.com

© Janvier, 2026 - **Abdelmajid BEN HADJ SALEM**



Figure 1 | Photo récente de l'auteur

A mes chers parents, à mon épouse, à mes
enfants, à ma petite-fille Rayhane.

A la Mémoire de mes Collègues et Amis Dr.Rached
Boussemma, Dr. Chedly Fezzani, Nouredine
Yanguï, Jamel Zaiem, Abdelkader Sellal, Jalel
Zid, Nouredine Hourrigue et Salah Laaribi.

RÉSUMÉ DU SOMMAIRE

Préface	xi
I RECUEIL DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES	1
1 Astronomie	3
2 Géodésie	7
3 Théorie des Moindres Carrés	37
II LES CORRECTIONS	43
4 Astronomie	45
5 Géodésie	55
6 Théorie des Moindres Carrés	143
7 Bibliographie	165
LISTE DES FIGURES	169
Table des figures	169
LISTE DES TABLES	170
Liste des tableaux	171
Index	172

TABLE DES MATIÈRES

Préface	xi
I RECUEIL DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES	1
1 Astronomie	3
1.1 Trigonométrie Sphérique	3
1.2 Astronomie de position	5
2 Géodésie	7
2.1 Topographie	7
2.2 Courbes et Théorie des Surfaces	8
2.2.1 Courbes	8
2.2.2 Théorie des surfaces	9
2.3 Géométrie de l'Ellipse et de l'Ellipsoïde de révolution.	14
2.4 Les Systèmes Géodésiques	21
2.5 Réductions des Distances	24
2.6 Les Représentations Planes	25
2.6.1 Les Représentations Planes	25
2.6.2 La Représentation Lambert	30
2.6.3 La Représentation UTM	32
2.7 Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques.	33
2.7.1 Les Transformations 2D de passage entre les Systèmes Géodésiques.	33
2.7.2 Les Transformations 3D de passage entre les Systèmes Géodésiques.	33
2.8 Notions sur le Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre	34
3 Théorie des Moindres Carrés	37
3.1 Modèles Linéaires de Compensation	37
3.2 Modèles Non-Linéaires de Compensation	41
II LES CORRECTIONS	43
4 Astronomie	45
4.1 Trigonométrie Sphérique	45
4.2 Astronomie de Position	49
5 Géodésie	55
5.1 La Topographie	55
5.2 Courbes et Théorie des Surfaces	56
5.2.1 Courbes	56
5.2.2 Théorie des surfaces	59

5.3	Ellipse et Ellipsoïde	73
5.4	Les Systèmes Géodésiques	94
5.5	Réductions des Distances	105
5.6	Les Représentations Planes	109
5.6.1	Les Représentations Planes	109
5.6.2	La Représentation Lambert	128
5.6.3	La Représentation Plane UTM	132
5.7	Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques.	134
5.7.1	Les Transformations 2D de Passage entre Les Systèmes Géodésiques	134
5.7.2	Les Transformations 3D de passage entre les Systèmes Géodésiques.	135
5.8	Notions sur le Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre	136
6	Théorie des Moindres Carrés	143
6.1	Modèles Linéaires de Compensation	143
6.2	Modèles Non-Linéaires de Compensation	161
7	Bibliographie	165
	LISTE DES FIGURES	169
	Table des figures	169
	LISTE DES TABLES	170
	Liste des tableaux	171
	Index	172

PRÉFACE

J'ai souvent reçu des requêtes de la part des étudiants en géomatique me demandant de leur fournir les corrections des exercices et des problèmes que j'ai publiés à travers mes différentes publications de géodésie, de topographie, d'astronomie ou encore concernant l'application de la théorie des moindres carrés. Aussi, j'ai décidé de répondre à leurs souhaits, j'ai commencé à travailler depuis le mois de mars 2025 sur la correction des différents exercices et problèmes ainsi que la rédaction et le dessin de certaines figures pour faciliter aux lecteurs la compréhension de mes démonstrations.

La première partie de ce livre contient les énoncés des exercices et des problèmes, la deuxième partie concerne les corrections. Les thèmes traités sont présentés ci-dessous dans l'ordre, le nombre des sujets est écrit entre parenthèses, avec un total de 72 entre exercices et problèmes. Onze thèmes choisis sont les suivants:

- * Chapitre 1: - L'Astronomie (10).
- * Chapitre 2: - Géodésie:
 - La Topographie (2).
 - Courbes et Théorie des Surfaces (12).
 - Géométrie de l'Ellipse et de l'Ellipsoïde de révolution (12).
 - Les Systèmes Géodésiques (7).
 - Réduction des Distances (3).
 - Les Représentations Planes (14).
 - Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques (2).
 - Notions sur le Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre (3).
- * Chapitre 3: - Les Modèles Linéaires de Compensation (6).
 - Les Modèles Non-Linéaires de Compensation (1).

La difficulté des sujets est variable. Certains demandent plus de calculs et des manipulations des formules telles que celles de la trigonométrie plane et sphérique.

Le dernier chapitre du livre est consacré à la bibliographie. Cette dernière est riche en références pour les sujets traités ainsi pour l'amélioration des connaissances des différentes matières de la géomatique.

Enfin, pour signaler toute correction à cette publication, prière de nous écrire à l'adresse: abenhadjsaleh@gmail.com, et je vous remercie d'avance.

Tunis,
01 Janvier 2026

**Abdelmajid
Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.
Ingénieur Général Géographe**

I

RECUEIL DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES

1

ASTRONOMIE

1.1. TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Exercice n° 1

Calculer l'azimut d'une étoile A de déclinaison $\delta = +5^\circ$ quand sa distance zénithale est de 80° pour un observateur situé à la latitude $\varphi = 56^\circ$.

Exercice n° 2

En appliquant au triangle de position les formules de trigonométrie sphérique, montrer que l'on peut calculer l'angle horaire AH_c du coucher d'un astre A par : $\cos AH_c = -\tan \varphi \cdot \tan \delta$.

Exercice n° 3

Soit un triangle sphérique ABC . On donne les éléments suivants:

- $\hat{A} = 80.16433 \text{ gr}$,
- $\hat{B} = 55.77351 \text{ gr}$,
- $\hat{C} = 64.06261 \text{ gr}$,
- $AC = 20.1357 \text{ km}$,
- $AB = 22.1435 \text{ km}$.

1. Calculer $\alpha = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.
2. Déterminer ϵ l'excès sphérique de ce triangle.
3. Calculer la fermeture du triangle ABC , donnée par:

$$f = \alpha - 200.00000 \text{ gr} - \epsilon$$

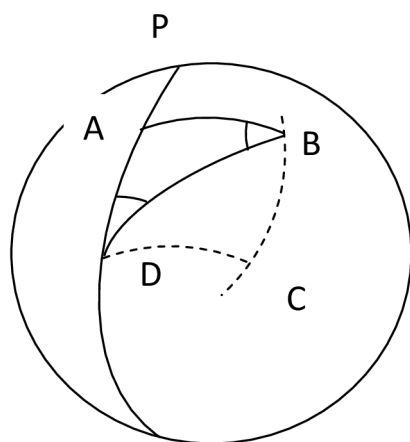
Exercice n° 4

Soit $(\mathbb{S}^2)$ une sphère de rayon égal à 1. Soit un carré sphérique $ABCD$ de côté a (arc de grand cercle). On note $\alpha = \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

1. Montrer que:

$$\cos a = \cot g^2 \frac{\alpha}{2}$$

2. Donner l'expression de la diagonale d = l'arc BD .



$$AB = a,$$

$$AD = a,$$

$$BD = d,$$

$$\text{Angle } A = \alpha,$$

$$\text{Angles } B = D = \alpha/2.$$

Figure 1.1 | Le carré sphérique

Problème n° 5

Soit $(\mathbb{S}^2)$ une sphère de rayon égal à 1 et de centre le point Ω . Un point M de $(\mathbb{S}^2)$ a pour coordonnées (φ, λ) . On appelle les coordonnées de Cassini-Soldner¹² de M les angles (voir Fig. 4.4):

- $L = \widehat{\Omega O, \Omega H}$,
- $H = \widehat{\Omega H, \Omega M}$.

1. Déterminer les relations liant L, H à φ, λ .
2. Inversement, donner les relations liant φ, λ à L, H .

Problème n° 6

Au lieu M de latitude $\varphi = 38^\circ$ Nord, on observe l'étoile polaire A de déclinaison $\delta = +89^\circ$ et d'ascension droite $\alpha = +2^h 13^m 52.90^s$.

1. Donner sur un graphique, les éléments du triangle sphérique PAM où P est le pôle Nord.
2. Sachant que l'heure sidérale locale HSL est égale au moment de l'observation à $6^h 37^m 19.72^s$, calculer l'angle horaire AH .
3. En appliquant la formule des cotangentes, montrer que l'azimut Az de l'étoile est donné par la formule:

$$\operatorname{tg} Az = \frac{\sin AH}{\cos AH \sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta}$$

4. Calculer alors l'azimut Az .
5. Calculer la distance zénithale z de l'étoile.

¹ César-François Cassini (1714-1784): Astronome et géodésien français.

² Dr Johann Georg von Soldner (1776-1833): Mathématicien et astronome bavarois.

1

L'observation se fait le jour de l'équinoxe de printemps le 21 mars à 0 heure TU . L'heure sidérale de Greenwich est $11\text{ h }52\text{ mn}$.

1. Calculer l'heure sidérale locale du lever et du coucher de l'étoile A au lieu considéré.
2. En déduire l'heure TU du lever et du coucher de l'étoile au lieu considéré.

Remarque: on choisira le coucher qui a lieu après le lever.

Problème n° 10

En un lieu de latitude $43^{\circ},521$ et de longitude $+0\text{ h }20\text{ mn }57\text{ s}$, on cherche à pointer la galaxie d'Andromède de coordonnées équatoriales $\alpha = 0\text{ h }40\text{ mn}$, $\delta = 41^{\circ}00'$ le 31 juillet 1992 à $21\text{ h }TU$.

On donne l'heure sidérale de Greenwich à $0\text{ h }TU$ le 31/07/1992: $HSG_{0hTU} = 20\text{ h }35\text{ mn }28\text{ s}$.

1. Calculer l'heure sidérale locale à $21\text{ h }TU$.
2. En déduire l'angle horaire de la galaxie.
3. Calculer la distance zénithale de la galaxie à $21\text{ h }TU$.
4. Calculer son azimut à cette même heure.

2

GÉODÉSIE

2.1. TOPOGRAPHIE

Exercice n° 11

On veut calculer:

a - Les coordonnées X , Y et l'altitude Z de la base d'une antenne de radio.

b - La hauteur H de cette antenne, construite au sommet d'une colline (voir **Fig. 2.1**).
D'un point A , on a obtenu un angle zénithal de 88.3333 gr avec une hauteur d'appareil de 1.37 m en visant le sommet de l'antenne et d'un point B un angle zénithal de 91.1111 gr et une hauteur de l'appareil de 1.52 m en visant la base de l'antenne. On a les données suivantes:

$$A(X_A = 30.48\text{ m}, Y_A = 1219.20\text{ m}, Z_A = 131.49\text{ m})$$

$$B(X_B = 259.08\text{ m}, Y_B = 457.20\text{ m}, Z_B = 108.77\text{ m})$$

$$\hat{A} = 73.3333\text{ gr} \quad \hat{B} = 96.6667\text{ gr}$$

Exercice n° 12

Vous travaillez avec un théodolite qui fournit les angles mesurés une seule fois avec une erreur moyenne quadratique $\alpha = 12\text{ dmgr}$.

1. On mesure une distance D de 100 m en mode parallactique avec une stadia de longueur $l = 2\text{ m}$, en mesurant l'angle parallactique α 4 fois. Quelle est l'erreur quadratique α_m de la moyenne en fonction de α .

2. Démontrer que l'erreur moyenne quadratique sur la distance est donnée par:

$$D = \frac{l}{2} \left(1 + \cot^2 \frac{\alpha_m}{2} \right) \alpha_m$$

3. Exprimer D en fonction de D , l et α_m . Sachant que D est égale à 101.53 m , calculer la valeur de D .

2

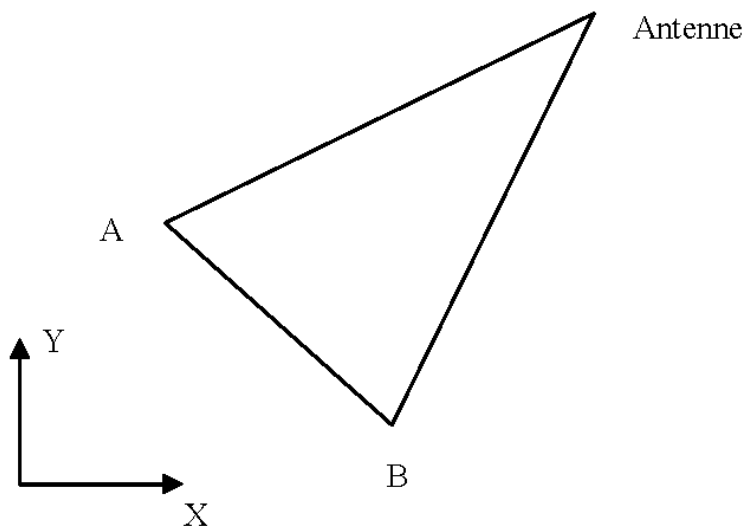


Figure 2.1 | Détermination de la hauteur de l'antenne

2.2. COURBES ET THÉORIE DES SURFACES

2.2.1. COURBES

Exercice n° 13

Soit l'hélice circulaire Γ paramétrée par:

$$\begin{cases} x = acost \\ y = asint \\ z = bt \end{cases}$$

où a, b deux constantes positives.

1. Exprimer les composantes des vecteurs T, N, B du repère de Frenêt.
2. Montrer que la courbure vaut $\frac{a}{a^2 + b^2}$.
3. Montrer que la torsion vaut $\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Exercice n° 14

Soit la courbe (C) définie par les formules:

$$M \begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \\ z = \frac{9}{16}at^4 \end{cases} \text{ avec } a > 0$$

1. Calculer l'abscisse curviligne s d'un point M quelconque de cette courbe lorsqu'on prend pour origine des arcs l'origine des coordonnées et qu'on prend pour sens des arcs croissants celui des y croissants.
2. Déterminer au point M les vecteurs unitaires du trièdre de Frenêt.
3. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.
4. Evaluer la torsion en M .

2

2.2.2. THÉORIE DES SURFACES

Exercice n° 15

Soit (Γ) la surface paramétrée par (u, v) dans $\mathbb{R}^2$ telle que:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u(1 - u^2)\cos v \\ Y = u(1 - u^2)\sin v \\ Z = 1 - u^2 \end{cases}$$

1. Calculer l'expression de ds^2 .
2. Montrer que l'équation cartésienne de (Γ) est:

$$x^2 + y^2 = (1 - z)z^2$$

Exercice n° 16

Soit la surface d'Enneper:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ Y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ Z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. Montrer que:

$$ds^2 = (1 + u^2 + v^2)^2 \cdot (du^2 + dv^2)$$

2. Calculer un vecteur unitaire normal à la surface.
3. Montrer que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point.

Exercice n° 17

On suppose que la métrique d'une surface donnée est:

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2, \quad A = A(u, v), \quad B = B(u, v)$$

1. Montrer alors que l'expression de la courbure totale est:

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A'_v}{B} \right)'_v + \left(\frac{B'_u}{A} \right)'_u \right]$$

' désigne la dérivation partielle.

Problème n° 18

On définit une surface (S) par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u^2 + v \\ Y = u + v^2 \\ Z = uv \end{cases}$$

1. Calculer les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$.
2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (S).
3. En déduire l'expression de ds^2 .
4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
5. Calculer un vecteur normal de (S).

Problème n° 19

On définit une surface (Σ) par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = a.\cos u.\cos v \\ Y = a.\cos u.\sin v \\ Z = b.\sin u \end{cases}$$

avec a, b deux constantes positives.

1. Calculer les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$.
2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ).
3. En déduire l'expression de ds^2 .
4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
5. Calculer un vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ de (Σ).
6. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose:

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

7. Calculer les coefficients L, M et N .

Problème n° 20

On considère la surface (Γ) définie par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = \sin u.\cos v \\ Y = \sin u.\sin v \\ Z = \cos u + \text{Log}tg \frac{u}{2} + \psi(v) \end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe C^1 de v .

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ).
2. Montrer que les courbes coordonnées $v = \text{constante}$ constituent une famille de courbes planes de (Γ) et que leur plan coupe (Γ) sous un angle constant.

3. Calculer les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$.
4. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) .
5. En déduire l'expression de ds^2 .
6. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$, calculer un vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ de Γ .
8. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose:

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

9. Calculer les coefficients L, M et N .
10. En déduire l'expression des courbures moyenne et totale.

Problème n° 21

Soit la surface (Γ) définie paramétriquement par:

$$M(u, v) \begin{cases} X = thu \cdot \cos v \\ Y = thu \cdot \sin v \\ Z = \frac{1}{chu} + \text{Log} th \frac{u}{2} \end{cases}$$

avec chu et thu sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par:

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ) .
2. Calculer les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$.
3. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) .
4. En déduire l'expression de ds^2 .
5. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
6. Calculer un vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ de (Γ) .
7. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose:

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

8. Calculer les coefficients L, M et N .
9. Déterminer les courbures moyenne et totale.

Problème n° 22

1. Montrer que les courbures totale K et moyenne H en un point $M(x, y, z)$ d'une surface paramétrée par $z = f(x, y)$, où f est une fonction lisse, sont données par:

$$K = \frac{f''_{xx}f''_{yy} - f'^2_{xy}}{(1 + f'^2_x + f'^2_y)^2}$$

et:

$$H = \frac{(1 + f_x'^2)f_{xx}'' - 2f_x'f_y'f_{xy}'' + (1 + f_y'^2)f_{yy}''}{(1 + f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2

Problème n° 23

Soit (Σ) une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $OM(u, v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

i) - $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$

ii) - Le vecteur $\frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est parallèle au vecteur normal N à la surface,

iii) - Les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées (u, v) ont même longueurs.

2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de (Σ) forment un réseau de *Tchebychev*.¹ Montrer que dans ce cas, on peut paramétrer la surface par $(\tilde{u}, \tilde{v})$ telle que ds^2 s'écrit:

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2\cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

où θ est une fonction de $(\tilde{u}, \tilde{v})$. Montrer que θ est l'angle entre les courbes coordonnées $\tilde{u}, \tilde{v}$.

3. On pose les deux déterminants ci-dessous:

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ -\frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

En plus de la formule de K utilisée dans des problèmes précédents, on montre que la courbure totale K est donnée par cette formule (A.N. Pressley, 2010):

$$K = \frac{A - B}{(EG - F^2)^2}$$

Montrer que:

$$K = -\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}}$$

4. On pose :

$$\hat{u} = \tilde{u} + \tilde{v}$$

$$\hat{v} = \tilde{u} - \tilde{v}$$

Montrer que ds^2 s'écrit avec les nouvelles variables $(\hat{u}, \hat{v})$:

$$ds^2 = \cos^2\omega d\hat{u}^2 + \sin^2\omega d\hat{v}^2$$

¹Pafnouti Tchebychev (1821 - 1894): Mathématicien russe.

avec $\omega = \theta/2$. (A.N. Pressley, 2010)

Problème n° 24

Soit $(\mathcal{F})$ une surface définie dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par la fonction vectorielle $\mathbf{OM} = S(u, v)$ telle que:

$$S(u, v) \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

S est dite une paramétrisation conforme de $(\mathcal{F})$ si on a les deux conditions suivantes:

$$\frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial v} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = e^{\Phi(u, v)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = 0$$

1. Ecrire la première forme fondamentale de $(\mathcal{F})$.

2. Soit n Le vecteur normal unitaire.

$$n = \frac{\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v} \right\|}$$

Quand le point M varie sur la surface $(\mathcal{F})$, le repère $(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}, n)$ est un repère mobile. La deuxième forme fondamentale de $(\mathcal{F})$ est définie par:

$$n \cdot d^2 S = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

Si cette deuxième forme fondamentale s'écrit sous la forme :

$$-n \cdot d^2 S = e^{\Phi(u, v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right)$$

Donnez l'expression de $\Phi(u, v)$. Alors, la paramétrisation de $(\mathcal{F})$ est dite isotherme. Dans ce cas, ρ_1, ρ_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface $(\mathcal{F})$. Une surface qui admet des coordonnées isothermes est dite isotherme.

On considère que $(\mathcal{F})$ est la sphère définie par: $S = \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad R > 0$

Soit $\mathcal{L}_M$ la variable de Mercator. Montrer que la sphère paramétrée par $(\mathcal{L}_M, \lambda)$ est une surface isotherme.

3. On considère $\mathcal{B}$ la base du repère mobile $(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}, \frac{\partial S}{\partial \lambda}, n)$. On prendra $u = \mathcal{L}_M, v = \lambda$. Montrer par le calcul que les vecteurs de la base $\mathcal{B}(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}, \frac{\partial S}{\partial \lambda}, n)$ vérifient les deux équations matricielles ci-dessous. Ces deux expressions sont appelées les équations de

Gauss-Weingarten :

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_u}{2} & -\frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_1} \\ \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix}$$

et:

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ -\frac{\Phi'_u}{2} & \frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix}$$

2

2.3. GÉOMÉTRIE DE L'ELLIPSE ET DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

Problème n° 25

1. Calculer les composantes du vecteur normal extérieur à l'ellipse, en déduire les relations (dans les deux sens) entre les lignes trigonométriques de φ et celles de ψ .
2. Donner les équations paramétriques de l'ellipse et de l'ellipsoïde en fonction, respectivement, de φ et de λ et φ .
3. Etablir une relation différentielle entre ψ et φ .
4. Calculer la différentielle $d\beta$ de l'arc d'ellipse en fonction de φ , puis la première forme quadratique de l'ellipsoïde.
5. Calculer les courbures principales de l'ellipsoïde de révolution.
6. Trouver la coordonnée curviligne de l'ellipsoïde de révolution qui forme avec la longitude un couple de coordonnées symétriques et qui s'annule le long de l'équateur.

Problème n° 26

$$W_{2p} = \int_0^\Omega \sin^{2p} \omega d\omega$$

On pose:

$$I_{p-2}(\Omega) = \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega \cos^2 \omega d\omega$$

²Julius Weingarten (1836 - 1910) : mathématicien allemand.

1. Etablir les formules suivantes:

$$\begin{aligned} W_p &= W_{p-2} - I_{p-2} \\ (p-1)I_{p-2} &= \sin^{p-1}\Omega \cos\Omega + W_p \\ W_p &= \frac{p-1}{p}W_{p-2} - \frac{1}{p}\sin^{p-1}\Omega \cos\Omega \end{aligned}$$

2

2. Préciser la valeur de W_0 , et proposer un programme (en Matlab) de calcul de W_{2p} .

Exercice n° 27

On a:

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho d\varphi$$

avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}, \quad w^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$$

1. Développer w^{-3} suivant les puissances croissantes de $e \sin \varphi$.
2. Calculer $\beta(\varphi)$ en fonction des $W_{2p}(\varphi)$.
3. Majorer l'erreur de calcul, lorsqu'on arrête le développement au terme e^{2n} . Calculer n si l'on recherche la précision du millimètre sur β , quelle que soit la latitude φ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
4. Proposer un organigramme de calcul.
5. Envisager la solution du problème inverse: calcul de φ connaissant β .

Problème n° 28

Soit l'ellipse (E) définie par les équations paramétriques:

$$M \begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \sin u \\ \text{avec } a > b > 0 \end{cases}$$

On pose:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

1. Calculer la position sur l'axe des abscisses des deux points F et F' appelés foyers tels que $MF + MF' = 2a$.
2. Montrer que le produit des distances des foyers à la tangente à l'ellipse en M est indépendant de u .
3. Donner l'expression de ds .
4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires T et N et en déduire le rayon de courbure de l'ellipse.
5. Montrer qu'il passe par M deux cercles tangents en ce point à la courbe et centrés sur Ox, Oy respectivement (appelés cercles surosculateurs).
6. Que deviennent ces cercles lorsque M est un sommet de l'ellipse.

Exercice n° 29

1. A partir de la définition géométrique de l'ellipse donnée par:

$$MF + MF' = \text{constante} = 2a$$

2

retrouver l'expression de l'équation cartésienne de l'ellipse.

Exercice n° 30

1. Montrer la formule très utilisée en géodésie:

$$\frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi$$

avec N et ρ les deux rayons de courbures principaux de l'ellipsoïde de révolution donnés respectivement par :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

et:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Problème n° 31

A partir des équations de l'ellipsoïde de révolution:

$$M = \begin{cases} X = N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases}$$

1. Calculer les vecteurs:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}$$

2. Calculer les coefficients:

$$E = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}$$

3. Démontrer que l'expression de la première forme fondamentale s'écrit:

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

4. Calculer le vecteur normal $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \right\|}$$

5. Calculer les vecteurs:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda \partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi^2}$$

6. Déterminer les coefficients:

$$L = n \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}, \quad M = n \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \varphi}, \quad N = n \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial^2 \varphi}$$

7. Ecrire la deuxième forme fondamentale $\Phi(\lambda, \varphi)$.

8. En appliquant la formule du cours, Montrer que :

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

est le rayon de courbure de la section normale au point M perpendiculaire au plan de la méridienne de l'ellipsoïde de révolution.

9. En posant:

$$d\mathcal{L} = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

En déduire que ds^2 s'écrit:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

10. Montrer que $\mathcal{L}$ est donnée par:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \text{Log} \left(\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

Problème n° 32

Sur l'ellipsoïde, on note φ la latitude géodésique et ψ la latitude réduite.

1. Calculer ρ le rayon de courbure de l'ellipse méridienne en fonction de ψ .
2. Exprimer l'aplatissement de l'ellipsoïde en fonction des valeurs de ρ au pôle et à l'équateur.
3. On mesure la longueur d'un arc de méridien d'un degré à la fois au pôle et à l'équateur. On trouve respectivement 111 695 m et 110 573 m. En déduire l'aplatissement.

Problème n° 33

On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point M :

$$M = (X, Y, Z) = (4\,300\,244.860 \text{ m}, 1\,062\,094.681 \text{ m}, 4\,574\,775.629 \text{ m})$$

Les paramètres de l'ellipsoïde de référence sont $a = 6\,378\,137.00 \text{ m}$, $e^2 = 0.006\,694\,38$.

1. Calculer le demi-petit axe b .
2. Calculer l'aplatissement.
3. Calculer les coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) du point M . φ et λ seront calculées en grades avec cinq chiffres après la virgule.

Problème n° 34

Soit $\mathcal{E}(a, e)$ un ellipsoïde de révolution où a, e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. (g) une géodésique partant d'un point $E(\varphi = 0, \lambda_E)$ sur l'équateur et d'azimut Az_E . A cette géodésique, on lui fait correspondre une géodésique (g') sur la sphère $\mathcal{S}^2$ dite de Jacobi³ de rayon a , ayant le même azimut Az_E au point $E'(\varphi' = 0, \lambda_E)$.

³Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851): Mathématicien allemand.

De même au point $M(\varphi, \lambda)$ de la géodésique (g) de l'ellipsoïde, on lui fait correspondre le point $M'(\varphi', \lambda')$ de (g') de $\mathcal{S}^2$ tel qu'il y a conservation des azimuts.

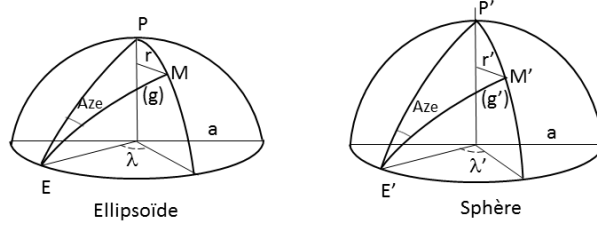


Figure 2.2 | La Correspondance de la sphère de Jacobi

1. Ecrire l'équation de Clairaut⁴ pour la géodésique (g) .
2. On note r' le rayon du parallèle passant par M' de la géodésique (g') . Ecrire de même l'équation de Clairaut pour la géodésique (g') .
3. Montrer que φ et φ' vérifient:

$$N \cos \varphi = a \cos \varphi'$$

et en déduire que φ' est la latitude paramétrique de M .

4. Ecrire les expressions de $tg Az_g$ et $tg Az_{g'}$ respectivement sur (g) et (g') .
5. Montrer que:

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{a d\varphi'} d\lambda'$$

En déduire que :

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda'$$

6. En intégrant l'équation précédente, montrer qu'on obtient:

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda'$$

avec $\lambda > \lambda_E$ et λ' est comptée à partir de λ_E .

7. En écrivant $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi' + o(e^4)$ où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en e dont on néglige, écrire l'intégrale précédente entre λ_E et $\lambda_E + \lambda$.
8. Comme (g') est une géodésique de la sphère, on démontre que:

$$\cos^2 \varphi' d\lambda' = \frac{\sin Az_E}{a} ds'$$

où ds' est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point E' , montrer que l'équation précédente s'écrit sous la forme:

$$\lambda = \lambda_E + \lambda' - \frac{e^2 \sin Az_e}{2a} \int_0^{s'} ds'$$

⁴Alexis Claude de Clairaut (1713-1765): mathématicien, astronome et géophysicien français.

9. On suppose que la géodésique (g') coupe une première fois le plan de l'équateur en un point F' , montrer qu'on obtient:

$$\begin{aligned}\lambda'_F &= \pi \\ s' &= \pi a \\ \lambda_F &= \lambda_E + \pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_E}{2}\end{aligned}$$

10. La géodésique (g') partant de F' a pour azimuth $\pi - Az_E$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point E' , mais la géodésique (g) sur l'ellipsoïde coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à H dont la longitude est λ_H . Montrer que λ_H est donnée par:

$$\lambda_H = \lambda_E + 2\pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_E}{2} - \frac{e^2 \pi \sin(\pi - Az_E)}{2} = \lambda_E + 2\pi - e^2 \pi \sin Az_E$$

Quelle conclusion a-t-on sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution.

Problème n° 35

Un point M de la surface d'une sphère (S) de rayon R , a pour coordonnées (X, Y, Z) dans un repère orthonormé:

$$M = (X, Y, Z) = (R \cos \varphi \cdot \cos \lambda, R \cos \varphi \cdot \sin \lambda, R \sin \varphi)$$

1. Montrer qu'un vecteur normal unitaire n à (S) en M est:

$$n = (\cos \varphi \cdot \cos \lambda, \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \sin \varphi)^T$$

2. Soit (C) le grand cercle passant par le point $A(R, 0, 0)$ et d'azimut Az_E . Le point M peut être décrit par son abscisse curviligne s mesurant l'arc AM . On note par ω représente l'angle au centre de l'arc AM . Utilisant la trigonométrie sphérique, montrer que:

$$\cos \varphi \cdot \sin \lambda = \sin \omega \cdot \sin Az_E$$

3. En utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique dans le triangle APM , montrer qu'on a les deux relations :

$$\begin{aligned}\cos \omega &= \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \sin \varphi &= \sin \omega \cdot \cos Az_E\end{aligned}$$

4. En déduire que les coordonnées de M s'écrivent en fonction de s comme suit:

$$M \begin{cases} X = R \cdot \cos(s/R) \\ Y = R \sin Az_E \sin(s/R) \\ Z = R \cos Az_E \sin(s/R) \end{cases}$$

5. Calculer les vecteurs T et N du repère de Frenêt. En déduire les composantes de N en fonction de ω .

6. Montrer que les vecteurs N et n sont parallèles.

7. Justifier que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

Problème n° 36

Soit le tore $\mathbb{T}$ défini par les équations suivantes:

2

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} x = (a + R \cos \varphi) \cos \lambda \\ y = (a + R \cos \varphi) \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

1. Calculer la première forme fondamentale ds^2 .

2. Avec les notations usuelles, on pose:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \varphi} &= E'_\varphi, & \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= E'_\lambda, & \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= F'_\varphi \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= F'_\lambda, & \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= G'_\varphi, & \frac{\partial G}{\partial \lambda} &= G'_\lambda \end{aligned} \quad (2.1)$$

Utilisant les équations des géodésiques du cours, montrer que les équations des géodésiques du tore sont:

$$\begin{aligned} -2R \sin \varphi (a + R \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + (a + R \cos \varphi)^2 \frac{d^2 \lambda}{ds^2} &= 0 \\ R \sin \varphi (a + R \cos \varphi) \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 \varphi}{ds^2} &= 0 \end{aligned}$$

3. Montrer que la première équation ci-dessus donne:

$$(a + R \cos \varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} = C = \text{cte}$$

Montrer qu'on retrouve l'équation de Clairaut avec $C = (a + R) \sin Aze$ où Aze est l'azimut de départ au point $M_0(\varphi = 0, \lambda_0)$.

4. On suppose au point M_0 , la géodésique a pour azimut Aze tel que:

$$0 < Aze < \frac{\pi}{2}$$

Montrer que la deuxième équation des géodésiques s'écrit en utilisant le résultat précédent:

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -\frac{C^2}{R} \frac{\sin \varphi}{(a + R \cos \varphi)^3}$$

5. Montrer qu'on arrive à:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = l - \frac{C^2}{R^2 (a + R \cos \varphi)^2} \geq 0$$

où l est une constante d'intégration.

2.4. LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

Exercice n° 37

On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point A:

$$X = 5\,102\,603.85\,m$$

$$Y = 916\,806.87\,m$$

$$Z = 3\,703\,034.99\,m$$

2

L'ellipsoïde de référence est l'ellipsoïde GRS80 dont les paramètres sont:

$$a = 6\,378\,137.00\,m \quad e^2 = 0066943800229$$

1. Calculer le demi-petit axe b .
2. Déterminer les coordonnées géodésiques (φ, λ, h) du point A. φ et λ seront calculées en grades avec cinq chiffres après la virgule.

Exercice n° 38

On donne l'expression scalaire d'une fonction $V(x, y, z)$ par :

$$V(x, y, z) = \frac{ax^2 + y^2}{z^2} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

1. Calculer les composantes du vecteur $\text{grad}V$ dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ où $z \neq 0$.

Problème n° 39

Soit un point $A(\varphi, \lambda)$ sur un ellipsoïde de révolution associé à un référentiel géocentrique donné $\mathcal{R}$. On considère le repère orthonormé local en A $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée (i, j, k) de $\mathcal{R}$ où e_λ est tangent au parallèle passant par A et dirigé vers l'Est, e_φ tangent à la méridienne, dirigé vers le nord et e_n porté par la normale à l'ellipsoïde dirigé vers le zénith.

1. Exprimer les vecteurs de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ dans la base (i, j, k) de $\mathcal{R}$.
2. Exprimer les vecteurs i, j et k dans la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$.
3. Calculer de_λ, de_φ et de_n dans la base (i, j, k) .
4. En adoptant une écriture matricielle, montrer que :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi d\lambda & -\cos\varphi d\lambda \\ -\sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ \cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

Problème n° 40

On considère les notations du précédent problème. Soit un point M. On pose:

$$\Delta\mathbf{X} = (X_M - X_A, Y_M - Y_A, Z_M - Z_A)^T, \Delta\mathbf{x} = (x_M, y_M, z_M)^T$$

où $\Delta\mathbf{X}$ et $\Delta\mathbf{x}$ sont respectivement les composantes du vecteur AM dans le repère $\mathcal{R}$ et le repère local en A.

2

1. Montrer qu'on a la relation: $\Delta \mathbf{X} = J \cdot \Delta \mathbf{x}$ avec J une matrice orthogonale ($J^{-1} = J^T$) qu'on déterminera.
2. On suppose maintenant que $\mathcal{R}$ est le repère GPS et que le passage du repère $\mathcal{R}$ vers le repère terrestre est donné par le modèle dit à 7 paramètres :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = F(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m) \cdot R \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On note: $\delta \mathbf{X} = F(\Delta \mathbf{X}) - \Delta \mathbf{X}$, que représente $\delta \mathbf{X}$. Montrer qu'au premier ordre:

$$\delta \mathbf{X} \cong m \Delta \mathbf{X} + (R - I) \Delta \mathbf{X}$$

3. On appelle $\omega = (rx, ry, rz)^T$, montrer que:

$$||\delta \mathbf{X}|| = (m^2 + \omega^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} ||\Delta \mathbf{X}||$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\Delta \mathbf{X}$ et ω .

4. En déduire que:

$$|m| \cdot ||\Delta \mathbf{X}|| \leq ||\delta \mathbf{X}|| \leq (m^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} ||\Delta \mathbf{X}||$$

5. En utilisant la relation liant $\Delta \mathbf{X}$ et $\Delta \mathbf{x}$; montrer que:

$$\delta \mathbf{x} = m \Delta \mathbf{x} + J^T (R - I) J \Delta \mathbf{x}$$

Problème n° 41

On définit dans $\mathbb{R}^3$ un point M par ses coordonnées ellipsoïdiques de Jacobi (ϕ, λ, u) comme suit:

$$M \begin{cases} x = \sqrt{u^2 + \epsilon^2} \cdot \cos \phi \cos \lambda \\ y = \sqrt{u^2 + \epsilon^2} \cdot \cos \phi \sin \lambda \\ z = u \cdot \sin \phi \end{cases}$$

avec: $\epsilon^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in]0, +\infty[$, a, b deux constantes réelles telles que $a > b > 0$.

1. Montrer que le point M appartient à un ellipsoïde de révolution en précisant ses demi-axes.
2. Calculer ds^2 et montrer qu'il s'écrit sous la forme:

$$ds^2 = (d\phi, d\lambda, du) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ du \end{pmatrix}$$

avec G donnée par :

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi}{u^2 + \epsilon^2} \end{pmatrix}$$

2

3. Sachant que l'expression du laplacien d'une fonction scalaire V en coordonnées de Jacobi est exprimée par:

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial V}{\partial u} \right) \right\}$$

où g est le déterminant de la matrice G , donner l'expression de ΔV .

4. Calculer ΔV sachant que V est donné par:

$$V(\phi, u) = \frac{GM}{\epsilon} \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} + \frac{1}{3} a^2 \omega^2 \frac{q}{q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi$$

avec G, M et ω des constantes et:

$$q = q(u) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{\epsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} - 3 \frac{u}{\epsilon} \right]$$

$$q_0 = q(u = b) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{\epsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{b} - 3 \frac{b}{\epsilon} \right]$$

Problème n° 42

Avec les notations usuelles, un potentiel est donné avec les constantes (GM, a, J_2, ω) de GRS80 par :

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\cos \theta) \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta$$

où (r, θ, λ) sont les coordonnées sphériques du point de calcul et :

- $a = 6378\,137.00\,m, b = 6356\,752.31\,m$;
- $GM = 3986\,005 \times 10^8\,m^3 s^{-2}$;
- $\omega = 7292\,115 \times 10^{-11}\,rad.s^{-1}$;
- $J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$.

1. Calculer le potentiel W aux points suivants situés sur l'ellipsoïde GRS80:

- * le Pôle Nord;
- * sur l'équateur;
- * au point A sur l'ellipsoïde avec $\theta_A = 34^\circ$.

2. Calculer les variations de W entre les 3 points.

3. Exprimer le potentiel W en coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) .

$$\text{On rappelle : } P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Problème n° 43

On considère deux points A et B de coordonnées géodésiques dans le système géodésique WGS84 du GPS:

2

$$A: (\varphi'_A = 36.6306 \text{ gr}; \lambda'_A = 10.7896 \text{ gr}; h'_A = 137.50 \text{ m})$$

$$B: (\varphi'_B = 36.6317 \text{ gr}; \lambda'_B = 10.7915 \text{ gr}; h'_B = 171.33 \text{ m})$$

1. Calculer les coordonnées tridimensionnelles $(X', Y', Z')_A, (X', Y', Z')_B$ des points A et B dans le système géodésique WGS84. Les paramètres de l'ellipsoïde WGS84 sont : $a = 6378137.00 \text{ m}, e^2 = 0.00669438$.

2. On pose: $\Delta X' = X'_B - X'_A; \Delta Y' = Y'_B - Y'_A; \Delta Z' = Z'_B - Z'_A$. Calculer les coefficients $\Delta X', \Delta Y'$ et $\Delta Z'$. Sachant que l'azimut géodésique de la direction AB est donné par la formule:

$$tg(Az'_g) = \frac{-\Delta X' \sin \lambda'_A + \Delta Y' \cos \lambda'_A}{\Delta Z' \cos \varphi'_A - \sin \varphi'_A (\Delta X' \cos \lambda'_A + \Delta Y' \sin \lambda'_A)} \quad (2.2)$$

calculer la valeur numérique de Az'_g .

3. On considère que le passage du système GPS au système géodésique terrestre national est donné par la formule:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{X}'$$

où $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$ représentant la position d'un point M dans le système géodésique terrestre national, $\mathbf{X}' = (X', Y', Z')^T$ celle dans le système GPS et $\mathbf{T} = (Tx, Ty, Tz)^T$ le vecteur translation entre les deux systèmes, dont les composantes sont :

$$\mathbf{T} = (+263.3 \text{ m}, -14.4 \text{ m}, -434.1 \text{ m})^T$$

Calculer les coordonnées géodésiques tridimensionnelles $(X, Y, Z)_A$ et $(X, Y, Z)_B$ de A et B dans le système géodésique terrestre national.

4. Calculer les coordonnées géodésiques (φ, λ) du point A dans le système géodésique terrestre national. On déterminera (φ, λ) à cinq chiffres après la virgule en *gr*. On donne les paramètres de l'ellipsoïde de référence du système géodésique terrestre national: $(a = 6378249.20 \text{ m}, e^2 = 0.006803487)$.

5. On pose $\Delta X = X_B - X_A; \Delta Y = Y_B - Y_A; \Delta Z = Z_B - Z_A$.

a- Calculer les coefficients $\Delta X, \Delta Y$ et ΔZ .

b- Déterminer en utilisant la formule (2.2) l'azimut géodésique Az_g de la direction AB en utilisant les coordonnées dans le système géodésique terrestre national.

$$tg(Az_g) = \frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{\Delta Z \cos \varphi - \sin \varphi (\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda)}$$

6. Calculer la valeur numérique de $Az'_g - Az_g$. Que pensez-vous.

2.5. RÉDUCTIONS DES DISTANCES

Exercice n° 44

On a mesuré une distance suivant la pente $D = 20130.858 \text{ m}$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07 \text{ m}, H_B = 507.75 \text{ m}$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378 \text{ km}$.

1. Calculer la distance suivant l'ellipsoïde :

- en utilisant les différentes corrections,
- en utilisant la formule rigoureuse.

2. En prenant la valeur de la formule rigoureuse et sachant que le module linéaire m vaut 0.999850371, calculer la distance réduite au plan de la représentation plane utilisée.

Exercice n° 45

Entre 2 points $A(H_A = 128.26 \text{ m})$ et $B(H_B = 231.84 \text{ m})$, la distance mesurée D suivant la pente est égale à 15498.823 m. Soit D_0 la distance corde au niveau de la surface de référence. On prendra comme rayon terrestre $R = 6378 \text{ km}$. 1. Calculer la valeur de D_0 en utilisant la formule rigoureuse.

2. Calculer D_0 par les corrections.

3. En adoptant la moyenne des deux méthodes, calculer la distance D_e réduite à la surface de référence.

4. Le module linéaire de la représentation plane Lambert Sud utilisée est de 0.999648744, calculer alors la distance D_r réduite au plan de la représentation.

Problème n° 46

On a mesuré une distance D suivant la pente entre les points $A(H_A = 1319.79 \text{ m})$ et $B(H_B = 1025.34 \text{ m})$ avec $D = 16483.873 \text{ m}$.

1. Calculer la distance D_e distance réduite à l'ellipsoïde de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre $R = 6378 \text{ km}$.

2. Calculer la distance D_r réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de -14 cm/km .

3. La direction AB a un azimut géodésique $Az_g = 297.56225 \text{ gr}$. Donner l'expression du gisement G de AB en fonction de Az_g, γ la convergence des méridiens et $d\nu$ la correction de la corde, sachant que la représentation plane utilisée est le Lambert Sud Tunisie et que le point A est au nord du parallèle origine.

4. On donne $d\nu = -13.7 \text{ dmgr}$ et $\lambda = 9.3474734 \text{ gr}$ la longitude de A , calculer G .

5. En déduire les coordonnées (X_B, Y_B) de B si $X_A = 363044.79 \text{ m}$ et $Y_A = 407020.09 \text{ m}$.

6. Déterminer les coordonnées géographiques (φ, λ) de B .

2.6. LES REPRÉSENTATIONS PLANES

2.6.1. LES REPRÉSENTATIONS PLANES

Problème n° 47

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon R . Au point $P(\varphi, \lambda)$ de $\mathbb{S}^2$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = R \cdot \cos \lambda \\ Y = R \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

1. Cette représentation est-elle cylindrique ou conique? Justifier votre réponse?

2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, donner l'expression de $(dS)^2$ en fonction de $\varphi, \lambda, d\varphi, d\lambda$ et R .

3. Soit m le module linéaire, montrer que $m^2 = \frac{\cos^2 \varphi d\varphi^2 + \sin^2 \lambda d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2}$.

4. En déduire les modules linéaires m_1 le long du méridien ($\lambda = \text{constante}$) et m_2 le long du parallèle ($\varphi = \text{constante}$).
5. Cette représentation est-elle conforme? Par quoi est représentée l'indicatrice de Tissot?

2

Problème $n^\circ 48$

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = 2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda \\ Y = -2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda \end{cases}$$

1. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \text{constante}$) est une droite dont on donne l'équation.
2. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \text{constante}$) est un cercle dont on précise l'équation.
3. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
4. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS .
5. Sachant que sur la sphère $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 cos^2\varphi.d\lambda^2$, calculer le module linéaire m .
6. En déduire le module linéaire m_1 le long du méridien.
7. En déduire le module linéaire m_2 le long d'un parallèle.
8. Comparer m_1 et m_2 . Conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

Problème $n^\circ 49$

Soit Σ la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = R.\lambda \\ Y = R.Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Quelles sont les images des méridiens ($\lambda = \text{constante}$) et des parallèles ($\varphi = \text{constante}$).
2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS en fonction de φ et de λ et calculer le module linéaire m .
3. En déduire les modules linéaires m_1 le long du méridien et m_2 le long du parallèle.
4. Comparer m_1 et m_2 et conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.
5. On suppose que P décrit sur la surface Σ une courbe (γ) telle que φ et λ sont liées par la relation : $tg\varphi = sin\lambda$. Pour $\varphi = 0\text{ gr}, 2\text{ gr}, 4\text{ gr}, 6\text{ gr}, 8\text{ gr}$ et 10 gr , dresser un tableau donnant les valeurs de λ correspondantes.
6. Sachant que $R = 1000\text{ m}$, calculer les coordonnées (X, Y) de la représentation plane donnée ci-dessus pour les valeurs de φ et λ de la question 5.
7. Rapporter à l'échelle 1/100 sur le plan OXY , les positions (X, Y) des points. Que pensez-vous de l'image de la courbe (γ).

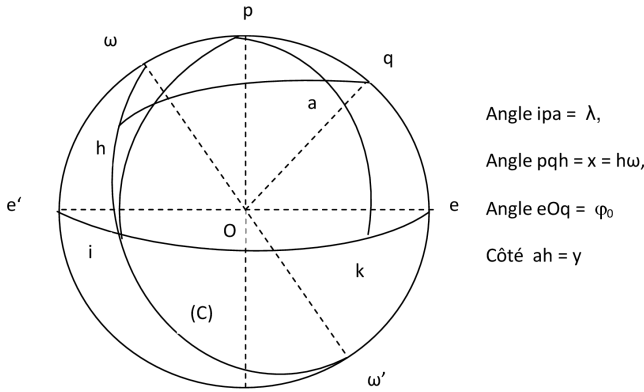


Figure 2.3 | Représentation cylindrique conforme oblique tangente

Problème n° 50

Sur une sphère de rayon unité, modèle de la Terre, on désigne :

- par p le pôle nord,
- par (C) un grand cercle qui coupe l'équateur au point i de longitude nulle,
- par q le pôle de ce grand cercle, de latitude φ_0 positive,
- par ω et h respectivement les points d'intersection de (C) et du méridien de q et du grand cercle issu de q , passant par le point $a(\varphi, \lambda)$.

On pose : $\omega h = x$, $ha = y$

1. q est le pivot d'une représentation cylindrique conforme oblique tangente (voir **Fig. 2.3**), dont (C) est le "pseudo-équateur". Le plan est rapporté aux axes $\Omega X, \Omega Y$ images respectives de (C) et du grand cercle ωpq . Exprimer en fonction de φ, λ et φ_0 les coordonnées X, Y du point A image de a (vérifier que pour $\varphi_0 = 0$, on retrouve les expressions de X, Y d'une représentation transverse).

2. Montrer que l'équation de l'image plane du parallèle de latitude φ_0 peut s'écrire :

$$e^Y \cos X = tg \varphi_0$$

3. Montrer que l'image plane de l'équateur a pour équation :

$$\cos X + tg \varphi_0 \cdot sh Y = 0$$

sh désigne le sinus hyperbolique $sh t = (e^t - e^{-t})/2$, $cht = (e^t + e^{-t})/2$ le cosinus hyperbolique.

Ecrire d'une manière analogue, l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$.

4. Exprimer le gisement du méridien en fonction de φ, λ et φ_0 . Déterminer la valeur du module linéaire, en particulier en p , en un point de l'équateur, en un point du méridien origine.

Problème n° 51

Pour une représentation plane, on dit qu'elle est **équivalente** si le produit des modules linéaires m_1 et m_2 suivant les directions principales vérifient:

$$m_1 \cdot m_2 = 1$$

2

Soit le modèle terrestre représenté par la sphère de rayon R qu'on note $\mathbb{S}^2$. Au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = 2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\lambda \\ Y = 2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\lambda \end{cases} \quad (2.3)$$

1. Qu'elle est l'image du pôle nord P_N ?
2. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) est une droite dont on donne l'équation.
3. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$) est un cercle dont on précise l'équation.
4. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
5. Soit ds la longueur infinitésimale correspondante sur la sphère, donner l'expression de ds^2 .
6. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan. Montrer que:

$$dS^2 = R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\lambda^2$$

7. En déduire le carré du module linéaire m^2 .
8. Calculer le module linéaire m_1 le long du parallèle.
9. Calculer le module linéaire m_2 le long du méridien.
10. La représentation plane définie par (2.3) est-elle équivalente. Justifier votre réponse.

Problème n° 52

Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow⁵ définie par :

$$Z = \sin z$$

avec $z = \lambda + iL$, $Z = X + iY$ et L la latitude croissante $L = \text{Log} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

1. Préciser le canevas, les images des méridiens et celle de l'équateur.
2. Vérifier que les points f et f' ($\varphi = 0, \lambda = \pm\pi/2$) sont des points singuliers.
3. Soit s le point ($\varphi = \varphi_0, \lambda = 0$). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points b tels que l'angle $\widehat{b\bar{p}, bs} = \alpha$. Quelle est l'image plane de cette courbe dans cette représentation plane.

⁵En hommage à **Joseph Johann Littrow** (1781-1840) astronome autrichien.

Problème n° 53

Soit l'application $F(u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1)$ définie par:

$$OM(u, v) = F(u, v) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{array} \right.$$

2

1. Calculer la forme fondamentale ds^2 .
2. Montrer que $OM(u, v)$ appartient à la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. Calculer u, v en fonction de x, y et z .
4. Soit le point $N(0, 0, 1)$ de $\mathbb{S}^2$, calculer les coordonnées (X, Y) du point p intersection de la droite NM avec la plan $z = 0$ en fonction de x, y et z .
5. Soit σ l'application $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \longrightarrow (X, Y) = (X(x, y, z), Y(x, y, z))$. Montrer que $(\sigma \circ F)(u, v) = \sigma(F(u, v)) = (u, v)$. En déduire que $F = \sigma^{-1}$.

Problème n° 54

Soit un ellipsoïde de révolution $E(a, e)$ avec a et e respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et e la première excentricité. Soit $\mathbb{S}^2$ une sphère de rayon R . On veut étudier le passage suivant:

$$p(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi, \Lambda) \text{ de la sphère } \mathbb{S}^2$$

1. Exprimer m le module linéaire de cette représentation.
2. On pose:

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

$\mathcal{L}$ est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution et L la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre E et $\mathbb{S}^2$ est donnée par $Z = f(z)$ où f est une fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir:

$$Z = \alpha z + \beta$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = c_1 + ic_2 \\ \beta = b_1 + ib_2 \end{cases}$$

les c_1, c_2, b_1, b_2 sont des constantes réelles. Donner les expressions de L et Λ en fonction de $\mathcal{L}$ et λ .

3. On veut que la représentation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoïde respectivement en méridiens et parallèles de la sphère et que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$. Montrer que $c_2 = b_2 = 0$ et $L = c_1 \mathcal{L} + b_1, \quad \Lambda = c_1 \lambda$.
4. Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra $c_1 > 0$. On cherchera la transformation à déformation minimale autour d'un parallèle $\varphi = \varphi_0$ tel que le parallèle

$\varphi = \varphi_0$ est automécoïque et le module linéaire m est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire $m(\varphi_0) = 1$ et $\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, en plus on considère aussi la condition:

2

$$\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Pour faciliter les notations, on prendra $b = b_1, c = c_1$. Montrer que la relation liant φ_0 et ψ_0 est:

$$tg\psi_0 = tg\varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0}}$$

5. Déterminer les constantes b, c et R en fonction de φ_0 et ψ_0 telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

6. Montrer que l'expression du développement limité de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0 est donnée par:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricité e' , Montrer que $m(\varphi)$ s'écrit:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1+e'^2\cos^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

2.6.2. LA REPRÉSENTATION LAMBERT

Exercice n° 55

En un point A de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193\text{ gr}$ et $\lambda = 11.9656\text{ gr}$ à l'Est de Greenwich, on vise un point B .

1. Dans quelle zone de Lambert Tunisie se trouve le point A ? Calculer ses coordonnées planes (X, Y) .
2. L'azimut géodésique de la direction AB est $Azg = 55.7631\text{ gr}$. Sachant que $Dv = 1.52\text{ dmgr}$, calculer G le gisement de la direction AB .
3. La distance AB réduite à l'ellipsoïde de référence est $D_e = 5421.32\text{ m}$. Sachant que l'altération linéaire dans la région des points A et B vaut -9 cm/km , calculer la distance AB réduite au plan.

Problème n° 56

D'après les coordonnées de deux points A et B vous trouvez la distance $AB = 5427.380\text{ m}$. On a les données suivantes :

- a - l'altération linéaire de la représentation dans la région de AB vaut $+8.10^{-5}$,
- b - les altitudes des points A et B sont : $H_A = 1000.00\text{ m}$ et $H_B = 1200.00\text{ m}$.

1. Calculer la distance suivant la pente D_P entre les points A et B matérialisés sur le terrain.

Problème n° 57

On a mesuré une distance suivant la pente $D_p = 20\,130.858\,m$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07\,m$, $H_B = 507.75\,m$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$.

1. Calculer la distance D_e suivant l'ellipsoïde en utilisant la formule rigoureuse.
2. Sachant que le module linéaire m vaut 0.999850371 , calculer la distance D_r réduite au plan de la représentation plane utilisée.
3. Les coordonnées géodésiques du point A sont : $\lambda = 10.72453\,gr$, $\varphi = 41.44903\,gr$. Par des observations astronomiques, on a déterminé les coordonnées astronomiques $\lambda_a = 10.72574\,gr$ et $\varphi_a = 41.45052\,gr$ du point A et l'azimut astronomique de la direction AB soit $Aza = 89.68499\,gr$. Transformer l'azimut astronomique de la direction AB en azimut géodésique en utilisant l'équation de Laplace donnée par :

$$Azg = Aza + (\lambda - \lambda_a) \cdot \sin \varphi$$

4. Calculer le gisement G de la direction AB sachant que $Dv = 0.00188\,gr$.
5. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie de A sont $X = 478022.43\,m$ et $Y = 444702.22\,m$. Déterminer alors les coordonnées de B .
6. Calculer l'azimut de B vers A sachant qu'on néglige la correction de la corde de la direction BA et que $\lambda_B = 10.92884\,gr$.

Problème n° 58

On donne deux points A et B dont les coordonnées géodésiques dans le système géodésique Tunisien sont:

$$A \begin{cases} \varphi = 40.4549830\,gr \\ \lambda = 9.59542429\,gr \\ h = 742.40\,m \end{cases} \quad B \begin{cases} \varphi' = 40.3385665\,gr \\ \lambda' = 9.45483610\,gr \\ h' = 987.00\,m \end{cases}$$

On a mesuré la distance D_p suivant la pente entre A et B soit $D_p = 16259.249\,m$.

1. Calculer la distance D_e réduite à la surface de l'ellipsoïde de référence.
2. Rappeler l'expression du module linéaire m de la représentation Lambert Nord Tunisie.
3. Calculer le module linéaire moyen des modules linéaires calculés en A et B .
4. Calculer alors D_r la distance réduite au plan de la représentation Plane Lambert Nord Tunisie.
5. En A , on a déterminé l'azimut géodésique Azg de A vers B , $Azg = 249.310168\,gr$. En négligeant $d\nu$ la correction de la corde, calculer le gisement G de la direction AB .
6. Calculer (X, Y) les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point A . En déduire alors (X', Y') les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point B à partir de celles de A .
7. Calculer directement les coordonnées (X'', Y'') de B . Comparer les avec celles de la question précédente?

(On donne $a = 6378249.20\,m$, $e^2 = 0.0068034877$, $k_N = 0.999625544$, rayon moyen de la Terre $R = 6378000\,m$)

2.6.3. LA REPRÉSENTATION UTM

Exercice n° 59

Dans cet exercice, on voudrait justifier l'arrêt à l'ordre 8 de l'expression de $Y(UTM)$ en fonction de λ . On donne: $\varphi = 40.00 \text{ gr}$ et $a = 6378249.20 \text{ m}$, $e^2 = 0.0068034877$.

1. Calculer numériquement $e'^2, \eta^2, t^2 = tg^2\varphi$ et $N(\varphi)$.
2. Calculer numériquement le coefficient a_8 :

$$a_8 = \frac{1}{40320} N \cos^7 \varphi \sin \varphi (165 - 61 t^2 + 537 t^4 + 9679 \eta^2 - 23278 t^2 \eta^2 + 9244 \eta^4 + 358 t^4 \eta^2 - 19788 t^2 \eta^4)$$

3. On donne $\lambda = 1.23546 \text{ gr}$, calculer $a_8 \lambda^8$ et conclure.

Problème n° 60

Soit le point A de coordonnées géodésiques: $\varphi = 40.9193 \text{ gr}$ et $\lambda = 11.9656 \text{ gr}$ à l'Est de Greenwich. On considère la représentation plane UTM tronquée suivante, de méridien central $\lambda_0 = 9^\circ$ définie par les formules :

$$\begin{cases} X = a_1 \cdot (\lambda - \lambda_0) + a_3 \cdot (\lambda - \lambda_0)^3 \\ Y = g(\varphi) + a_2 \cdot (\lambda - \lambda_0)^2 \end{cases}$$

où φ, λ et λ_0 sont exprimées en rd , avec:

$$a_1 = N(\varphi) \cdot \cos \varphi$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} \cdot \sin \varphi$$

$$a_3 = \frac{a_1 \cos^2 \varphi}{6} (1 - tg^2 \varphi + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi)$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

$$g(\varphi) = a(1 - e^2)(1.0051353 \cdot \varphi - 0.0025731 \sin 2\varphi)$$

$$a = 6378249.20 \text{ m}, e^2 = 0.0068034877, e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

1. Montrer que les coordonnées du point A sont: $X = 157833.48 \text{ m}$, $Y = 4078512.97 \text{ m}$, on justifie les résultats.
2. Soit le point B de coordonnées ($X = 160595.98 \text{ m}$; $Y = 4078564.53 \text{ m}$). Sachant que B est situé sur le même parallèle que A , calculer la longitude λ' de B .
3. Calculer le gisement G et la distance AB .
4. Sachant que la convergence des méridiens γ est donnée par $tgy = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$ et qu'on néglige le Dv , calculer l'azimut de la direction AB .
5. Calculer l'azimut de B vers A en négligeant le Dv de B vers A .
6. En calculant les coordonnées UTM de A et B , on trouve respectivement $X_A = 657770.34 \text{ m}$, $Y_A = 4076891.20 \text{ m}$; $X_B = 660531.74 \text{ m}$, $Y_B = 4076942.76 \text{ m}$. Calculer la distance AB par les coordonnées UTM. En déduire l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées de l'UTM tronquée.

2.7. LES TRANSFORMATIONS DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

2.7.1. LES TRANSFORMATIONS 2D DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

2

Exercice n° 61

On donne le modèle bidimensionnel suivant, de transformation entre deux systèmes géodésiques, défini par:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21.662 \text{ m} \\ -627.748 \text{ m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.999988149 & -0.000025928 \\ 0.000025928 & 0.999988149 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

1. S'agit-il du modèle bidimensionnel de Helmert? Justifier.
2. Donner les valeurs numériques respectivement du facteur d'échelle et de l'angle de la rotation entre les deux systèmes.

2.7.2. LES TRANSFORMATIONS 3D DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

Problème n° 62

Soient les trois tableaux ci-dessous des coordonnées 3D respectivement dans les systèmes S_1 et S_2 et à transformer dans le système S_2 :

<i>Nom</i>	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4300244.860	1062094.681	4574775.629
2	4277737.502	1115558.251	4582961.996
3	4276816.431	1081197.897	4591886.356
4	4315183.431	1135854.241	4542857.520
5	4285934.717	1110917.314	4576361.689
6	4217271.349	1193915.699	4618635.464
7	4292630.700	1079310.256	4579117.105

<i>Nom</i>	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4300245.018	1062094.592	4574775.510
2	4277737.661	1115558.164	4582961.878
3	4276816.590	1081197.809	4591886.238
4	4315183.590	1135854.153	4542857.402
5	4285934.876	1110917.227	4576361.571
6	4217271.512	1193915.612	4618635.348
7	4292630.858	1079310.168	4579116.986

<i>Nom</i>	<i>X(m)</i>	<i>Y(m)</i>	<i>Z(m)</i>
<i>A</i>	4351 694.594	1 056 274.819	4 526 994.706
<i>B</i>	4 319 956.455	1 095 408.043	4 548 544.867
<i>C</i>	4 303 467.472	1 110 727.257	4 560 823.460
<i>D</i>	4 202 413.995	1 221 146.648	4 625 014.614

1. Déterminer les paramètres du modèle de Burša-Wolf à 7 paramètres.
2. Calculer les coordonnées 3D des points du troisième tableau dans le système S_2 .

2.8. NOTIONS SUR LE MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL DE LA TERRE

Problème n° 63

1. Montrer que: $r = a(1 - e \cos E)$.
2. Démontrer à partir des formules du cours la relation:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

Aide: exprimer $\operatorname{tg}(v/2)$ en fonction de $\operatorname{tg} v$.

Problème n° 64

1. A partir de l'expression de X_C , montrer que X_C vérifie l'équation du mouvement non perturbé pour la composante X , soit:

$$\ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3} X_C = 0$$

Problème n° 65

Une comète décrit autour du Soleil une ellipse d'excentricité e de demi-grand axe a et de demi-petit axe b où le Soleil occupe un des foyers. L'équation de l'orbite de la comète en coordonnées polaires est donnée par:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

avec r la distance Soleil- comète.

1. Déterminer les distances r_A et r_P lorsque la comète est à l'apogée et au périégée en fonction de a et e .
2. La comète de Halley a une orbite fortement excentrique : son apogée est à 0.53 UA du Soleil et sa périégée est à 35.1 UA . Calculer e .
3. En utilisant la loi des aires et la troisième loi de Kepler, montrer que la constante des aires C est exprimée par:

$$C^2 = \frac{b^2}{a} G.M$$

où G, M désignent respectivement la constante de la gravitation universelle et la masse du Soleil.

4. On pose : $u = \frac{1}{r}$. Donner l'expression du carré de la vitesse v^2 de la comète en fonction de u et $\frac{du}{dv}$. Montrer que v^2 peut s'écrire sous la forme:

$$v^2 = G.M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

2

5. Déterminer l'expression du rapport des vitesses à l'apogée et au périhélie $\frac{v_A}{v_P}$ en fonction de e .
6. Calculer numériquement ce rapport pour le cas de la comète de Halley.

On donne:

- $1 \text{ UA} = 149597870 \text{ km}$,
- $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$,
- $M = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$.

3

THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS

3.1. MODÈLES LINÉAIRES DE COMPENSATION

Problème n° 66

Soit un triangle ABC , on observe les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ et les côtés $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{A} = 43.77160 \text{ gr} & \sigma_{\hat{A}} = 3.1 \text{ dmgr} \\ \hat{B} = 98.39043 \text{ gr} & \sigma_{\hat{B}} = 3.1 \text{ dmgr} \\ \hat{C} = 57.83858 \text{ gr} & \sigma_{\hat{C}} = 3.1 \text{ dmgr} \\ a = 333.841 \text{ m}, & \sigma_a = 0.005 \text{ m} \\ b = 525.847 \text{ m}, & \sigma_b = 0.010 \text{ m} \\ c = 414.815 \text{ m}, & \sigma_c = 0.005 \text{ m} \end{array} \right.$$

1. Calculer les angles compensés par la méthode des moindres carrés. Calculer la variance unitaire. Déterminer les variances des angles compensés.
2. Utiliser la méthode des moindres carrés pour calculer les corrections des côtés observés. Calculer la variance unitaire. Déterminer les variances des côtés compensés $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$.

Problème n° 67

1. Montrer que dans un cheminement altimétrique de précision, le poids de l'observation entre deux repères est inversement proportionnel de leur distance en supposant l'égalité des portées et que les observations sont non corrélées.
2. Une polygonale $ABCD$ (voir Fig. 6.2) a été observée par le nivellement de précision. L'instrument utilisé a une précision de 2 mm par km . Les observations considérées non corrélées sont les suivantes:

$$\begin{array}{ll} H_C - H_A = 1.878 \text{ m}, & AC = 6.44 \text{ km} \\ H_D - H_A = 3.831 \text{ m}, & AD = 3.22 \text{ km} \\ H_D - H_C = 1.954 \text{ m}, & CD = 3.22 \text{ km} \\ H_B - H_A = 0.332 \text{ m}, & AB = 6.44 \text{ km} \\ H_D - H_B = 3.530 \text{ m}, & BD = 3.22 \text{ km} \\ H_C - H_B = 1.545 \text{ m}, & BC = 6.44 \text{ km} \end{array}$$

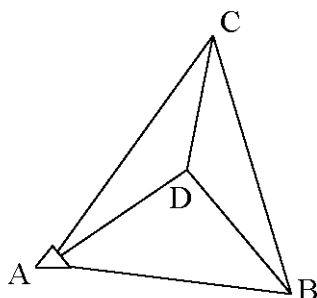


Figure 3.1 | La polygonale observée

L'altitude du repère A est de 3.048 m et non entachée d'erreurs. Calculer par compensation des observations les altitudes des repères B , C et D et leurs écarts-types.

3. Calculer l'écart-type de la différence d'altitudes entre les repères C et D .
4. Donner une estimation de la précision par km du nivellement effectué.

Problème n° 68

On veut étalonner un anéroïde, appareil donnant la pression de l'air, par la formule:

$$D = d + \alpha t + \gamma$$

où α, γ sont deux constantes, t la température en degrés centigrades. Les paramètres d et D sont lus respectivement de l'anéroïde et à partir d'un baromètre en mercure, et exprimés en $mm\text{ Hg}$.

Pour déterminer α et γ , des lectures ont été prises à différentes températures (voir tableau 6.1). Ces observations sont non corrélées, t et D sont supposées sans erreurs.

1. Calculer par la méthode des moindres carrés les constantes α et γ .
2. Estimer le facteur de variance unitaire.
3. Déterminer la variance et la covariance de α et γ .

t	d	D
° Centigrade	mm Hg	mm Hg
6.0	761.3	762.3
10.0	759.1	759.5
14.0	758.4	758.7
18.0	763.1	763.0

Table 3.1 | Table des observations

3

Problème n° 69

En statistiques, la loi normale est une famille de distributions de probabilités caractérisées par la fonction de densité:

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où μ est la moyenne et σ^2 la variance. On note par $l(x, \mu, \sigma) = \text{Log } p(x, \mu, \sigma)$, soit:

$$l(x, \mu, \sigma) = -\text{Log } \sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Soit X une variable aléatoire ayant comme fonction de densité $p(x, \mu, \sigma)$. On rappelle les opérateurs suivants espérance mathématique ou moyenne et variance:

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x, \mu, \sigma) dx$$

$$V(f(X)) = E[(E[f(X)] - f(X))^2]$$

On donne la formule: $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x, \mu, \sigma) dx = \mu$$

$$\sigma^2(X) = \text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x, \mu, \sigma) dx = \sigma^2$$

2. Montrer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

3. Calculer $\frac{\partial l}{\partial \mu}$ et $\frac{\partial l}{\partial \sigma}$.

4. On pose $\theta = (\mu, \sigma)$. Soit T_θ l'espace engendré par $(\frac{\partial l}{\partial \mu}, \frac{\partial l}{\partial \sigma})$. On définit sur T_θ l'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle: T_\theta \times T_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$ à A, B deux variables aléatoires $\in T_\theta$:

$$\langle A, B \rangle = E[A(x)B(y)]$$

Justifier qu'on peut écrire:

$$E[A(x)B(y)] = \text{Cov}(A(x), B(y)) + E[A(x)].E[B(y)]$$

5. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur T_θ .

6. On pose: $e_1 = \frac{\partial l}{\partial \mu}$ et $e_2 = \frac{\partial l}{\partial \sigma}$. On définit le tenseur métrique sur T_θ par:

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

3

Montrer que la matrice $g = (g_{ij})$ est donnée par:

$$g = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et que la première forme fondamentale sur T_θ s'écrit:

$$ds^2 = \frac{1}{\sigma^2} (d\mu^2 + 2d\sigma^2)$$

Problème n° 70

On considère $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et on définit la fonction par :

$$f(u, v) = u^4 + 6uv + 1.5v^2 + 36v + 405$$

1. Chercher les points critiques réels de f .
2. Montrer que le Hessien de f est une matrice définie positive si $u^2 > 1$ et indéfinie si $u^2 < 1$.
3. Montrer que le point $x^* = (u, v) = (3, -18)$ est un point minimum de f .
4. Montrer que la formule de récurrence de Newton s'écrit avec $J = 1.5(u_k^2 - 1)$:

$$u_{k+1} = \frac{u_k^3 + 9}{J}, \quad v_{k+1} = -\frac{2u_k^3 + 18u_k^2}{J}$$

Problème n° 71

Soient le plan (P) et la sphère $(\mathbb{S}^2)$ d'équations respectivement: $x + y + z = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. On veut chercher le point $M \in (\mathbb{S}^2)$ tel que sa distance au plan (P) soit maximale.

1. Montrer que la distance d'un point $M(X, Y, Z)$ au plan (P) est donnée par :

$$d = |X + Y + Z - 1|/\sqrt{3}$$

2. Pour répondre à la question posée ci-dessus, on considère la fonction: $E(x, y, z, \lambda) = -(x + y + z - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Ecrire le système d'équations donnant les points critiques de E qu'on note par (1).

3. Montrer que si $\lambda = -1$, on arrive à une contradiction. On suppose que $\lambda \neq -1$. Que représente le cas $\lambda = 0$.

4. On suppose que $\lambda \notin \{-3, -1, 0\}$. Résoudre le système (1). Soit le point M_2 tel que ses coordonnées sont négatives.

5. Montrer que la matrice hessienne de E pour M_2 s'écrit sous la forme:

$$H = \begin{pmatrix} \mu^2 & -2 & -2 \\ -2 & \mu^2 & -2 \\ -2 & -2 & \mu^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mu = 1 + \sqrt{3}$$

6. Si on pose $U = (X, Y, Z)^T \in (\mathbb{S}^2)$. Montrer que $U^T \cdot H \cdot U = 2[3 + \sqrt{3} - (X + Y + Z)^2]$. En déduire que $U^T \cdot H \cdot U > 0$ pour tout $U \neq 0 \in (\mathbb{S}^2)$.

7. Montrer que pour le point M_2 , on obtient un minimum strict de E . A-t-on répondu à la question du problème.

3

3.2. MODÈLES NON-LINÉAIRES DE COMPENSATION

Problème n° 72

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on a mesuré trois distances planes entre un point inconnu $P(X_1, X_2)$ vers trois points connus $P_i(a_i, b_i)_{i=1,3}$ dans trois directions différentes. On considère le modèle non linéaire de Gauss-Markov défini par:

$$\zeta(X) = L - e, \quad e \in \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

avec:

- L : le vecteur des observations $(3 \times 1) = (L_1, L_2, L_3)^T$;
- X : le vecteur des inconnues $(2 \times 1) = (X_1, X_2)^T$;
- e : le vecteur des erreurs $(3 \times 1) = (e_1, e_2, e_3)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$, P est la matrice des poids égale à la matrice unité I_3 , σ_0 une constante positive;
- ζ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par:

$$\zeta(X) = \zeta(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - b_1)^2] \\ \frac{1}{2} [(X_1 - a_2)^2 + (X_2 - b_2)^2] \\ \frac{1}{2} [(X_1 - a_3)^2 + (X_2 - b_3)^2] \end{pmatrix}$$

On prendra comme composante L_i du vecteur observation la quantité $L_i = \frac{D_{i\text{observée}}^2}{2}$

1. Montrer que les vecteurs $\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_2}$ sont linéairement indépendants en chaque point $X \in U$.
2. Montrer que les fonctions $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur U pour $i, j \in \{1, 2\}$.
3. On pose: $J = \|L - \zeta(X)\|^2$. Calculer les coefficients de la matrice $(\frac{\partial^2 J}{\partial X_i \partial X_j})$, $i, j \in \{1, 2\}$.
4. Soit la matrice carrée définie par:

$$g(X) = (g_{ij}) \quad \text{avec } g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i}, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_j} \right\rangle = \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les coefficients g_{ij} . Montrer que la matrice (g_{il}) est définie positive.

5. Introduisons la matrice B définie par:

$$B(X, L) = (B_{ij}) \quad \text{avec} \quad B_{ij} = g_{ij} - \langle L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j} \rangle \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les éléments de la matrice B et montrer qu'elle est définie positive.

II

LES CORRECTIONS

4

ASTRONOMIE

4.1. TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE

Correction 1.

On applique la formule fondamentale $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, on obtient:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos z \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin z \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos Az \Rightarrow$$

$$\cos Az = \frac{\sin \delta - \cos z \sin \varphi}{\sin z \cos \varphi} \Rightarrow Az = 20^\circ 20' 40'' .25$$

Correction 2.

On applique la formule fondamentale $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, on obtient:

$$\cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos(-AH) \Rightarrow$$

$$0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos AH \Rightarrow \cos AH = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

Correction 3.

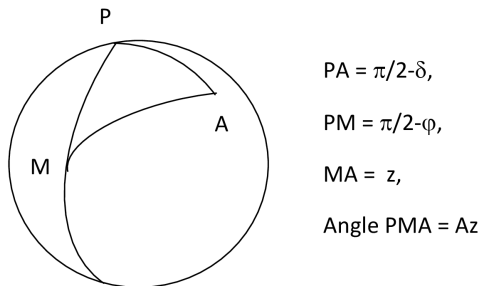


Figure 4.1 | Triangle sphérique

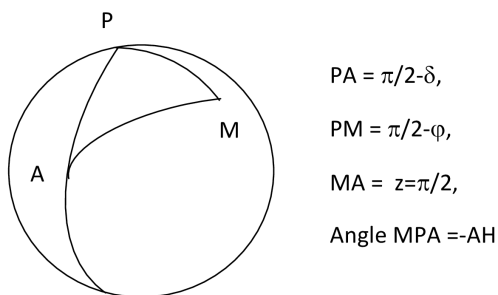


Figure 4.2 | Triangle de position

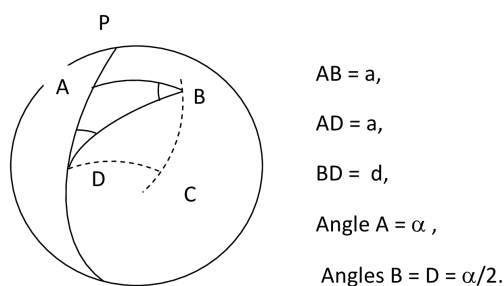


Figure 4.3 | Le carré sphérique

$$1. \alpha = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 200.00045 \text{ gr}$$

$$2. \epsilon^{rd} = \frac{\text{aire triangle ABC}}{R^2} \text{ où } R = 6368 \text{ km le rayon moyen de la Terre. D'où:}$$

$$\epsilon^{rd} = \frac{\text{aire triangle ABC}}{R^2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2R^2} = 5.21654 \times 10^{-6} = \frac{5.21654 \times 2}{\pi} = 3.3 \text{ dmgr}$$

3.

$$f = \alpha - 200.00000 \text{ gr} - \epsilon = 200.00045 - 200.00000 - 200.00033 \Rightarrow f = 1.2 \text{ dmgr}$$

Correction 4.

1. Soit d la diagonale liant les sommets B et D. C'est aussi une bissectrice, dans le triangle sphérique ABD, On va appliquer la formule en cotg soit:

$$\sin A \cdot \cotg B = \cotgb \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos A$$

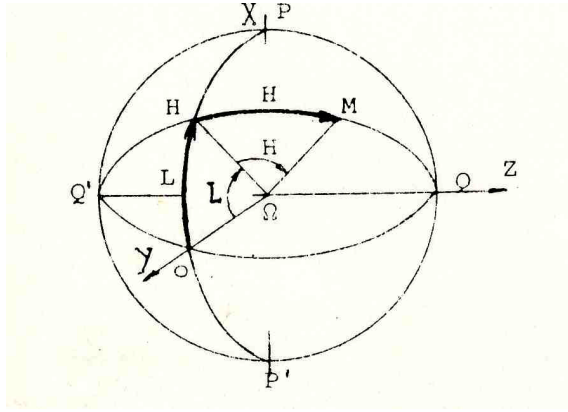


Figure 4.4 | Les coordonnées de Cassini-Soldner

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \cot g \frac{\alpha}{2} &= \cot g \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \cdot (1 - \cos \alpha) = 2 \cos \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \\ \cos \alpha &= \cot g^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

2. La formule des sinus donne:

$$\frac{\sin d}{\sin \alpha} = \frac{\sin a}{\sin \alpha / 2} \Rightarrow \sin d = 2 \sin a \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{1 - \cot g^4 \frac{\alpha}{2}}$$

Correction 5.

1. Le triangle sphérique PMH est rectangle en H. On applique la règle de Neper. Soit:

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - H \right) &= \sin \lambda \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \Rightarrow \\ \sin H &= \sin \lambda \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

On peut utiliser la formule des sinus:

$$\frac{\sin H}{\sin \lambda} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\sin \pi / 2} \Rightarrow \sin H = \sin \lambda \cdot \cos \varphi$$

Pour calculer L, On utilise la règle de Neper, d'où:

$$\cos \lambda = \cot g L \cdot \cot g \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \Rightarrow \operatorname{tg} L = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda}$$

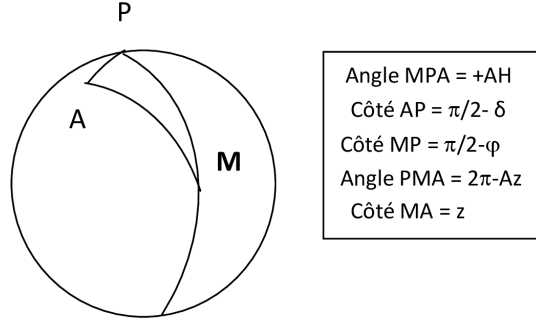


Figure 4.5 | Les éléments du triangle sphérique PAM.

4

2. Inversement, pour calculer φ , On utilise la règle de Neper, d'où :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin L \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - H\right) \Rightarrow \sin\varphi = \sin L \cdot \cos H$$

Quant à λ , on applique la formule en cotg soit $\sin A \cdot \cotg B = \cotg b \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos A$ ce qui donne :

$$\sin\frac{\pi}{2} \cdot \cotg \lambda = \cotg H \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - L\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - L\right) \cos(\pi/2) \Rightarrow \tg \lambda = \frac{\tg H}{\cos L}$$

Correction 6.

1. Les éléments du triangle sphérique PAM sont donnés par la figure (4.5) ci-dessus.

2. L'angle horaire est obtenu à partir de la formule :

$$HSL = AH + \alpha \Rightarrow AH = HSL - \alpha \Rightarrow AH = 4^h.4241\ 1667 = 4^h25^m26.82^s$$

3. On applique la formule en cotg soit $\sin A \cdot \cotg B = \cotg b \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos A$. Comme AH est positif et inférieur à π , donc l'astre se trouve à gauche, on a les éléments pour appliquer la formule :

- $\hat{A} = \hat{P} = AH$,
- $\hat{B} = \hat{M} = 2\pi - Az$,
- $b = \pi/2 - \delta$,
- $c = \pi/2 - \varphi$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sin AH \cdot \cotg(2\pi - Az) &= \cotg(\pi/2 - \delta) \cdot \sin(\pi/2 - \varphi) - \cos(\pi/2 - \varphi) \cdot \cos AH \Rightarrow \\ &= -\sin Az \cotg(Az) = \tg \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos AH \Rightarrow \\ \tg Az &= \frac{\sin AH}{\cos AH \sin \varphi - \cos \varphi \tg \delta} \end{aligned}$$

4. Numériquement, on a $Az = 358^\circ 49' 51.996''$.

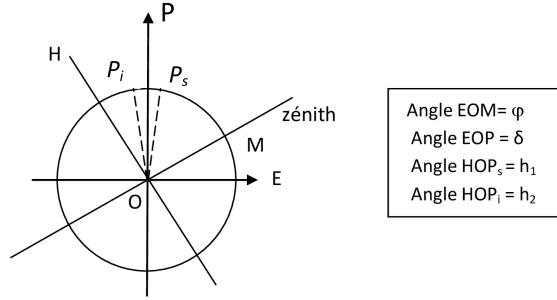


Figure 4.6 | Calcul des hauteurs h_1 et h_2 .

4

5. A partir de la figure (4.5), la distance zénithale est donnée par le côté MA . On applique la formule fondamentale $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos AH \Rightarrow \\ \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos AH \Rightarrow z = 51^\circ 36' 17''.31 \end{aligned}$$

4.2. ASTRONOMIE DE POSITION

Correction 7.

On a les données suivantes:

- $\varphi = 36^\circ 54'$ Nord,
- $\delta = +89^\circ$.

A partir de la figure (4.6), on obtient:

- $h_1 = \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta \Rightarrow h_1 = 90^\circ + 36^\circ 54' - 89^\circ = 37^\circ 54'$.
- $h_2 = \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \varphi + \delta - \frac{\pi}{2} \Rightarrow h_2 = 36^\circ 54' + 89^\circ - 90^\circ = 35^\circ 54'$.

Correction 8.

On traite le cas : lieu dans l'hémisphère nord.

1. - Le lieu des étoiles qui sont toujours visibles: à partir de la figure (4.7), les étoiles de déclinaison $\delta = \pi/2 - \varphi$ sont toujours visibles au lieu de latitude φ .

- Les étoiles qui ne sont jamais visibles ont pour déclinaisons δ telles que : $-\pi/2 \leq \delta \leq -(\pi/2 - \varphi)$ (voir Fig.4.8).

2. La condition pour qu'une étoile culmine au zénith est donnée par : $\delta = \varphi$, (voir Fig.4.9).

3a. Au moment des équinoxes, l'ecliptique coupe l'équateur donc $\delta = 0$, l'orbite du soleil est un grand cercle dans l'équateur et la trace de l'horizon d'un lieu quelconque coupe

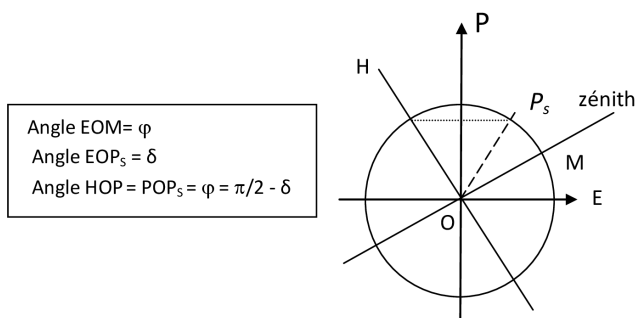


Figure 4.7 | Le lieu des étoiles toujours visibles

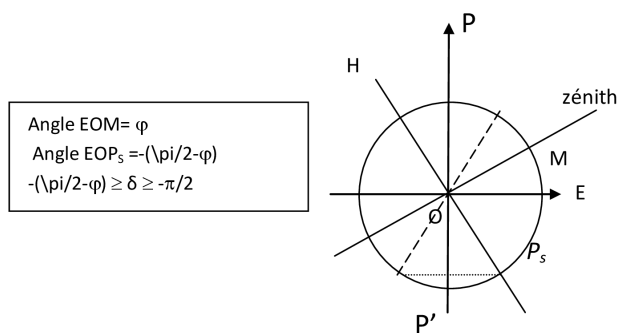


Figure 4.8 | Le lieu des étoiles toujours non visibles

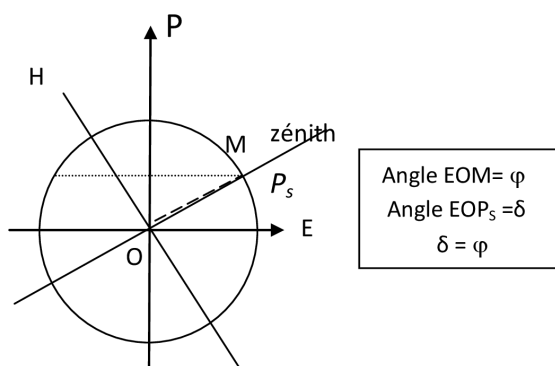


Figure 4.9 | La condition pour qu'une étoile culmine au zénith

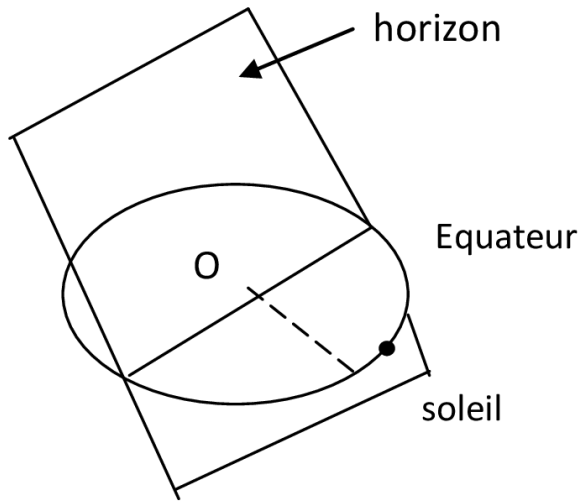


Figure 4.10 | Egalité du jour et de la nuit

l'équateur en passant par le centre de la terre, par suite la durée du jour est égale à celle de la nuit, (voir **Fig.4.10**).

3b. En un lieu M à l'équateur $\varphi = 0$. Quelle que soit la date, le soleil a pour déclinaison $-\epsilon \leq \delta \leq +\epsilon$, $\epsilon = -23^\circ 27'$, par suite le jour et la nuit ont une durée égale (voir **Fig.4.11**).

Correction 9.

1a. Pour calculer l'heure sidérale locale du lever, on commence par calculer l'angle horaire de l'astre A au lever. Dans ce cas, on considère le triangle sphérique MPA , (voir **Fig. 4.12**).

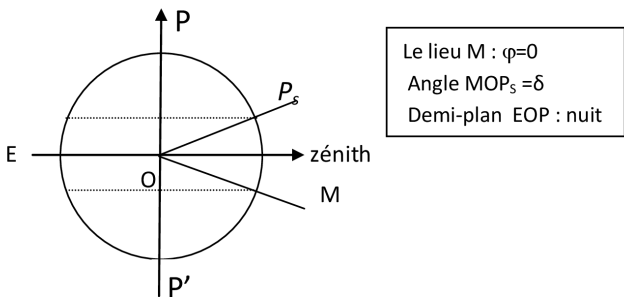
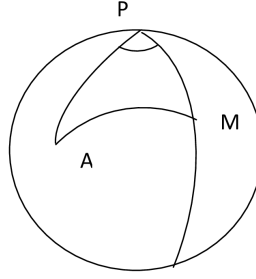


Figure 4.11 | Egalité du jour et de la nuit en tout lieu sur l'équateur



$$MP = \pi/2 - \varphi = \pi/4 = \varphi,$$

$$AP = \pi/2 - \delta,$$

$$MA = z,$$

$$\text{Angle } P = AH.$$

Figure 4.12 | Position de l'astre A lors du lever

4

On obtient $z = \pi/2$ lors du lever et on part de la formule:

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos \varphi \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) + \sin \varphi \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \cdot \cos AH \Rightarrow \\ \cos z = 0 &= \cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos AH \Rightarrow \cos AH = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi} = -\operatorname{tg} \delta \Rightarrow \\ AH &= 125^\circ.26538968 = 8 \text{ h } 21 \text{ mn } 03.4535 \text{ s} \end{aligned}$$

Par la formule fondamentale de l'astronomie de position, on a $HSL = AH + \alpha$. D'où $HSL_L = 8 \text{ h } 21 \text{ mn } 03.4535 \text{ s} + 11 \text{ h } 13 \text{ mn} = 19 \text{ h } 33 \text{ mn } 03.4535 \text{ s}$.

1b. Comme l'observation a été faite le jour de l'équinoxe de printemps le 21 mars à 0 heure TU, l'heure sidérale locale du coucher de l'astre A est $HSL_C = HSL_L + 12 \text{ h} = 11 \text{ h } 13 \text{ mn} + 12 \text{ h} = 23 \text{ h } 13 \text{ mn}$.

2a. Nous avons la formule:

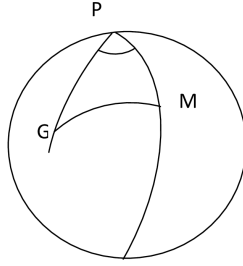
$$HSL = HSG_{0hTU} + k \cdot TU + \lambda, \quad k = \frac{366.2422}{265.2422}$$

On obtient alors TU:

$$TU = (HSL - HSG_{0hTU} - \lambda) \cdot \frac{365.2422}{366.2422}$$

Numériquement, on a l'heure TU_L du lever au lieu considéré:

$$\begin{aligned} TU_L &= (HSL_L - HSG_{0hTU} - \lambda) \cdot \frac{365.2422}{366.2422} \Rightarrow \\ TU_L &= (19 \text{ h } 33 \text{ mn } 03.4535 \text{ s} - 11 \text{ h } 52 \text{ mn} - 7 \text{ h } 20 \text{ mn}) \cdot \frac{365.2422}{366.2422} \Rightarrow \\ TU_L &= (21 \text{ mn } 03.4535 \text{ s}) \cdot \frac{365.2422}{366.2422} = 21 \text{ mn } 0.0037 \text{ s} \end{aligned}$$



$$MP = \pi/2 - \varphi,$$

$$GP = \pi/2 - \delta,$$

$$MG = z,$$

$$\text{Angle } P = AH' = |AH|,$$

$$\text{Angle interne } M = Az',$$

$$\text{Azimut de } M \text{ vers } G : Az = 2\pi - Az'.$$

Figure 4.13 | Observation de la galaxie Andromède

4

2b. On obtient l'heure TU_C du coucher au lieu considéré:

$$TU_C = (23 \text{ h } 13 \text{ mn} - 11 \text{ h } 52 \text{ mn} - 7 \text{ h } 20 \text{ mn}) \cdot \frac{365.2422}{366.2422} \Rightarrow$$

$$TU_C = (4 \text{ h } 01 \text{ mn}) \cdot \frac{365.2422}{366.2422} = 4 \text{ h } 00 \text{ mn } 20.52 \text{ s}$$

Correction 10.

1. L'heure sidérale locale HSL est donnée par:

$$HSL = HSG_{0hTU} + k \cdot TU + \lambda, \quad k = \frac{366.2422}{365.2422}$$

$$\text{Soit: } HSL = 20 \text{ h } 35 \text{ mn } 28 \text{ s} + 0 \text{ h } 20 \text{ mn } 57 \text{ s} + 21 \cdot \frac{366.2422}{365.2422} \Rightarrow$$

$$HSL = 20 \text{ h } 56 \text{ mn } 25 \text{ s} + 21 \text{ h } 03 \text{ mn } 26.9859 \text{ s} = 17 \text{ h } 56 \text{ mn } 51.9859 \text{ s}$$

2. L'angle horaire de la galaxie AH est donné par:

$$HSL = AH + \alpha_{ZZ} \Rightarrow AH = HSL - \alpha = 17 \text{ h } 56 \text{ mn } 51.9859 \text{ s} - 0 \text{ h } 40 \text{ mn} = 17 \text{ h } 16 \text{ mn } 51.9859 \text{ s}$$

Comme $AH > 12 \text{ h}$, on peut écrire $AH = -AH' = -6 \text{ h } 43 \text{ mn } 8.0141 \text{ s} = -100^\circ.78339209$ avec $AH' > 0$, la position de la galaxie est représentée dans la figure (4.13).

3. La distance zénithale de la galaxie à $21 \text{ h } TU$ est obtenue par la formule:

$$\cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cdot \cos AH' \Rightarrow$$

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cdot \cos AH' \Rightarrow$$

$$\cos z = 0.34938580 \Rightarrow z = 69^\circ.55024748$$

4. On calcule l'angle Az' par la formule des sinus:

$$\frac{\sin AH'}{\sin z} = \frac{\sin Az'}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} \Rightarrow \sin Az' = \cos \varphi \cdot \frac{\sin AH'}{\sin z} = 0.76022783 \Rightarrow Az' = 49^\circ.484287$$

On obtient alors Az :

$$Az = 2\pi - Az' = 360^\circ - 49^\circ.484287 = 310^\circ.515713$$



Figure 4.14 | L'auteur en concertation avec Dr. Ing. Chedly Fezzani (1er Atelier Maghrébin de Géodésie, organisé par l'OTC, 18-20 mai 2000 à Tunis).

5

GÉODÉSIE

5.1. LA TOPOGRAPHIE

Correction 11.

Appelons C le point central de l'antenne. D'après les données, on obtient par calcul les éléments suivants:

a1. Distance $AB = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2} = 795.55 \text{ m}$,

a2. Gisement $AB = G_{AB} = 100 \text{ gr} + \text{Arctg} \frac{Y_A - Y_B}{X_B - X_A} = 100.0000 + 81.4453 = 181.4453 \text{ gr}$,

a3. Gisement $AC = G_{AB} - \hat{A} = 181.4453 - 73.3333 = 108.1120 \text{ gr}$,

a4. Gisement $BC = G_{BA} + \hat{B} = 381.4453 + 96.6667 = 78.1120 \text{ gr}$,

a5. Angle $\hat{C} = 200.0000 \text{ gr} - (\hat{A} + \hat{B}) = 30.0000 \text{ gr}$.

Correction 12.

1. On a:

$$\alpha_m = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i}{4} \Rightarrow 2\alpha_m = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} 2\alpha_i}{16} = \frac{42\alpha}{16} = \frac{2\alpha}{4} \Rightarrow$$
$$\alpha_m = \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ dmgr}$$

2. La distance D est donnée par:

$$\text{tg}(\alpha/2) = \frac{l/2}{D} \Rightarrow D = \frac{l}{2} \cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Calculons la différentielle dD en fonction de $d\alpha$, l la longueur de la stadia est sans erreur

et $l = 2m$:

$$\begin{aligned} dD &= d\left(\frac{l}{2} \cot g \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{l}{4} \frac{d\alpha}{\sin^2(\alpha/2)} \Rightarrow \\ 2D &= \frac{l}{16} \frac{2\alpha}{\sin^4(\alpha/2)} \Rightarrow D = \frac{l}{4} \frac{\alpha}{\sin^2(\alpha/2)} = \frac{l}{4} \frac{2\alpha_m}{\sin^2(\alpha/2)} = \frac{l}{2} \frac{\alpha_m}{\sin^2(\alpha/2)} \Rightarrow \\ D &= \frac{l}{2} \left(1 + \cot g^2 \frac{\alpha_m}{2}\right) \alpha_m \end{aligned}$$

3. On obtient :

$$\begin{aligned} D &= \frac{l}{2} \left(1 + \cot g^2 \frac{\alpha_m}{2}\right) \alpha_m = \frac{l}{2} \left(1 + \left(\frac{2D}{l}\right)^2\right) \alpha_m \Rightarrow \\ D &= (1 + 101.53^2) \times 3 \times 10^{-6} \cdot \pi = 0.097 m = 9.7 cm \end{aligned}$$

5.2. COURBES ET THÉORIE DES SURFACES

5

5.2.1. COURBES

Correction 13.

1. Le vecteur T est défini par $T = \frac{dM}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)^T$. Calculons ds . On obtient facilement:

$$ds^2 = a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)dt^2 + b^2 dt^2 = (a^2 + b^2)dt^2 \Rightarrow ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt, dt > 0$$

d'où:

$$T = \frac{dM}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{-asint}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{acost}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

le calcul du vecteur N nécessite le calcul du vecteur dT/ds , on obtient:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{-acost}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-asint}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-acost}{a^2+b^2} \\ \frac{-asint}{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left\| \frac{dT}{ds} \right\|}$$

$$\text{Soit } N = \begin{pmatrix} -cost \\ -sint \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur B de la binormale est tel que $B = T \wedge N$. D'où:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-asint}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{acost}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -cost \\ -sint \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} bsint \\ -bcost \\ a \end{pmatrix}$$

2. La courbure $1/R$ est donnée par :

$$\frac{1}{R} = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow R = a \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)$$

3. La torsion $\frac{1}{\tau}$ est telle que $\frac{dB}{ds} = -\frac{1}{\tau}N$. Calculons dB/ds . On obtient facilement:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{-b}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -cost \\ -sint \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{b}{a^2+b^2}N = -\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{b}}N \Rightarrow \tau = \frac{a^2+b^2}{b}$$

5

Correction 14.

Soit la courbe (C) définie par les formules:

$$M \begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \\ z = \frac{9}{16}at^4 \end{cases} \text{ avec } a > 0$$

1. On prend $t \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$ ainsi la condition demandée est vérifiée. On a $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ d'où:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4a^2t^2 + 9a^2t^4 + \frac{9^2}{4^2}a^2t^6 = a^2t^2 \left(2 + \frac{9}{4}t^2 \right)^2 \Rightarrow \\ \frac{ds}{dt} &= at \left(2 + \frac{9}{4}t^2 \right) \quad t \geq 0 \Rightarrow s = a \int_0^t (2u + \frac{9}{4}u^3) du = a \left[u^2 + \frac{9}{16}u^4 \right]_0^t = a \left(t^2 + \frac{9}{16}t^4 \right) \Rightarrow \\ s &= at^2 \left(1 + \frac{9}{16}t^2 \right) \end{aligned}$$

2. - Le calcul du vecteur T :

$$T = \frac{dM}{ds} = \frac{dM}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{4}{at(8+9t^2)} \begin{pmatrix} 2at \\ 3at^2 \\ \frac{9}{4}at^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8+9t^2} \begin{pmatrix} 8 \\ 12t \\ 9t^2 \end{pmatrix}$$

- Le calcul du vecteur N . Commençons par calculer le vecteur dT/dt . On obtient avec

$t > 0, 2t^2 + 8 > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{(9t^2 + 8)^2} \begin{pmatrix} -2^4 \times 3^2 t \\ -2^2 \times 3^3 t^2 + 2^5 \times 3 \\ 2^4 \times 3^2 t \end{pmatrix}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{4}{at(9t^2 + 8)} \Rightarrow \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{4}{at(9t^2 + 8)^3} \begin{pmatrix} -2^4 \times 3^2 t \\ -2^2 \times 3^3 t^2 + 2^5 \times 3 \\ 2^4 \times 3^2 t \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{3 \times 4^2}{at(9t^2 + 8)^2} \quad (5.1) \\ N &= \frac{\frac{dT}{ds}}{\left\| \frac{dT}{ds} \right\|} = \frac{4}{at(9t^2 + 8)^3} \cdot \frac{at(9t^2 + 8)^2}{3 \times 4^2} \begin{pmatrix} -2^4 \times 3^2 t \\ -2^2 \times 3^3 t^2 + 2^5 \times 3 \\ 2^4 \times 3^2 t \end{pmatrix} \Rightarrow \\ N &= \frac{1}{9t^2 + 8} \cdot \begin{pmatrix} -12t \\ -9t^2 + 8 \\ 12t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

5

- Le vecteur B de la binormale est tel que $B = T \wedge N$. D'où:

$$B = T \wedge N = \frac{1}{8 + 9t^2} \begin{pmatrix} 8 \\ 12t \\ 9t^2 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{9t^2 + 8} \cdot \begin{pmatrix} -12t \\ -9t^2 + 8 \\ 12t \end{pmatrix} = \frac{1}{9t^2 + 8} \begin{pmatrix} 9t^2 \\ -12t \\ 8 \end{pmatrix}$$

3. Le rayon de courbure R est défini par $\frac{1}{R} = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$. Cette dernière expression est donnée par l'équation (5.1) ci-dessus, d'où:

$$R = \frac{at}{48(9t^2 + 8)^2}$$

Soit O le centre de courbure, ses coordonnées sont données par :

$$OO' = OM + MO' = OM + R \cdot N \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 \\ at^3 \\ \frac{9}{16}at^4 \end{pmatrix} + \frac{at}{48(9t^2 + 8)^3} \cdot \begin{pmatrix} -12t \\ -9t^2 + 8 \\ 12t \end{pmatrix}$$

4. La torsion en M est obtenue par $\frac{dB}{ds} = -\frac{1}{\tau} N$. Calculons dB/ds . On obtient facilement:

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{9t^2 + 8} \begin{pmatrix} 9t^2 \\ -12t \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{12}{(9t^2 + 8)^2} \begin{pmatrix} 12t \\ 9t^2 - 8 \\ -12t \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \frac{dB}{ds} &= \frac{dB}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{4}{at(9t^2 + 8)} \cdot \frac{12}{(9t^2 + 8)^2} \begin{pmatrix} 12t \\ 9t^2 - 8 \\ -12t \end{pmatrix} = \frac{-48}{at(9t^2 + 8)^3} \cdot \begin{pmatrix} -12t \\ -9t^2 + 8 \\ 12t \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \frac{dB}{dt} &= -\frac{1}{\frac{at(9t^2 + 8)^2}{48}} \cdot N \Rightarrow \tau = \frac{at(9t^2 + 8)^2}{48}\end{aligned}$$

5.2.2. THÉORIE DES SURFACES

Correction 15.

Soit (Γ) la surface paramétrée par (u, v) dans $\mathbb{R}^2$ telle que:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u(1 - u^2)\cos v \\ Y = u(1 - u^2)\sin v \\ Z = 1 - u^2 \end{cases}$$

1. Calculons les différentielles dX, dY et dZ , d'où:

$$dM \begin{cases} dX = (1 - 3u^2)\cos v \cdot du - u(1 - u^2)\sin v \cdot dv \\ dY = (1 - 3u^2)\sin v \cdot du + u(1 - u^2)\cos v \cdot dv \\ dX = -2u \cdot du \end{cases} \implies ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \implies$$

$$ds^2 = [(1 - 3u^2)^2 + 4u^2]du^2 + u^2(1 - u^2)^2 dv^2 \implies ds^2 = (9u^4 - 2u^2 + 1)du^2 + u^2(1 - u^2)^2 dv^2$$

2. On a $u^2 = 1 - Z$ et $X^2 + Y^2 = u^2(1 - u^2)^2$ d'où: $X^2 + Y^2 = (1 - Z)Z^2$. Donc la surface (Γ) est une surface de troisième degré.

5

Correction 16.

Soit la surface d'Enneper:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ Y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ Z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. Calculons les vecteurs M'_u, M'_v :

$$M'_u \begin{cases} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{cases}, \quad M'_v \begin{cases} 2uv \\ 1 - v^2 + u^2 \\ -2v \end{cases}$$

On a:

$$ds^2 = dM \cdot dM = (M'_u du + M'_v dv) \cdot (M'_u du + M'_v dv) = M'_u \cdot M'_u du^2 + 2M'_u \cdot M'_v dudv + M'_v \cdot M'_v dv^2$$

Par suite:

$$M'_u \cdot M'_u = \|M'_u\|^2 = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2 v^2 + 4u^2 = (1 + u^4 + v^4 - 2u^2 + 2v^2 - 2u^2 v^2) + 4u^2 v^2 + 4u^2$$

$$M'_u \cdot M'_u = 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2 v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2$$

$$M'_v \cdot M'_v = \|M'_v\|^2 = 4u^2 v^2 + (1 + u^2 - v^2)^2 + 4v^2 = 4u^2 v^2 + (1 + u^4 + v^4 + 2u^2 - 2v^2 - 2u^2 v^2) + 4v^2$$

$$M'_v \cdot M'_v = 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2 v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2$$

$$M'_u \cdot M'_v = 2uv \cdot (1 - u^2 + v^2) + 2uv(1 - v^2 + u^2) - 4uv = 2uv(1 + 1) - 4uv \implies$$

$$M'_u \cdot M'_v = 4uv - 4uv = 0 \implies M'_u \perp M'_v$$

On a obtenu : $ds^2 = (1 + u^2 + v^2)^2(du^2 + dv^2)$ la première forme fondamentale, par suite $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2$ et $F = 0$.

2. Posons $\mathcal{N} = M'_u \wedge M'_v$ et $n = \frac{\mathcal{N}}{\|\mathcal{N}\|}$ donc n est un vecteur unitaire normal à la surface d'Enneper. On obtient alors:

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2uv \\ 1 - v^2 + u^2 \\ -2v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2u(1 + u^2 + v^2) \\ +2v(1 + u^2 + v^2) \\ (1 + u^2 + v^2)(1 - u^2 - v^2) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathcal{N} = (1 + u^2 + v^2) \begin{vmatrix} -2u \\ +2v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{vmatrix} \Rightarrow n = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{vmatrix} -2u \\ +2v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{vmatrix}$$

3. D'après le cours de géodésie (A. Ben Hadj Salem, 2017), la courbure moyenne H en un point d'une surface est donnée par la formule suivante:

$$H = \text{Trace de la matrice } (g^{-1} \cdot \Phi)$$

où :

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

avec L, M, N sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$. On obtient :

$$g^{-1} \cdot \Phi = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \Rightarrow H = \frac{L + N}{E}$$

Calculons maintenant L et N :

$$M''_{uu} \begin{cases} -2u \\ 2v \\ 2 \end{cases}, \quad M''_{vv} \begin{cases} 2u \\ -2v \\ -2 \end{cases}$$

$$L = M''_{uu} \cdot n = \frac{2u^2 + 2v^2 + 2}{1 + u^2 + v^2} = +2$$

$$N = M''_{vv} \cdot n = \frac{-2u^2 - 2v^2 - 2}{1 + u^2 + v^2} = -2 \Rightarrow$$

$$H = \frac{0}{(1 + u^2 + v^2)^2} = 0, \text{ donc la courbure moyenne est nulle en tout point.}$$

Correction 17.

1. La métrique de la surface est donnée par :

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2, \quad A = A(u, v), \quad B = B(u, v)$$

qu'on peut écrire $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ avec $E = A^2, G = B^2$ et $F = 0$. Donc les courbes coordonnées $u = \text{constante}$ et $v = \text{constante}$ sont orthogonales. On écrit le

déplacement infinitésimal d'un point M sous la forme $dM = Adu.e_1 + Bdv.e_2$ où (e_1, e_2) est une base orthonormée du plan tangent au point M ce qui donne $ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2$. Introduisons la notation des formes différentielles, on obtient:

$$\omega_1 = Adu, \omega_2 = Bdv \implies \omega_1 \wedge \omega_2 = ABdu \wedge dv$$

où $\wedge$ désigne le produit extérieur des formes différentielles. Par suite:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d(Adu) = dA \wedge du = \left(\frac{\partial A}{\partial u} du + \frac{\partial A}{\partial v} dv \right) \wedge du = \frac{\partial A}{\partial u} du \wedge du + \frac{\partial A}{\partial v} dv \wedge du \implies \\ d\omega_1 &= -\frac{\partial A}{\partial v} du \wedge dv \\ d\omega_2 &= d(Bdv) = dB \wedge dv = \frac{\partial B}{\partial u} du \wedge dv \end{aligned}$$

Cependant, selon le théorème fondamental de la géométrie riemannienne locale, il existe une forme différentielle unique ω_{12} définie dans le plan tangent du point qui satisfait les équations (S.S Chern¹, 1985; H. Cartan, 1973) :

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \quad (5.2)$$

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \quad (5.3)$$

$$\text{et } d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 \quad (5.4)$$

avec K la courbure totale ou la courbure de Gauss au point M . Ecrivons:

$$\omega_{12} = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$$

De l'équation(5.2), on obtient:

$$\begin{aligned} \omega_{12} \wedge \omega_2 &= d\omega_1 \implies (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) \wedge \omega_2 = \lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_2 = -\frac{\partial A}{\partial v} du \wedge dv \implies \\ \lambda_1 AB.du \wedge dv &= -\frac{\partial A}{\partial v} du \wedge dv \implies \lambda_1 = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial v} \end{aligned}$$

De l'équation(5.3), on obtient:

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_{12} &= d\omega_2 \implies \omega_1 \wedge (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_2 \omega_1 \wedge \omega_2 = d\omega_2 = \frac{\partial B}{\partial u} du \wedge dv \implies \\ \lambda_2 AB.du \wedge dv &= \frac{\partial B}{\partial u} du \wedge dv \implies \lambda_2 = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial u} \end{aligned}$$

On a obtenu ω_{12} :

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial v} \omega_1 + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial u} \omega_2 \implies \\ \omega_{12} &= -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial v} Adu + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial u} Bdv = -\frac{A'_v}{B} du + \frac{B'_u}{A} dv \end{aligned}$$

¹Shiig-Shen Chern (1911-2004): un éminent mathématicien chinois.

Calculons $d\omega_{12}$ et utilisant l'équation (5.4):

$$d\omega_{12} = -\left(\frac{A'_v}{B}\right)_v dv \wedge du + \left(\frac{B'_u}{A}\right)_u du \wedge dv = \left[\left(\frac{A'_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B'_u}{A}\right)_u\right] du \wedge dv = -K \cdot AB \cdot du \wedge dv$$

D'où:

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A'_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B'_u}{A}\right)_u \right]$$

C.Q.F.D

Correction 18.

On définit une surface (S) par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u^2 + v \\ Y = u + v^2 \\ Z = uv \end{cases}$$

5

1. On obtient les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$:

$$M'_u \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad M'_v \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ u \end{pmatrix}$$

2. Calculons les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (S):

$$\begin{cases} E = \|M'_u\|^2 = 4u^2 + v^2 + 1 \\ F = M'_u \cdot M'_v = 2(u + v) + uv \\ G = \|M'_v\|^2 = 4v^2 + u^2 + 1 \end{cases}$$

3. L'expression de ds^2 est:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = (4u^2 + v^2 + 1) du^2 + 2(2(u + v) + uv) du dv + (4v^2 + u^2 + 1) dv^2$$

4. Les coordonnées (u, v) ne sont pas orthogonales car $F \neq 0$ et non symétriques car $E \neq G$.

5. Un vecteur normal de (S) est donné par $M'_u \wedge M'_v$:

$$\begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 2v^2 \\ v - 2u^2 \\ 4uv - 1 \end{pmatrix}$$

Correction 19.

On définit une surface (Σ) par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = a \cdot \cos u \cdot \cos v \\ Y = a \cdot \cos u \cdot \sin v \\ Z = b \cdot \sin u \end{cases}$$

avec a, b deux constantes positives.

1. Les vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$ sont donnés comme suit:

$$M'_u \begin{cases} -a \sin u \cos v \\ -a \sin u \sin v \\ b \cos u \end{cases}, \quad M'_v \begin{cases} -a \cos u \sin v \\ a \cos u \cos v \\ 0 \end{cases}$$

2. Les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ) :

$$\begin{cases} E = \|M'_u\|^2 = a^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 \sin^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u = a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u \\ F = M'_u \cdot M'_v = 0 \\ G = \|M'_v\|^2 = a^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 \cos^2 u \cos^2 v = a^2 \cos^2 u \end{cases}$$

3. Par suite: $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2$.

4. Les coordonnées (u, v) sont orthogonales car $F = 0$ mais $E \neq G$ par suite non symétriques.

5. Soit $\mathcal{N}$ le vecteur normal en un point de (Σ) :

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} -a \sin u \cos v \\ -a \sin u \sin v \\ b \cos u \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -a \cos u \sin v \\ a \cos u \cos v \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -ab \cos^2 u \cos v \\ -ab \cos^2 u \sin v \\ -a^2 \sin u \cos u \end{vmatrix} \Rightarrow \|\mathcal{N}\|^2 = a^2 \cdot E \cdot \cos^2 u$$

5

Par suite, on obtient le vecteur unitaire normal n donné par :

$$n = \frac{\mathcal{N}}{\|\mathcal{N}\|} = \frac{1}{|\cos u| \sqrt{E}} \begin{vmatrix} -b \cos^2 u \cos v \\ -b \cos^2 u \sin v \\ -a \sin u \cos u \end{vmatrix} = \frac{1}{\epsilon \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \begin{vmatrix} -b \cos u \cos v \\ -b \cos u \sin v \\ -a \sin u \end{vmatrix}$$

$\epsilon = 1$ si $\cos u > 0$, $\epsilon = -1$ si $\cos u < 0$

6. Calculons ci-dessous les vecteurs $\mathbf{OM}''_{uu}$, $\mathbf{OM}''_{uv}$, $\mathbf{OM}''_{vv}$:

$$M''_{uu} = \begin{vmatrix} -a \cos u \cos v \\ -a \cos u \sin v \\ -b \sin u \end{vmatrix} \quad M''_{uv} = \begin{vmatrix} a \sin u \sin v \\ -a \sin u \cos v \\ 0 \end{vmatrix} \quad M''_{vv} = \begin{vmatrix} -a \cos u \cos v \\ -a \cos u \sin v \\ 0 \end{vmatrix}$$

7. On pose:

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

Calculons ces derniers coefficients:

$$L = \frac{1}{\epsilon \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \cdot ab \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{\epsilon \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \cdot ab \cos^2 u$$

Correction 20.

On considère la surface (Γ) définie par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = \sin u \cdot \cos v \\ Y = \sin u \cdot \sin v \\ Z = \cos u + \text{Log} t g \frac{u}{2} + \psi(v) \end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe C^1 de v .

1. Le domaine de définition de la surface (Γ) : $(u, v) \in]0, \pi[\times \mathbb{R}$, ainsi $\operatorname{tg}(u/2) > 0$.
2. Fixons $v = v_0 = \text{constante}$, on obtient $X = \cos v_0 \cdot \sin u$, $Y = \sin v_0 \sin u$, d'où:

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} v_0 \implies X \operatorname{tg} v_0 - Y = 0$$

C'est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. Les courbes coordonnées $v = \text{constante}$ constituent une famille de courbes planes de (Γ) appartenant au plan $X \operatorname{tg} v_0 - Y = 0$. Ce dernier est perpendiculaire au vecteur $w = (\operatorname{tg} v_0, -1, 0)^T$, le vecteur tangent à la courbe coordonnée u est $\tau = (\cos u \cos v_0, \cos u \sin v_0, \frac{\cos^2 u}{\sin u})^T$. Le produit scalaire de $w \cdot \tau = \operatorname{tg} v_0 \cdot \cos u \cos v_0 - \cos u \sin v_0 + 0 = 0$, par suite, le plan coupe (Γ) sous un angle constant égal à $\pi/2$.

3. Calculons les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$:

$$M'_u \begin{Bmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \frac{\cos^2 u}{\sin u} \end{Bmatrix}, \quad M'_v \begin{Bmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ \psi'(v) \end{Bmatrix}$$

4. Calculons les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) :

$$\begin{cases} E = \|M'_u\|^2 = \cos^2 u + \frac{\cos^4 u}{\sin^2 u} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 u}. \\ F = M'_u \cdot M'_v = \frac{\psi'(v) \cdot \cos^2 u}{\sin u}. \\ G = \|M'_v\|^2 = \sin^2 u + \psi'^2(v). \end{cases}$$

5. D'où l'expression de ds^2 :

$$ds^2 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 u} du^2 + 2 \frac{\psi'(v) \cdot \cos^2 u}{\sin u} du dv + (\sin^2 u + \psi'^2(v)) dv^2$$

6. Les coordonnées (u, v) ne sont pas orthogonales ($F \neq 0$) et non symétriques ($E \neq G$).
7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$. Soit $\mathcal{N}$ vecteur normal en un point de (Γ) .

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \frac{\cos^2 u}{\sin u} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos^2 u \cos v \\ -\cos^2 u \sin v \\ \sin u \cos u \end{vmatrix} \implies$$

$$\|\mathcal{N}\|^2 = \cos^2 u \implies \|\mathcal{N}\| = \cos u > 0, u \in]0, \pi[$$

Par suite, on obtient le vecteur unitaire normal n donné par :

$$n = \frac{\mathcal{N}}{\|\mathcal{N}\|} = \begin{vmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ \sin u \end{vmatrix}$$

8. Calculons les vecteurs $\mathbf{OM}_{uu}'$, $\mathbf{OM}_{uv}'$, $\mathbf{OM}_{vv}'$:

$$M_{uu}'' \begin{cases} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \frac{\cos u (\cos^2 u - 2)}{\sin^2 u} \end{cases}, \quad M_{uv}'' \begin{cases} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{cases}, \quad M_{vv}'' \begin{cases} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ 0 \end{cases}$$

9. On pose: $L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{uu}'$, $M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{uv}'$, $N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{vv}'$. Calculons les coefficients L, M et N , on obtient :

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{uu}' = \frac{-\cos u}{\sin u}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{uv}' = 0, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{vv}' = \sin u \cos u$$

10. La courbure totale K est donnée par :

$$K = \frac{L.N - M^2}{E.G - F^2} = \frac{L.N}{E.G} = \frac{\frac{-\cos u}{\sin u} \cdot \sin u \cos u}{\frac{1}{\sin^2 u}} = -1$$

H La courbure moyenne est donnée par: $H = \text{Trace}(g^{-1} \cdot \Phi)$. Il s'ensuit:

$$g = \begin{pmatrix} \cot^2 u & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} \tan^2 u & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} -\cot u & 0 \\ 0 & \sin u \cos u \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$g^{-1} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} -\tan u & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan u} \end{pmatrix} \Rightarrow H = \frac{1}{\tan u} - \tan u$$

Correction 21.

Soit la surface (Γ) définie paramétriquement par:

$$M(u, v) \begin{cases} X = \cosh u \cdot \cos v \\ Y = \cosh u \cdot \sin v \\ Z = \frac{1}{\sinh u} + \log \frac{u}{2} \end{cases}$$

avec $\cosh u$ et $\sinh u$ sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par:

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

1. Le domaine de définition de la surface (Γ) est $u \in]0, +\infty[$ tel que $u > 0$.

2. Calculons les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}_u'$ et $\mathbf{OM}_v'$. On rappelle que $\frac{d \cosh u}{du} =$

$$1 - \sinh^2 u = \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

$$M_u' \begin{cases} \frac{\cos v}{\cosh^2 u} \\ \frac{\sin v}{\cosh^2 u} \\ \frac{1}{\sinh^2 u} \end{cases}, \quad M_v' \begin{cases} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 0 \end{cases}$$

3. Le calcul des coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) donne :

$$\begin{cases} E = \|M'_u\|^2 = \frac{1}{ch^2ush^2u} \\ F = M'_u \cdot M'_v = 0 \\ G = \|M'_v\|^2 = th^2u \end{cases}$$

4. D'où l'expression de ds^2 :

$$ds^2 = \frac{1}{ch^2ush^2u} du^2 + th^2u dv^2$$

5. Les coordonnées (u, v) sont orthogonales car $F = 0$ mais non symétriques $E \neq G$.

6. Soit $\mathcal{N}$ un vecteur normal en un point M de (Γ) . On a :

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} \frac{cosv}{ch^2u} \\ \frac{sinv}{ch^2u} \\ \frac{1}{shuch^2u} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -thusinv \\ thucosv \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-cosv}{ch^3u} \\ \frac{-sinv}{ch^3u} \\ \frac{shu}{ch^3u} \end{vmatrix} \Rightarrow \|\mathcal{N}\|^2 = \frac{1}{ch^4u} \Rightarrow \|\mathcal{N}\| = \frac{1}{ch^2u}$$

D'où n le vecteur unitaire normal au point M :

$$n = \begin{vmatrix} \frac{-cosv}{chu} \\ \frac{-sinv}{chu} \\ \frac{shu}{chu} \end{vmatrix}$$

7. Calculons les vecteurs :

$$\begin{matrix} \mathbf{OM}_{uu}'', & \mathbf{OM}_{uv}'', & \mathbf{OM}_{vv}'' \\ M_{uu}' \left\{ \begin{array}{l} \frac{-2shucosv}{ch^3u} \\ \frac{-2shusinv}{ch^3u} \\ -\frac{3ch^2u-2}{shu^2ch^3u} \end{array} \right., & M_{uv}' \left\{ \begin{array}{l} \frac{-sinv}{ch^2u} \\ \frac{cosv}{ch^2u} \\ 0 \end{array} \right., & M_{vv}' \left\{ \begin{array}{l} -thucosv \\ -thusinv \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

On pose:

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{uu}'', \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{uv}'', \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}_{vv}''$$

8. Calculons les coefficients L, M et N , on obtient:

$$L = \frac{-1}{shuchu^2}, \quad M = 0, \quad N = \frac{shu}{ch^2u}$$

9. On commence par K la courbure totale:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{L.N}{E.G} = -1$$

H La courbure moyenne est donnée par: $H = \text{Trace}(g^{-1} \cdot \Phi)$. Il s'ensuit:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch^2 u sh^2 u} & 0 \\ 0 & th^2 u \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} ch^2 u sh^2 u & 0 \\ 0 & \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{ch^2 u shu} & 0 \\ 0 & \frac{shu}{ch^2 u} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$g^{-1} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} -shu & 0 \\ 0 & \frac{1}{shu} \end{pmatrix} \Rightarrow H = \frac{1}{shu} - shu$$

Correction 22.

1a. La surface est paramétrée par :

$$M = \begin{vmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{vmatrix}$$

5

On obtient les éléments suivants:

$$M'_x = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{vmatrix}, \quad M'_y = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{vmatrix}$$

$$E = M'_x \cdot M'_x = \|M'_x\|^2 = 1 + f'^2_x, \quad F = M'_x \cdot M'_y = f'_x f'_y, \quad G = M'_y \cdot M'_y = \|M'_y\|^2 = 1 + f'^2_y$$

$$\mathcal{N} = M'_x \wedge M'_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\mathcal{N}\|^2 = 1 + f'^2_x + f'^2_y \Rightarrow$$

$$q = \|\mathcal{N}\| = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \Rightarrow n = \mathcal{N} / q = \frac{1}{q} \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$M''_{xx} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f''_{xx} \end{vmatrix}, \quad M''_{xy} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f''_{xy} \end{vmatrix}, \quad M''_{yy} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$$L = n \cdot M''_{xx} = \frac{f''_{xx}}{q}, \quad M = n \cdot M''_{xy} = \frac{f''_{xy}}{q}, \quad N = n \cdot M''_{yy} = \frac{f''_{yy}}{q}$$

1b. On commence par K la courbure totale:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{f''_{xx}}{q} \cdot \frac{f''_{yy}}{q} - \left(\frac{f''_{xy}}{q}\right)^2}{(1 + f'^2_x)(1 + f'^2_y) - (f'_x f'_y)^2} = \frac{f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{q^2 (1 + f'^2_x + f'^2_y)} = \frac{f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{(1 + f'^2_x + f'^2_y)^2}$$

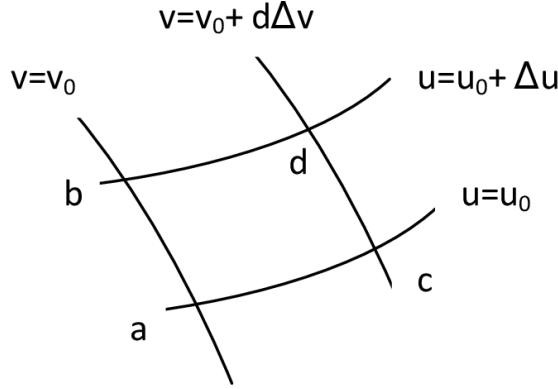


Figure 5.1 | Le quadrilatère infinitésimal des courbes coordonnées

5

H La courbure moyenne est donnée par: $H = \text{Trace}(g^{-1} \cdot \Phi)$. Il s'ensuit:

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f_x'^2 & f_x' f_y' \\ f_x' f_y' & 1 + f_y'^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \frac{1}{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \begin{pmatrix} 1 + f_y'^2 & -f_x' f_y' \\ -f_x' f_y' & 1 + f_x'^2 \end{pmatrix}, \Phi = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{xy}'' & f_{yy}'' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$g^{-1} \cdot \Phi = \frac{1}{q(1 + f_x'^2 + f_y'^2)} \begin{pmatrix} f_{xx}''(1 + f_y'^2) - f_x' f_y' f_{xy}'' & -f_x' f_y' f_{xy}'' \\ -f_x' f_y' f_{xy}'' & (1 + f_x'^2) f_{yy}'' - f_x' f_y' f_{xy}'' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H = \text{Trace}(g^{-1} \cdot \Phi) = \frac{(1 + f_x'^2) f_{yy}'' - 2 f_x' f_y' f_{xy}'' + (1 + f_y'^2) f_{xx}''}{(1 + f_x'^2 + f_y'^2)^{3/2}}$$

Correction 23.

Soit (Σ) une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $OM(u, v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

1. Les conditions i), ii) et iii) sont équivalentes:

i) - On suppose que $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$. On rappelle: soit A un vecteur et $\alpha = A.A$, alors $d\alpha = dA.A + A.dA = 2A.dA$. Comme $E = OM_u' \cdot OM_u'$, on obtient $dE = 2OM_u' \cdot dOM_u' = 2OM_u' \cdot (OM_{uu}'' du + OM_{uv}'' dv) = 2OM_u' \cdot OM_{uu}'' du + 2OM_u' \cdot OM_{uv}'' dv$ soit $\frac{\partial E}{\partial v} = 2OM_u' \cdot OM_{uv}'' = 0 \Rightarrow OM_u' \perp OM_{uv}''$ ou $\frac{\partial OM}{\partial u} \perp \frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$.

Utilisant la même méthode pour G , on obtient que $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ implique que $\frac{\partial OM}{\partial v} \perp \frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$.

Les vecteurs OM_u', OM_v' sont une base du plan tangent en M , par suite le vecteur $\frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est normal au plan tangent donc parallèle à tout vecteur normal, et en particulier le vecteur $M_u' \wedge M_v'$. C'est la condition ii).

ii) - Le vecteur $\frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est parallèle au vecteur normal N à la surface. D'après la

condition i), E dépend de u et G dépend de v . Soit l'arc ab sur la figure (5.1). Sa longueur est donnée par:

$$L_{ab} = \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} \sqrt{E(t)} dt = \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} ds = s(b) - s(a) = ba$$

Pour l'arc cd , la longueur de l'arc cd est exprimée par la même formule vue que E est fonction de u seulement. On a donc $dc = ba$. C'est la condition iii).

iii) - On suppose que les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées (u, v) ont même longueur. La première forme fondamentale donne:

$$ds^2 = E.du^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Dans notre quadrilatère $acdb$, la longueur de l'arc ab dépend que de u , de même l'arc cd , par suite le calcul des longueurs des arcs ab et cd dépendent que de la variable u et on

a: $dv = 0 \Rightarrow ds^2 = E.du^2 \Rightarrow ds = \sqrt{E(u)}du$ et $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$. De la même manière, on obtient

$\frac{\partial G}{\partial u} = 0$. C'est la condition i).

2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de (Σ) forment un réseau de *Tchebychev*.²

Posons :

$$d\tilde{u} = \sqrt{E}du, \quad d\tilde{v} = \sqrt{G}dv \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial \tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{du} = \sqrt{E} \frac{\partial M}{\partial \tilde{u}} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial v} = \sqrt{G} \frac{\partial M}{\partial \tilde{v}} \Rightarrow$$

$$F = OM'_u \cdot OM'_v = \sqrt{EG} OM'_{\tilde{u}} \cdot OM'_{\tilde{v}} = \sqrt{E \cdot G} \tilde{F} \Rightarrow Fdudv = \tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v}$$

Par suite ds^2 s'écrit:

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2\tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

De l'unicité de l'écriture de la première forme fondamentale, on a $\tilde{E} = \tilde{G} = 1$, il s'ensuit $\tilde{F} = OM'_{\tilde{u}} \cdot OM'_{\tilde{v}} = ||OM'_{\tilde{u}}|| \cdot ||OM'_{\tilde{v}}|| \cos \theta = 1 \times 1 \cdot \cos \theta$ ce qui donne:

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2\cos \theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

où θ est l'angle entre les vecteurs OM'_u et OM'_v . Or OM'_u et OM'_v sont respectivement fonction de $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$. On obtient ainsi que θ est fonction de $(\tilde{u}, \tilde{v})$. θ est aussi l'angle entre les courbes coordonnées $\tilde{u}, \tilde{v}$ car le vecteur $OM'_{\tilde{u}}$ (respectivement $OM'_{\tilde{v}}$) est tangent à la courbe coordonnée $\tilde{u}$ (respectivement $\tilde{v}$) au point M.

3. On calcule les 2 déterminants A et B sachant que $\tilde{E} = \tilde{G} = 1$ et $\tilde{F} = \cos \theta$:

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ -\frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

² Pafnouti Tchebychev (1821 - 1894) : Mathématicien russe.

D'où:

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} +\tilde{F}_{uv} & 0 & \tilde{F}_u \\ \tilde{F}_v & 1 & \tilde{F} \\ 0 & \tilde{F} & 1 \end{vmatrix} = (1 - \tilde{F}^2)\tilde{F}_{uv} + \tilde{F} \cdot \tilde{F}_u \cdot \tilde{F}_v$$

De $F = \cos\theta \Rightarrow F_u = \frac{\partial F}{\partial u} = -\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \Rightarrow F_{uv} = \frac{\partial F_u}{\partial v} = -\cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \sin\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}$.

$F_v = \frac{\partial F}{\partial v} = -\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}$. Par suite :

$$A = (1 - \tilde{F}^2)\tilde{F}_{uv} + \tilde{F} \cdot \tilde{F}_u \cdot \tilde{F}_v = -\sin^2\theta \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \sin^3\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \cos\theta \sin^2\theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} \Rightarrow$$

$$A = -\sin^3\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}$$

$$\Rightarrow K = \frac{A}{(EG - F^2)^2} = -\sin^3\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \cdot \frac{1}{\sin^4\theta} = -\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v},$$

C'est l'équation de sinus-Gordon.

4. On pose :

$$\begin{cases} \hat{u} = \tilde{u} + \tilde{v} \\ \hat{v} = \tilde{u} - \tilde{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u} = \frac{1}{2}(\hat{u} + \hat{v}) \Rightarrow d\tilde{u} = \frac{1}{2}(d\hat{u} + d\hat{v}) \\ \tilde{v} = \frac{1}{2}(\hat{u} - \hat{v}) \Rightarrow d\tilde{v} = \frac{1}{2}(d\hat{u} - d\hat{v}) \end{cases}$$

L'expression de $d\hat{s}^2$ devient:

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{4}(d\hat{u} + d\hat{v})^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\cos\theta(d\hat{u} + d\hat{v})(d\hat{u} - d\hat{v}) + \frac{1}{4}(d\hat{u} - d\hat{v})^2 \Rightarrow$$

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)d\hat{u}^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos^2\theta)d\hat{v}^2 = \cos^2(\theta/2)d\hat{u}^2 + \sin^2(\theta/2)d\hat{v}^2 \Rightarrow$$

$$d\hat{s}^2 = \cos^2\omega d\hat{u}^2 + \sin^2\omega d\hat{v}^2, \quad \omega = \theta/2$$

Correction 24.

1. Soit $(\mathcal{F})$ une surface définie dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par la fonction vectorielle $\mathbf{OM} = S(u, v)$ telle que:

$$S(u, v) \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

On obtient:

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \begin{pmatrix} f'_u \\ g'_u \\ h'_u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{pmatrix} f'_v \\ g'_v \\ h'_v \end{pmatrix} \Rightarrow E = \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial u} = f_u'^2 + g_u'^2 + h_u'^2, \Rightarrow$$

$$F = \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = f'_u f'_v + g'_u g'_v + h'_u h'_v, \quad G = \frac{\partial S}{\partial v} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = f_v'^2 + g_v'^2 + h_v'^2$$

La première forme fondamentale de $(\mathcal{F})$ s'écrit:

$$ds^2 = \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \right\|^2 du^2 + 2 \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} dudv + \left\| \frac{\partial S}{\partial v} \right\|^2 dv^2 = E \cdot du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

Soit n le vecteur normal unitaire:

$$n = \frac{\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v} \right\|} \left(\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v} \right\|} \begin{vmatrix} g'_u h'_v - h'_u g'_v \\ h'_u f'_v - f'_u h'_v \\ f'_u g'_v - g'_u f'_v \end{vmatrix}$$

Quand le point M varie sur la surface $(\mathcal{F})$, le repère $(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}, n)$ est un repère mobile. La deuxième forme fondamentale de $(\mathcal{F})$ est définie par:

$$n \cdot d^2 S = L du^2 + 2M dudv + N dv^2$$

où les coefficients L, M, N sont donnés par:

$$L = n \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}, \quad M = n \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}, \quad N = n \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}$$

5

2. On considère que $(\mathcal{F})$ est la sphère définie par: $S = \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad R > 0$

Soit $\mathcal{L}_M$ la variable de Mercator. La variable Mercator est définie par $\mathcal{L}_M = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$

avec $d\mathcal{L}_M = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$. On a alors:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{L}_M} = \cos \varphi \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Par suite, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} &= R^2 \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial S}{\partial \lambda} = R^2 \cos^2 \varphi \Rightarrow \\ \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} &= \frac{\partial S}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial S}{\partial \lambda} = R^2 \cos^2 \varphi = e^{\Phi(\mathcal{L}_M, \lambda)} \text{ avec } \Phi(\mathcal{L}_M, \lambda) = \text{Log}(R^2 \cos^2 \varphi), \quad \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} \cdot \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $S(\mathcal{L}_M, \lambda)$ est une paramétrisation conforme de $(\mathcal{F})$.

La première forme fondamentale de la sphère paramétrée par (φ, λ) est donnée par :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

Maintenant, on considère les paramètres $(\mathcal{L}_M, \lambda)$, on obtient alors ds^2 comme suit:

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right) \Rightarrow ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \Rightarrow \\ ds^2 &= e^{\text{Log}(R^2 \cos^2 \varphi)} (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) = e^{\Phi(\mathcal{L}_M, \lambda)} (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2), \quad \Phi(\mathcal{L}_M, \lambda) = \text{Log}(R^2 \cos^2 \varphi) \end{aligned}$$

Calculons le vecteur normal $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} \wedge \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos^2 \varphi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{vmatrix} = R^2 \cos^2 \varphi \begin{vmatrix} -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\cos \varphi \sin \lambda \\ -\sin \varphi \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{le vecteur unitaire normal est } n = - \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{vmatrix}$$

Calculons les vecteurs: $\frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M \partial \lambda}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2}$. D'où:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{L}_M} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} \right) = -R \cos \varphi \begin{vmatrix} \cos 2\varphi \cos \lambda \\ \cos 2\varphi \sin \lambda \\ \sin 2\varphi \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M \partial \lambda} = R \cos \varphi \begin{vmatrix} \sin \varphi \sin \lambda \\ -\sin \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} = -R \cos \varphi \begin{vmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le calcul des coefficients L, M et N donnent les résultats suivants:

$$L = R \cos^2 \varphi, \quad M = 0, \quad N = R \cos^2 \varphi$$

par suite:

$$\begin{aligned} n.d^2 S &= L d\mathcal{L}_M^2 + 2M d\mathcal{L}_M d\lambda + N d\lambda^2 = R \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \Rightarrow \\ -n.d^2 S &= -(L d\mathcal{L}_M^2 + 2M d\mathcal{L}_M d\lambda + N d\lambda^2) = -R \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \Rightarrow \\ -n d^2 S &= e^{\log(R \cos^2 \varphi)} \left(\frac{d\mathcal{L}_M^2}{\rho_1} + \frac{d\lambda^2}{\rho_2} \right) = e^{\Phi(\mathcal{L}_M, \lambda)} \cdot \left(\frac{d\mathcal{L}_M^2}{\rho_1} + \frac{d\lambda^2}{\rho_2} \right), \quad \rho_1 = \rho_2 = -R \end{aligned}$$

Ainsi la sphère ($\mathcal{F}$) paramétrée par $(\mathcal{L}_M, \lambda)$ est une surface isotherme.

3. On va vérifier les équations de Gauss-Weingarten:

3.1

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S'_{\mathcal{L}_M}}{\partial \mathcal{L}_M} \stackrel{?}{=} \frac{\Phi'_{\mathcal{L}_M}}{2} \cdot S'_{\mathcal{L}_M} - \frac{\Phi'_{\lambda}}{2} \cdot S'_{\lambda} - \frac{e^{\Phi}}{\rho_1} \cdot n \Rightarrow \\ -R \cos \varphi &\begin{vmatrix} \cos 2\varphi \cos \lambda \\ \cos 2\varphi \sin \lambda \\ \sin 2\varphi \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} -\sin \varphi \begin{vmatrix} -R \cos \varphi \sin \varphi \sin \lambda \\ -R \cos \varphi \sin \varphi \cos \lambda \\ R \cos^2 \varphi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{-R} (-1) \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &\begin{vmatrix} -R \cos \varphi \cos 2\varphi \cos \lambda \\ -R \cos \varphi \cos 2\varphi \sin \lambda \\ -2R \sin \varphi \cos^2 \varphi \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{vmatrix} R \cos \varphi \sin^2 \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin^2 \varphi \sin \lambda \\ -R \sin \varphi \cos^2 \varphi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R \cos^2 \varphi \cos \varphi \cos \lambda \\ -R \cos^2 \varphi \cos \varphi \sin \lambda \\ -R \cos^2 \varphi \sin \varphi \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} -R\cos\varphi\cos2\varphi\cos\lambda \\ -R\cos\varphi\cos2\varphi\sin\lambda \\ -2R\sin\varphi\cos^2\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\cos\lambda \\ R\cos\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\sin\lambda \\ -2R\sin\varphi\cos^2\varphi \end{vmatrix}$$

3.2

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S'_\lambda}{\partial \mathcal{L}_M} \stackrel{?}{=} \frac{\Phi'_\lambda}{2} \cdot S'_{\mathcal{L}_M} + \frac{\Phi'_{\mathcal{L}_M}}{2} \cdot S'_\lambda \Rightarrow \\ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}_M} \left(\begin{vmatrix} -R\cos\varphi\sin\lambda \\ +R\cos\varphi\cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \right) \stackrel{?}{=} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \sin\varphi \begin{vmatrix} -R\cos\varphi\sin\lambda \\ R\cos\varphi\cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \\ & \begin{vmatrix} R\cos\varphi\sin\varphi\sin\lambda \\ -R\cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos\varphi\sin\varphi\sin\lambda \\ -R\cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3.3

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n}{\partial \mathcal{L}_M} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\rho_1} \cdot S'_{\mathcal{L}_M} \Rightarrow \\ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}_M} \left(\begin{vmatrix} -\cos\varphi\cos\lambda \\ -\cos\varphi\sin\lambda \\ -\sin\varphi \end{vmatrix} \right) \stackrel{?}{=} \frac{1}{(-R)} \begin{vmatrix} -R\cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda \\ -R\cos\varphi\sin\varphi\sin\lambda \\ R\cos^2\varphi \end{vmatrix} \\ & \cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\lambda \\ \sin\varphi\sin\lambda \\ -\cos\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\varphi\sin\lambda \\ -\cos^2\varphi \end{vmatrix} \end{aligned}$$

5

Ainsi, on a vérifié le premier groupe des équations de Gauss-Weingarten. On laisse au lecteur la vérification du deuxième groupe des équations de Gauss-Weingarten.

5.3. ELLIPSE ET ELLIPSOÏDE

Correction 25.

1. A partir de la figure 5.2, l'ellipse est obtenue par une affinité de rapport OB/OA et de direction OY' . Les distances $OA = a$ et $OB = b$ sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse. L'angle $m'Om_1$ est l'angle ψ . Les coordonnées de m' sur le cercle de rayon a sont:

$$x'_C = a\cos\psi, \quad y'_C = a\sin\psi$$

Les coordonnées de m sur l'ellipse sont:

$$x_E = a\cos\psi, \quad y_E = \frac{b}{a} \cdot a\sin\psi = b\sin\psi$$

De la figure 5.2, on obtient facilement les composantes de la normale extérieure au point m de l'ellipse qu'on note n :

$$n = \begin{cases} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{cases}$$

La pente de la normale à la tangente à l'ellipse au point m est donnée par:

$$p = \frac{-1}{f'(x)}, \quad y = f(x), \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On différentie la dernière équation ci-dessus, on trouve:

$$2x \frac{dx}{a^2} + 2y \frac{dy}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} = -\frac{b \cos \psi}{a \sin \psi}$$

D'où la pente p :

$$p = \frac{-1}{f'(x)} = \frac{a \sin \psi}{b \cos \psi} = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi$$

De la formule ci-dessus et de $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$, on obtient facilement $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{b \cos \psi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}}$$

De $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi \cos \varphi$, on obtient $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \frac{a \sin \psi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}}$$

Reciproquement, de $\cos^2 \psi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}$, et $\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$ on obtient facilement $\cos \psi$:

$$\cos \psi = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}}$$

On déduit aussi $\sin \psi$:

$$\sin \psi = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}}$$

2. Les coordonnées paramétriques de l'ellipse en fonction de ψ sont:

$$m = \begin{cases} x_E = a \cos \psi \\ y_E = b \sin \psi \end{cases}$$

On remplace $\cos \psi$, $\sin \psi$ en fonction de φ , nous obtenons:

$$m = \begin{cases} x_E = a \cos \psi = a \cdot \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}} \\ y_E = b \sin \psi = b \cdot \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}} \end{cases}$$

Pour simplifier les formules, on fait intervenir e^2 le carré de la première excentricité de l'ellipse donnée par $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, et on exprime b en fonction de a et e par $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Alors le terme $b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi$ devient:

$$a^2(1 - e^2)\sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi = a^2(\sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = a^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

Les coordonnées paramétriques (x_E, y_E) deviennent:

$$m = \begin{cases} x_E = a \cos \psi = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \\ y_E = b \sin \psi = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi \end{cases}$$

On retrouve $N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$ la grande normale ou le deuxième rayon de courbure de l'ellipsoïde. L'écriture définitive des coordonnées paramétriques (x_E, y_E) est:

$$m = \begin{cases} x_E = N(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ y_E = N(\varphi) \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Dans la figure ci-dessus (5.3), l'ellipse se trouve dans le repère plan (O, ROZ) , les coordonnées paramétriques du point de l'ellipse sont:

$$M = \begin{cases} R = N(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ Z = N(\varphi) \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

L'ellipsoïde de révolution est obtenu par rotation autour de l'axe OZ de l'ellipse. On obtient donc les coordonnées paramétriques considérant M sur l'ellipsoïde en intervenant l'angle latitude $\lambda = \widehat{XOR}$ comme suit:

$$M = \begin{cases} X = N(\varphi) \cdot \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = N(\varphi) \cdot \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = N(\varphi) \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

3. De l'équation $\tan \varphi = \frac{a}{b} \tan \psi$ obtenue à la question 1., on obtient:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a}{b} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{a \cos^2 \varphi}{b \cos^2 \psi}$$

Remplaçons l'angle ψ par φ , on obtient:

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{a \cos^2 \varphi}{b \cos^2 \psi} = \frac{a \cos^2 \varphi (b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)}{b a^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{ab} \cdot (b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)$$

5

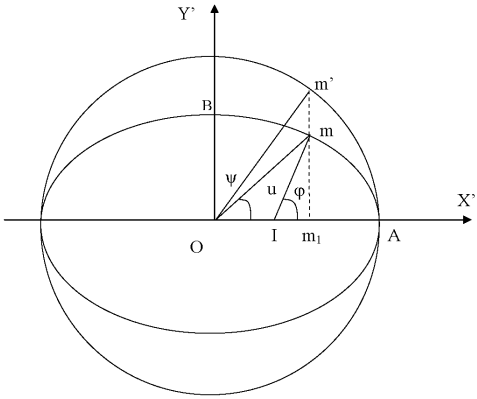


Figure 5.2 | Les angles ψ et φ

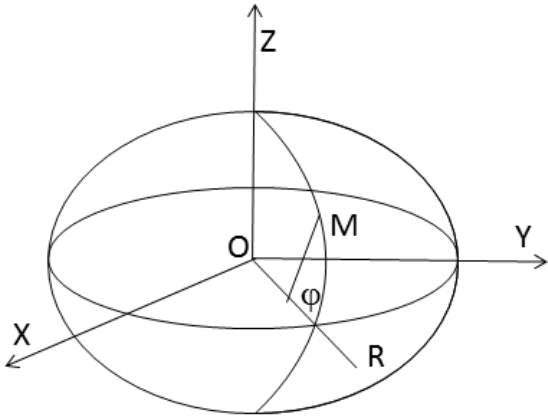


Figure 5.3 | L'Ellipsoïde de révolution

Or dans la question précédente, on a trouvé que $b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$. D'où:

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{a}{b} (1 - e^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

Je laisse au lecteur de trouver que $\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \psi}$.

4. Pour calculer la différentielle $d\beta$ de l'arc d'ellipse en fonction de φ , on va utiliser au début les coordonnées en fonction de ψ , d'où:

$$d\beta^2 = dx_E^2 + dy_E^2 = (-a \sin \psi d\psi)^2 + (b \cos \psi d\psi)^2 = (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) d\psi^2$$

On remplace $\sin \psi$, $\cos \psi$ en fonction de φ ., on arrive à:

$$\left(\frac{d\beta}{d\psi}\right)^2 = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi} = \frac{a^2 b^2}{a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{b^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \Rightarrow d\beta = \frac{bd\psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Mais de la question précédente, on a $d\psi = \frac{\sqrt{1-e^2} d\varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$. On obtient $d\beta$ sachant que $b = a\sqrt{1-e^2}$:

$$d\beta = \frac{bd\psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{b\sqrt{1-e^2} d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot d\varphi = \rho \cdot d\varphi$$

On retrouve $\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$ le rayon de courbure de la méridienne de l'ellipse. Pour l'ellipsoïde, les courbes coordonnées $\varphi = cte$ et $\lambda = cte$ sont orthogonales, par suite la première forme fondamentale s'écrit sous la forme:

$$ds^2 = d\beta^2 + d\beta_1^2 = \rho^2 d\varphi^2 + A(\varphi, \lambda) \cdot d\lambda^2$$

On calcule $d\beta_1$ en différentiant X, Y par rapport λ seulement. On trouve facilement $d\beta_1^2 = dX^2 + dY^2 = (N \cos \varphi)^2 \cdot d\lambda^2 \Rightarrow A = A(\varphi) = N^2(\varphi) \cos^2 \varphi$ d'où:

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2(\varphi) \cos^2 \varphi d\lambda^2 \Rightarrow E = \rho^2, F = 0, G = N^2 \cos^2 \varphi$$

5. Pour l'ellipsoïde de révolution, nous avons trouvé un rayon de courbure principal à savoir le rayon de courbure de la méridienne de l'ellipse à partir de la formule $d\beta = \rho \cdot d\varphi \Rightarrow \rho = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$. Pour le deuxième rayon de courbure principal qu'on note R_2 relatif à l'ellipsoïde, on va le calculer à partir de la valeur K appelée courbure totale ou courbure de Gauss et qui vaut $K = \frac{1}{\rho \cdot R_2}$. Dans le cours de géodésie, K vaut:

$$K = \frac{\text{Dét}(\Phi_2)}{\text{Dét}(\Phi_1)} = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2}$$

avec Φ_1, Φ_2 sont respectivement la première et la seconde formes fondamentales de l'ellipsoïde de révolution. De la question précédente, on a $\text{Dét}(\Phi_1) = E \cdot G - F^2 = \rho^2 \cdot N^2 \cdot \cos^2 \varphi$.

Pour le calcul de $\text{Dét}(\Phi_2)$, on renvoie le lecteur au problème ci-après où on traitera en détail la deuxième forme fondamentale et on calculera K et R_2 .

6. La première forme fondamentale donne:

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\rho^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi^2 + d\lambda^2 \right)$$

Posons $d\mathcal{L} = d\mathcal{L}(\varphi) = \frac{\rho}{N \cos \varphi} \cdot d\varphi$, alors ds^2 devient:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

La variable $\mathcal{L}$ s'appelle la latitude isométrique, elle constitue avec la latitude géodésique λ un couple de coordonnées symétriques c'est-à-dire le coefficient $E = G$. Calculons $\mathcal{L}$:

$$d\mathcal{L} = d\mathcal{L}(\varphi) = \frac{\rho}{N \cos \varphi} \cdot d\varphi \Rightarrow \mathcal{L} = \int_0^\varphi \frac{\rho(u)}{N(u) \cos u} \cdot du = \int_0^\varphi \frac{(1-e^2) du}{(1-e^2 \sin^2 u) \cos u} \Rightarrow \mathcal{L}(0) = 0$$

5

L'angle $\varphi \in [0, \pi/2[\Rightarrow \varphi/2 \in [0, \pi/4[\Rightarrow 0 < \text{tg}(\varphi/2) < 1$. On peut écrire la deuxième intégrale ci-dessus sous la forme:

$$\mathcal{L} = \int_0^\varphi \frac{(1-e^2 \sin^2 u - e^2 \cos^2 u) du}{(1-e^2 \sin^2 u) \cos u} = \int_0^\varphi \frac{du}{\cos u} - e \int_0^\varphi \frac{e \cos u du}{1-e^2 \sin^2 u} = I - eJ$$

avec $I = \int_0^\varphi \frac{du}{\cos u}$ et $J = \int_0^\varphi \frac{e \cos u du}{1-e^2 \sin^2 u}$.

Calcul de I : faisons le changement de variables suivant $t = \text{tg}(u/2) \Rightarrow du = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. I devient:

$$I = \int_0^\varphi \frac{du}{\cos u} = \int_0^{\text{tg}(\varphi/2)} \frac{2dt}{1-t^2} = \left[\text{Log} \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right]_0^{\text{tg}(\varphi/2)} = \text{Log} \left(\frac{\text{tg} \frac{\pi}{4} + \text{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \text{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \text{tg} \frac{\varphi}{2}} \right) = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Pour le calcul de J , on fait un changement de variables $t = e \sin u \Rightarrow dt = e \cos u du$, on obtient alors:

$$J = \int_0^\varphi \frac{e \cos u du}{1-e^2 \sin^2 u} = \int_0^{e \sin \varphi} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left[\text{Log} \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right]_0^{e \sin \varphi} = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = I - eJ = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right)$$

Correction 26.

1a. On a:

$$W_p = \int_0^\Omega \sin^p \omega d\omega = \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega \sin^2 \omega d\omega = \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega (1 - \cos^2 \omega) d\omega \Rightarrow$$

$$W_p = \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega d\omega - \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega \cos^2 \omega d\omega = W_{p-2} - I_{p-2}$$

1.b Utilisant une intégration par parties:

$$\begin{aligned}
 W_p &= \int_0^\Omega \sin^p \omega d\omega = \int_0^\Omega \sin^{p-1} \omega \sin \omega d\omega \Rightarrow \\
 W_p &= - \int_0^\Omega \sin^{p-1} \omega d(\cos \omega) \Rightarrow \\
 W_p &= - [\sin^{p-1} \omega \cos \omega]_0^\Omega + (p-1) \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega \cos^2 \omega d\omega \Rightarrow \\
 W_p &= -\sin^{p-1} \Omega \cos \Omega + (p-1) \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega (1 - \sin^2 \omega) d\omega \Rightarrow \\
 W_p &= -\sin^{p-1} \Omega \cos \Omega + (p-1) \int_0^\Omega \sin^{p-2} \omega d\omega - (p-1) \int_0^\Omega \sin^p \omega d\omega \Rightarrow \\
 W_p &= -\sin^{p-1} \Omega \cos \Omega + (p-1) W_{p-2} - (p-1) W_p \Rightarrow \\
 p W_p + \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega &= (p-1) W_{p-2} = (p-1)(W_p + I_{p-2}) \Rightarrow W_p + \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega = (p-1) I_{p-2}
 \end{aligned}$$

1.c On part de la formule démontrée en 1.a et on utilise l'expression de I_{p-2} calculée en 1.b, on obtient:

$$\begin{aligned}
 W_p &= W_{p-2} - I_{p-2} = W_{p-2} - \frac{1}{p-1} (W_p + \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega) \Rightarrow \\
 (p-1) W_p &= (p-1) W_{p-2} - W_p - \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega \Rightarrow \\
 p W_p &= (p-1) W_{p-2} - \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega \Rightarrow W_p = \frac{p-1}{p} W_{p-2} - \frac{1}{p} \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega
 \end{aligned}$$

2. Si on remplace p par 2, la formule 1.c devient:

$$W_2 = \frac{2p-1}{2p} W_{2(p-1)} - \frac{1}{2p} \sin^{2p-1} \Omega \cos \Omega$$

Pour programmer la dernière formule ci-dessus, on calcule W_0 obtenue par la formule 1.a soit $W_0 = \Omega$ et W_2 obtenue avec $p = 1$, d'où:

$$W_2 = \frac{1}{2} W_0 - \frac{1}{2} \sin \Omega \cos \Omega$$

La programmation devient donc facile.

Correction 27.

On a:

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho d\varphi$$

avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}, \quad w^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$$

1. On développe w^{-3} suivant les puissances croissantes de $e \sin \varphi$. On a $w^{-3} = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$, on utilise la formule:

$$(1 + \alpha)^q = 1 + q\alpha + \frac{q(q-1)}{2!} \alpha^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \alpha^3 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-p+1)}{p!} \alpha^p$$

On obtient l'expression de w^{-3} à l'ordre $e^{12} \sin^{12} \varphi$, soit:

$$w^{-3} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 \varphi + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 \varphi + \frac{35}{16}e^6 \sin^6 \varphi + \frac{315}{128}e^8 \sin^8 \varphi + \frac{693}{256}e^{10} \sin^{10} \varphi + \frac{3003}{1024}e^{12} \sin^{12} \varphi + \dots$$

2. On a:

$$\beta(\varphi) = a(1-e^2) \int_0^\varphi \frac{dt}{(1-e^2 \sin^2 t)^{3/2}} = a(1-e^2) \int_0^\varphi w^{-3}(t) dt = a(1-e^2) \int_0^\varphi (1-e^2 \sin^2 t)^{-3/2} dt$$

D'où:

$$\frac{\beta(\varphi)}{a(1-e^2)} = \varphi + \frac{3}{2}e^2 W_2 + \frac{15}{8}e^4 W_4 + \frac{35}{16}e^6 W_6 + \frac{315}{128}e^8 W_8 + \frac{693}{256}e^{10} W_{10} + \frac{3003}{1024}e^{12} W_{12}$$

3. Si on arrête le développement au terme e^{2n} , on majore le terme suivant:

5

$$\left| \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{3}{2}-n\right)}{(n+1)!} e^{2(n+1)} a(1-e^2) \int_0^\varphi \sin^{2n+1} t dt \right| \leq 1 \text{ mm}$$

Comme $\left| \int_0^\varphi \sin^k t dt \right| \leq \int_0^{|\varphi|} |\sin^k t| dt \leq \int_0^{|\varphi|} dt \leq \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$, la majoration devient:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{3}{2}-n\right)}{(n+1)!} e^{2(n+1)} a(1-e^2) \leq 1 \text{ mm}$$

Numériquement, on va utiliser l'ellipsoïde GRS80 avec $a = 6378\,137.00 \text{ m}$ et le carré de la première excentricité $e^2 = 0.00669438$. Le calcul du membre gauche avec $n = 4$ donne 46.16 mm une valeur supérieure à 1 cm , celui avec $n = 5$ implique une valeur inférieure à 1 mm soit 0.36 mm .

4. On laisse au lecteur la proposition d'un organigramme de calcul.

5. Résolution du problème inverse: calcul de φ connaissant β . Utilisant le précédent exercice ci-dessus, sachant que $W_0 = \varphi$, on obtient que:

$$\frac{\beta(\varphi)}{a(1-e^2)} = \varphi + \sum_{n=1}^{n=4} e^{2n} W_{2n}(\varphi) = C_0 \varphi + F(\sin \varphi, \cos \varphi) = C_0 \varphi + F(\varphi)$$

où C_0 est une constante et F est une fonction polynômiale en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$. On connaît $\beta(\varphi) = A$, on obtient l'équation qui permet de calculer la latitude géodésique φ :

$$\varphi = \frac{A}{a(1-e^2)C_0} - \frac{F(\varphi)}{C_0}$$

La résolution de l'équation ci-dessus se fait par itérations comme suit:

$$\varphi_1 = \frac{A}{a(1-e^2)C_0}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 - \frac{F(\varphi_1)}{C_0} \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{j+1} &= \varphi_1 - \frac{F(\varphi_j)}{C_0} \end{aligned}$$

On fixe un nombre $\epsilon \ll 1$. Si $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| < \epsilon$, alors $\varphi = \varphi_{j+1} = \varphi_j$, sinon on itère le processus. En prenant $\epsilon = 1,57 \times 10^{-10}$, on obtient la précision du mm . La résolution ci-dessus par itérations est convergente car on montre que $|\frac{F'(\varphi)}{C_0}| < 1$.

Correction 28.

Soit l'ellipse (E) définie par les équations paramétriques:

$$M \begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \sin u \\ \text{avec } a > b > 0 \end{cases}$$

On pose:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

1. Considérons les coordonnées des foyers F et F' situés sur l'axe des x : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $c > 0$. Soit un point $M(x, y)$ sur l'ellipse, les distances MF et MF' sont comme suit:

$$MF = \sqrt{(c - x)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(c + x)^2 + y^2}$$

Choisissons le point $M(0, b)$ sur l'axe des y , l'équation $MF + MF' = 2a$ devient:

$$\sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2} = 2a \implies a = \sqrt{c^2 + b^2} \implies c^2 = a^2 - b^2 = a^2(1 - b^2/a^2) = a^2 e^2 \implies c = ae$$

2. L'équation cartésienne de l'ellipse est: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on différentie l'équation précédente,

on obtient $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \frac{b^2}{a^2}$. L'équation de la tangente (T) au point $M(x, y)$ sur l'ellipse est donnée par :

$$Y - y = y'(x)(X - x) \implies y'(x).X - Y + (-xy'(x) + y) = 0$$

La distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite d'équation $mx + ny + p = 0$ est donnée par la formule:

$$d = \frac{|x_0 m + y_0 n + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Par suite la distance du foyer $F(ae, 0)$ à la tangente (T) est donnée par:

$$d_F = \frac{|ae.y'(x) + 0.(-1) + (-xy'(x) + y)|}{\sqrt{y'^2(x) + (-1)^2}} = \frac{|(y - xy') + ae.y'|}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

et celle du foyer F' d'_F :

$$d'_F = \frac{|(y - xy') - ae.y'|}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

On obtient facilement le produit des distances $D = d_F.d'_F$, soit:

$$D = d_F.d'_F = \frac{|(y - xy')^2 - a^2e^2.y'^2|}{1 + y'^2}$$

Calculons $1 + y'^2$:

$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{-b^2x}{a^2y} \right)^2 = 1 + (1 - e^2)^2 \left(\frac{a \cos u}{b \sin u} \right)^2 = 1 + (1 - e^2)^2 \left(\frac{1}{1 - e^2} \cdot \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} \right) = \frac{1 - e^2 \cos^2 u}{\sin^2 u}$$

Calculons maintenant le numérateur $N = (y - xy')^2 - a^2e^2.y'^2$ sachant que $y' = \frac{-b \cos u}{a \sin u}$:

$$N = (y - xy')^2 - a^2e^2.y'^2 = y^2 - 2xyy' + y'^2(x^2 - a^2e^2) \Rightarrow$$

$$N = b^2 \sin^2 u - 2ab \cos u \sin u.y' + y'^2(a^2 \cos^2 u - a^2e^2) \Rightarrow$$

$$N = b^2 \sin^2 u + 2ab \sin u \cos u \cdot \frac{b \cos u}{a \sin u} + a^2 \cdot \frac{b^2 \cos^2 u}{a^2 \sin^2 u} (\cos^2 u - e^2) \Rightarrow$$

$$N = b^2 \left[\sin^2 u + 2 \cos^2 u + \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} (\cos^2 u - e^2) \right] \Rightarrow$$

$$N = \frac{b^2}{\sin^2 u} (\sin^2 u + \cos^2 u (1 - \cos^2 u) + \cos^4 u - e^2 \cos^2 u) = \frac{b^2}{\sin^2 u} (1 - e^2 \cos^2 u) > 0 \Rightarrow$$

$$D = \frac{N}{(1 - e^2 \cos^2 u) / \sin^2 u} = b^2$$

On retrouve que $D = d_F.d'_F = b^2$ est indépendant de la variable u .

3. On a : $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) du^2 = a^2 (1 - e^2 \cos^2 u) du^2$, d'où:

$$ds = +a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} du$$

4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires T et N et en déduire le rayon de courbure de l'ellipse.

$$T = \frac{dM}{ds} = \begin{cases} t_x = \frac{dx}{ds} = \frac{-\sin u}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} \\ t_y = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos u}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} \end{cases} \quad \frac{dT}{ds} = \begin{cases} \frac{dt_x}{ds} = \frac{dt_x}{du} \frac{du}{ds} = \frac{-(1 - e^2) \cos u}{a(1 - e^2 \cos^2 u)^2} \\ \frac{dt_y}{ds} = \frac{dt_y}{du} \frac{du}{ds} = \frac{-\sqrt{1 - e^2} \sin u}{a(1 - e^2 \cos^2 u)^2} \end{cases}$$

Le vecteur normal à l'ellipse N est donné par : $N = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{ds}$ et $\alpha = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{1}{R}$. D'où:

$$N = \begin{cases} \frac{-\sqrt{1 - e^2} \cos u}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} \\ \frac{-\sin u}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} \end{cases}, \quad \alpha = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{a(1 - e^2 \cos^2 u)^{3/2}} \Rightarrow R = \frac{a.(1 - e^2 \cos^2 u)^{3/2}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

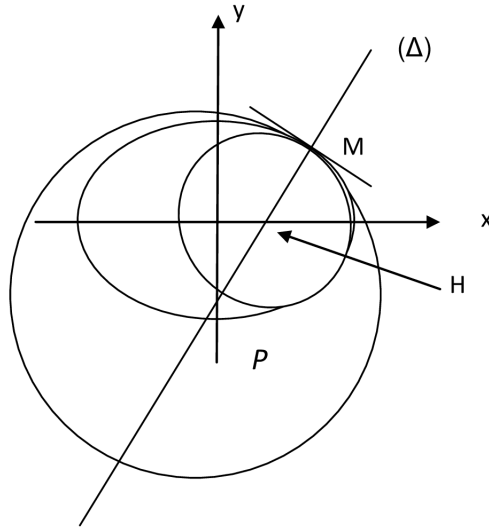


Figure 5.4 | Les deux cercles dits surosculateurs

Vérifier le calcul en remplaçant $\cos u = f(\varphi)$ et trouver $R = \rho(\varphi)$.

5. Soit (Δ) la droite normale à la tangente au point M sur l'ellipse, elle coupe l'axe des x au point H et l'axe des y en P . Ces points $H(X_H, 0)$ et $P(0, Y_P)$ sont respectivement les centres deux cercles tangents en M . L'équation de la normale (Δ) est:

$$Y - y = \frac{-1}{y'(x)}(X - x), \quad y'(x) = -\frac{b \cos u}{a \sin u}$$

On obtient facilement $X_H = ae^2 \cos u$, $Y_P = -be'^2 \sin u$.

6. Prenons M le sommet sur l'axe des y , soit $M(0, +b)$. Donc $u = +\pi/2$, les coordonnées des deux centres deviennent: $X_H = 0$ et $Y_P = -be'^2 > -b$. Le centre du petit cercle est l'origine des axes, celui du grand cercle est entre l'origine des axes et le sommet inférieur de l'ellipse.

Correction 29.

1. La définition géométrique de l'ellipse est donnée par:

$$MF + MF' = \text{constante} = 2a$$

L'expression de la formule est symétrique, on peut écrire que les coordonnées des points F, F' sont comme suit:

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0), \quad c > 0$$

Si le point M se trouve sur le petit sommet sur l'axe des y , la distance $MF = MF' = (2a)/2 = a = \sqrt{b^2 + c^2}$, par suite, on obtient c en fonction de a et b , ce dernier est le demi-petit axe de l'ellipse, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)} = \sqrt{a^2 e^2} = a.e$$

Ecrivons la formule en fonction des coordonnées, on obtient:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} + \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} \Rightarrow \\ (x - ae)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x + ae)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x + ae)^2 + y^2} \Rightarrow \\ a + ex &= \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} \Rightarrow (a + ex)^2 = (x + ae)^2 + y^2 \Rightarrow \\ a^2(1 - e^2) &= x(1 - e^2) + y^2 \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ C.Q.F. Shiig-Shen Chern .D} \end{aligned}$$

Correction 30.

5

1. Rappelons que $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$, par suite la dérivée de N par rapport à φ est :

$$\begin{aligned} N'_\varphi &= a \left(-\frac{1}{2} \right) (-2e^2 \sin \varphi \cos \varphi) (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} = ae^2 \sin \varphi \cos \varphi. (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} \Rightarrow \\ N'_\varphi &= \frac{e^2 N \sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} (N \cos \varphi)'_\varphi &= -N \sin \varphi + \cos \varphi N'_\varphi = -N \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{e^2 N \sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \Rightarrow \\ (N \cos \varphi)'_\varphi &= -N \sin \varphi \left(1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) = -N \sin \varphi \left(\frac{1 - e^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \Rightarrow \\ (N \cos \varphi)'_\varphi &= \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} = -N \sin \varphi \left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) = \frac{-a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot \sin \varphi = -\rho \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Correction 31.

Les équations de l'ellipsoïde de révolution sont comme suit:

$$M = \begin{cases} X = N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases}$$

1. On obtient:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -N \cos \varphi \sin \lambda \\ N \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \cos \lambda \\ -\rho \sin \varphi \sin \lambda \\ \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} N \rho \cos^2 \varphi \cos \lambda \\ N \rho \cos^2 \varphi \sin \lambda \\ N \rho \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

2. On obtient les coefficients:

$$E = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = N^2 \cos^2 \varphi, \quad F = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = 0, \quad G = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = \rho^2$$

3. L'expression de la première forme fondamentale s'écrit:

$$ds^2 = E.d\lambda^2 + 2Fd\lambda.d\varphi + G.d\varphi^2 = N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

4. De la question 1., on obtient la norme du vecteur $\mathbf{M}'_\lambda \wedge \mathbf{M}'_\varphi$, ce qui donne:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \right\| = N \rho \cos \varphi, \quad \cos \varphi > 0$$

Par suite, le vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \right\|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Le vecteur normal unitaire est dirigé vers l'extérieur de l'ellipsoïde.

5. Calculons les vecteurs:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda^2} = \begin{pmatrix} -N \cos \varphi \cos \lambda \\ -N \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda \partial \varphi} = \begin{pmatrix} +\rho \sin \varphi \sin \lambda \\ -\rho \sin \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le calcul du $\mathbf{M}''_{\varphi, \varphi}$, on ne calcule pas $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$, on obtient alors:

$$\mathbf{M}''_{\varphi, \varphi} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi^2} = \rho \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\cos \varphi \sin \lambda \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} + \rho' \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

6. D'où les coefficients (à ne pas confondre N avec la grande normale N):

$$L = n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda^2} = -N \cos^2 \varphi, \quad M = n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda \partial \varphi} = 0, \quad N = n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial^2 \varphi} = -\rho$$

7. La deuxième forme fondamentale $\Phi(\lambda, \varphi)$ s'écrit:

$$\Phi(\lambda, \varphi) = L.d\lambda^2 + 2M.d\lambda d\varphi + N.d\varphi^2 = -N \cos^2 \varphi d\lambda^2 - \rho d\varphi^2$$

8. La formule du cours donne le calcul des rayons principaux de courbure à partir de la valeur K appelée courbure totale ou courbure de Gauss et qui vaut $K = \frac{1}{R_1 \cdot R_2}$. K vaut:

$$K = \frac{\text{Dét}(\Phi_2)}{\text{Dét}(\Phi_1)} = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2} = \frac{1}{\rho R_2}$$

Soit:

$$K = \frac{\rho \cdot N \cdot \cos^2 \varphi}{N^2 \cos^2 \varphi \rho^2} = \frac{1}{\rho N} = \frac{1}{\rho R_2} \Rightarrow R_2 = N = N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

la grande normale est le rayon de courbure de la section normale au point M perpendiculaire au plan de la méridienne de l'ellipsoïde de révolution.

Les questions 9. et 10. sont déjà traitées dans les exercices ci-dessus.

Correction 32.

Sur l'ellipsoïde, on note φ la latitude géodésique et ψ la latitude réduite.

1. ρ est donné par la formule:

$$\rho = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$$

On a vu dans l'un des exercices précédents l'expression de $\sin \varphi = f(\psi)$. On a alors:

$$\sin \varphi = \frac{a \sin \psi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}}$$

On fait intervenir le $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 \Rightarrow b/a = \sqrt{1 - e^2}$. De plus:

$$\begin{aligned} a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi &= a^2 (\sin^2 \psi + (b/a)^2 \cos^2 \psi) = a^2 (1 - \cos^2 \psi + (1 - e^2) \cos^2 \psi) \Rightarrow \\ a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi &= a^2 (1 - e^2 \cos^2 \psi) \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \end{aligned}$$

Par suite :

$$1 - e^2 \sin^2 \varphi = 1 - e^2 \cdot \frac{\sin^2 \psi}{1 - e^2 \cos^2 \psi} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \psi - e^2 (1 - \cos^2 \psi)}{1 - e^2 \cos^2 \psi} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \psi}$$

Finalement, on obtient l'expression de ρ en fonction de ψ :

$$\rho = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} = \frac{a(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{3/2}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

2. A l'équateur, $\psi = 0 \text{ rad} \Rightarrow \cos \psi = 1$, d'où $\rho_e = a(1 - e^2)$. Au pôle nord, $\psi = \pi/2 \text{ rad} \Rightarrow \cos \psi = 0$ et $\rho_p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$. Eliminons le paramètre a , on trouve $\frac{\rho_e}{\rho_p} = (1 - e^2)^{3/2}$. L'aplatissement de l'ellipsoïde noté α vaut $(a - b)/a$, d'où:

$$\alpha = 1 - b/a \Rightarrow 1 - e^2 = (1 - \alpha)^2 \Rightarrow \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \Rightarrow \alpha = 1 - \left(\frac{\rho_e}{\rho_p} \right)^{1/3}$$

3. Application numérique: $\rho_p = 111\,695 \text{ m}$ et $\rho_e = 110\,573 \text{ m}$ ce qui donne:

$$\alpha = 1 - \left(\frac{110\,573}{111\,695} \right)^{1/3} = 1 - (0.989954787591)^{1/3} = 1 - 0.996640321062 = 0.003359678938$$

Correction 33.

On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point M :

$$M = (X, Y, Z) = (4300244.860 \text{ m}, 1062094.681 \text{ m}, 4574775.629 \text{ m})$$

Les paramètres de l'ellipsoïde de référence sont $a = 6378137.00 \text{ m}$, $e^2 = 0.00669438$.

1. On a $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}$, d'où la valeur numérique $b = 6378137 \times \sqrt{0.993305620} = 6356752.314 \text{ m}$.

2. L'aplatissement $\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{21384.680}{6378137} = 1/298,25722014342$.

3. La longitude est donnée par: $tg\lambda = Y/X = \frac{1062094.681}{4300244.860} = 0,246984698680624 \Rightarrow \lambda = 15,41503 \text{ gr}$.

Le calcul de φ se fait par itérations. On calcule $r = \sqrt{X^2 + Y^2} = 4429463.959 \text{ m}$. La première valeur de la latitude géodésique φ_1 est obtenue par $tg\varphi_1 = \frac{Z}{r} = \frac{4574775.629}{4429463.959} = 1.032805700948 \Rightarrow \varphi_1 = 51.027297 \text{ gr}$.

On calcule $N(\varphi_1)e^2 \sin\varphi_1 = 30728.1915 \text{ m}$, $Z' = Z + N(\varphi_1)e^2 \sin\varphi_1 = 4605503.8205 \text{ m}$, $tg\varphi_2 = Z'/r = 1.039742926713 \Rightarrow \varphi_2 = 51.2402510 \text{ gr}$.

On calcule $N(\varphi_2)e^2 \sin\varphi_2 = 30827.8887 \text{ m}$, $Z' = Z + N(\varphi_2)e^2 \sin\varphi_2 = 4605603.5177 \text{ m}$, $tg\varphi_3 = Z'/r = 1.039765434448 \Rightarrow \varphi_3 = 51.2409395 \text{ gr}$.

On calcule $N(\varphi_3)e^2 \sin\varphi_3 = 30828.2104 \text{ m}$, $Z' = Z + N(\varphi_3)e^2 \sin\varphi_3 = 4605603.8394 \text{ m}$, $tg\varphi_4 = Z'/r = 1.039765507075 \Rightarrow \varphi_4 = 51.2409417 \text{ gr}$.

On calcule $N(\varphi_4)e^2 \sin\varphi_4 = 30828.2115 \text{ m}$, $Z' = Z + N(\varphi_4)e^2 \sin\varphi_4 = 4605603.8405 \text{ m}$, $tg\varphi_5 = Z'/r = 1.039765507323 \Rightarrow \varphi_5 = 51.2409418 \text{ gr}$.

Au cinquième chiffre après la virgule, φ_4 et φ_5 sont égaux, on arrête donc le calcul et $\varphi = 51.24094 \text{ gr}$.

Le calcul de l'altitude ellipsoïdique est obtenu par $he = \frac{r}{\cos\varphi} - N(\varphi) = 6389971.468 - 6389925.468 = 715.000 \text{ m} = he$.

Correction 34.

1. L'équation de Clairaut pour la géodésique (g) de l'ellipsoïde s'écrit: $r \sin Az = N \cos\varphi \sin Az = cte = a \sin Az_E$ où r est le rayon du parallèle de latitude géodésique φ et Az l'azimut de la géodésique (g) (voir Fig.2.2).

2. On note r' le rayon du parallèle passant par M' de la géodésique (g'). A l'équateur, les deux géodésiques (g) et (g') ont même azimut Az_E . L'équation de Clairaut pour la géodésique (g') s'écrit $r' \sin Az' = a \cos\varphi' \sin Az' = cte = a \sin Az_E$.

3. Des équations de Clairaut aux questions 1. et 2., et comme $Az = Az'$, on obtient:

$$N \cos\varphi \sin Az = a \sin Az_E = a \cos\varphi' \sin Az \Rightarrow N \cos\varphi = a \cos\varphi'$$

soit $\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$. Le membre à droite a été calculé dans l'un des exercices ci-dessus, ça correspond à $\cos\psi$ où ψ est la latitude paramétrique correspondante du

point M de latitude géodésique φ donc $\varphi' = \psi$.

4. De la (Fig. 5.5), on peut écrire au point M de la géodésique (g):

$$tgAz_g = \frac{r.d\lambda}{\rho.d\varphi} = \frac{N(\varphi)\cos\varphi d\lambda}{\rho(\varphi)d\varphi}$$

De même, sur la géodésique (g'), on a aussi:

$$tgAz_{g'} = \frac{r'.d\lambda'}{a.d\varphi'} = \frac{a\cos\varphi' d\lambda'}{a.d\varphi'} = \frac{\cos\varphi' d\lambda'}{d\varphi'}$$

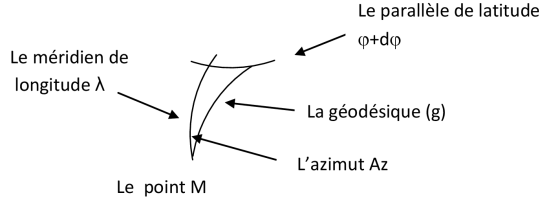


Figure 5.5 | Le triangle infinitésimal au point M

5. De la conservation des azimuts sur les 2 géodésiques (g) et (g'), on a donc:

$$tgAz_g = tgAz_{g'} \Rightarrow \frac{N\cos\varphi d\lambda}{\rho d\varphi} = \frac{\cos\varphi' d\lambda'}{d\varphi'} \Rightarrow d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi'}{d\varphi'} d\lambda'$$

De la question 3., on a $N\cos\varphi = a\cos\varphi'$, d'où :

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{a\cos\varphi'} \cdot \frac{\cos\varphi'}{d\varphi'} d\lambda' = \frac{\rho d\varphi}{ad\varphi'} \cdot d\lambda'$$

Le numérateur $\rho d\varphi = ds(\varphi)$ l'élément de longueur sur la méridienne de l'ellipse, dans la **Correction 28** ci-dessus, 3ème question, on a calculé l'élément ds en fonction de la latitude paramétrique $\psi = \varphi'$ et on a $ds(\varphi') = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\varphi'$ ce qui donne:

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{ad\varphi'} \cdot d\lambda' = \frac{a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\varphi'}{ad\varphi'} d\lambda' = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda'$$

6. En intégrant l'équation précédente, on obtient:

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda'$$

avec $\lambda > \lambda_E$ et λ' est comptée à partir de λ_E .

7. En écrivant $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi' + o(e^4)$ où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en e dont on néglige. L'intégrale précédente entre λ_E et $\lambda_E + \lambda$ devient:

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} d\lambda' - \frac{e^2}{2} \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} \cos^2 \varphi' d\lambda' = \lambda' - \frac{e^2}{2} \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} \cos^2 \varphi' d\lambda'$$

8. Comme (g') est une géodésique de la sphère, on démontre que:

$$\cos^2 \varphi' d\lambda' = \frac{\sin Az_E}{a} ds'$$

où ds' est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (g') (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point E' , on obtient la formule donnant λ comme suit:

$$\lambda = \lambda' + \lambda_E - \frac{e^2}{2} \int_0^{s'} \frac{\sin Az_E}{a} ds'$$

9. On suppose que la géodésique (g') coupe une première fois le plan de l'équateur en un point F' , la géodésique g' est un grand cercle de diamètre passant par l'origine du référentiel 3D et du point E , le point F est à l'opposé du point E , par suite la longitude de F est égale à π à partir de E . La distance de E à F suivant la géodésique (g') est la moitié du périmètre du cercle de rayon a , soit $s' = (2\pi a)/2 = \pi a$, on obtient alors:

$$\begin{aligned} \lambda'_F &= \pi \\ s' &= \pi a \\ \lambda_F &= \lambda_E + \pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_E}{2} \end{aligned}$$

10. La géodésique (g') partant de F' a pour azimuth $\pi - Az_E$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point E' , mais la géodésique (g) sur l'ellipsoïde coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à H dont la longitude est λ_H . Cette dernière est donnée par:

$$\lambda_H = \pi - \frac{e^2 \pi \sin(\pi - Az_E)}{2} + \lambda_F = \pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_E}{2} + \lambda_E + \pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_E}{2} = \lambda_E + 2\pi - e^2 \pi \sin Az_E$$

Les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution ne se coupent pas après un tour autour de l'ellipsoïde, numériquement l'écart est de $-0.015rd$.

Correction 35.

Un point M de la surface d'une sphère (S) de rayon R , a pour coordonnées (X, Y, Z) dans un repère orthonormé:

$$M = (X, Y, Z) = (R \cos \varphi \cdot \cos \lambda, R \cos \varphi \cdot \sin \lambda, R \sin \varphi)$$

1. On prend $\mathbf{n} = \mathbf{OM}/R$, c'est un vecteur unitaire normal au plan tangent à la sphère au point M , dirigé vers l'extérieur de la sphère, ses composantes sont :

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi \cdot \cos \lambda, \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \sin \varphi)^T$$

D'où le vecteur $\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|}$:

$$\mathbf{N} = \begin{cases} N_X = -\cos(s/R) = -\cos\omega \\ N_Y = -\sin Az_E \sin(s/R) = -\sin Az_E \sin\omega \\ N_Z = -\cos Az_E \sin(s/R) = -\cos Az_E \sin\omega \end{cases}$$

6. On vérifie facilement que $\mathbf{n}$ et $\mathbf{N}$ sont parallèles.

7. Comme le point M décrit un grand cercle d'azimut Az_E à l'équateur (voir **Fig. 5.6**) et en M le vecteur $\mathbf{N}$ orthogonal au cercle et que $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal au plan tangent à la sphère au point M est parallèle à $\mathbf{N}$, et qu'une définition d'une ligne géodésique: les vecteurs $\mathbf{N}$ et $\mathbf{n}$ soient parallèles. Donc les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

Correction 36.

Soit le tore $\mathbb{T}$ défini par les équations suivantes:

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} x = (a + R \cos \varphi) \cos \lambda \\ y = (a + R \cos \varphi) \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

1. Calculons la première forme fondamentale ds^2 :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \begin{vmatrix} -(a + R \cos \varphi) \sin \lambda \\ (a + R \cos \varphi) \cos \lambda \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = \left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \right\|^2 = R^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = 0, \quad G = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = \left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \right\|^2 = (a + R \cos \varphi)^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = E.d\varphi^2 + 2F.d\varphi d\lambda + G.d\lambda^2 = R^2 d\varphi^2 + (a + R \cos \varphi)^2 d\lambda^2$$

2. Avec les notations usuelles, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = E'_\varphi = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = E'_\lambda = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = F'_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = G'_\varphi = -2R \sin \varphi (a + R \cos \varphi), \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = G'_\lambda = 0$$

On rappelle la définition de la ligne géodésique d'une surface donnée (S):

Définition: Une courbe (Γ) est dite ligne géodésique de la surface (S) si et seulement si les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{N}$ sont colinéaires.

$\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface (S) et $\mathbf{N}$ le vecteur normal à la courbe (Γ) .

On calcule l'expression de N , on obtient :

$$N = R \frac{dT}{ds}, \quad R \text{ est le rayon de courbure de la courbe } (\Gamma)$$

or:

$$T = \frac{dM}{ds} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds}$$

d'où:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial M}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$$

La condition $\mathbf{n} // N$ peut être écrite:

$$N \wedge \mathbf{n} = 0$$

soit:

$$R \frac{dT}{ds} \wedge \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}}{H} \right) = 0 \quad (5.5)$$

Utilisant la formule du produit vectoriel:

$$A \wedge (B \wedge C) = (A.C)B - (A.B)C \quad (5.6)$$

on obtient:

$$\left(\frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \right) \frac{\partial M}{\partial u} - \left(\frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \right) \frac{\partial M}{\partial v} = 0$$

Or $\frac{\partial M}{\partial u}$ et $\frac{\partial M}{\partial v}$ forment une base du plan tangent en M, d'où les deux conditions:

$$\frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = 0 \quad (5.7)$$

Ce qui donne deux équations différentielles du second ordre:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 u}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 v}{ds^2} = 0 \quad (5.8)$$

et:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 v}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \quad (5.9)$$

ces 2 dernières équations peuvent être écrites :

$$\left(F'_u - \frac{E'_v}{2} \right) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 u}{ds^2} + G'_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{G'_v}{2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 v}{ds^2} = 0 \quad (5.10)$$

$$\left(F'_v - \frac{G'_u}{2} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 v}{ds^2} + E'_v \frac{dv}{ds} \frac{du}{ds} + \frac{E'_u}{2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \quad (5.11)$$

En effet, prenons l'exemple du coefficient $A = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$ dans l'équation (5.8). On différentie F par rapport à u , ce qui donne $F'_u = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} = A + \frac{E'_v}{2}$, on obtient alors $A = F'_u - \frac{E'_v}{2}$.

Prenons $u = \varphi$ et $v = \lambda$, et les valeurs des coefficients dans les équations (5.10) et (5.11) ci-dessus, on obtient les équations des géodésiques du tore :

$$-2R \sin \varphi (a + R \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + (a + R \cos \varphi)^2 \frac{d^2 \lambda}{ds^2} = 0$$

$$R \sin \varphi (a + R \cos \varphi) \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0$$

3. On différentie la quantité constante $(a + R \cos \varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} = C$, ce qui donne:

$$-2R \sin \varphi (a + R \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + (a + R \cos \varphi)^2 \frac{d^2 \lambda}{ds^2} = 0$$

On a vérifié que $(a + R \cos \varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} = C$. Au point $M_0(\varphi_0 = 0, \lambda = \lambda_0)$ et soit Az_e l'azimut de départ au point M_0 , mais $(d\lambda/ds)_{M_0} = \sin Az_e$, on obtient alors:

$$(a + R \cos \varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} = C = (a + R) \sin Az_e$$

On retrouve l'équation de Clairaut avec $C = (a + R) \sin Az_e$.

4. Comme $0 < Az_e < \frac{\pi}{2}$, alors $C > 0$, on remplace $d\lambda/ds$ par :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{(a + R \cos \varphi)^2}$$

ce qui donne la deuxième équation des géodésiques:

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = - \frac{C^2 \sin \varphi}{R(a + R \cos \varphi)^3}$$

5. On multiplie l'équation ci-dessus par $2 \frac{d\varphi}{ds}$, on obtient:

$$2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = - \frac{2C^2 \sin \varphi}{R(a + R \cos \varphi)^3} \frac{d\varphi}{ds} = - \frac{C^2}{R^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(a + R \cos \varphi)^2} \right)$$

On passe à l'intégration, on obtient:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = - \frac{C^2}{R^2} \frac{1}{(a + R \cos \varphi)^2} + l$$

où l est la constante d'intégration.

5.4. LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

Correction 37.

Les coordonnées tridimensionnelles du point A:

$$X = 5\,102\,603.85\,m$$

$$Y = 916\,806.87\,m$$

$$Z = 3\,703\,034.99\,m$$

Les paramètres de l'ellipsoïde de référence sont:

$$a = 6\,378\,137.00\,m$$

$$e^2 = 0.0066943800229$$

$$1. \text{ A partir de } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2} = 6\,356\,752.314\,m$$

$$2. \text{ La longitude est donnée par : } tg\lambda = Y/X = 916\,806.87/5\,102\,603.85 = 0.179674318632437 \Rightarrow \lambda = 11.31766\,gr.$$

5

Le calcul de φ se fait par itérations. On calcule $r = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5\,184\,312.9619\,m$. La première valeur de la latitude géodésique φ_1 est obtenue par $tg\varphi_1 = \frac{Z}{r} = \frac{3\,703\,034.99}{5\,184\,312.9619} = 0.719271539513 \Rightarrow \varphi_1 = 39.69598867\,gr$.

On calcule $N(\varphi_1)e^2\sin\varphi_1 = 24\,960.3217\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_1)e^2\sin\varphi_1 = 3\,727\,995.3117\,m$, $tg\varphi_2 = Z'/r = 0.724\,119\,792\,112 \Rightarrow \varphi_2 = 39.89983477\,gr$.

On calcule $N(\varphi_2)e^2\sin\varphi_2 = 25\,071.0753\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_2)e^2\sin\varphi_2 = 3\,728\,106.0653\,m$, $tg\varphi_3 = Z'/r = 0.724\,141\,304\,713 \Rightarrow \varphi_3 = 39.89983320\,gr$.

On calcule $N(\varphi_3)e^2\sin\varphi_3 = 25\,071.5651\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_3)e^2\sin\varphi_3 = 3\,728\,106.5551\,m$, $tg\varphi_4 = Z'/r = 0.724\,141\,399\,851 \Rightarrow \varphi_4 = 39.89983718\,gr$.

On calcule $N(\varphi_4)e^2\sin\varphi_4 = 25\,071.5672\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_4)e^2\sin\varphi_4 = 3\,728\,106.5572\,m$, $tg\varphi_5 = Z'/r = 0.724\,141\,400\,259 \Rightarrow \varphi_5 = 39.89983719\,gr$.

Au cinquième chiffre après la virgule, φ_4 et φ_5 sont égaux, on arrête donc le calcul et $\varphi = 39.89984\,gr$.

Le calcul de l'altitude ellipsoïdique est obtenu par $he = \frac{r}{\cos\varphi} - N(\varphi) = 6\,356\,406.8022 - 6\,355\,493.6218 = 913.180\,m = he$.

Correction 38.

On donne l'expression scalaire d'une fonction $V(x, y, z)$ par :

$$V(x, y, z) = \frac{ax^2 + y^2}{z^2} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

1. Les composantes du vecteur **grad** V dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ où $z \neq 0$ sont:

$$\mathbf{grad}V = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2ax}{z^2} + \omega^2 x \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2y}{z^2} + \omega^2 y \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2(ax^2 + y^2)}{z^3} \end{cases}$$

Correction 39.

Le point $A(\varphi, \lambda)$ sur un ellipsoïde de révolution associé à un référentiel géocentrique donné $\mathcal{R}$. On considère le repère orthonormé local en A $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée (i, j, k) de $\mathcal{R}$ où e_λ est tangent au parallèle passant par A et dirigé vers l'Est, e_φ tangent à la méridienne, dirigé vers le nord et e_n porté par la normale à l'ellipsoïde dirigé vers le zénith, voir (Fig. 5.8).

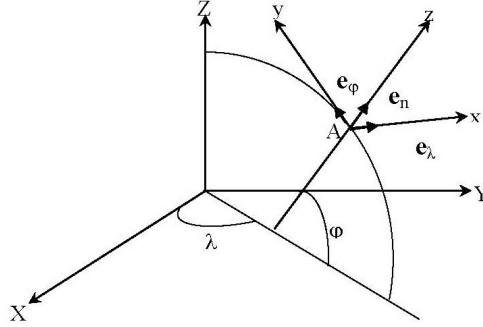


Figure 5.7 | Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$ et le repère local en A

1. Les composantes des vecteurs de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ dans la base (i, j, k) de $\mathcal{R}$ sont comme suit:

$$e_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix} ; e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi \end{pmatrix} ; e_n = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ est une base orthonormée.

2. A partir de la question 1., on a le système suivant:

$$\begin{aligned} e_\lambda &= -\sin\lambda i + \cos\lambda j \\ e_\varphi &= -\sin\varphi\cos\lambda i - \sin\varphi\sin\lambda j + \cos\varphi k \\ e_n &= \cos\varphi\cos\lambda i + \cos\varphi\sin\lambda j + \sin\varphi k \end{aligned}$$

On résoud facilement ce système où les inconnues sont les vecteurs i, j et k . On obtient alors:

$$\begin{aligned} i &= -\sin\lambda e_\lambda - \sin\varphi\cos\lambda e_\varphi + \cos\varphi\cos\lambda e_n \\ j &= \cos\lambda e_\lambda - \sin\varphi\sin\lambda e_\varphi + \cos\varphi\sin\lambda e_n \\ k &= \cos\varphi e_\varphi + \sin\varphi e_n \end{aligned}$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

avec P la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

La matrice P est une matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, dans ce cas la matrice P est dite orthogonale soit $P^{-1} = P^T$. Je laisse au lecteur de vérifier cette propriété dans notre cas. Si H est un vecteur dans la base de $\mathcal{R}$ et h dans le repère local avec la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$, on a alors la relation $h = P.H$ liant les composantes des vecteurs H et h .

3. A partir de 1., on obtient les différentielles de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$:

$$\begin{aligned} de_\lambda &= -\cos\lambda d\lambda i - \sin\lambda d\lambda j \\ de_\varphi &= -(\cos\varphi\cos\lambda d\varphi - \sin\varphi\sin\lambda d\lambda)i - (\cos\varphi\sin\lambda d\varphi + \sin\varphi\cos\lambda d\lambda)j - \sin\varphi d\varphi k \\ de_n &= -(\sin\varphi\cos\lambda d\varphi + \cos\varphi\sin\lambda d\lambda)i - (\sin\varphi\sin\lambda d\varphi - \cos\varphi\cos\lambda d\lambda)j + \cos\varphi d\varphi k \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, on obtient:

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\lambda d\lambda & -\sin\lambda d\lambda & 0 \\ -(\cos\varphi\cos\lambda d\varphi - \sin\varphi\sin\lambda d\lambda) & -(\cos\varphi\sin\lambda d\varphi + \sin\varphi\cos\lambda d\lambda) & -\sin\varphi d\varphi \\ -(\sin\varphi\cos\lambda d\varphi + \cos\varphi\sin\lambda d\lambda) & -(\sin\varphi\sin\lambda d\varphi - \cos\varphi\cos\lambda d\lambda) & \cos\varphi d\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

M la matrice 3×3 ci-dessus.

4. En adoptant une écriture matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = M \cdot P \cdot \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} -\cos\lambda d\lambda & -\sin\lambda d\lambda & 0 \\ -(\cos\varphi\cos\lambda d\varphi - \sin\varphi\sin\lambda d\lambda) & -(\cos\varphi\sin\lambda d\varphi + \sin\varphi\cos\lambda d\lambda) & -\sin\varphi d\varphi \\ -(\sin\varphi\cos\lambda d\varphi + \cos\varphi\sin\lambda d\lambda) & -(\sin\varphi\sin\lambda d\varphi - \cos\varphi\cos\lambda d\lambda) & \cos\varphi d\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

On arrive à:

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi d\lambda & -\cos\varphi d\lambda \\ -\sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ \cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

Correction 40.

On considère les notations du précédent problème. Soit un point M . On pose:

$$\Delta\mathbf{X} = (X_M - X_A, Y_M - Y_A, Z_M - Z_A)^T, \Delta\mathbf{x} = (x_M, y_M, z_M)^T$$

où $\Delta\mathbf{X}$ et $\Delta\mathbf{x}$ sont respectivement les composantes du vecteur AM dans les repère $\mathcal{R}$ et le repère local en A .

1. Utilisant les éléments de la question 2. du problème précédent, on a la relation:

$$\Delta\mathbf{x} = P.\Delta\mathbf{X} \implies \Delta\mathbf{X} = P^{-1}.\Delta\mathbf{x} \implies J = P^{-1} = P^T \implies J^T = P = J^{-1}$$

Donc J est une matrice orthogonale.

2. On suppose maintenant que $\mathcal{R}$ est le repère GPS et que le passage du repère $\mathcal{R}$ vers le repère terrestre est donné par le modèle dit à 7 paramètres :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} &= F(X) = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m).R. \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m). \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On note: $\delta\mathbf{X} = F(\Delta\mathbf{X}) - \Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X}' - \Delta\mathbf{X}$, représente les écarts des composantes du vecteur MA dans les repères GPS et terrestre. On a :

$$\delta\mathbf{X} = F(\Delta\mathbf{X}) - \Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X}' - \Delta\mathbf{X} = (1+m)R\Delta\mathbf{X} - \Delta\mathbf{X} = ((R-I) + mR)\Delta\mathbf{X}$$

or la matrice de rotation R s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} = I + \delta R, \quad \delta R = \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix}$$

D'où:

$$\delta\mathbf{X} = ((R-I) + m(I + \delta R)).\Delta\mathbf{X} = m\Delta\mathbf{X} + (R-I)\Delta\mathbf{X} + m\delta R\Delta\mathbf{X}$$

En gardant les termes du premier ordre, on obtient:

$$\delta\mathbf{X} \cong m\Delta\mathbf{X} + (R-I)\Delta\mathbf{X}$$

3. Soit $\omega = (rx, ry, rz)^T$, on pose $\Delta\mathbf{X} = (a, b, c)^T$. On détaille le terme $(R-I)\Delta\mathbf{X}$:

$$(R-I)\Delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} br_z - cr_y \\ cr_x - ar_z \\ ar_y - br_x \end{pmatrix}$$

Posons $w = \Delta X \wedge \omega$, on obtient que $w = (br_z - cr_y, cr_x - ar_z, ar_y - br_x)^T$, par suite $\delta \mathbf{X} \cong m\Delta \mathbf{X} + w$. On passe à la norme, sachant que le vecteur w est perpendiculaire au vecteur $\Delta \mathbf{X}$, d'où:

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{X}\|^2 &= m^2 \|\Delta \mathbf{X}\|^2 + \|w\|^2 = m^2 \|\Delta \mathbf{X}\|^2 + \|\omega\|^2 \cdot \|\Delta \mathbf{X}\|^2 \cdot \sin^2 \theta = (m^2 + \|\omega\|^2 \sin^2 \theta) \|\Delta \mathbf{X}\|^2 \\ \implies \|\delta \mathbf{X}\| &= (m^2 + \|\omega\|^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \|\Delta \mathbf{X}\| \end{aligned}$$

où θ est l'angle entre les vecteurs ω et $\Delta \mathbf{X}$.

4. Comme $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, on déduit :

$$|m| \cdot \|\Delta \mathbf{X}\| \leq \|\delta \mathbf{x}\| \leq (m^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} \|\Delta \mathbf{X}\|$$

5. En utilisant la relation liant $\Delta \mathbf{X}$ et $\Delta \mathbf{x}$ soit $\Delta \mathbf{X} = J \cdot \Delta \mathbf{x}$; la relation $\delta \mathbf{X} = m\Delta \mathbf{X} + (R - I)\Delta \mathbf{X}$ devient:

$$J \cdot \delta \mathbf{x} = mJ\Delta \mathbf{x} + (R - I)J\Delta \mathbf{x} \implies \delta \mathbf{x} = m\Delta \mathbf{x} + J^T(R - I)J\Delta \mathbf{x}$$

car $J^{-1} = J^T$.

Correction 41.

On définit dans $\mathbb{R}^3$ un point M par ses coordonnées ellipsoïdiques de Jacobi (ϕ, λ, u) comme suit:

$$M \begin{cases} x = \sqrt{u^2 + \epsilon^2} \cdot \cos \phi \cos \lambda \\ y = \sqrt{u^2 + \epsilon^2} \cdot \cos \phi \sin \lambda \\ z = u \cdot \sin \phi \end{cases}$$

avec: $\epsilon^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in]0, +\infty[$, a, b deux constantes réelles telles que $a > b > 0$.

1. Éliminant ϕ et λ , on obtient l'équation:

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2 + \epsilon^2} + \frac{z^2}{u^2} = 1$$

Fixant le paramètre u , c'est l'équation d'un ellipsoïde de révolution avec $a' = \sqrt{u^2 + \epsilon^2}$ le demi-grand axe et $b' = u$ le demi-petit axe.

2. On calcule les différentielles dx, dy et dz en fonction de $d\phi, d\lambda$ et du . On obtient:

$$\begin{aligned} dx &= -\sqrt{u^2 + \epsilon^2} \sin \phi \cos \lambda \cdot d\phi - \sqrt{u^2 + \epsilon^2} \cos \phi \sin \lambda d\lambda + \frac{u}{\sqrt{u^2 + \epsilon^2}} \cos \phi \cos \lambda du \\ dy &= -\sqrt{u^2 + \epsilon^2} \sin \phi \sin \lambda \cdot d\phi + \sqrt{u^2 + \epsilon^2} \cos \phi \cos \lambda d\lambda + \frac{u}{\sqrt{u^2 + \epsilon^2}} \cos \phi \sin \lambda du \\ dz &= u \cos \phi d\phi + \sin \phi du \end{aligned}$$

On calcule maintenant dx^2, dy^2 et dz^2 :

$$\begin{aligned} dx^2 &= (u^2 + \epsilon^2) [\sin^2 \phi \cos^2 \lambda . d\phi^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \lambda d\lambda^2] + \frac{u^2}{u^2 + \epsilon^2} \cos^2 \phi \cos^2 \lambda du^2 + \\ &+ 2((u^2 + \epsilon^2) \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda d\phi d\lambda - u \cos \phi \sin \phi \cos^2 \lambda d\phi du - u \cos^2 \phi \cos \lambda \sin \lambda d\lambda du) \\ dy^2 &= (u^2 + \epsilon^2) [\sin^2 \phi \sin^2 \lambda . d\phi^2 + \cos^2 \phi \cos^2 \lambda d\lambda^2] + \frac{u^2}{u^2 + \epsilon^2} \cos^2 \phi \sin^2 \lambda du^2 + \\ &+ 2(-(u^2 + \epsilon^2) \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda d\phi d\lambda - u \cos \phi \sin \phi \sin^2 \lambda d\phi du + u \cos^2 \phi \cos \lambda \sin \lambda d\lambda du) \\ dz^2 &= u^2 \cos^2 \phi d\phi^2 + \sin^2 \phi du^2 + 2u \cos \phi \sin \phi d\phi du \end{aligned}$$

On écrit maintenant $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, on obtient:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (u^2 + \epsilon^2)(\sin^2 \phi \cos^2 \lambda + \sin^2 \phi \sin^2 \lambda) . d\phi^2 + u^2 \cos^2 \phi d\phi^2 + \\ &+ (u^2 + \epsilon^2)(\cos^2 \phi \sin^2 \lambda + \cos^2 \phi \cos^2 \lambda) . d\lambda^2 + \\ &+ \frac{u^2}{u^2 + \epsilon^2} (\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi \sin^2 \lambda) . du^2 + \sin^2 \phi du^2 \Rightarrow \\ ds^2 &= (u^2 + \epsilon^2) \sin^2 \phi d\phi^2 + u^2 \cos^2 \phi d\phi^2 + (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi d\lambda^2 + \\ &+ \frac{u^2 \cos^2 \phi}{u^2 + \epsilon^2} . du^2 + \sin^2 \phi . du^2 \Rightarrow \\ ds^2 &= (u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) . d\phi^2 + (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi . d\lambda^2 + \frac{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi}{u^2 + \epsilon^2} . du^2 \end{aligned}$$

Il est facile d'exprimer ds^2 sous la forme de:

$$ds^2 = (d\phi, d\lambda, du) . G . \begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ du \end{pmatrix}$$

avec G donnée par :

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi}{u^2 + \epsilon^2} \end{pmatrix}$$

G est une matrice diagonale, définie positive avec $\phi \in]-\pi/2, \pi/2[$.

3. D'après l'énoncé, on a les données suivantes:

- $g = \text{Det}(G) = (u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi)^2 \cos^2 \phi \Rightarrow \sqrt{g} = (u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi > 0$,
- $g_{11} = u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi$,
- $g_{22} = (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi$,
- $g_{33} = \frac{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi}{u^2 + \epsilon^2}$.

Alors l'expression du laplacien d'une fonction scalaire V en coordonnées de Jacobi est exprimée par:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{1}{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi}{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi}{(u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi}{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi} \cdot (u^2 + \epsilon^2) \frac{\partial V}{\partial u} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \frac{1}{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi}$, par suite l'expression de ΔV devient:

$$\Delta V = \alpha \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi}{(u^2 + \epsilon^2) \cos \phi} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 + \epsilon^2) \cos \phi \frac{\partial V}{\partial u} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta V = \alpha \cdot \left\{ -\sin \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} + \cos \phi \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi}{(u^2 + \epsilon^2) \cos \phi} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + 2u \cos \phi \frac{\partial V}{\partial u} + (u^2 + \epsilon^2) \cos \phi \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} \right\}$$

4. Calculer ΔV sachant que V est donné par:

$$V(\phi, u) = \frac{GM}{\epsilon} \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} + \frac{1}{3} a^2 \omega^2 \frac{q}{q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi$$

$V = V(\phi, u)$ ne dépend pas de λ , donc $\partial^2 V / \partial \lambda^2 = 0$. On va calculer dq/du et $d^2 q/du^2$ et $\partial V / \partial u$, $\partial^2 V / \partial u^2$, $\partial V / \partial \phi$ et $\partial^2 V / \partial \phi^2$. On rappelle que $(\operatorname{Arctg} x)'_x = 1/(1+x^2)$. D'où :

$$q = q(u) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{\epsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} - 3 \frac{u}{\epsilon} \right] \Rightarrow \frac{dq}{du} = \frac{1}{2} \left[\frac{6u}{\epsilon^2} \cdot \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} + \left(1 + 3 \frac{u^2}{\epsilon^2} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\epsilon^2}{u^2}} \cdot \frac{-\epsilon}{u^2} - \frac{3}{\epsilon} \right]$$

$$\frac{dq}{du} = \frac{1}{2} \left[\frac{6u}{\epsilon^2} \cdot \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} - \left(1 + 3 \frac{u^2}{\epsilon^2} \right) \cdot \frac{\epsilon}{u^2 + \epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} \right] = \frac{1}{2\epsilon} \left[\frac{6u}{\epsilon} \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} - \frac{3u^2 + \epsilon^2}{u^2 + \epsilon^2} - 3 \right]$$

$$\frac{d^2 q}{du^2} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{3}{\epsilon} \operatorname{Arctg} \frac{\epsilon}{u} - \frac{3u^3 + 5u\epsilon^2}{(u^2 + \epsilon^2)^2} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \omega^2 \left(a^2 \frac{q}{q_0} - (u^2 + \epsilon^2) \right) \cdot \cos \phi \sin \phi, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \omega^2 \left(a^2 \frac{q}{q_0} - (u^2 + \epsilon^2) \right) \cdot \cos 2\phi$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{GM}{u^2 + \epsilon^2} + \frac{1}{3} \frac{a^2 \omega^2}{q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) \frac{dq}{du} + u \omega^2 \cos^2 \phi \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 2u \cdot \frac{GM}{(u^2 + \epsilon^2)^2} + \frac{1}{3} \frac{a^2 \omega^2}{q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) \frac{d^2 q}{du^2} + \omega^2 \cos^2 \phi$$

Finalement, on obtient ΔV comme suit:

$$\Delta V = \frac{1}{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} \left\{ -\omega^2 \left(\frac{a^2 q}{q_0} - (u^2 + \epsilon^2) \right) \cos \phi \sin^2 \phi + \omega^2 \left(\frac{a^2}{q_0} - (u^2 + \epsilon^2) \right) \cos \phi \cos 2\phi + \right.$$

$$2u \cos \phi \left[-\frac{GM}{u^3 + \epsilon^2} + \frac{a^2 \omega^2}{3q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) \frac{dq}{du} + u \omega^2 \cos^2 \phi \right] +$$

$$\left. (u^2 + \epsilon^2) \cos \phi \left[\frac{2uGM}{(u^2 + \epsilon^2)^2} + \frac{a^2 \omega^2}{3q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) \frac{d^2 q}{du^2} + \omega^2 \cos^2 \phi \right] \right\}$$

Après des premières simplifications, on obtient:

$$\Delta V = \frac{\omega^2}{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi)} \left\{ -\left(\frac{a^2 q}{q_0} - (u^2 + \epsilon^2) \right) \sin^2 \phi + \left(\frac{a^2}{q_0} - (u^2 + \epsilon^2) \right) (1 - 2 \sin^2 \phi) + \right.$$

$$\frac{2u a^2}{3q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) \frac{dq}{du} + 2u^2 \omega^2 \cos^2 \phi +$$

$$\left. \frac{a^2}{3q_0} (u^2 + \epsilon^2) \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) \frac{d^2 q}{du^2} + (u^2 + \epsilon^2) \cos^2 \phi \right\}$$

On continue:

$$\Delta V = \frac{\omega^2}{(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi)} \left\{ 2(u^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi) + \frac{a^2}{3q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) \left[(u^2 + \epsilon^2) \frac{d^2 q}{du^2} + 2u \frac{dq}{du} - 6q \right] \right\}$$

Enfin, en calculant les termes entre les crochets $[\]$, on trouve 0, d'où la valeur de ΔV :

$$\Delta V = 2\omega^2$$

Correction 42.

Avec les notations usuelles, un potentiel est donné avec les constantes (GM, a, J_2, ω) de GRS80 par :

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\cos \theta) \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta$$

où (r, θ, λ) sont les coordonnées sphériques du point de calcul et :

- $a = 6378\,137.00\,m, b = 6356\,752.31\,m$;
- $GM = 3986\,005 \times 10^8\,m^3 s^{-2}$;
- $\omega = 7292\,115 \times 10^{-11}\,rad.s^{-1}$;
- $J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$;
- $f = (a - b)/a = 0.0033\,5281\,1330$;
- $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$.

1a. Calcul du potentiel W_{PN} au pôle Nord: $\theta = 0\,rad, r = b$, on obtient:

$$W_{PN} = \frac{GM}{b} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} J_2 \right) = \frac{3986\,005 \times 10^8}{6356\,752.31} \left(1 - \left(\frac{6378\,137.00}{6356\,752.31} \right)^2 \cdot 108\,263 \times 10^{-8} \right) \Rightarrow$$

$$W_{PN} = 62\,636\,710.6002\,m^2/s^2$$

1b. Calcul du potentiel W_{Eq} à l'équateur: $\theta = \pi/2\,rad, r = a$, on obtient:

$$W_{Eq} = \frac{GM}{a} \left(1 + \frac{J_2}{2} \right) + \frac{\omega^2 a^2}{2} \Rightarrow$$

$$W_{Eq} = \frac{3986\,005 \times 10^8}{6378\,137.00} \left(1 - 0.5 \times 108\,263 \times 10^{-8} \right) + 0.5 \times (7292\,115 \times 10^{-11} \times 6378\,137.00)^2 \Rightarrow$$

$$W_{Eq} = 62\,569\,146.4044\,m^2/s^2$$

1c. Calcul du potentiel W_A au point A avec : $\theta_A = 34^\circ$, r est donné par la formule $r = a(1 - f \cos \theta_A)$, $f = (a - b)/a$ l'aplatissement. On obtient:

$$W_A = \frac{GM}{r} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{2r^2} (3\cos^2 \theta_A - 1) \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta_A \Rightarrow$$

$$W_A = \frac{GM}{a(1 - f \cos \theta_A)} \left(1 - J_2 \frac{(3\cos^2 \theta_A - 1)}{2(1 - f \cos \theta_A)^2} \right) + \frac{\omega^2}{2} a^2 (1 - f \cos \theta_A)^2 \sin^2 \theta_A$$

$$3\cos^2 \theta_A - 1 = 1.061909890124, \quad 1 - f \cos \theta_A = 0.997220393438$$

$$r = a(1 - f \cos \theta_A) = 6360\,408.2885\,m; W_A = 62\,632\,786.4827 + 33\,633.3645 = 62\,666\,419.8472\,m^2/s^2$$

2. Les variations de W entre les 3 points sont comme suit:

$$W_{PN} - W_A = 62636710.6002 - 62666419.8472 = -29709.2470 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$W_{PN} - W_{Eq} = 62636710.6002 - 62569146.4044 = 67564.1958 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$W_A - W_{Eq} = 62666419.8472 - 62569146.4044 = 97273.4428 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

3. A partir des formules:

$$X = r \sin \theta \cos \lambda, \quad Y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad Z = r \cos \theta$$

on obtient :

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad r \sin \theta = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos \theta = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Par suite, l'expression du potentiel W en fonction des coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) est :

$$W = \frac{GM}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \left(1 - \frac{a^2 J_2}{2(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} (2Z^2 - X^2 - Y^2) \right) + \frac{\omega^2}{2} (X^2 + Y^2)$$

5

Correction 43.

On considère deux points A et B de coordonnées géodésiques dans le système géodésique WGS84 du GPS:

$$A : (\varphi'_A = 36.6306 \text{ gr}; \lambda'_A = 10.7896 \text{ gr}; h'_A = 137.50 \text{ m})$$

$$B : (\varphi'_B = 36.6317 \text{ gr}; \lambda'_B = 10.7915 \text{ gr}; h'_B = 171.33 \text{ m})$$

(5.12)

Les paramètres de l'ellipsoïde WGS84 sont : $a = 6378137.00 \text{ m}$, $e^2 = 0.00669438$.

1. Les coordonnées tridimensionnelles $(X', Y', Z')_A$, $(X', Y', Z')_B$ des points A et B dans le système géodésique WGS84 sont obtenues en utilisant les formules suivantes:

$$\begin{cases} X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{cases}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

D'où:

$$A = \begin{cases} X'_A = 5279802.19 \text{ m} \\ Y'_A = 903502.27 \text{ m} \\ Z'_A = 3451013.74 \text{ m} \end{cases}, \quad B = \begin{cases} X'_B = 5279744.31 \text{ m} \\ Y'_B = 903654.56 \text{ m} \\ Z'_B = 3451124.27 \text{ m} \end{cases}$$

2. Calculons les coefficients suivants:

$$\Delta X' = X'_B - X'_A = -57.88 \text{ m}$$

$$\Delta Y' = Y'_B - Y'_A = +152.29 \text{ m}$$

$$\Delta Z' = Z'_B - Z'_A = +110.53 \text{ m}$$

L'azimut géodésique de la direction AB est donné par la formule:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(Az'_g) &= \frac{-\Delta X' \sin \lambda'_A + \Delta Y' \cos \lambda'_A}{\Delta Z' \cos \varphi'_A - \sin \varphi'_A (\Delta X' \cos \lambda'_A + \Delta Y' \sin \lambda'_A)} = \frac{159.8707736}{109.7992737} = 1.45602761 \\ \Rightarrow Az'_g &= 61.68746 \text{ gr} \end{aligned}$$

3. Le passage du système géodésique GPS au système géodésique terrestre est donné par la formule:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{X}'$$

avec $\mathbf{T} = (+263.3 \text{ m}, -14.4 \text{ m}, -434.1 \text{ m})^T$. Les coordonnées géodésiques tridimensionnelles $(X, Y, Z)_A$ et $(X, Y, Z)_B$ de A et B dans le système géodésique terrestre sont :

$$\begin{aligned} A &= \begin{cases} X_A = +263.3 + 5279802.19 = 5280065.49 \text{ m} \\ Y_A = -14.4 + 903502.27 = 903487.87 \text{ m} \\ Z_A = -434.1 + 3451013.74 = 3450579.64 \text{ m} \end{cases}, \\ B &= \begin{cases} X_B = +263.3 + 5279744.31 = 5280007.61 \text{ m} \\ Y_B = -14.4 + 903654.56 = 903640.16 \text{ m} \\ Z_B = -434.1 + 3451124.27 = 3450690.17 \text{ m} \end{cases} \end{aligned}$$

4. On commence par calculer la longitude λ du point A :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{903487.87}{5280065.49} = 0.171113004509 \Rightarrow \lambda = 10.78890 \text{ gr}$$

Calcul de la latitude géodésique φ du point A : Calculons $r = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 5356807.063 \text{ m}$. On opère par itérations:

$$\begin{aligned} -\varphi_0: \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{Z}{r} = \frac{3450579.64}{5356807.063} = 0.644148575713 \Rightarrow \varphi_0 = 36.43061337 \text{ gr}, \\ -\varphi_1: \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{Z + N(\varphi_0)e^2 \sin \varphi_0}{r} \Rightarrow \varphi_1 = 36.62779 \text{ gr}, \\ -\varphi_2: \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{Z + N(\varphi_1)e^2 \sin \varphi_1}{r} \Rightarrow \varphi_2 = 36.62874 \text{ gr}, \\ -\varphi_3: \operatorname{tg} \varphi_3 &= \frac{Z + N(\varphi_2)e^2 \sin \varphi_2}{r} \Rightarrow \varphi_3 = 36.62874 \text{ gr} \Rightarrow \varphi = 36.62874 \text{ gr}. \end{aligned}$$

5a. On obtient $\Delta X = X_B - X_A = -57.88 \text{ m}$; $\Delta Y = Y_B - Y_A = +152.29 \text{ m}$; $\Delta Z = Z_B - Z_A = +110.53 \text{ m}$.

5b. On obtient $\operatorname{tg} Az_g$:

$$\operatorname{tg} Az_g = \frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{\Delta Z \cos \varphi - \sin \varphi (\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda)} = \frac{159.8704288}{109.8012187} \Rightarrow Az_g = 61.68687 \text{ gr}$$

6. D'où $Az'_g - Az_g = 61.68746 - 61.68687 = 0.00059 \text{ gr} = 5.9 \text{ dmgr}$. A 5.8 dmgr près, on a obtenu $Az'_g \approx Az_g$, c'est-à-dire que l'effet d'une translation tridimensionnelle entre deux systèmes géodésiques n'a pas d'effets sur les azimuts géodésiques ou encore les azimuts géodésiques sont conservés.

5.5. RÉDUCTIONS DES DISTANCES

Correction 44.

On a mesuré une distance suivant la pente $D = 20130.858 \text{ m}$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07 \text{ m}$, $H_B = 507.75 \text{ m}$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378 \text{ km}$.

1. Calcul de la distance suivant l'ellipsoïde :

1a. En utilisant les différentes corrections:

- Correction de courbure C_1 : $C_1 = D_P - D = -\frac{D^3}{24 \times 16R^2} = -\frac{20.130858^3}{24 \times 16 \times 6378^2} \text{ km} = -0.52 \text{ mm}$. D'où $D_P = D + C_1 = 20130.858 - 0.00052 = 20130.85748 \text{ m}$

- Réduction à l'horizontale à l'altitude moyenne H_m : $C_2 = D_H - D_P$, $H_m = (H_A + H_B)/2 = 371.41 \text{ m}$, $\Delta H = H_B - H_A = 272.68 \text{ m}$ et $C_2 = D_H - D_P = -\frac{\Delta H^2}{2D_P} = -1.84678 \text{ m} \Rightarrow D_H = 20129.01070 \text{ m}$.

- Réduction à la distance corde D_0 ou au niveau zero:

$C_3 = D_0 - D_H = -D_H \frac{H_m}{R + H_m} = -20129.01070 \times \frac{371.41}{6378000.00 + 371.41} = -1.17210 \text{ m}$,
d'où $D_0 = D_H + C_3 = 20129.01070 - 1.17210 = 20127.83860 \text{ m}$.

- Calcul de la distance courbe D_e sur l'ellipsoïde: $D_e = D_0 + C_4$ avec $C_4 = +\frac{D_0^3}{24R^2} = +0.00835 \text{ m}$. On obtient alors $D_e = D_0 + C_4 = 20127.847 \text{ m}$.

1b. En utilisant la formule rigoureuse: on applique la formule ci-dessous:

$$D_0 = D_P \sqrt{\frac{1 - \frac{\Delta H^2}{D_P^2}}{\left(1 + \frac{H_A}{R}\right)\left(1 + \frac{H_B}{R}\right)}}$$

Numériquement, on obtient $D_0 = 20127.83852 \text{ m}$. La distance courbe D_e vaut: $D_e = D_0 + C_4 = 20127.847 \text{ m}$.

2. En prenant la valeur de la formule rigoureuse, la distance réduite D_r au plan de la représentation plane utilisée est : $D_r = m.D_e = 0.999850371 \times 20127.847 = 20124.835 \text{ m}$.

Correction 45.

Entre 2 points A ($H_A = 128.26 \text{ m}$) et B ($H_B = 231.84 \text{ m}$), la distance D_P suivant la pente est égale à 15498.823 m . Soit D_0 la distance corde au niveau de la surface de référence.

1. On a $H_A = 128.26 \text{ m}$, $H_B = 231.84 \text{ m} \Rightarrow \Delta H = H_B - H_A = 103.580 \text{ m}$, la distance mesurée suivant la pente $D = 15498.823 \text{ m}$. La distance rectiligne suivant la pente est:

$$D_P = D - \frac{D^3}{24 \times 16R^2} = 15498.823 - 0.00024 = 15498.82276 \text{ m}$$

Utilisant la formule rigoureuse ci-dessus, on obtient numériquement: $D_0 = 15498.03913 \text{ m}$.

2. On va calculer D_0 par les corrections:

- Réduction à l'horizontale à l'altitude moyenne H_m : $C_2 = D_H - D_P$, $H_m = (H_A + H_B)/2 = 180.05 \text{ m}$, $\Delta H = H_B - H_A = 103.58 \text{ m}$ et $C_2 = D_H - D_P = -\frac{\Delta H^2}{2D_P} = -0.34612 \text{ m} \Rightarrow D_H = 15497.69301 \text{ m}$.

- Réduction à la distance corde D_0 ou au niveau zero:
 $C_3 = D_0 - D_H = -D_H \frac{H_m}{R + H_m} = -15497.69301 \times \frac{180.05}{6378180.05} = -0.43749 \text{ m}$, d'où
 $D_0 = D_H + C_3 = 15497.69301 - 0.43749 = 15497.25552 \text{ m}$.

3. La moyenne des deux méthodes donne $D_{0m} = 15497.64733 \text{ m}$. La distance D_e réduite à la surface de référence est obtenue par: $D_e = D_{0m} + \frac{D_{0m}^2}{24R^2} = 15497.64733 \text{ m}$.

4. La distance D_r réduite au plan de la représentation vaut: $D_r = 0.999648744 \times 15497.64733 = 15492.204 \text{ m}$.

Correction 46.

On a mesuré une distance suivant la pente entre les points A ($H_A = 1319.79 \text{ m}$) et B ($H_B = 1025.34 \text{ m}$) avec $D_P = 16483.873 \text{ m}$.

1. $\Delta H = H_B - H_A = -294.45 \text{ m}$, on obtient par la formule rigoureuse $D_0 = 16478.206 \text{ m}$. La correction C_4 est négligeable, la distance D_e distance réduite à l'ellipsoïde de référence est par suite: $D_e = D_0 = 16478.206 \text{ m}$.

2. La distance D_r réduite à la représentation plane Lambert est: $D_r = \left(1 - \frac{14}{100000}\right) \cdot D_e = 0.99986 \times 16478.206 = 16475.899 \text{ m}$.

3. En référence de la (Fig. 5.9), on a les éléments suivants:

- l'azimut géodésique Az_g est l'angle extérieur BAS ,
- la convergence des méridiens est l'angle $\gamma = Y'AS$, elle vaut $(\lambda_A - \lambda_0) \sin \varphi_0$ avec λ_0 la longitude du méridien origine de la représentation Lambert Tunisie Sud soit 11 gr à l'Est de Greenwich et $\varphi_0 = 37 \text{ gr}$ la latitude géodésique du parallèle origine de la représentation Lambert Tunisie Sud.
- la ligne de la visée AB est représentée par l'arc AB de concavité dirigée vers le parallèle origine $\varphi_0 = 37 \text{ gr}$. La correction à la corde $d\nu$ au point A est l'angle entre la tangente à l'arc AB cité ci-dessus et la droite AB .
- le gisement G de la direction AB est l'angle $Y'AB$ dans le sens indirect.

La formule algébrique du gisement G est donnée par l'expression:

$$G = Az_g - \gamma + d\nu = Az_g - (\lambda_A - \lambda_0) \sin \varphi_0 + d\nu$$

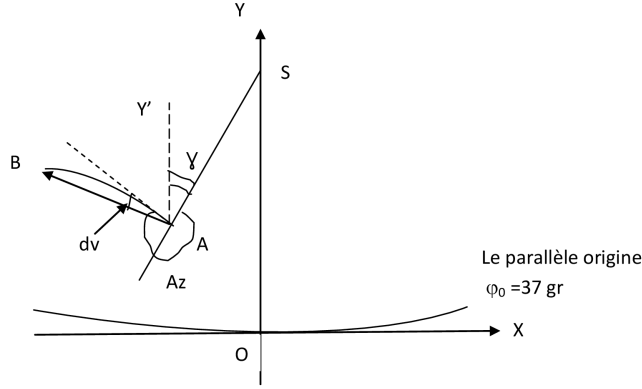


Figure 5.8 | Le Repère Lambert Tunisie Sud

4. Numériquement, on obtient $G = 297.56225 - (9.3474734 - 11.0000)\sin 37 - 0.00137 = 298.46815 \text{ gr}$.

5. Les coordonnées planimétriques (X_B, Y_B) de B sont données par les formules:

$$\begin{cases} X_B = X_A + AB \sin G \\ Y_B = Y_A + AB \cos G \end{cases} \quad \text{avec } AB = D_r = 16475.899 \text{ m}$$

On obtient donc:

$$X_B = 363044.79 - 16471.13 = 346573.66 \text{ m}, \quad Y_B = 407020.09 - 396.41 = 406623.68 \text{ m}$$

6. Les formules des coordonnées Lambert Tunisie Sud sont :

$$\begin{cases} X = 500000.00 \text{ m} + kR \sin \Omega = X_0 + kR \sin \Omega \\ Y = 300000.00 \text{ m} + k(R_0 - R \cos \Omega) = Y_0 + k(R_0 - R \cos \Omega), \quad \text{avec :} \\ \Omega = \Omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0, \quad R = R(\varphi) = R_0 \exp(-(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \sin \varphi_0), \quad R_0 = N_0 \cot g \varphi_0, \\ N_0 = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{-1/2} \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi) = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}, \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\varphi_0) \\ a = 6378249.20 \text{ m}, \quad e^2 = 0.0068034877, \quad k = 0.999625769. \end{cases}$$

Posons:

$$x' = k.R.\sin \Omega, \quad y' = k.(R_0 - R \cos \Omega) \Rightarrow x' = X - X_0, \quad y' = Y - Y_0$$

Numériquement:

$$x' = X_B - X_0 = -153426.34 \text{ m}, \quad y' = Y_B - Y_0 = +106623.68 \text{ m}$$

Calcul de λ_B : Des formules ci-dessus, on obtient $kR \sin \Omega = x'$, $kR \cos \Omega = kR_0 - y'$, par suite:

$$\text{tg} \Omega = \frac{x'}{kR_0 - y'} \Rightarrow \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\sin \varphi_0} \text{Arctg} \left(\frac{x'}{kR_0 - y'} \right), \quad R_0 = N_0 \cot g \varphi_0 = 9719928.094 \text{ m}$$

Par suite, utilisant les valeurs numériques, on obtient $\lambda = 9.14883802 \text{ gr} \Rightarrow \Omega = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 = -1.01633017 \text{ gr}$.

Calcul de $\mathcal{L}(\varphi_B) = \mathcal{L}$: De $x' = kR \sin \Omega \Rightarrow \frac{x'}{kR_0 \sin \Omega} = \exp(-(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \sin \varphi_0)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \frac{1}{\sin \varphi_0} \text{Log} \left(\frac{x'}{kR_0 \sin \Omega} \right) \Rightarrow \text{valeur de } \mathcal{L} \\ \mathcal{L}_0 &= \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi_0}{1 - e \sin \varphi_0} = 0.616981413555 - 0.003737826502 \Rightarrow \\ &\mathcal{L}_0 = 0.613243587053 \Rightarrow \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \frac{1}{\sin \varphi_0} \text{Log} \left(\frac{x'}{kR_0 \sin \Omega} \right) = 0.613243587053 + 0.019866068407 = 0.633109655460\end{aligned}$$

Calcul de φ_B : On utilise la formule liant $\mathcal{L}$ à φ_B ; soit:

5

$$\text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_B}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi_B}{1 - e \sin \varphi_B} = \mathcal{L}$$

Pour faciliter les notations, on ignore l'indice B . Le Calcul de φ se fait par itérations comme suit:

- calcul 1: $\text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) = \mathcal{L} = 0.633109655460 \Rightarrow \varphi_1 = 2 \text{Arctg}(e^{\mathcal{L}}) - \pi/2 = 37.85435607 \text{ gr}$
- calcul 2: $\text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) = \mathcal{L}_1 = 0.633109655460 + \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi_1}{1 - e \sin \varphi_1} = \mathcal{L} + 0.003813959838 =$
 $\mathcal{L}_1 = 0.636923615298 \Rightarrow \varphi_2 = 2 \text{Arctg}(e^{\mathcal{L}_1}) - \pi/2 = 38.05527138 \text{ gr}$
- calcul 3: $\text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_3}{2} \right) = \mathcal{L}_2 = 0.633109655460 + \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi_2}{1 - e \sin \varphi_2} = \mathcal{L} + 0.003831765332 =$
 $\mathcal{L}_2 = 0.636941420792 \Rightarrow \varphi_3 = 2 \text{Arctg}(e^{\mathcal{L}_2}) - \pi/2 = 38.05620835 \text{ gr}$
- calcul 4: $\text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_4}{2} \right) = \mathcal{L}_3 = 0.633109655460 + \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi_3}{1 - e \sin \varphi_3} = \mathcal{L} + 0.003831848280 =$
 $\mathcal{L}_3 = 0.636941503740 \Rightarrow \varphi_4 = 2 \text{Arctg}(e^{\mathcal{L}_3}) - \pi/2 = 38.05621271 \text{ gr}$
- calcul 5: $\text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_5}{2} \right) = \mathcal{L}_4 = 0.633109655460 + \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi_4}{1 - e \sin \varphi_4} = \mathcal{L} + 0.003831848666 =$
 $\mathcal{L}_4 = 0.636941504126 \Rightarrow \varphi_5 = 2 \text{Arctg}(e^{\mathcal{L}_4}) - \pi/2 = 38.05621273 \text{ gr}$. Les angles φ_5 et φ_4 ont les mêmes valeurs à 7 chiffres après la virgule, la longitude λ_A du point A est donnée à 7 chiffres après la virgule, donc on peut arrêter les itérations en prenant $\varphi_B = \varphi_4 = \varphi_5 = 38.0562127 \text{ gr}$.

5.6. LES REPRÉSENTATIONS PLANES

5.6.1. LES REPRÉSENTATIONS PLANES

Correction 47.

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon R . Au point $P(\varphi, \lambda)$ de $\mathbb{S}^2$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = R \cdot \cos \lambda \\ Y = R \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

1. Calculons les coordonnées polaires $(\mathcal{R}, \Omega)$ du point P :

$$\mathcal{R}^2 = X^2 + Y^2 = R^2(\cos^2 \lambda + \sin^2 \varphi) \implies \mathcal{R} = f(\varphi, \lambda)$$

$\mathcal{R}$ dépend des 2 paramètres φ, λ , donc la représentation ne peut être une représentation conique, elle est cylindrique car $X = X(\varphi, \lambda)$ et $Y = Y(\varphi, \lambda)$.

2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, donner l'expression de $(dS)^2$ en fonction de $\varphi, \lambda, d\varphi, d\lambda$ et R . L'expression dS^2 est donnée par:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = R^2(\sin^2 \lambda d\lambda^2 + \cos^2 \varphi d\varphi^2)$$

3. Soit m le module linéaire, m^2 est donné par:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2}$$

Pour la sphère, les coordonnées de P sont:

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda, y = R \cos \varphi \sin \lambda, z = R \sin \varphi \implies ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

Par suite, on obtient:

$$m^2 = \frac{\cos^2 \varphi d\varphi^2 + \sin^2 \lambda d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

4. On obtient:

$$\lambda = cte, \quad m_1^2 = \frac{\cos^2 \varphi d\varphi^2}{d\varphi^2} = \cos^2 \varphi \implies m_1 = \cos \varphi > 0$$

et:

$$\varphi = cte, \quad m_2^2 = \frac{\sin^2 \lambda d\lambda^2}{\cos^2 \varphi d\lambda^2} \implies m_2 = \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi} > 0$$

5. Cette représentation n'est pas conforme, car le module linéaire dépend de l'azimut de la direction. En effet, au point P sur la sphère, on a la formule $tg Az = \frac{R \cos \varphi d\lambda}{R d\varphi} =$

$\frac{\cos\varphi d\lambda}{d\varphi} \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\operatorname{tg} Az}{\cos\varphi}$. L'expression du carré du module linéaire devient:

$$m^2 = \frac{\cos^2\varphi d\varphi^2 + \sin^2\lambda d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\lambda \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2}{1 + \cos^2\varphi \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\lambda \left(\frac{\operatorname{tg} Az}{\cos\varphi}\right)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 Az} =$$

$$m^2 = \cos^2 Az \left(\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\lambda}{\cos^2\varphi} \cdot \operatorname{tg}^2 Az \right) = \cos^2 Az \cdot \cos^2\varphi + \frac{\sin^2\lambda}{\cos^2\varphi} \cdot \sin^2 Az$$

On a bien $m = m(Az, \varphi, \lambda)$. L'indicatrice de Tissot est représentée par une ellipse:

$$\frac{u^2}{m_1^2} + \frac{v^2}{m_2^2} = 1$$

quand $m_1 \neq m_2 \Rightarrow \cos^2\varphi \neq \sin^2\lambda$ et un cercle sur la courbe telle que $\cos^2\varphi = \sin^2\lambda$.

5

Correction 48.

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = 2R \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin\lambda \\ Y = -2R \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos\lambda \end{cases}$$

1. L'image du méridien ($\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) est une droite. Si $\lambda_0 = \pi/2$ la droite est $Y = 0$. Si $\lambda_0 \neq \pi/2$ la droite a pour équation $X + Y \operatorname{tg} \lambda_0 = 0$ qui passe par l'origine des axes.

2. L'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$) est un cercle ayant l'équation:

$$X^2 + Y^2 = 4R^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

de rayon $2R$, le centre du cercle est le point origine $(0, 0)$ des axes.

3. Les méridiens et les parallèles de la sphère se coupent perpendiculairement. De même leurs images les droites $Y = \alpha X$ coupent les cercles concentriques sous un angle droit. D'après le lemme de Tissot, les directions principales en un point sont les tangentes au parallèle et au méridien passant par le point.

4. On a $dS^2 = dX^2 + dY^2$, calculons alors dX, dY .

$$dX = 2R \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos\lambda d\lambda - \frac{R \sin\lambda}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi$$

$$dY = 2R \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \sin\lambda d\lambda + \frac{R \cos\lambda}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi$$

Par suite:

$$\begin{aligned}
 dS^2 &= dX^2 + dY^2 = 4R^2 t g^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) d\lambda^2 + \frac{R^2}{\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi^2 \Rightarrow \\
 dS^2 &= \frac{R^2}{\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi^2 + \frac{4R^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} d\lambda^2 \\
 dS^2 &= \frac{R^2}{\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \left(d\varphi^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) d\lambda^2 \right) \\
 dS^2 &= \frac{R^2}{\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \left(d\varphi^2 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) d\lambda^2 \right) = \frac{R^2}{\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2)
 \end{aligned}$$

5. On obtient $m^2 = \frac{dS^2}{ds^2}$ mais $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$, d'où:

$$m^2 = \frac{1}{\cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \Rightarrow m = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}$$

6. Le module linéaire m_1 le long du méridien ($\lambda = cte$) est m , mais qui varie le long du méridien.

7. Le module linéaire m_2 le long d'un parallèle ($\varphi = cte$) est m mais reste fixe.

8. En un point $P(\varphi, \lambda)$ le module linéaire $m = m_1 = m_2 = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}$. Oui la représentation plane est conforme, car le module linéaire dépend du point et non de la direction.

Correction 49.

Soit Σ la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = R.\lambda \\ Y = R.\text{Log}tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Les images des méridiens ($\lambda = \text{constante}$) sont des droites parallèles à l'axe des Y et les images des parallèles ($\varphi = \text{constante}$) sont des droites parallèles à l'axe des X .

2. Sur le plan, $dS^2 = dX^2 + dY^2$, calculons dX et dY :

$$\begin{aligned}
 dX &= R d\lambda, \\
 dY &= R \cdot \frac{d\varphi}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = R \cdot \frac{d\varphi}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = R \cdot \frac{d\varphi}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)} = \frac{R d\varphi}{\cos \varphi}
 \end{aligned}$$

Alors dS^2 vaut:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = R^2 d\lambda^2 + \frac{R^2 d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}{\cos^2 \varphi}$$

Or $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$, par suite:

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

3. Le module linéaire m_1 le long du méridien ($\lambda = cte$) est $m = 1/\cos \varphi$, mais qui varie le long du méridien. Le module linéaire m_2 le long d'un parallèle ($\varphi = cte$) est $m = 1/\cos \varphi$ mais reste fixe.

4. En un point $P(\varphi, \lambda)$ le module linéaire $m = m_1 = m_2 = \frac{1}{\cos \varphi}$. Oui la représentation plane est conforme, car le module linéaire dépend du point et non de la direction.

5

5. On suppose que P décrit sur la surface Σ une courbe (γ) telle que φ et λ sont liées par la relation : $tg \varphi = \sin \lambda$. Pour $\varphi = 0 \text{ gr}, 2 \text{ gr}, 4 \text{ gr}, 6 \text{ gr}, 8 \text{ gr}$ et 10 gr , ci-dessous un tableau donnant les valeurs de λ correspondantes:

φ	0 gr	2 gr	4 gr	6 gr	8 gr	10 gr
λ	0 gr	2.0010 gr	3.9921 gr	5.9735 gr	7.9376 gr	9.8789 gr

1. Tableau des valeurs de λ correspondantes

6. Sachant que $R = 1000 \text{ m}$, on calcule ci-dessous les coordonnées (X, Y) de la représentation plane donnée pour les valeurs de φ et λ du tableau 1.:

$X(m)$	0	31.48	62.83	94.25	125.66	157.08
$Y(m)$	0	31.42	62.75	93.97	125.00	155.80

2. Tableau des coordonnées (X, Y) des valeurs de φ, λ correspondantes

7. Rapportant à l'échelle 1/100 sur le plan OXY , les positions (X, Y) des points du tableau 1. on trouve que l'image de la courbe (γ) est une droite qui passe par l'origine.

Note de l'auteur: l'image est une droite donc une ligne géodésique du plan, par suite la courbe $tg \varphi = \sin \lambda$ est une géodésique de la sphère donc un grand cercle qui part du point $(R, 0, 0)$ car les représentations planes conformes conservent les géodésiques.

Correction 50.

1. Le triangle pqa est sphérique, la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne:

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2 - y) &= \cos(\pi/2 - \varphi) \cos(\pi/2 - \varphi_0) + \sin(\pi/2 - \varphi) \sin(\pi/2 - \varphi_0) \cos(\pi/2 - \lambda) \Rightarrow \\ \sin y &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda \Rightarrow y = y(\varphi, \lambda, \varphi_0) \end{aligned}$$

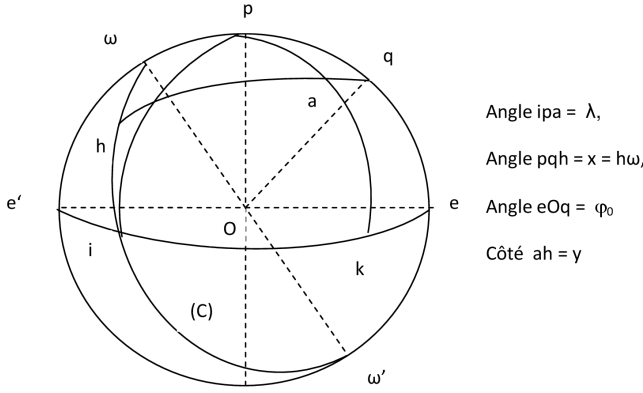


Figure 5.9 | Représentation cylindrique conforme oblique tangente

Utilisant le même triangle sphérique, on applique la formule des sinus, on obtient:

$$\frac{\sin(\pi/2 - \lambda)}{\sin(\pi/2 - y)} = \frac{\sin x}{\sin(\pi/2 - \varphi)} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos \varphi} = \frac{\cos \lambda}{\cos y} \Rightarrow \cos y = \frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\sin x}$$

Dans le même triangle, on utilise la formule de sinus cosinus: $\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \cos c \cdot \sin b \cdot \cos A$ où on prend $A = \pi/2 - \lambda, B = x$, on obtient:

$$\sin(\pi/2 - y) \cos x = \cos(\pi/2 - \varphi) \sin(\pi/2 - \varphi_0) - \cos(\pi/2 - \varphi_0) \sin(\pi/2 - \varphi) \cos(\pi/2 - \lambda) \Rightarrow \cos y \cdot \cos x = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda$$

On remplace $\cos y$ par $\frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\sin x}$, on obtient la formule donnant x :

$$\cot g x = \cos \varphi_0 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda} - \sin \varphi_0$$

Alors les coordonnées X, Y de l'image du point a :

$$\begin{cases} X = 1.x = x, \\ Y = 1.\operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right). \end{cases}$$

On vérifie les formules en prenant $\varphi_0 = 0$, dans ce cas on a une représentation cylindrique conforme transverse avec les variables de Cassini-Soldner (voir **Correction n°7**) H, L avec $H = y$ et $L = \pi/2 - x$. La formule de $\cot g x$ devient $\operatorname{tg} L = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda}$ et la formule $\sin y$ devient $\sin H = \cos \varphi \sin \lambda$.

2. De l'expression $\sin y = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda$ ci-dessus, on prend $\varphi = \varphi_0$, on obtient :

$$\sin y = \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda$$

Posons $B = 1 + \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda = 2 - \cos^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda$. Comme $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ d'où:

$$\begin{aligned} \cos^2 y &= 1 - (\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda)^2 = (1 - \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda) \cdot B \Rightarrow \\ \cos^2 y &= \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) \cdot B \Rightarrow \cos y = \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B} \end{aligned}$$

Il s'ensuit:

$$\operatorname{tgy} = \frac{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}$$

On rappelle que $\operatorname{tgy} = \frac{2 \operatorname{tg}(y/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(y/2)}$. On va exprimer e^Y en fonction de φ_0 et λ . On a

$$e^Y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg}(y/2)}{1 - \operatorname{tg}(y/2)}. \text{ On pose:}$$

$$\alpha = \operatorname{tgy} = \frac{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}} = \frac{2 \operatorname{tg}(y/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(y/2)}, \quad t = \operatorname{tg}(y/2) \Rightarrow \alpha \cdot t^2 + 2t - \alpha = 0$$

5

La solution de $\alpha \cdot t^2 + 2t - \alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta' &= 1 + \alpha^2 = 1 + \frac{(\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda)^2}{\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) B} = \frac{\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) B + (\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda)^2}{\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) B} \Rightarrow \\ \Delta' &= \frac{\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) (2 - \cos^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda) + (\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda)^2}{\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) B} \Rightarrow \\ \Delta' &= \frac{1}{\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) B} \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \frac{1}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}} \end{aligned}$$

On considère seulement la racine positive t_1 avec:

$$t_1 = \operatorname{tg}(y/2) = \frac{-1 + \sqrt{\Delta'}}{\alpha} = \frac{-1 + \frac{1}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}}{\frac{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}} = \frac{1 - \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}$$

Exprimons maintenant le terme e^Y :

$$\begin{aligned} e^Y &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg}(y/2)}{1 - \operatorname{tg}(y/2)} = \frac{1 + t_1}{1 - t_1} = \frac{1 + \frac{1 - \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}}{1 - \frac{1 - \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}} \Rightarrow \\ e^Y &= \frac{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda + 1 - \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda - 1 + \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}} \Rightarrow \\ e^Y &= \frac{2 - \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) - \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}{-\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) + \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}} \Rightarrow \\ e^Y &= \frac{(2 - \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) - \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B})(-\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) - \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B})}{\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) (\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) - B)} \end{aligned}$$

Calculons d le terme du dénominateur: $d = \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) (\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) - B)$, on a donc:

$$\begin{aligned} d &= \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) (\cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) - (2 - \cos^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda)) \Rightarrow \\ d &= -2 \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) (1 - \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda)) \end{aligned}$$

Un petit calcul du numérateur de e^Y , on arrive à $-2 \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B} (1 - \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda))$. On arrive au résultat suivant:

$$e^Y = \frac{-2 \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B} (1 - \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda))}{-2 \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda) (1 - \cos^2 \varphi_0 (1 - \sin \lambda))} = \frac{1}{\cos \varphi_0} \cdot \frac{\sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}{1 - \sin \lambda}$$

Calculons maintenant $\cos X = \cos x$. Appliquons la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique au triangle sphérique paq :

$$\cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi = \sin \varphi_0 \sin y + \cos \varphi_0 \cos y \cos x$$

Prenons $\varphi = \varphi_0$, on obtient:

$$\cos x = \operatorname{tg} \varphi_0 \left(\frac{1}{\cos y} - \operatorname{tg} y \right)$$

Comme on a calculé plus haut $\cos y = \cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}$ et $\operatorname{tg} y = \frac{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}$, on obtient:

$$\cos x = \cos X = \operatorname{tg} \varphi_0 \left(\frac{1}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}} - \frac{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \sin \lambda}{\cos \varphi_0 \sqrt{(1 - \sin \lambda) B}} \right) = \sin \varphi_0 \cdot \frac{(1 - \sin \lambda)}{\sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}$$

Alors le produit $e^Y \cdot \cos X$ donne le résultat demandé soit:

$$e^Y \cdot \cos X = \frac{1}{\cos \varphi_0} \cdot \frac{\sqrt{(1 - \sin \lambda) B}}{1 - \sin \lambda} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \frac{(1 - \sin \lambda)}{\sqrt{(1 - \sin \lambda) B}} = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

C'est l'équation de l'image plane du parallèle de latitude φ_0 .

3.a. De la formule: $\sin y = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda$, on obtient pour $\varphi = 0$:

$$\sin y = \cos \varphi_0 \sin \lambda, \quad \cos y = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda} \Rightarrow \operatorname{tg} y = \frac{\cos \varphi_0 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}} = \beta$$

On applique la même méthodologie, on pose $t = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, on résoud l'équation:

$$\frac{2t}{1 - t^2} = \beta \Rightarrow \beta t^2 + 2t - \beta = 0$$

D'où $\Delta' = 1 + \beta^2 = \frac{1}{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda} \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}$. On obtient la valeur de

$t_1 = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$:

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta'}}{\beta} = \frac{1 - \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}{\cos \varphi_0 \sin \lambda} \Rightarrow e^Y = \frac{1 + t_1}{1 - t_1} = \frac{(\cos \varphi_0 \sin \lambda + 1) - \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}{(\cos \varphi_0 \sin \lambda - 1) + \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}$$

Après les calculs de simplification, on arrive à :

$$e^Y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}{1 - \cos \varphi_0 \sin \lambda} \Rightarrow shY = \frac{e^Y - e^{-Y}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}{1 - \cos \varphi_0 \sin \lambda} - \frac{1 - \cos \varphi_0 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}} \right)$$

Ce qui donne :

$$shY = \frac{\cos \varphi_0 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}$$

Calcul de $\cos X = \cos x$: de la formule $\sin \varphi = \sin \varphi_0 \sin y + \cos \varphi_0 \cos y \cos x$, on obtient $\cos x = -tg \varphi_0 tgy$, d'où :

$$\cos X = -tg \varphi_0 \cdot \frac{\cos \varphi_0 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}} \Rightarrow \cos X = -\frac{\sin \varphi_0 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}}$$

Finalement, on arrive au résultat demandé :

$$\cos X + tg \varphi_0 \cdot shY = -\frac{\sin \varphi_0 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}} + tg \varphi_0 \cdot \frac{\cos \varphi_0 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda}} = 0$$

5

L'image plan de l'équateur a pour équation $\cos X + tg \varphi_0 \cdot shY = 0$.

3.b. Recherche de l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$: Le triangle pqa est sphérique, la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne :

$$\sin y = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda, \lambda = 0 \Rightarrow \sin y = \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi$$

Le triangle pqa est sphérique, on applique la formule des sinus, on obtient :

$$\cos y = \frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\sin x}, \lambda = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{\cos \varphi}{\sin x}$$

On déduit $tgy = \frac{\sin \varphi_0 \sin \varphi \sin x}{\cos \varphi} = \sin \varphi_0 tg \varphi \sin x$. De $\cos y = \frac{\cos \varphi}{\sin x}$, on obtient : $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 y \sin^2 x}$. Alors $\sin y = \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi$ devient $\sin y = \sin \varphi_0 \sqrt{1 - \cos^2 y \sin^2 x}$ ce qui donne $\frac{\sin^2 y}{\sin^2 \varphi_0} = 1 - \cos^2 y \sin^2 x$, on remplace $\sin^2 y$ par $1 - \cos^2 y$, on arrive à $\cos^2 y = \frac{\cos^2 \varphi_0}{1 - \sin^2 \varphi_0 \sin^2 x}$. On fait introduire tgy , utilisant $1 + tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, on arrive à $tgy = tg \varphi_0 \cos x = tg \varphi_0 \cos X$ qu'on note par γ .

On applique la même méthodologie, on pose $t = tg \frac{y}{2}$, on résoud l'équation :

$$\frac{2t}{1 - t^2} = \gamma \Rightarrow \gamma t^2 + 2t - \gamma = 0$$

D'où $\Delta' = 1 + \gamma^2 = 1 + tg^2 \varphi_0 \cos^2 X \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{1 + tg^2 \varphi_0 \cos^2 X}$. On obtient la valeur de $t_1 = tg \frac{y}{2}$:

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta'}}{\gamma} = \frac{-1 + \sqrt{1 + tg^2 \varphi_0 \cos^2 X}}{tg \varphi_0 \cos X} \Rightarrow e^Y = \frac{1 + t_1}{1 - t_1} = \frac{(tg \varphi_0 \cos X - 1) + \sqrt{1 + tg^2 \varphi_0 \cos^2 X}}{(tg \varphi_0 \cos X + 1) - \sqrt{1 + tg^2 \varphi_0 \cos^2 X}}$$

Après les calculs de simplification, on arrive à : $e^Y = tg\varphi_0 \cos X + \sqrt{1 + tg^2\varphi_0 \cos^2 X}$.

Calculons $e^{-Y} = 1/e^Y = \frac{1}{tg\varphi_0 \cos X + \sqrt{1 + tg^2\varphi_0 \cos^2 X}} = \sqrt{1 + tg^2\varphi_0 \cos^2 X} - tg\varphi_0 \cos X$.

Ce qui donne :

$$2shY = e^Y - e^{-Y} = 2tg\varphi_0 \cos X \Rightarrow shY - tg\varphi_0 \cos X = 0$$

C'est l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$.

4.a Calcul du Gisement. On se place dans le repère ΩXY . L'image du méridien origine est d'équation $shY - tg\varphi_0 \cos X = 0$. Le gisement G vérifie $tgG = -\frac{dX}{dY}$ ce qui donne à partir de l'équation précédente $\frac{dX}{dY} = -\frac{chY}{tg\varphi_0 \sin X}$ mais $chY = \frac{1}{\cos y}$ et $\sin X = \sin x = \frac{\cos\varphi \cos\lambda}{\cos y}$. On obtient donc $tgG = \frac{1}{tg\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda}$.

4.b Calcul du module linéaire au point p . $m^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2}$. Or $dY = dy/\cos y$ et $X = x$ vérifie l'équation déjà vue $\cot gx = \cos\varphi_0 \frac{tg\varphi}{\cos\lambda} - \sin\varphi_0$. Différentions cette dernière équation, on obtient :

$$dx = dX = \frac{-1}{1 + \left(\cos\varphi_0 \frac{tg\varphi}{\cos\lambda} - \sin\varphi_0\right)^2} \left(\cos\varphi_0 \frac{d\varphi}{\cos\lambda \cos^2\varphi} + \cos\varphi_0 \frac{tg\varphi \sin\lambda d\lambda}{\cos^2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$dX = A \cdot \cos\varphi_0 \left(\frac{d\varphi}{\cos\lambda \cos^2\varphi} + \frac{tg\varphi \sin\lambda d\lambda}{\cos^2\lambda}\right), \quad A = \frac{-1}{1 + \left(\cos\varphi_0 \frac{tg\varphi}{\cos\lambda} - \sin\varphi_0\right)^2}$$

De l'équation $\sin y = \sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \sin\lambda$, on va calculer dy . D'où :

$$\cos y dy = \sin\varphi_0 \cos\varphi d\varphi - \cos\varphi_0 \sin\varphi \sin\lambda d\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda d\lambda \Rightarrow$$

$$dy = \frac{1}{\cos y} [(\sin\varphi_0 \cos\varphi - \cos\varphi_0 \sin\varphi \sin\lambda) d\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda d\lambda]$$

Ecrivons m^2 :

$$m^2 = \frac{1}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2} \cdot \left[\frac{1}{\cos^2 y} [(\sin\varphi_0 \cos\varphi - \cos\varphi_0 \sin\varphi \sin\lambda) d\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda d\lambda]^2 \right. \\ \left. + A^2 \cos^2\varphi_0 \left(\frac{d\varphi}{\cos\lambda \cos^2\varphi} + \frac{tg\varphi \sin\lambda d\lambda}{\cos^2\lambda}\right)^2 \right]$$

Le point p appartient au méridien $\lambda = 0$ et $\varphi_p = \pi/2$, ses coordonnées (X, Y) sont $X = x = 0, y = \varphi_0 \Rightarrow Y_p = \text{Log} tg(\pi/4 + \varphi_0/2)$. Dans la formule m^2 , comme $\varphi = \varphi_p = \pi/2$, le premier terme devient $\frac{1}{d\varphi^2}$. Le terme $\frac{1}{\cos^2 y} [\dots]^2$ est nul avec $\cos^2 y = \cos^2\varphi_0 \neq 0$, car il

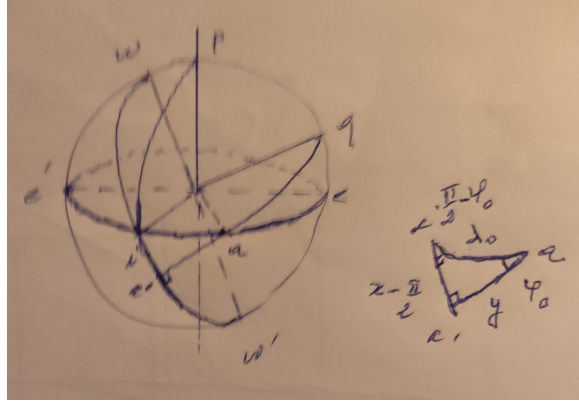


Figure 5.10 | Calcul du module linéaire au point $a(\varphi = 0, \lambda = \lambda_0)$

5

contient $\cos\varphi = \cos\varphi_p = 0$ et $\sin\lambda = \sin 0 = 0$. m^2 devient:

$$m^2 = \frac{\cos^2\varphi_0}{d\varphi^2} \cdot \frac{A^2}{\cos^4\varphi} (d\varphi + \sin\varphi \cos\varphi \sin\lambda d\lambda)^2 = \cos^2\varphi_0 \cdot \frac{A^2}{\cos^4\varphi}$$

Le terme A^2 devient:

$$A^2 = \frac{1}{\left[\operatorname{tg}^2\varphi \left(\cos\varphi_0 - \frac{\sin\varphi_0}{\operatorname{tg}\varphi} \right)^2 + 1 \right]^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^4\varphi \left[\left(\cos\varphi_0 - \frac{\sin\varphi_0}{\operatorname{tg}\varphi} \right)^2 + \frac{1}{\operatorname{tg}^4\varphi} \right]^2}$$

Maintenant le calcul de m^2 donne après la levée de l'indétermination quand $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

$$m^2 = \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^4\varphi_0} \Rightarrow m = \frac{1}{\cos\varphi_0}$$

Le résultat est attendu, car pour la représentation étudiée dans le repère ΩXY , on a $m = 1/\cos y = 1/\cos\varphi_0$.

4.c Calcul du module linéaire au point a de l'équateur. Soit le point a sur l'équateur voir (Fig. 5.11), ses coordonnées sont $(\varphi = 0, \lambda = \lambda_0)$. On va utiliser la remarque de la question précédente. D'après le triangle sphérique iaa' , la règle des sinus donne:

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\sin\lambda_0} = \frac{\sin(\pi/2 - \varphi_0)}{\sin y} \Rightarrow \sin y = \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \cos^2\varphi_0 \sin^2\lambda_0} \Rightarrow$$

$$m = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi_0 \sin^2\lambda_0}}$$

4.d Calcul du module linéaire en un point du méridien origine. Soit le point a sur le méridien origine ($\lambda = 0$) (Fig. 5.12), ses coordonnées sont $(\varphi, \lambda = 0)$. On va utiliser la remarque

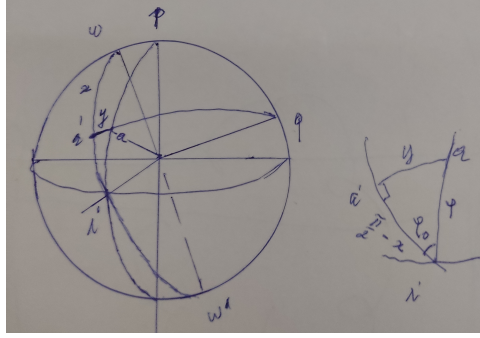


Figure 5.11 | Calcul du module linéaire au point $a(\varphi, \lambda = 0)$ appartenant au méridien origine

de la question précédente. D'après le triangle sphérique iaa' , la règle des sinus donne:

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi_0}{\sin y} \Rightarrow m = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi_0 \sin^2\varphi}}$$

5

Correction 51.

$$p(X, Y) \begin{cases} X = 2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\lambda \\ Y = 2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\lambda \end{cases} \quad (5.13)$$

1. L'image du pôle nord P_N est le point origine O du plan OXY .
2. L'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) est la droite $Y - X \tan \lambda_0 = 0$.
3. On élimine la variable λ des 2 coordonnées X, Y , on obtient l'équation d'un cercle de centre situé au point O , soit :

$$X^2 + Y^2 = 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

4. Sur la sphère $\mathbb{S}^2$, les méridiens et les parallèles se coupent suivant un angle droit. Leurs images aussi se coupent suivant un angle droit. En utilisant le lemme de Tissot, les directions principales en un point est la droite passant par le point et le point O et la tangente au cercle géocentrique passant par le point.

5. La sphère $\mathbb{S}^2$ est paramétrée comme suit:

$$M = \begin{cases} x = \cos\varphi \cos\lambda \\ y = \cos\varphi \sin\lambda \\ z = \sin\varphi \end{cases}$$

Par suite, on obtient $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2\varphi d\lambda^2$.

6. Calculons les différentielles dX, dY :

$$\begin{aligned} dX &= -2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\lambda d\lambda - \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\lambda d\varphi \\ dY &= +2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\lambda d\lambda - \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\lambda d\varphi \Rightarrow \\ dX^2 &= 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin^2\lambda d\lambda^2 + 4R^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\lambda \cos\lambda d\varphi d\lambda \\ &\quad + R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos^2\lambda d\varphi^2 \\ dY^2 &= 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos^2\lambda d\lambda^2 - 4R^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\lambda \cos\lambda d\varphi d\lambda \\ &\quad + R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin^2\lambda d\varphi^2 \end{aligned}$$

Dans la somme $dx^2 + dY^2$, les termes $d\varphi d\lambda$ disparaissent et on obtient:

$$dS^2 = R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\lambda^2$$

5

7. Le carré du module linéaire m^2 s'écrit:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2}$$

8. Calcul du module linéaire m_1 le long du parallèle:

$$m_1 = m_{\varphi=cte} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

9. Calcul du module linéaire m_2 le long du méridien:

$$m_2 = m_{\lambda=cte} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

10. La représentation plane définie par (5.13) est une représentation équivalente car le produit des modules linéaires $m_1 m_2 = 1$. En effet, on obtient:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 1$$

Correction 52.

Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow³ définie par :

$$Z = \sin z \text{ avec } z = \lambda + iL \text{ et } Z = X + iY$$

1. On rappelle:

$$chx = (e^x + e^{-x})/2 \in [1, +\infty[, \quad shx = (e^x - e^{-x})/2 \in \mathbb{R}, \quad thx = shx/chx \in [-1, +1]$$

³En hommage à **Joseph Johann Littrow** (1781-1840) astronome autrichien.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, e^{-iz} = \cos z - i \sin z \Rightarrow \sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i) = -i(e^{iz} - e^{-iz})/2$$

Or $iz = i(\lambda + iL) = -L + i\lambda \Rightarrow e^{iz} = e^{-L}(\cos \lambda + i \sin \lambda)$ et $-iz = L - i\lambda \Rightarrow e^{-iz} = e^L(\cos \lambda - i \sin \lambda)$. On obtient l'équation:

$$X + iY = -i[e^{-L}(\cos \lambda + i \sin \lambda) - e^L(\cos \lambda - i \sin \lambda)]/2 \Rightarrow \begin{cases} X = \sin \lambda \cdot chL \\ Y = \cos \lambda \cdot shL \end{cases}$$

Pour $\lambda_0 = 0$, l'image du méridien origine est $X = 0$ c'est-à-dire l'axe des Y : en effet $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq \pi/4 + \varphi/2 \leq \pi/2 \Rightarrow 0 = \operatorname{tg} 0 \leq \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \leq +\infty$. Par suite on obtient:

$$-\infty \leq L = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \leq +\infty \Rightarrow -\infty \leq Y = shL \leq +\infty$$

Pour $\lambda = \pm\pi/2$ les images de ces deux méridiens sont la droite $Y = 0$ c'est-à-dire l'axe des X . Utilisant la même méthode ci-dessus, on trouve que les images sont sur la demi-droite $[1, +\infty[$. Les images des autres méridiens $\lambda = \lambda_0$ sont des hyperboles (**Fig. 5.13**), l'équation d'une hyperbole est donnée par:

$$\frac{X^2}{\sin^2 \lambda_0} - \frac{Y^2}{\cos^2 \lambda_0} = 1, \quad \lambda_0 \in]0, \pi/2[$$

Posons $a = \sin \lambda_0, b = \cos \lambda_0$. Les sommets de ces hyperboles sont les points $(a, 0)$ $(-a, 0)$. Soit $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, les coordonnées des foyers sont $F(c, 0), F'(-c, 0)$. L'excentricité des

hyperboles est $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{1}{\sin \lambda_0} > 1$.

Si $\varphi = \varphi_0 = 0 \Rightarrow L_0 = 0 \Rightarrow shL_0 = 0 \Rightarrow Y = 0, X = \sin \lambda$, l'image de l'équateur est le segment $[-1, +1]$ de l'axe des X . Pour $\varphi_0 \neq 0$, les images des parallèles $\varphi = \varphi_0$ sont des ellipses (**Fig. 5.13**), l'équation d'une ellipse est donnée par:

$$\frac{X^2}{ch^2 L_0} + \frac{Y^2}{sh^2 L_0} = 1, \quad chL_0 > shL_0$$

Les paramètres de ces ellipses sont: $a = chL, b = shL, e^2 = 1 - b^2/a^2 = 1 - ch^2 L/sh^2 L$.

2. Aux points $f(0, \pi/2), f'(0, -\pi/2)$, $L = 0 \Rightarrow shL = 0$, l'équation $\frac{X^2}{ch^2 L_0} + \frac{Y^2}{sh^2 L_0} = 1$ n'est pas définie, donc les points f, f' sont des points singuliers. De même, l'équation $\frac{X^2}{\sin^2 \lambda_0} - \frac{Y^2}{\cos^2 \lambda_0} = 1$ n'est pas définie, le terme $Y^2/\cos^2 \lambda_0$ devient infini. Donc là aussi les points f, f' sont des points singuliers.

3. L'angle $\widehat{bp, bs} = \alpha$. C'est aussi $2\pi - Az$ où Az est l'azimut de la direction bs . Avec les données du triangle sphérique psb (**Fig. 5.14**), on va utiliser la formule sinus cotangente soit $\sin A \cdot \cot g B = \cot g b \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos A$. On prend $A = p, B = b, C = s$, on obtient:

$$\begin{aligned} \sin \lambda \cdot \cot g \alpha &= \cot g \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot \cos \lambda \Rightarrow \\ \sin \lambda \cdot \cot g \alpha &= \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \lambda \Rightarrow \\ \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi} \cdot \cot g \alpha &= \operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \lambda \end{aligned}$$

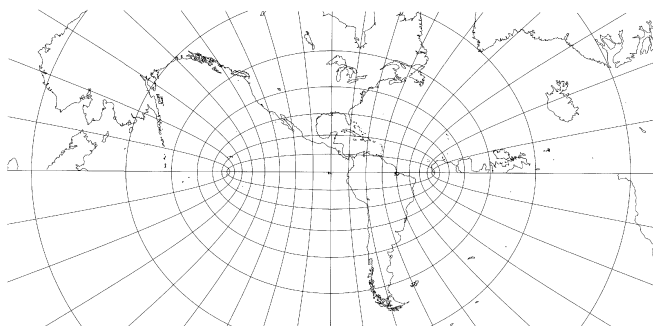


Figure 5.12 | Images des méridiens et des parallèles (le méridien central a pour longitude $\lambda = 90^\circ$ Ouest).

5

Angle $p = \lambda$
 Angle $b = \alpha = 2\pi - Az$
 Côté $bp = \pi/2 - \varphi$
 Côté $sp = \pi/2 - \varphi_0$
 Az = azimut direction bs

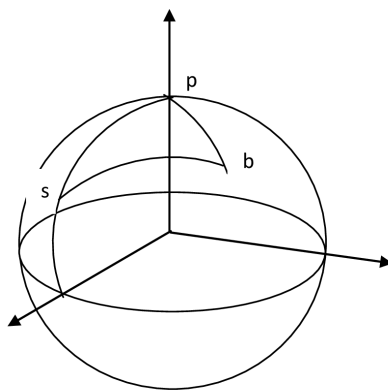


Figure 5.13 | Le triangle sphérique psb

Revenons aux équations de la représentation plane de Littrow ($X = \sin \lambda.chL$, $Y = \cos \lambda.shL$). On va exprimer chL et shL en fonction de φ et λ . On sait que $L = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \Rightarrow e^L = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$. Posons $t = \text{tg} \frac{\varphi}{2}$, par suite $e^L = \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow e^{-L} = \frac{1-t}{1+t}$. Ce qui donne:

$$\begin{aligned} 2chL &= e^L + e^{-L} = \frac{1+t}{1-t} + \frac{1-t}{1+t} = 2 \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \Rightarrow 1+t^2 = 1 + \text{tg}^2(\varphi/2) = \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}, \\ 1-t^2 &= 1 - \frac{\sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} = \frac{\cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} = \frac{\cos 2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} = \frac{\cos \varphi}{\cos^2(\varphi/2)} \Rightarrow \\ 2chL &= 2 \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)} \cdot \frac{\cos^2(\varphi/2)}{\cos \varphi} = 2 \frac{1}{\cos \varphi} \Rightarrow chL = \frac{1}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

De même, on a:

$$\begin{aligned} 2shL &= e^L - e^{-L} = \frac{1+t}{1-t} - \frac{1-t}{1+t} = \frac{4t}{1-t^2} \Rightarrow 2shL = \frac{4\text{tg}(\varphi/2) \cdot \cos^2(\varphi/2)}{\cos \varphi}, \\ 2shL &= \frac{4\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{\cos \varphi} = 2 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow shL = \text{tg} \varphi \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées (X, Y) deviennent: $X = \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi}$, $Y = \cos \lambda \text{tg} \varphi$. Alors l'image du point b s'écrit:

$$X \cot \alpha = \text{tg} \varphi_0 - Y$$

L'image plane de la courbe décrite par b est une droite.

Correction 53.

Soit l'application $F(u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1)$ définie par:

$$OM(u, v) = F(u, v) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{array} \right.$$

1. La forme fondamentale est $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Le calcul de dx, dy et dz donne:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2du}{u^2 + v^2 + 1} - \frac{2u(2udu + 2v dv)}{(u^2 + v^2 + 1)^2} = \frac{2(-u^2 + v^2 + 1)du - 4uv dv}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \\ dy &= \frac{-4uv du + 2(u^2 - v^2 + 1)dv}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \\ dz &= \frac{2(udu + v dv)}{u^2 + v^2 + 1} - \frac{2(u^2 + v^2 - 1)(udu + v dv)}{(u^2 + v^2 + 1)^2} = \frac{4(udu + v dv)}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$ds^2 = \frac{[2(-u^2 + v^2 + 1)du - 4uvdv]^2 + [-4uvdu + 2(u^2 - v^2 + 1)dv]^2 + [4(udu + vdv)]^2}{(u^2 + v^2 + 1)^4}$$

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{(u^2 + v^2 + 1)^2 (du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^4} = \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$$

2. On a :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(u^2 + v^2 + 1)^2 = 4u^2 + 4v^2 + (u^2 + v^2 - 1)^2 = (u^2 + v^2 + 1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Donc $OM(u, v)$ appartient à la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. De la coordonnée z , on calcule $u^2 + v^2$ ce qui donne $u^2 + v^2 = \frac{1+z}{1-z}$. On obtient donc:

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}$$

5

4. Soit le point $N(0, 0, 1)$ de $\mathbb{S}^2$, les composantes du vecteur $NM = (x, y, z-1)^T$. L'équation de la droite passant par N et de direction NM sous forme paramétrique:

$$\begin{cases} X = 0 + tx = tx \\ Y = 0 + ty = ty \\ Z = 1 + t(z-1) \end{cases}$$

Comme $Z = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1-z}$. Les coordonnées planes de $p(X, Y)$ sont: $X = \frac{x}{1-z}$, $Y = \frac{y}{1-z}$.

5. Soit σ l'application $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \rightarrow (X, Y) = (X(x, y, z), Y(x, y, z))$. σ est définie par $\sigma(x, y, z) = (X, Y) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$. Calculons $(\sigma \circ F)(u, v)$, $F(u, v) = (x, y, z)^T$ où $z \neq 1$. En effet si $z = 1 \Rightarrow -1 = +1$ d'où la contradiction. Donc on peut calculer $\sigma(F(u, v))$ ce qui donne:

$$\sigma(F(u, v)) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = (u, v) \Rightarrow (\sigma \circ F)(u, v) = \sigma(F(u, v)) = (u, v) \Rightarrow$$

$$\sigma \circ (F(u, v)) = I(u, v) \Rightarrow \sigma \circ F = I \Rightarrow \sigma = F^{-1}$$

Correction 54.

Soit un ellipsoïde de révolution $E(a, e)$ avec a et e respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et e la première excentricité. Soit $\mathbb{S}^2$ une sphère de rayon R . On veut étudier le passage suivant:

$$p(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi, \Lambda) \text{ de la sphère } \mathbb{S}^2$$

1. Le module linéaire m de cette représentation est donné par $m = \frac{dS}{ds}$ avec:

$$ds_{\text{ellipsoïde}}^2 = ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2, \quad dS_{\text{sphère}}^2 = dS^2 = R^2 d\psi^2 + R^2 \cos^2 \psi d\Lambda^2$$

ρ, N les deux rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde. m^2 devient:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{R^2 d\psi^2 + R^2 \cos^2 \psi d\Lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{R^2 d\psi^2 + R^2 \cos^2 \psi d\Lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}}$$

2. On pose:

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

avec:

$$\mathcal{L} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}, \quad L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)$$

$\mathcal{L}$ est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution et L la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre E et $\mathbb{S}^2$ est donnée par $Z = f(z)$ où f est une fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir:

$$\begin{aligned} Z = L + i\Lambda = \alpha z + \beta &= (c_1 + ic_2)(\mathcal{L} + i\lambda) + b_1 + ib_2 \Rightarrow \\ L = c_1 \mathcal{L} - c_2 \lambda + b_1, \quad \Lambda &= c_1 \lambda + c_2 \mathcal{L} + b_2 \end{aligned}$$

3. On veut que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$, ça implique: $\Lambda = 0 = c_1 \times 0 + c_2 \mathcal{L} + b_2 \Rightarrow c_2 = b_2 = 0 \Rightarrow \Lambda = f(\lambda) = c_1 \lambda$. Par suite, $L = c_1 \mathcal{L} - c_2 \lambda + b_1 = c_1 \mathcal{L} + b_1 = g(\mathcal{L})$, c'est-à-dire que la représentation transforme les parallèles de l'ellipsoïde ($\varphi = cte$) en parallèles de la sphère ($\psi = cte$).

4. On rappelle les relations entre les différentielles des variables:

$$d\mathcal{L} = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}, \quad dL = \frac{d\psi}{\cos \psi}$$

Différentions les relations $L = c\mathcal{L} + b$ et $\Lambda = c\lambda$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} dL = c d\mathcal{L}, \quad d\Lambda = c d\lambda \\ d\psi = \cos \psi dL = c \cos \psi d\mathcal{L} \Rightarrow d\psi = c \cos \psi \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \Rightarrow \\ \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{c \cdot \rho \cdot \cos \psi}{N \cos \varphi} \end{aligned}$$

Calculons m^2 .

$$m^2 = \frac{R^2 d\psi^2 + R^2 \cos^2 \psi d\Lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} = \frac{R^2 \cos^2 \psi (dL^2 + d\Lambda^2)}{N^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)}$$

or $dL = c d\mathcal{L}$ et $d\Lambda = c d\lambda$, m^2 devient:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{R^2 \cos^2 \psi (c^2 d\mathcal{L}^2 + c^2 d\lambda^2)}{N^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)} = \frac{c^2 R^2 \cos^2 \psi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)}{N^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)} = \frac{c^2 R^2 \cos^2 \psi}{N^2 \cos^2 \varphi} \Rightarrow \\ m &= c \cdot \frac{R \cos \psi}{N \cos \varphi} \end{aligned}$$

Calculons d'abord la dérivée première de m par rapport à la variable φ .

$$\begin{aligned}\frac{dm}{d\varphi} &= -\frac{cR\sin\psi}{N\cos\varphi} \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{cR\cos\psi}{N^2\cos^2\varphi} \cdot (-\rho\sin\varphi) = -\frac{cR\sin\psi}{N\cos\varphi} \cdot \frac{c\rho\cos\psi}{N\cos\varphi} + m \frac{\rho\sin\varphi}{N\cos\varphi} \Rightarrow \\ \frac{dm}{d\varphi} &= m \frac{\rho\sin\varphi}{N\cos\varphi} - \frac{m\rho\sin\psi}{N\cos\varphi} = \frac{m\rho}{N\cos\varphi} (\sin\varphi - c\sin\psi) \Rightarrow\end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée seconde de m donne:

$$\begin{aligned}\frac{d^2m}{d\varphi^2} &= \frac{dm}{d\varphi} \frac{\rho}{N\cos\varphi} (\sin\varphi - c\sin\psi) + m \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{N\cos\varphi} \right) (\sin\varphi - c\sin\psi) \\ &\quad + \frac{m\rho}{N\cos\varphi} \left(\cos\varphi - c\cos\psi \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \Rightarrow \\ \frac{d^2m}{d\varphi^2} &= \frac{dm}{d\varphi} \frac{\rho}{N\cos\varphi} (\sin\varphi - c\sin\psi) + m \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{N\cos\varphi} \right) (\sin\varphi - c\sin\psi) \\ &\quad + \frac{m\rho}{N\cos\varphi} \left(\cos\varphi - c\cos\psi \frac{c\rho\cos\psi}{N\cos\varphi} \right)\end{aligned}$$

5

Les conditions demandées sont successivement:

$$m(\varphi_0) = 1, \quad \left(\frac{dm}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

D'où:

$$1- m(\varphi_0) = 1 \Rightarrow cR\cos\psi_0 = N_0\cos\varphi_0.$$

$$2- m'(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 - c\sin\psi_0 = 0 \Rightarrow c = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\psi_0}.$$

$$\begin{aligned}3- m''(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \cos\varphi_0 - c\cos\psi_0 \frac{c\rho\cos\psi}{N\cos\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2\cos^2\psi_0} = \frac{\rho_0}{N_0} \frac{1}{\cos^2\varphi_0} \Rightarrow \frac{tg^2\psi_0}{\sin^2\varphi_0} = \\ \frac{1-e^2}{\cos^2\varphi_0(1-e^2\sin^2\varphi_0)} \Rightarrow tg\psi_0 = tg\varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0}}.\end{aligned}$$

Cette dernière relation définit ψ_0 une fois on a choisi φ_0 .

5. On a trouvé $c = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\psi_0}$. De la relation $L = c\mathcal{L} + b$, on obtient la valeur numérique de b soit $b = L(\psi_0) - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\psi_0} \mathcal{L}(\varphi_0)$.

$$\text{De } m(\varphi_0) = 1 \Rightarrow R = \frac{N_0\cos\varphi_0}{c\cos\psi_0} = \frac{N_0\cos\varphi_0\sin\psi_0}{\sin\varphi_0\cos\psi_0} = N_0 \frac{tg\psi_0}{tg\varphi_0} = N_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0}} \Rightarrow$$

$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi_0}$. Cette dernière équation donne la relation qui lie le rayon de la sphère R avec le demi-grand axe a de l'ellipsoïde de révolution.

6. Calculons l'expression du développement limité de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0 à l'ordre 3. Il s'écrit:

$$m(\varphi) = 1 + (\varphi - \varphi_0) \left(\frac{dm}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} + \frac{(\varphi - \varphi_0)^3}{6} \left(\frac{d^3m}{d\varphi^3} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

On peut écrire la dérivée d'ordre 3 de m comme suit:

$$\frac{d^3 m}{d\varphi^3} = A(\varphi) + \frac{m\rho^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{N \cos^2 \varphi}{\rho} - c^2 \cos^2 \psi \right), \text{ avec } A(\varphi_0) = 0$$

Posons $B(\varphi) = \frac{N \cos^2 \varphi}{\rho} - c^2 \cos^2 \psi \Rightarrow B(\varphi) = \frac{1}{1-e^2} (\cos^2 \varphi - (e^2/4) \sin^2 2\varphi) - c^2 \cos^2 \psi$.

Calculons $\frac{dB}{d\varphi}$, d'où:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{d\varphi} &= \frac{-\sin 2\varphi(1+e^2 \cos 2\varphi)}{1-e^2} + 2c^2 \cos \psi \sin \psi \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{-\sin 2\varphi(1+e^2 \cos 2\varphi)}{1-e^2} + \frac{2c^3 \rho \cos^2 \psi \sin \psi}{N \cos \varphi} \Rightarrow \\ \frac{dB}{d\varphi} &= \frac{-\sin 2\varphi(1+e^2 \cos 2\varphi)}{1-e^2} + 2(1-e^2) \frac{\sin^3 \varphi_0}{\sin^3 \psi_0} \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{\cos \varphi(1-e^2 \sin^2 \varphi)} \Rightarrow \\ \left(\frac{dB}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} &= \frac{-\sin 2\varphi_0(1+e^2 \cos 2\varphi_0)}{1-e^2} + 2(1-e^2) \frac{\sin^3 \varphi_0}{\sin^3 \psi_0} \frac{\cos^2 \psi_0 \sin \psi_0}{\cos \varphi_0(1-e^2 \sin^2 \varphi_0)} \Rightarrow \\ \left(\frac{dB}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} &= \frac{-\sin 2\varphi_0(1+e^2 \cos 2\varphi_0)}{1-e^2} + (1-e^2) \frac{tg^2 \varphi_0}{tg^2 \psi_0} \frac{\sin 2\varphi_0}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0} \Rightarrow \\ \left(\frac{dB}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} &= \frac{-\sin 2\varphi_0(1+e^2 \cos 2\varphi_0)}{1-e^2} + \sin 2\varphi_0 = -\frac{4e^2 \sin \varphi_0 \cos^3 \varphi_0}{1-e^2} \end{aligned}$$

Enfin, on arrive au terme $d^3 m/d\varphi^3$ avec $\varphi = \varphi_0$ soit:

$$\left(\frac{d^3 m}{d\varphi^3} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\rho_0^2}{N_0^2 \cos^2 \varphi_0} \cdot \frac{-4e^2 \sin \varphi_0 \cos^3 \varphi_0}{1-e^2} = -\frac{4e^2(1-e^2) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_0)^2}$$

On obtient donc:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{3(1-e^2 \sin^2 \varphi_0)^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricité e' , avec $e^2 = e'^2/(1+e'^2)$, $1-e^2 \sin^2 \varphi = (1+e'^2 \cos^2 \varphi)/(1+e'^2)$. L'expression de $m(\varphi)$ devient:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{3(1+e'^2 \cos^2 \varphi_0)^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

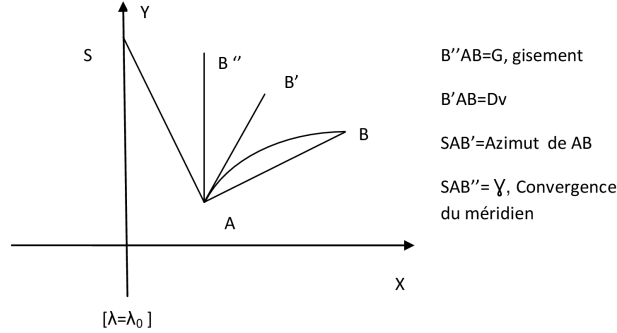


Figure 5.14 | Calcul du gisement de la direction AB

5

5.6.2. LA REPRÉSENTATION LAMBERT

Correction 55.

En un point A de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193 \text{ gr}$ et $\lambda = 11.9656 \text{ gr}$ à l'Est de Greenwich, on vise un point B .

1. La latitude du point A est supérieure à $40 \text{ gr} = \varphi_0$ latitude du parallèle origine de la représentation plane Lambert-Nord Tunisie, donc le point A se trouve dans la zone du Lambert-Nord Tunisie. Les formules donnant les coordonnées planes (X, Y) en Lambert-Nord Tunisie sont comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 500\,000.00 \text{ m} + kR \sin \Omega = X_0 + kR \sin \Omega \\ Y = 300\,000.00 \text{ m} + k(R_0 - R \cos \Omega) = Y_0 + k(R_0 - R \cos \Omega), \text{ avec :} \\ \Omega = \Omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0, R = R(\varphi) = R_0 \exp(-(L - L_0) \sin \varphi_0), R_0 = N_0 \cotg \varphi_0, \\ N_0 = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{-1/2} \\ L = L(\varphi) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}, L_0 = L(\varphi_0) \\ a = 6378\,249.20 \text{ m}, e^2 = 0.0068\,0348\,77, k_n = 0.999\,625\,544. \end{array} \right.$$

Les calculs donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 = L(40.0 \text{ gr}) = \text{Logtg} (50 \text{ gr} 4 + 20 \text{ gr}) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin 40}{1 - e \sin 40} = 0.672\,225\,886\,658 \\ L = 0.627\,382\,113\,620, R_0 = 8947\,643\,839 \text{ m} \Rightarrow R = 9\,186\,826.157 \text{ m} \\ X = 500\,000.00 \text{ m} + k_n R \sin \Omega = 500\,000.00 + 81\,871.47 = 581\,871.47 \text{ m} \\ Y = 300\,000.00 \text{ m} + k_n (R_0 - R \cos \Omega) = 300\,000.00 - 239\,727.80 = 60\,272.20 \text{ m} \end{array} \right.$$

2. Le gisement G de la direction AB (voir **Fig. 5.15**) est donné par:

$$G = \text{Azg} - \gamma + Dv = 55.7631 - (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 + Dv = 55.7631 - 0.567565 + 0.000152 = 55.195687 \text{ gr}$$

3. La distance AB réduite au plan est:

$$D_r = D_e \cdot (1 - 9 \times 10^{-5}) = 5421.32 \times 0.99991 = 5420.83 \text{ m}$$

Correction 56.

1. D'après les coordonnées de deux points A et B , on trouve la distance $D_p = AB = 5427.380 \text{ m}$. On obtient la distance sur l'ellipsoïde $D_e = D_p(1 - 8 \times 10^{-5}) = 5426.946 \text{ m}$. La correction du passage de D_e à la distance corde D_0 est négligeable (0.1 mm), on prend $D_0 = D_e = 5426.946 \text{ m}$. Pour calculer la distance suivant la pente, on utilise la formule rigoureuse:

$$D_0 = D_p \sqrt{\frac{1 - \frac{\Delta H^2}{D_p^2}}{\left(1 + \frac{H_A}{R}\right)\left(1 + \frac{H_B}{R}\right)}} \Rightarrow D_p = D_0 \sqrt{\frac{\Delta H^2}{D_0^2} + \left(1 + \frac{H_A}{R}\right)\left(1 + \frac{H_B}{R}\right)}$$

Or $\Delta H = 200 \text{ m}$, on obtient numériquement $D_p = 5431.565 \text{ m}$.

Correction 57.

On a mesuré une distance suivant la pente $D_p = 20130.858 \text{ m}$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07 \text{ m}$, $H_B = 507.75 \text{ m}$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378 \text{ km}$.

1. On calcule D_0 en utilisant la formule rigoureuse (voir ci-dessus), on obtient $D_0 = 20127.839 \text{ m}$. Calculons la correction C_4 telle que $D_e = D_0 + C_4$ avec $C_4 = \frac{D_0^3}{24R^2} = 0.008 \text{ m}$, d'où $D_e = 20127.847 \text{ m}$.

2. On obtient $D_r = m \cdot D_e = 20124.835 \text{ m}$.

3. Les coordonnées géodésiques du point A sont : $\lambda = 10.72453 \text{ gr}$, $\varphi = 41.44903 \text{ gr}$. Par des observations astronomiques, on a déterminé les coordonnées astronomiques $\lambda_a = 10.72574 \text{ gr}$ et $\varphi_a = 41.45052 \text{ gr}$ du point A et l'azimut astronomique de la direction AB soit $Aza = 89.68499 \text{ gr}$. L'azimut géodésique de la direction AB obtenu par l'azimut astronomique est :

$$\text{L'Equation de Laplace: } Azg = Aza + (\lambda - \lambda_a) \cdot \sin \varphi = 89.68499 - 0.00073 = 89.68426 \text{ gr}$$

4. Le gisement G de la direction AB est donné par la formule :

$$G = Azg - \gamma + Dv = Azg - (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 + Dv$$

Numériquement, on obtient:

$$G = 89.68426 - (10.72453 - 11.00) \sin 40 + 0.00188 = 89.84806 \text{ gr}$$

5. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie de B sont:

$$\begin{cases} X_B = X_A + D_r \sin G = 478022.43 + 20124.835 \sin(89.84806) = 497891.92 \text{ m} \\ Y_B = Y_A + D_r \cos G = 444702.22 + 20124.835 \cos(89.84806) = 447897.87 \text{ m} \end{cases}$$

6. L'azimut de B vers A est tel que:

$$Azg_{BA} = G_{BA} + \gamma = G + 200gr + (\lambda_B - \lambda_0) \sin \varphi_0 = 289.84806 - 0.04183 = 289.80623 \text{ gr}$$

Correction 58.

On donne deux points A et B dont les coordonnées géodésiques dans le système géodésique Tunisien sont:

$$A \begin{cases} \varphi = 40.4549830 \text{ gr} \\ \lambda = 9.59542429 \text{ gr} \\ h = 742.40 \text{ m} \end{cases} \quad B \begin{cases} \varphi' = 40.3385665 \text{ gr} \\ \lambda' = 9.45483610 \text{ gr} \\ h' = 987.00 \text{ m} \end{cases}$$

On a mesuré la distance D_P suivant la pente entre A et B soit $D_P = 16259.249 \text{ m}$.

1. Calculons la distance corde D_0 par la formule rigoureuse, $\Delta h = 244.60 \text{ m}$, on trouve:

$$D_0 = D_P \sqrt{\frac{1 - \frac{\Delta h^2}{D_P^2}}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)\left(1 + \frac{h'}{R}\right)}} = 16255.205 \text{ m}$$

La correction $C_4 = \frac{D_0^3}{24R^2} = +0.004 \text{ m}$, d'où $D_e = D_0 + C_4 = 16255.209 \text{ m}$

2. L'expression du module linéaire m de la représentation plane Lambert Nord Tunisie est donnée par la formule $m(\varphi) = \frac{k_n \sin \varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi) \cos \varphi}$, avec $R = R_0 \exp(-(L - L_0) \sin \varphi_0)$ et $R_0 = N_0 \cotg \varphi_0$, $\varphi_0 = 40 \text{ gr}$.

3. Le module linéaire moyen des modules linéaires calculés en A et B est $\bar{m} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)$.
Le calcul donne:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_n \sin \varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi) \cos \varphi} + \frac{k_n \sin \varphi_0 R(\varphi')}{N(\varphi') \cos \varphi'} \right) \Rightarrow \\ \bar{m} &= \frac{1}{2} \cdot k_n \sin \varphi_0 N_0 \cotg \varphi_0 \left(\frac{e^{-L_A \sin \varphi_0} \cdot e^{L_0 \sin \varphi_0}}{N_A \cos \varphi} + \frac{e^{-L_B \sin \varphi_0} \cdot e^{L_0 \sin \varphi_0}}{N_B \cos \varphi'} \right) \Rightarrow \\ \bar{m} &= \frac{k_n \cdot \cos \varphi_0 e^{L_0 \sin \varphi_0}}{2\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \left(\frac{e^{-L_A \sin \varphi_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} + \frac{e^{-L_B \sin \varphi_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}{\cos \varphi'} \right) \end{aligned}$$

On rappelle que $L_A = L(\varphi)$, $L_B = L(\varphi')$ et $L_0 = L(\varphi_0) = L(40^{\text{gr}})$ avec $L = L(\phi) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \phi}{1 - e \sin \phi}$. On obtient:

$$L_0 = 0.670273351, \quad L_A = 0.679091112831, \quad L_B = 0.676830474$$

Numériquement on obtient:

$$\overline{m} = 0.600313287362 \times (0.832607761877 + 0.832598294091) = 0.99964532$$

4. La distance réduite au plan de la représentation plane Lambert Nord Tunisie est $D_r = 0.99964532$. $D_e = 0.99964532 \times 16255.209 = 16249.444 \text{ m}$.

5. Le gisement G de la direction AB vaut $G = Azg - \gamma = Azg - (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0$ avec $\lambda_0 = 11 \text{ gr}$.
Ce qui donne:

$$G = 249.310168 + 0.825589 = 250.135757 \text{ gr}$$

6a. Calculons (X, Y) les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point A . Les formules sont ci-dessous:

$$\begin{cases} X = 500000.00 \text{ m} + kR \sin \Omega = X_0 + kR \sin \Omega \\ Y = 300000.00 \text{ m} + k(R_0 - R \cos \Omega) = Y_0 + k(R_0 - R \cos \Omega), \text{ avec :} \\ \Omega = \Omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0, R = R(\varphi) = R_0 \exp(-(L - L_0) \sin \varphi_0), R_0 = N_0 \cotg \varphi_0, \\ N_0 = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{-1/2} \\ L = L(\varphi) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}, L_0 = L(\varphi_0) \\ a = 6378249.20 \text{ m}, e^2 = 0.0068034877, k_n = 0.999625544. \end{cases}$$

Les calculs donnent:

$$\begin{cases} L_0 = L(40.0 \text{ gr}) = \text{Logtg}(50 \text{ gr} 4 + 20 \text{ gr}) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin 40}{1 - e \sin 40} = 0.670273350194 \\ L = 0.679091112831, R_0 = 8789242.725 \text{ m} \Rightarrow R = 8743806.361 \text{ m} \\ \Omega = -0.82558888 \text{ gr} \\ X = 500000.00 \text{ m} + kR \sin \Omega = 500000.00 - 113346.84 = 386653.16 \text{ m} \\ Y = 300000.00 \text{ m} + k(R_0 - R \cos \Omega) = 300000.00 + 46154.32 = 346154.32 \text{ m} \end{cases}$$

6b. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie (X', Y') du point B à partir de celles de A sont obtenues comme suit:

$$\begin{cases} X' = X + D_r \sin G = 386653.16 + 16249.444 \sin(250.135757) = 375138.59 \text{ m} \\ Y' = Y + D_r \cos G = 346154.32 + 16249.444 \cos(250.135757) = 334688.76 \text{ m} \end{cases}$$

7a. Calcul direct des coordonnées (X'', Y'') de B à partir de (φ', λ') . Les calculs donnent:

$$\begin{cases} L_0 = 0.670273350194, R_0 = 8789242.725 \text{ m} \\ L' = 0.676830473905, \Rightarrow R' = 8755432.348 \text{ m} \\ \Omega' = (\lambda' - \lambda_0) \sin \varphi_0 = -0.90822455 \text{ gr} \\ X'' = 500000.00 \text{ m} + kR' \sin \Omega' = 500000.00 - 124857.13 = 375142.87 \text{ m} \\ Y'' = 300000.00 \text{ m} + k(R_0 - R' \cos \Omega') = 300000.00 + 34688.36 = 334688.36 \text{ m} \end{cases}$$

7b. La comparaison des 2 calculs donne les écarts suivants:

$$\delta X = X'' - X' = 4.28 \text{ m}, \quad \delta Y = Y'' - Y' = -0.40 \text{ m}$$

Ces écarts sont dûs certainement aux mesures des distances et de l'adoption du gisement à partir d'un azimut géodésique où on a négligé la correction de la corde.

5.6.3. LA REPRÉSENTATION PLANE UTM

Correction 59.

Dans cet exercice, on voudrait justifier l'arrêt à l'ordre 8 de l'expression de $Y(UTM)$ en fonction de λ . On donne: $\varphi = 40.00 \text{ gr}$ et $a = 6378249.20 \text{ m}$, $e^2 = 0.0068034877$.

1. Calcul des constantes:

$$\begin{aligned} - e'2 &= \frac{e^2}{1-e^2} = 0.0068500922, \\ - \eta^2 &= e'^2 \cos^2 \varphi = 0.0044834436, \\ - t^2 &= t g^2 \varphi = 0.5278640450, \\ - N(\varphi) &= a(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = 6385758.629 \text{ m}. \end{aligned}$$

2. Calculons le coefficient a_8 :

$$a_8 = \frac{N \cos^7 \varphi \sin \varphi}{40320} (165 - 61 t^2 + 537 t^4 + 9679 \eta^2 - 23278 t^2 \eta^2 + 9244 \eta^4 + 358 t^4 \eta^2 - 19788 t^2 \eta^4)$$

5

D'où:

$$\begin{aligned} a_8 &= 21.1161225038.(165 - 32.1997067450 + 149.6299216520 + 46.792506044 \\ &\quad - 55.0908478386 + 0.1858161077 + 0.4472382097 - 0.2099652410) \Rightarrow \\ a_8 &= 21.1161225038 \times 274.5549621888 = 5797.5362156 \end{aligned}$$

3. On donne $\lambda = 1.23546 \text{ gr} = 1.23546 \times \frac{\pi}{200} \text{ rd} = 0.0194065602 \text{ rd}$, d'où:

$$a_8 \cdot \lambda^8 = 5797.5362156 \times 0.0194065602^8 = 1,1663583379608746088286561960847 \times 10^{-7} \text{ mm}$$

On peut conclure que le terme $a_8 \lambda^8$ est très négligeable. On s'arrête donc à l'ordre 7 dans le calcul des coordonnées UTM.

Correction 60.

1. Calculons les constantes $N, a_1, a_2, a_3, g(\varphi)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = 6386059.045 \text{ m} \\ a_1 = N(\varphi) \cdot \cos \varphi = 5111689.850 \text{ m} \\ a_2 = \frac{a_1}{2} \cdot \sin \varphi = 1531988.877 \text{ m} \\ a_3 = \frac{a_1 \cos^2 \varphi}{6} (1 - t g^2 \varphi + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi) = 545853.848 \times 0.4436262703 = 242155.107 \text{ m} \\ g(\varphi) = a(1 - e^2)(1.0051353 \cdot \varphi - 0.0025731 \sin 2\varphi) = 6334854.860 \times 0.643590523 \Rightarrow \\ g(\varphi) = 4077052.552 \text{ m} \\ \lambda - \lambda_0 = \left(11.9656 - 9 \times \frac{200}{180} \right) \cdot \frac{\pi}{200} = 0.030875572 \text{ rd} \\ (\lambda - \lambda_0)^2_{rd} = 0.000953301 \quad (\lambda - \lambda_0)^3_{rd} = 0.000029434 \end{array} \right.$$

D'où le calcul des coordonnées:

$$\begin{aligned} X &= a_1.(\lambda - \lambda_0) + a_3.(\lambda - \lambda_0)^3 = 5111689.850 \times 0.030875572 + 242155.107 \times 0.000029434 \Rightarrow \\ &X = 157833.476 = \mathbf{157\,833.48\,m} \\ Y &= g(\varphi) + a_2.(\lambda - \lambda_0)^2 = 4077052.552 + 1531988.877 \times 0.000029434 \Rightarrow \\ &Y = 4078512.998\,m \approx \mathbf{4\,078\,512.97\,m} \end{aligned}$$

On retrouve aux erreurs (3cm) près les coordonnées proposées du point A.

2. Soit le point B de coordonnées ($X' = 160595.98\,m$; $Y' = 4078564.53\,m$). Sachant que B est situé sur le même parallèle que A, il s'ensuit $\varphi_B = \varphi_A = \varphi$. De l'expression de l'ordonnée Y_B du point B, on a l'équation:

$$\begin{aligned} Y_B &= g(\varphi) + a_2.(\lambda' - \lambda_0)^2 \Rightarrow \lambda' = \lambda_0 + \sqrt{\frac{Y_B - g(\varphi)}{a_2}} \Rightarrow \\ \lambda' &= 10\,gr + \sqrt{\frac{4078564.53 - 4077052.552}{1531988.877}} \times \frac{200}{\pi} = 10 + 1.99998 = 11.99998\,gr \end{aligned}$$

3. Calcul du gisement G et la distance AB:

$$\begin{aligned} X' - X &= 2762.50\,m, \quad Y' - Y = 51.56\,m \Rightarrow tgG = \frac{X' - X}{Y' - Y} = \frac{2762.50}{51.56} = 53,578355 \Rightarrow \\ G &= 98.811934\,gr, \quad D = \sqrt{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2} = 2762.981\,m \end{aligned}$$

4-5. Calculons les convergences des méridiens aux points A et B. $\lambda - \lambda_0$ et $\lambda' - \lambda_0$ sont des petites valeurs, par suite la convergence des méridiens est donnée par $\gamma = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi$, d'où:

$$\begin{aligned} \gamma_A &= (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi = 1.17819\,gr \\ \gamma_B &= (\lambda' - \lambda_0)\sin\varphi = 1.1988\,gr \end{aligned}$$

On obtient les azimuts géodésiques de $A \rightarrow B$ et de $B \rightarrow A$:

$$\begin{aligned} Azg_{AB} &= G + \gamma_A = 98.811934 + 1.17819 = 99.990124\,gr \\ Azg_{BA} &= G + 200\,gr + \gamma_B = 298.811934 + 1.1988 = 300.010734\,gr \end{aligned}$$

6. En calculant les coordonnées UTM de A et B, on trouve respectivement $X_A = 657770.34\,m$, $Y_A = 4076891.20\,m$; $X_B = 660531.74\,m$, $Y_B = 4076942.76\,m$.

Le calcul de la distance AB par les coordonnées UTM donne:

$$D' = \sqrt{(660531.74 - 657770.34)^2 + (4076942.76 - 4076891.20)^2} = 2761.881\,m$$

D'où l'estimation de l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées tronquées de l'UTM:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{D' - D}{D} = \frac{2761.881 - 2762.981}{2762.981} = \frac{-1.1}{2762.981} = -3.98 \times 10^{-4} \approx 4.10^{-4}.m$$

5.7. LES TRANSFORMATIONS DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

5.7.1. LES TRANSFORMATIONS 2D DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

Correction 61.

On donne le modèle bidimensionnel suivant concernant la transformation de passage entre deux systèmes géodésiques, définie par:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21.662 \text{ m} \\ -627.748 \text{ m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.999988149 & -0.000025928 \\ 0.000025928 & 0.999988149 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

1. On peut écrire le modèle ci-dessus sous la forme:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

qui donne les deux équations:

$$X_2 = T_x + aX_1 - bY_1$$

$$Y_2 = T_y + bX_1 + aY_1$$

Posons :

$$Z = X_2 + iY_2, \quad z = X_1 + iY_1, \quad \alpha = T_x + iT_y, \quad \beta = a + ib$$

Sous forme de nombres complexes, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} X_2 + iY_2 &= T_x + iT_y + aX_1 - bY_1 + ibX_1 + iaY_1 = \alpha + X_1(a + ib) + Y_1(ia - b) \Rightarrow \\ Z &= \alpha + X_1\beta + iY_1(a + ib) = \alpha + (X_1 + iY_1)(a + ib) = \alpha + \beta.z = Z \end{aligned}$$

Le nombre complexe β s'écrit aussi $\beta = a + ib = \rho.e^{i\theta}$. La transformation Z devient $Z = \alpha + \rho.e^{i\theta}.z$ où α le vecteur translation entre les deux systèmes S_1 et S_2 , ρ le facteur d'échelle et θ l'angle de rotation entre les systèmes S_1 et S_2 .

La transformation bidimensionnelle s'écrit est sous la forme:

$$Z = \alpha + \beta.z$$

C'est une fonction conforme ou holomorphe (absence de la variable $\bar{z}$ conjuguée de z), elle s'agit donc du modèle bidimensionnel de Helmert.

2. De $a + ib = \rho.e^{i\theta}$, on obtient $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 0.999988$ le facteur échelle et la rotation θ telle que $\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{0.000025928}{0.999988149} = 2.592830727636$ soit $\theta = 0,001651 \text{ gr}$ l'angle de rotation entre les deux systèmes géodésiques.

5.7.2. LES TRANSFORMATIONS 3D DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

Correction 62.

Soient les trois tableaux ci-dessous des coordonnées 3D respectivement dans les systèmes S_1 et S_2 et à transformer dans le système S_2 :

<i>Nom</i>	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4300244.860	1062094.681	4574775.629
2	4277737.502	1115558.251	4582961.996
3	4276816.431	1081197.897	4591886.356
4	4315183.431	1135854.241	4542857.520
5	4285934.717	1110917.314	4576361.689
6	4217271.349	1193915.699	4618635.464
7	4292630.700	1079310.256	4579117.105

<i>Nom</i>	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4300245.018	1062094.592	4574775.510
2	4277737.661	1115558.164	4582961.878
3	4276816.590	1081197.809	4591886.238
4	4315183.590	1135854.153	4542857.402
5	4285934.876	1110917.227	4576361.571
6	4217271.512	1193915.612	4618635.348
7	4292630.858	1079310.168	4579116.986

<i>Nom</i>	X(m)	Y(m)	Z(m)
A	4351694.594	1056274.819	4526994.706
B	4319956.455	1095408.043	4548544.867
C	4303467.472	1110727.257	4560823.460
D	4202413.995	1221146.648	4625014.614

1. Je renvoie le lecteur à mon document 'LA TRANSFORMATION DE BURSA-WOLF A SEPT PARAMÈTRES' (<https://www.vixra.org/pdf/2312.0123v1.pdf>), où il trouve les différentes étapes de la résolution du problème. Ce-ci nécessite une programmation que le lecteur peut choisir en fonction de ses connaissances en informatique.

2. La transformation des coordonnées 3D des points du troisième tableau dans le système S_2 se fait en utilisant la formule ci-dessous:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

où:

- $(X_2, Y_2, Z_2)^T$ les composantes du vecteur $\mathbf{X}_2$ dans le système S_2 , l'indice T désigne transposée;
- $(X_1, Y_1, Z_1)^T$ les composantes du vecteur $\mathbf{X}_1$ dans le système S_1 ;
- $\mathbf{T}$ est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2;
- $1 + m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes;
- $R(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation 3×3 pour passer du système 1 au système 2.

5.8. NOTIONS SUR LE MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL DE LA TERRE

Correction 63.

1. D'après la première loi de Kepler: les satellites tournent autour de la Terre en suivant des orbites en forme d'ellipse dont la Terre occupe un des foyers. Exprimons les coordonnées du satellite dans le plan de l'orbite (voir Fig.5.16) avec :

- O est le centre de la Terre et aussi un foyer de l'ellipse,
- S la position du satellite,
- v l'anomalie vraie,
- $E = \angle PO'S'$, est appelé l'anomalie excentrique,
- l'axe $O\eta$ est perpendiculaire à l'axe $O\xi$.

Dans le repère $O\xi\eta$, la position du satellite est donnée par les coordonnées (ξ, η) :

$$OS = \begin{cases} \xi = OS \cos v = r \cos v \\ \eta = OS \sin v = r \sin v \end{cases} \quad \text{avec} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

En faisant intervenir l'anomalie excentrique E , on obtient:

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$$

Calculons r^2 :

$$\begin{aligned} r^2 &= \xi^2 + \eta^2 = a^2(\cos E - e)^2 + a^2(1 - e^2)\sin^2 E = a^2[\cos^2 E - 2e\cos E + e^2 + \sin^2 E - e^2(1 - \cos^2 E)] \\ &\Rightarrow r^2 = a^2(1 - 2e\cos E + e^2\cancel{\cos^2 E} + e^2\cos^2 E) = a^2(1 - e\cos E)^2 \Rightarrow r = a(1 - e\cos E) > 0 \end{aligned}$$

2. D'après les équations du mouvement du satellite ci-dessus, on a $tg v = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e}$.

On note $\alpha = tg v$, mais $tg v = tg 2.(v/2) = \frac{2tg \frac{v}{2}}{1 - tg^2 \frac{v}{2}} = \alpha$. Résolvons donc l'équation précé-

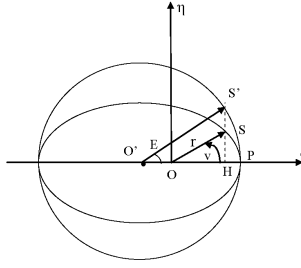


Figure 5.15 | Le plan de l'orbite du satellite artificiel

dente, en posant $t = tg \frac{v}{2}$, soit $\alpha t^2 + 2t - \alpha = 0$. On obtient:

$$\begin{aligned} \Delta' &= 1 + \alpha^2 = 1 + \frac{(1 - e^2) \sin^2 E}{(\cos E - e)^2} = \frac{(\cos^2 E - 2e \cos E + e^2) + (1 - e^2) \sin^2 E}{(\cos E - e)^2} \Rightarrow \\ \Delta' &= \frac{\cos^2 E - 2e \cos E + e^2 + \sin^2 E - e^2 (1 - \cos^2 E)}{(\cos E - e)^2} = \frac{1 - 2e \cos E + e^2 + e^2 \cos^2 E}{(\cos E - e)^2} = \frac{(1 - e \cos E)^2}{(\cos E - e)^2} \\ &\Rightarrow \Delta' = \frac{1 - e \cos E}{\cos E - e} > 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

La racine positive t_1 vaut:

$$\begin{aligned} t_1 &= tg \frac{v}{2} = \frac{-1 + \Delta'}{\alpha} = \frac{-1 + \frac{1 - e \cos E}{\cos E - e}}{\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e}} = \frac{-\cos E + e + 1 - e \cos E}{\sqrt{1 - e^2} \sin E} = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{\sqrt{1 - e^2} \sin E} \Rightarrow \\ t_1 &= tg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{(1 + e)^2}{(1 - e)(1 + e)}} \cdot \frac{2 \sin^2(E/2)}{2 \sin(E/2) \cos(E/2)} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} tg \frac{E}{2} \end{aligned}$$

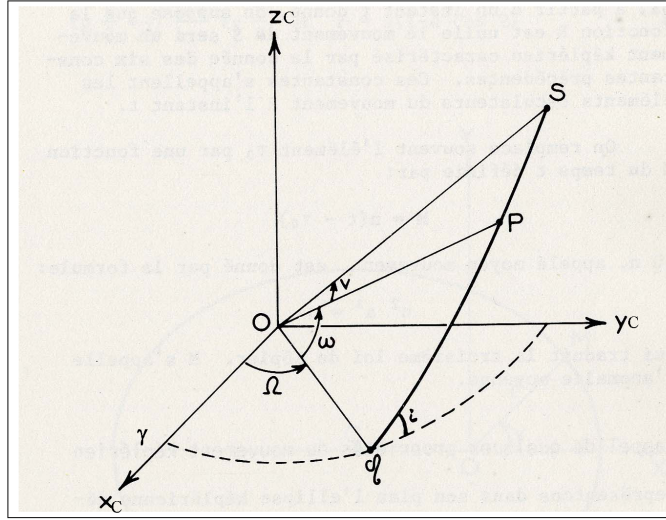
Correction 64.

1. Rappels du cours: considérons un satellite de masse m défini par le vecteur $\mathbf{OS} = \mathbf{r}$. La Terre est considérée comme une masse ponctuelle de masse m' située au point O centre de la Terre (voir Fig.5.17). L'équation du mouvement est donnée par:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = -G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r}$$

avec $\mathbf{F}$ la force d'attraction gravitationnelle et G est la constante universelle de gravitation de valeur égale à $(6673 \pm 1) \times 10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$. On pose :

$$\mu = Gm' = (3986005 \pm 0.5) \times 10^8 m^3 s^{-2}$$



5

Figure 5.16 | Le Repère Céleste

L'équation du mouvement ci-dessus s'écrit:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

On rappelle un résultat du mouvement donné par l'équation ci-dessus dit la 2ème loi de Kepler, soit $C = r^2 \frac{dv}{dt}$, C est appelée la constante des aires qu'on aura besoin pour les calculs. Comme:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3} X_C = 0 \\ \ddot{Y}_C + \frac{\mu}{r^3} Y_C = 0 \\ \ddot{Z}_C + \frac{\mu}{r^3} Z_C = 0 \end{cases}$$

D'après l'exercice précédent, on sait que dans le repère $O\xi\eta$, la position du satellite est donnée par les coordonnées (ξ, η) :

$$OS = \begin{cases} \xi = OS \cos v = r \cos v \\ \eta = OS \sin v = r \sin v \\ \zeta = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad p = \frac{C^2}{\mu}$$

L'objet de l'exercice actuel est de vérifier que $\ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3} X_C = 0$ sachant que $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$.

Exprimons maintenant les coordonnées (X_C, Y_C, Z_C) du satellite dans le référentiel céleste $X_C Y_C Z_C$ (voir Fig. 5.17). Il est nécessaire de faire successivement:

1. une rotation de $-\omega$ autour de l'axe $O\xi$,
2. une rotation de $-i$ autour de l'axe $O\Omega$,
3. une rotation de $-\Omega$ autour de l'axe OZ_C .

Les matrices de rotations sont les suivantes:

$$R(-\Omega) = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et:

$$R(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

et:

$$R(-\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où:

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = R(-\Omega).R(-i).R(-\omega) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Ce qui donne après calculs:

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i & \sin\Omega\sin\omega \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin i.\sin\omega & \sin i.\cos\omega & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

En posant:

$$\begin{aligned} P_X &= \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ P_Y &= -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ Q_X &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ Q_Y &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \end{aligned}$$

On obtient comme $\zeta = 0$:

$$\begin{aligned} X_C &= P_X\xi + P_Y\eta \\ Y_C &= Q_X\xi + Q_Y\eta \\ Z_C &= \xi\sin i.\sin\omega + \eta\sin i.\cos\omega \end{aligned}$$

On s'intéresse à la première équation $X_C = P_X\xi + P_Y\eta$. Les termes P_X, P_Y sont des constantes, par suite, on obtient:

$$\frac{d^2 X_C}{dt^2} = P_X \frac{d^2 \xi}{dt^2} + P_Y \frac{d^2 \eta}{dt^2}$$

On va calculer les dérivées première et seconde par rapport à la variable temps t des coordonnées (ξ, η) .

De $\xi = r \cos v$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos v - r \sin v \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos v - r \sin v \frac{C}{r^2} = \frac{dr}{dt} \cos v - C \frac{\sin v}{r} \Rightarrow \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos v - \sin v \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{C \sin v}{r^2} \frac{dr}{dt} - \frac{C \cos v}{r} \frac{dv}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos v - \sin v \frac{dr}{dt} \frac{C}{r^2} + \frac{C \sin v}{r^2} \frac{dr}{dt} - \frac{C^2 \cos v}{r^3} = \cos v \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} \right)\end{aligned}$$

Or $r = p/(1 + e \sin v) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{p e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{C r^2 p e \sin v}{p^2 r^2} = \frac{C e \sin v}{p}$. Le calcul de la dérivée seconde donne:

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{C e \cos v}{p} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{C e \cos v}{p} \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{e C^2 \cos v}{p r^2} \Rightarrow \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \cos v \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} \right) = \cos v \left(\frac{e C^2 \cos v}{p r^2} - \frac{C^2}{r^3} \right) = \frac{C^2 \cos v}{r^2} \left(\frac{e \cos v}{p} - \frac{1}{r} \right) \Rightarrow \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{C^2 \cos v}{r^2} \left(\frac{e \cos v}{p} - \frac{1 + e \cos v}{p} \right) = -\frac{C^2 \cos v}{p r^2}\end{aligned}$$

De même pour $\eta = r \sin v$, on obtient $\frac{d\eta}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin v + \cos v \frac{C}{r}$, par suite on arrive à:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{C^2 \sin v}{r^2} \left(\frac{e \cos v}{p} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{C^2 \sin v}{p r^2}$$

Répondons à la question demandée:

$$\begin{aligned}& \frac{d^2 X_C}{dt^2} \stackrel{?}{=} -\frac{\mu}{r^3} X_C \\ & P_X \frac{d^2 \xi}{dt^2} + P_Y \frac{d^2 \eta}{dt^2} \stackrel{?}{=} -\frac{\mu}{r^3} X_C \\ & -P_X \frac{C^2 \cos v}{p r^2} - P_Y \frac{C^2 \sin v}{p r^2} \stackrel{?}{=} -\frac{\mu}{r^3} X_C \\ & -P_X \frac{C^2 r \cos v}{p r^3} - P_Y \frac{C^2 r \sin v}{p r^3} \stackrel{?}{=} -\frac{\mu}{r^3} X_C \\ & -\frac{C^2}{p r^3} (P_X \xi + P_Y \eta) \stackrel{?}{=} -\frac{\mu}{r^3} X_C, \quad X_C = P_X \xi + P_Y \eta, \quad p = \frac{C^2}{\mu} \Rightarrow \\ & -\frac{\mu}{r^3} X_C = -\frac{\mu}{r^3} X_C \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Correction 65.

1. Une comète décrit autour du Soleil une ellipse d'excentricité e , de demi-grand axe a et de demi-petit axe b où le Soleil occupe un des foyers. L'équation de l'orbite de la comète en coordonnées polaires est donnée par :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

avec r la distance Soleil- comète. Comme $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$, on a :

$$\text{- au périhélie, } v = 0 \text{ rad} \Rightarrow r_1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e),$$

$$\text{- à l'aphélie, } v = \pi \text{ rad} \Rightarrow r_2 = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e).$$

2. On a les données suivantes: $r_1 = 0.53 \text{ UA}$ et $r_2 = 35.1 \text{ UA}$ d'où $2a = r_1 + r_2 = 35.63 \text{ UA} \Rightarrow a = 17.815 \text{ UA}$, soit en km , $a = 17.815 \times 149597870 \text{ km} = 2665086054.05 \text{ km}$. De $r_1 = a(1 - e) \Rightarrow e = \frac{a - r_1}{a}$. Numériquement, on obtient $e = \frac{17.815 - 0.53}{17.815} = 0.970249789503$.

3. En utilisant la loi des aires et la troisième loi de Kepler, on obtient $C = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1 - e^2}$ ce qui donne :

$$C^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} a^2 \cdot a^2 (1 - e^2) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{a^2 (1 - e^2)}{a} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{b^2}{a} \Rightarrow$$

$$C^2 = \mu \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{a} \cdot GM$$

où $\mu = G.M$ avec G , M désignent respectivement la constante de la gravitation universelle et la masse du Soleil.

4. Dans le plan de l'orbite $O\xi\eta$, les composantes du vecteur $v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ sont:

$$v = \begin{vmatrix} \frac{dr}{dt} \\ r \cdot \frac{dv}{dt} \end{vmatrix} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$$

Or $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dt}$, d'où:

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2} = Cu^2$$

v^2 s'écrit:

$$v^2 = \frac{1}{u^4} \cdot C^2 u^4 \cdot \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + \frac{1}{u^2} \cdot C^2 u^4 = C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{dv} \right)^2 \right)$$

De $u = \frac{1 + e \cos v}{a(1 - e^2)} \Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{-e \sin v}{a(1 - e^2)}$, on peut écrire:

$$v^2 = C^2 \left(\frac{e^2 \sin^2 v}{a^2(1 - e^2)^2} + \frac{(1 + e \cos v)^2}{a^2(1 - e^2)^2} \right) = \frac{C^2}{a^2(1 - e^2)^2} (e^2 + 1 + 2e \cos v) \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{C^2}{a(1 - e^2)} \left(\frac{2(1 + e \cos v)}{a(1 - e^2)} - \frac{(1 - e^2)}{a(1 - e^2)} \right) = \frac{C^2}{a(1 - e^2)} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

D'après la question précédente, on a $C^2 = \frac{b^2}{a} \cdot G.M = \frac{a^2(1 - e^2)}{a} \cdot G.M \Rightarrow \frac{C^2}{a(1 - e^2)} = G.M$,
il s'ensuit:

$$v^2 = G.M. \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

5. A l'apogée:

$$r = r_2 = a(1 + e) \Rightarrow v_A^2 = GM \left(\frac{2}{a(1 + e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1 - e}{1 + e}$$

5

Au périgée, on a :

$$r = r_1 = a(1 - e) \Rightarrow v_P^2 = GM \left(\frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1 + e}{1 - e}$$

Le rapport $v_A/v_P = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{1 - e}{1 + e}} = \frac{1 - e}{1 + e}$.

6. Numériquement, on obtient:

$$\frac{v_A}{v_P} = \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{1 - 0.970249789503}{1 + 0.970249789503} = \frac{0.029750210497}{1.970249789503} = 0,015099$$

6

THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS

6.1. MODÈLES LINÉAIRES DE COMPENSATION

Correction 66.

1. Le système d'équations d'observations est comme suit:

$$\dot{A} = 43.77160 \, gr + v_1$$

$$\dot{B} = 98.39043 \, gr + v_2$$

$$\dot{C} = 57.83858 \, gr + v_3$$

Comme $\dot{A} + \dot{B} + \dot{C} = 200.00000 \, gr \Rightarrow \dot{C} = 200.00000 - (\dot{A} + \dot{B})$. Le système ci-dessus devient:

$$\dot{A} = 43.77160 + v_1$$

$$\dot{B} = 98.39043 + v_2$$

$$-\dot{A} - \dot{B} = -200.0000 + 57.83858 + v_3 = -142.16142 + v_3$$

Les inconnues sont $\dot{A}$ et $\dot{B}$. L'équation des moindres carrés est:

$$\mathcal{A}.\mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{V}$$

Avec:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 43.77160 \\ 98.39043 \\ -142.16142 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

La matrice des poids est $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3.1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3.1^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3.1^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3.1^2} \cdot I_3$$

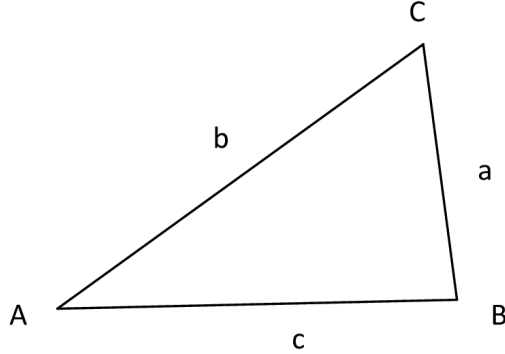


Figure 6.1 | Le triangle ABC

où I_3 est la matrice unité des matrices carrées 3×3 . La solution des moindres carrés est:

$$\overline{\mathcal{X}} = (\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{W} \cdot \mathcal{A})^{-1} \cdot \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{W} \cdot \mathcal{L}$$

6

Posons $\mathcal{N} = \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{W} \cdot \mathcal{A}$ la matrice normale, son inverse est $\mathcal{N}^{-1} = 3.1^2 (\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{A})^{-1}$. Le vecteur solution $\overline{\mathcal{X}} = (\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{A})^{-1} \cdot \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{L}$.

Numériquement, on obtient la matrice :

$$\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{A})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $\mathcal{A}^T \mathcal{L}$:

$$\mathcal{A}^T \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43.77160 \\ 98.39043 \\ -142.16142 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 185.93302 \\ 240.55185 \end{pmatrix}$$

Par suite, on obtient le vecteur $\overline{\mathcal{X}} = (\dot{A}, \dot{B})^T$:

$$\overline{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 185.93302 \\ 240.55185 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.77140 \text{ gr} \\ 98.39023 \text{ gr} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{C} = 200 \text{ gr} - \dot{A} - \dot{B} = 57.83837 \text{ gr}$$

On obtient bien que $\dot{A} + \dot{B} + \dot{C} = 200.00000 \text{ gr}$.

Calculons le vecteur des résidus:

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{A} - 43.77160 = 43.77140 - 43.77160 = -2.0 \text{ dmgr} \\ v_2 &= \dot{B} - 98.39043 = 98.39023 - 98.39043 = -2.0 \text{ dmgr} \\ v_3 &= 142.16142 - \dot{A} - \dot{B} = 142.16142 - 43.77140 - 98.39023 = -2.1 \text{ dmgr} \end{aligned}$$

La variance unitaire σ_0^2 vaut:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i v_i^2}{3-2} = \frac{\sum_{i=1}^3 v_i^2}{3.1^2} = 0.93$$

2. On passe au calcul des longueurs compensées des côtés a, b, c du triangle ABC par la méthode des équations d'observations. On écrit:

$$\begin{cases} da = v_1, \\ db = v_2, \end{cases}$$

Pour calculer dc , on utilise les angles compensés déterminés en question 1, on a:

$$\begin{aligned} - \operatorname{Arccos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= \dot{A}, \\ - \operatorname{Arccos} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} &= \dot{B}, \\ - \operatorname{Arccos} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= \dot{C}. \end{aligned}$$

On fait un développement au premier ordre de ces équations aux valeurs mesurées de a, b, c , les angles sont des constantes. On rappelle que si $y = \operatorname{Arccos} x \Rightarrow dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Je détaille les calculs pour la première équation ci-dessus, on obtient:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sin \dot{A}} \left[\frac{bdb + cdc - ada}{bc} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2b^2c^2} (cdb + bdc) \right] + \operatorname{Arccos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \dot{A} &= v_A \Rightarrow \\ \frac{ada}{bcsin \dot{A}} - \frac{db}{csin \dot{A}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2} \right) - \frac{dc}{bsin \dot{A}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c^2} \right) &= \dot{A} - \operatorname{Arccos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + v_A \end{aligned}$$

Les deux autres équations sont:

$$\begin{aligned} -\frac{da}{csin \dot{B}} \left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2} \right) + \frac{bdb}{acsin \dot{B}} - \frac{dc}{asin \dot{B}} \left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c^2} \right) &= \dot{B} - \operatorname{Arccos} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + v_B \\ -\frac{da}{bsin \dot{C}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2} \right) - \frac{db}{asin \dot{C}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2} \right) + \frac{cdc}{absin \dot{C}} &= \dot{C} - \operatorname{Arccos} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + v_C \end{aligned}$$

Pour faciliter les calculs, posons:

$$\begin{cases} L_A = \dot{A} - \operatorname{Arccos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ L_B = \dot{B} - \operatorname{Arccos} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \\ L_C = \dot{C} - \operatorname{Arccos} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Les termes L_j sont en radians. On obtient les équations d'observations des moindres

carrés avec les résidus:

$$\begin{aligned}
 da &= v_1 \\
 db &= v_2 \\
 \frac{ada}{bcsin\dot{A}} - \frac{db}{csin\dot{A}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2}\right) - \frac{dc}{bsin\dot{A}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c^2}\right) &= L_A + v_A \\
 -\frac{da}{csin\dot{B}} \left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2}\right) + \frac{bdb}{acsin\dot{B}} - \frac{dc}{asin\dot{B}} \left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c^2}\right) &= L_B + v_B \\
 -\frac{da}{bsin\dot{C}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}\right) - \frac{db}{asin\dot{C}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}\right) + \frac{cdc}{absin\dot{C}} &= L_C + v_C
 \end{aligned}$$

Qu'on écrit sous forme matricielle:

$$\mathcal{A}.\mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{V}$$

où:

- $\mathcal{A}$ la matrice des coefficients,
- $\mathcal{X}$ le vecteur des inconnues (les corrections da, db, dc),
- $\mathcal{L}$ le vecteur des observations, $\mathcal{L} = (0, 0, L_A, L_B, L_C)^T$,
- $\mathcal{V}$ le vecteur des résidues, $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_A, v_B, v_C)^T$,
- $\mathcal{P}$ la matrice des poids.

avec:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{bcsin\dot{A}} & -\frac{1}{csin\dot{A}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2}\right) & -\frac{1}{bsin\dot{A}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c^2}\right) \\ -\frac{1}{csin\dot{B}} \left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2}\right) & \frac{b}{acsin\dot{B}} & -\frac{1}{asin\dot{B}} \left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c^2}\right) \\ -\frac{1}{bsin\dot{C}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}\right) & -\frac{1}{asin\dot{C}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}\right) & \frac{c}{absin\dot{C}} \end{pmatrix}$$

La solution des moindres carrés est donnée par:

$$(\mathcal{A}^T.\mathcal{P}.\mathcal{A}).\mathcal{X} = \mathcal{A}^T.\mathcal{P}.\mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{X} = (\mathcal{A}^T.\mathcal{P}.\mathcal{A})^{-1}.\mathcal{A}^T.\mathcal{P}.\mathcal{L}$$

Numériquement, on obtient: -

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.00241 & -0.00611 & -0.00593 \\ -0.00249 & 0.00380 & -0.00156 \\ -0.00475 & -0.00410 & 0.00300 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = (0, 0, L_A, L_B, L_C)^T$$

Calculons les 3 dernières composantes L_{A_i} :

$$\begin{cases} L_A = \dot{A} - \text{Arccos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 43^{gr}.77140 - 43^{gr}.77199 = -5''.9 = -9.2677 \times 10^{-6} rd \\ L_B = \dot{B} - \text{Arccos} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = 98^{gr}.39023 - 98^{gr}.38944 = +7''.9 = 12.4093 \times 10^{-6} rd \\ L_C = \dot{C} - \text{Arccos} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 57^{gr}.83837 - 57^{gr}.83861 = -2''.4 = -3.7699 \times 10^{-6} rd \end{cases}$$

On arrive à:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.2677 \times 10^{-6} \\ +12.4093 \times 10^{-6} \\ -3.7699 \times 10^{-6} \end{pmatrix} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.2677 \\ +12.4093 \\ -3.7699 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.00241 & -0.00249 & -0.00475 \\ 0 & 1 & -0.00611 & 0.00380 & -0.00410 \\ 0 & 0 & -0.00593 & -0.00156 & 0.00300 \end{pmatrix}$$

La matrice de poids $\mathcal{P}$ avec les unités m^{-2}, rd^{-2} :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 4 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} \end{pmatrix}$$

Calculons $\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{L}$, on obtient:

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{L} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 4 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.2677 \\ +12.4093 \\ -3.7699 \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.39076 \\ 0.52323 \\ -0.15895 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{L} = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.00241 & -0.00249 & -0.00475 \\ 0 & 1 & -0.00611 & 0.00380 & -0.00410 \\ 0 & 0 & -0.00593 & -0.00156 & 0.00300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.39076 \\ 0.52323 \\ -0.15895 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1489.5618 \\ +5027.5126 \\ -1024.1180 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la matrice normale $N = \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{A}$, calculons $\mathcal{P} \cdot \mathcal{A}$:

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^{12}}{4.87^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.00241 & -0.00611 & -0.00593 \\ -0.00249 & 0.00380 & -0.00156 \\ -0.00475 & -0.00410 & 0.00300 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{A} = 10^5 \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 1016.1530 & -2576.2220 & -2500.3268 \\ -1049.8843 & 1602.2330 & -657.7588 \\ -2002.7913 & -1728.7251 & 1264.9208 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice normale $\mathcal{N} = \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{A}$, soit:

$$\mathcal{N} = 10^5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.00241 & -0.00249 & -0.00475 \\ 0 & 1 & -0.00611 & 0.00380 & -0.00410 \\ 0 & 0 & -0.00593 & -0.00156 & 0.00300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 1016.1530 & -2576.2220 & -2500.3268 \\ -1049.8843 & 1602.2330 & -657.7588 \\ -2002.7913 & -1728.7251 & 1264.9208 \end{pmatrix} =$$

$$\mathcal{N} = 10^5 \begin{pmatrix} 14.9017 & -1.9868 & -10.3963 \\ -1.9868 & 29.0170 & 7.5913 \\ -10.3963 & 7.5913 & 19.6478 \end{pmatrix}$$

Le calcul de l'inverse de la matrice normale $\mathcal{N}^{-1}$ donne:

$$\mathcal{N}^{-1} = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.1082 & -0.0084 & 0.0605 \\ -0.0084 & 0.0390 & -0.0195 \\ 0.0605 & -0.0195 & 0.0905 \end{pmatrix}$$

Par suite, on obtient le vecteur des inconnues $\overline{\mathcal{X}} = (da, db, dc)^T$:

$$\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{N}^{-1} \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{L} = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.1082 & -0.0084 & 0.0605 \\ -0.0084 & 0.0390 & -0.0195 \\ 0.0605 & -0.0195 & 0.0905 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1489.5618 \\ 5027.5126 \\ -1024.1180 \end{pmatrix} = 10^{-5} \begin{pmatrix} -265.36 \\ 228.56 \\ -280.84 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.003 \text{ m} \\ 0.002 \text{ m} \\ -0.003 \text{ m} \end{pmatrix}$$

Les valeurs des côtés compensés:

$$\hat{a} = 333.841 - 0.003 = 333.838 \text{ m}; \hat{b} = 525.847 + 0.002 = 525.849 \text{ m}; \hat{c} = 414.815 - 0.003 = 414.812 \text{ m}$$

Calculons le vecteur des résidus $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cdot \overline{\mathcal{X}} - \mathcal{L}$, ce qui donne:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.00241 & -0.00611 & -0.00593 \\ -0.00249 & 0.00380 & -0.00156 \\ -0.00475 & -0.00410 & 0.00300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.003 \text{ m} \\ 0.002 \text{ m} \\ -0.003 \text{ m} \end{pmatrix} - 10^{-6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.2677 \\ +12.4093 \\ -3.7699 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -0.003 \\ 0.002 \\ -1.66 \times 10^{-6} \\ +19.75 \times 10^{-6} \\ -2.95 \times 10^{-6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.27 \times 10^{-6} \\ +12.41 \times 10^{-6} \\ -3.77 \times 10^{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.003 \\ 0.002 \\ 7.61 \times 10^{-6} \\ 7.34 \times 10^{-6} \\ 0.82 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

D'où $\mathcal{V}^T \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{V} = \sum_{i=1}^{i=5} p_i v_i^2$ ce qui donne numériquement:

$$\mathcal{V}^T \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{V} = 36 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-2} + \frac{1}{4.87^2} (7.61^2 + 7.34^2 + 0.82^2) = 5.142$$

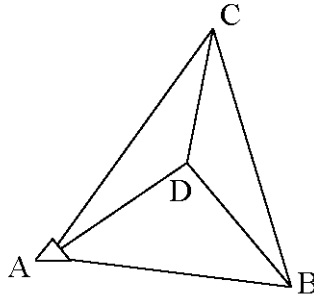


Figure 6.2 | La polygonale observée

On obtient donc la variance unitaire σ_0^2 :

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} p_i v_i^2}{5-3} = \frac{5.142}{2} = 2.571$$

Correction 67.

1. En nivellement de précision, on calcule la fermeture f d'un cheminement altimétrique de précision d'une longueur L entre le repère de départ et celui de l'arrivée. On compare f avec la tolérance s par kilomètre fournie par l'appareil utilisée, soit $f - s\sqrt{L}$. Donc $s\sqrt{L}$ est l'erreur moyenne quadratique σ acceptable du cheminement observé. Or le poids de l'observation entre deux repères d'une longueur L est donné par $\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{s^2 L}$. On obtient la réponse à la question 1. en supposant l'égalité des portées et que les observations sont non corrélées.

2. La polygonale $ABCD$ est représentée par (**Fig. 6.2**). On va considérer les altitudes comme inconnues, on va garder la même notation pour les altitudes compensées. Détaillons la première équation d'observations qui concerne $H_C - H_A = 1.878 \text{ m}$, soit:

$$H_C = H_A + 1.878 + v_1 \Rightarrow H_C = 3.048 + 1.878 = 4.926 + v_1 \Rightarrow \boxed{H_C = 4.926 + v_1}$$

On obtient les équations d'observations comme suit:

$$\begin{cases} H_C = 4.926 + v_1 \\ H_D = 6.879 + v_2 \\ -H_C + H_D = 1.954 + v_3 \\ H_B = 3.380 + v_4 \\ -H_B + H_D = 3.530 + v_5 \\ -H_B + H_C = 1.545 + v_6 \end{cases}$$

Ecrites sous forme matricielle $A.X = L + V$, avec $X = (H_B, H_C, H_D)^T$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.926 \\ 6.879 \\ 1.954 \\ 3.380 \\ 3.530 \\ 1.545 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

Les observations sont non corrélées, par suite la matrice de poids $W = (w_{ij})$ est diagonale.

On a $w_{11} = \frac{1}{AC} = \frac{1}{6.44}$; $w_{22} = \frac{1}{3.22} = \frac{2}{6.44}$. On peut écrire que :

$$W = \frac{1}{6.44} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme la solution des moindres est $(A^T.W.A)\bar{X} = A^T.W.L$, on peut faire disparaître le coefficient $1/(6.44)$, la matrice de poids devient:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a les éléments restants A^T et L :

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 4.926 \\ 6.879 \\ 1.954 \\ 3.380 \\ 3.530 \\ 1.545 \end{pmatrix}$$

Calculons $A^T.W.L$:

$$A^T.W.L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.926 \\ 2 \times 6.879 \\ 2 \times 1.954 \\ 3.380 \\ 2 \times 3.530 \\ 1.545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.225 \\ 2.563 \\ 24.726 \end{pmatrix}$$

Calculons $A^T.W$, d'où:

$$A^T.W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On arrive à la matrice normale $N = A^T.W.A$ ce qui donne:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Le calcul de N^{-1} donne le résultat suivant:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

On obtient le vecteur des inconnues $\bar{X} = (H_B, H_C, H_D)^T$:

$$\bar{X} = N^{-1}A^T.W.L = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5.225 \\ 2.563 \\ 24.726 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.368 \text{ m} \\ 4.925 \text{ m} \\ 6.885 \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{pmatrix}$$

Les altitudes compensées des repères B,C,D sont respectivement 3.368 m, 4.925 m et 6.885 m. Calculons le vecteur résidu $V = A.\bar{X} - L$:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.368 \\ 4.925 \\ 6.885 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.926 \\ 6.879 \\ 1.954 \\ 3.380 \\ 3.530 \\ 1.545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.006 \\ 0.006 \\ -0.012 \\ -0.013 \\ 0.012 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant la variance unitaire $\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=6} p_i v_i^2}{6-3}$:

$$\sigma_0^2 = \frac{10^{-6}}{3 \times 6.44} (1 + 72 + 72 + 12^2 + 2 \times 13^2 + 12^2) = 40 \times 10^{-6} \Rightarrow \sigma_0 = 0.0063 \text{ m} = 6.3 \text{ mm}$$

A partir de la matrice N^{-1} , on obtient les écarts-types des altitudes des points B, C et D :

$$\sigma_B^2 = \sigma_0^2 \times 0.4 \Rightarrow \sigma_B = \sigma_0 \sqrt{0.4} = 4 \text{ mm}; \sigma_C = 4 \text{ mm}; \sigma_D = \sigma_0 \sqrt{0.3} = 3.5 \text{ mm}$$

3. Soit $\alpha = H_D - H_C$, d'où:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= \text{Cov}(\alpha, \alpha) = \sigma_D^2 + \sigma_C^2 - 2\text{Cov}(H_D, H_C) = \sigma_0^2(0.4 + 0.3 - 2 \times 0.2) = 0.3\sigma_0^2 \\ &\Rightarrow \sigma_\alpha = 0.0035 \text{ mm} \end{aligned}$$

4. La distance entre les repères C et D vaut 3.22 km . Soit τ une estimation de la précision par km du nivellement effectué, on utilise σ_α et la précision de l'appareil $s = 2 \text{ mm}$ tels que :

$$\tau^2 = 2^2 + \frac{\sigma_\alpha^2}{3.22} = 2^2 + \frac{3.5^2}{3.22} = 7.80 \Rightarrow \tau = 3 \text{ mm}$$

Donc la précision du nivellement effectué est de 3 mm par km .

6

Correction 68.

Le tableau des observations: 6.1.

t	d	D
° Centigrade	mm Hg	mm Hg
6.0	761.3	762.3
10.0	759.1	759.5
14.0	758.4	758.7
18.0	763.1	763.0

Table 6.1 | Tableau des observations

1. On dispose des données (t_i, D_i, d_i) $i = 1, 4$. On a donc un système linéaire à 2 inconnues (α, γ) avec la disposition de 4 équations:

$$t_i \alpha + \gamma = D_i - d_i, i = 1, 4$$

soit:

$$\begin{cases} 6.0\alpha + \gamma = 762.3 - 761.3 \\ 10.0\alpha + \gamma = 759.5 - 759.1 \\ 14.0\alpha + \gamma = 758.7 - 758.4 \\ 18.0\alpha + \gamma = 763.0 - 763.1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on va utiliser la méthode des moindres carrés, les équations ci-dessus vont être remplacées par:

$$t_i \alpha + \gamma = (D_i - d_i) + v_i, i = 1, 4$$

où les v_i sont les résidus. La résolution se fait par :

$$\min \sum_{i=1}^{i=4} v_i^2 = \min F(\alpha, \gamma) = \min \sum_{i=1}^{i=4} (t_i \alpha + \gamma + d_i - D_i)^2$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=4} t_i (t_i \alpha + \gamma + d_i - D_i) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{i=4} t_i \right) \alpha + 4\gamma = \sum_{i=1}^{i=4} (D_i - d_i) \end{cases}$$

Ce qui donne le système suivant:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{i=4} t_i^2 \right) \alpha + \left(\sum_{i=1}^{i=4} t_i \right) \gamma = \sum_{i=1}^{i=4} t_i (D_i - d_i) \\ \left(\sum_{i=1}^{i=4} t_i \right) \alpha + 4\gamma = \sum_{i=1}^{i=4} (D_i - d_i) \end{cases}$$

Numériquement, on obtient le système sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} 656 & 48 \\ 48 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.4 \\ 1.6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = N^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 12.4 \\ 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0125 & -0.15 \\ -0.15 & 2.05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12.4 \\ 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.085 \\ 1.42 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \alpha = -0.085, \quad \gamma = 1.42$$

On calcule les composantes v_i du vecteur résidu V :

$$v_i = t_i \alpha + \gamma + (d_i - D_i) \quad i = 1, 4$$

On obtient :

$$V = (-0.09, 0.17, -0.07, -0.01)^T \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=4} v_i^2 = 0.042 \Rightarrow \sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i^2}{4-2} = 0.021$$

2. Pour estimer le facteur de la variance unitaire, on doit calculer $\sum_{i=1}^4 v_i^2$. Le calcul donne

$\sum_{i=1}^4 v_i^2 = 0.021$. Une estimation de la variance unitaire est donnée par la formule:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} v_i^2}{4-2} = \frac{0.042}{2} = 0.021$$

4 le nombre des observations, 2 le nombre des inconnues indépendantes ou le degré de liberté.

3. Pour déterminer la variance et la covariance de α et γ , on a besoin de la matrice inverse N^{-1} .

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0125 & -0.15 \\ -0.15 & 2.05 \end{pmatrix}, \sigma_{\alpha}^2 = \sigma_0^2 \times 0.0125 = 0.0002625, \sigma_{\gamma}^2 = \sigma_0^2 \times 2.05 = 0.04305,$$

$$\text{Cov}(\alpha, \gamma) = \sigma_0^2 \times (-0.15) = -0.021 \times 0.15 = -0.00315.$$

Correction 69.

1. Par définition, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} x dx$$

Faisons un changement de variables:

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \Rightarrow x = u\sigma\sqrt{2} + \mu, dx = \sigma\sqrt{2} du$$

6

$E(X)$ devient:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\sigma\sqrt{2} + \mu)\sigma\sqrt{2}e^{-u^2} du = \frac{\mu\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2} du$$

La fonction $g(u) = ue^{-u^2}$ est une fonction impaire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du = 0$. Par suite:

$$E(X) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \mu$$

$$\sigma^2(X) = \text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x, \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \Rightarrow$$

$$\sigma^2(X) = \frac{2\sigma^3\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du$$

Calculons $A = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du$, la fonction $u^2 e^{-u^2}$ est paire, on peut écrire l'intégrale A sous la forme:

$$A = 2 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{u}{2} d(-e^{-u^2}) = \int_0^{+\infty} u d(-e^{-u^2}) = \left[-ue^{-u^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$A = 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \sigma^2(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2$$

2.

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = 2 \int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} u^3 d(-e^{-u^2}) = \left[-u^3 e^{-u^2} \right]_0^{+\infty} + \Rightarrow$$

$$3 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du \Rightarrow B = 0 + 3 \cdot \frac{A}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

3. Le calcul de $\frac{\partial l}{\partial \mu}$ et $\frac{\partial l}{\partial \sigma}$ donne:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{x - \mu}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \frac{-1}{\sigma} + \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^3} = \frac{(x - \mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^3}$$

D'où:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial l}{\partial \sigma} = [(x - \mu)^2 - \sigma^2] \frac{(x - \mu)}{\sigma^5}$$

4. On pose $\theta = (\mu, \sigma)$. Soit T_θ l'espace engendré par $(\frac{\partial l}{\partial \mu}, \frac{\partial l}{\partial \sigma})$. On définit sur T_θ l'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle: T_\theta \times T_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$ à A, B deux variables aléatoires $\in T_\theta$:

$$\langle A, B \rangle = E[A(x)B(y)]$$

On va justifier qu'on peut écrire:

$$E[A(x)B(y)] = \text{Cov}(A(x), B(y)) + E[A(x)].E[B(y)]$$

Posons $\alpha = E[A(x)]$, $\beta = E[B(y)]$, la fonction covariance est définie par $E[(E[A(x)] - A(x))(E[B(y)] - B(y))]$, d'où:

$$E[(E[A(x)] - A(x))(E[B(y)] - B(y))] = E[(\alpha - A(x))(\beta - B(y))] \Rightarrow$$

$$E[(E[A(x)] - A(x))(E[B(y)] - B(y))] = E[\alpha \cdot \beta - \alpha \cdot B(y) - \beta \cdot A(x) + A(x) \cdot B(y)] = E[\alpha \cdot \beta] - E[\alpha \cdot B(y)]$$

$$- E[\beta \cdot A(x)] + E[A(x) \cdot B(y)] = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot E[B(y)] - \beta \cdot E[A(x)] + E[A(x) \cdot B(y)] \Rightarrow$$

$$E[(E[A(x)] - A(x))(E[B(y)] - B(y))] = \cancel{\alpha \cdot \beta} - \cancel{\alpha \cdot \beta} - \beta \cdot \alpha + E[A(x) \cdot B(y)] = E[A(x) \cdot B(y)] - \alpha \cdot \beta \Rightarrow$$

$$\text{Cov}(A(x), B(y)) = E[A(x) \cdot B(y)] - \alpha \cdot \beta = E[A(x) \cdot B(y)] - E(A(x)) \cdot E(B(y)) \Rightarrow$$

$$E[A(x) \cdot B(y)] = \text{Cov}(A(x), B(y)) + E(A(x)) \cdot E(B(y))$$

5. L'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur T_θ car:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application de $T_\theta \times T_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$.
- $\langle a \cdot A + b \cdot B, C \rangle = a \cdot \langle A, C \rangle + b \cdot \langle B, C \rangle$.
- $\langle A', b' \cdot B + c' \cdot C' \rangle = b' \cdot \langle A', B' \rangle + c' \cdot \langle A', C' \rangle$.
- $\langle A, A \rangle = E(A \cdot A) = E[(A)^2] \geq 0$.
- $\langle A, B \rangle = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

6. On rappelle : $e_1 = \frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{x - \mu}{\sigma^2}$ et $e_2 = \frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^3}$. On a alors:

$$g_{11} = \langle e_1, e_1 \rangle = E(e_1 \cdot e_1) = E(\|e_1\|^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial l}{\partial \mu} \right)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \Rightarrow$$

$$g_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

On utilise le même changement de variables $u = (x - \mu)/(\sigma\sqrt{2}) \Rightarrow dx = \sigma\sqrt{2}du$. Le terme g_{11} devient:

$$g_{11} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{A}{2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{1}{\sigma^2}$$

Calculons maintenant le terme g_{22} :

$$g_{22} = \langle e_2, e_2 \rangle = E(e_2 \cdot e_2) = E(\|e_2\|^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial l}{\partial \sigma} \right)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \Rightarrow$$

$$g_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sigma^2} - 2\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{(x-\mu)^4}{\sigma^6} \right] e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

6

On garde toujours le même changement de variables et on va utiliser les résultats des intégrales calculées précédemment. Le terme g_{22} s'écrit:

$$g_{22} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} (1 - 4u^2 + 4u^4) e^{-u^2} du \Rightarrow$$

$$g_{22} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du - 4 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du + 4 \int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du \right) \Rightarrow$$

$$g_{22} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 4 \frac{\sqrt{\pi}}{4} + 4 \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) = \frac{2}{\sigma^2}$$

Finalement, il reste à calculer les termes $g_{12} = g_{21} = E(e_1 \cdot e_2) = E\left(\frac{\partial l}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial l}{\partial \sigma}\right)$. D'où:

$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} [(x-\mu)^2 - \sigma^2] (x-\mu) \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^5} dx$$

Or la fonction sous l'intégrale est de la forme $\lambda u(\beta u^2 - \sigma^2) e^{-u^2}$ où λ, β sont des constantes, est une fonction impaire, l'intégrale prise entre $-\infty$ et $+\infty$ devient nulle. Il s'ensuit $g_{12} = g_{21} = 0$.

La matrice $g = (g_{ij})$ est donc donnée par:

$$g = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La première forme fondamentale sur T_θ s'écrit:

$$ds^2 = (d\mu, d\sigma)^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\mu \\ d\sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} (d\mu^2 + 2d\sigma^2)$$

Correction 70.

1. Les points critiques de f sont déterminés par $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$. D'où:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = 4u^3 + 6v = 0 \implies 2u^3 + 3v = 0 \implies 2u^3 - 6u - 36 = 0 \implies u^3 - 3u - 18 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v} = 6u + 3v + 36 = 0 \implies 2u + v + 12 = 0 \implies v = -2u - 12 \end{cases}$$

On détermine u par la résolution de l'équation $u^3 - 3u - 18 = 0$, $u_1 = 3$ est une solution réelle, d'où $v_1 = -2 \times 3 - 12 = -18$. Y-a-t-il d'autres solutions réelles? Posons $u^3 - 3u - 18 = (u-3)(u^2 + \alpha u + \beta) \implies \alpha = 3, \beta = 6$ ce qui donne $u^2 + 3u + 6$, mais le discriminant du dernier polynôme est négatif, par suite ses racines sont complexes. Il s'ensuit que la fonction f a un seul point critique réel à savoir $(3, -18)$.

2. Le hessien de f est la matrice notée $H = \nabla^2 f(u, v)$ ci-dessous :

$$H = \nabla^2 f(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12u^2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Soit $X = (x, y)^T \neq 0 \in \mathbb{R}^2$, calculons $X^T \cdot H \cdot X$, on obtient:

$$\begin{aligned} X^T \cdot H \cdot X &= (x, y)^T \cdot \begin{pmatrix} 12u^2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^T \cdot \begin{pmatrix} 12u^2 x + 6y \\ 6x + 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \\ X^T \cdot H \cdot X &= x(12u^2 x + 6y) + y(6x + 3y) = 3[4x^2(u^2 - 1) + (2x + y)^2] \end{aligned}$$

Si $u^2 > 1 \Rightarrow u^2 - 1 > 0$ et $X^T \cdot H \cdot X > 0$ pour $X \neq (0, 0)$ et la matrice H est définie positive. Si $u^2 < 1$, H peut être négative et elle est donc indéfinie.

3. Le point $x^* = (u, v) = (3, -18)$ est un point minimum de f car c'est un point critique et étant que $u = 3 > 1$, le hessien de f est une matrice définie positive.

4. La formule de récurrence de Newton s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - (\nabla^2 E)^{-1} \cdot \nabla E, \text{ avec } x_k = (u_k, v_k)^T, x_{k+1} = (u_{k+1}, v_{k+1})^T \Rightarrow \\ &\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12u_k^2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4u_k^3 + 6v_k \\ 6u_k + 3v_k + 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} 12u_k^2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\text{Détr}(H)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12u_k^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{36(u_k^2 - 1)} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12u_k^2 \end{pmatrix}. \text{ Par suite:}$$

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} - \frac{1}{36(u_k^2 - 1)} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12u_k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4u_k^3 + 6v_k \\ 6u_k + 3v_k + 36 \end{pmatrix}$$

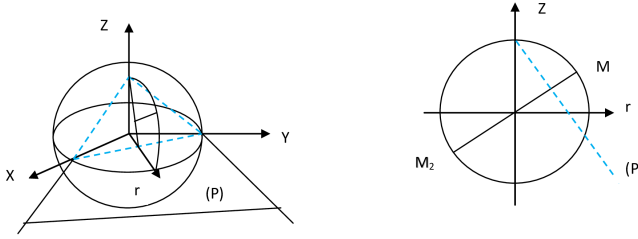
Ce qui donne:

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= u_k - \frac{1}{36(u_k^2 - 1)} [3(4u_k^3 + 6v_k) - 6(6u_k + 3v_k + 36)] \Rightarrow \\
 u_{k+1} &= \frac{1}{24 \times 1.5(u_k^2 - 1)} \cdot [36(u_k^2 - 1)u_k - (12u_k^3 + 18v_k - 36u_k - 18v_k - 216)] \Rightarrow \\
 u_{k+1} &= \frac{1}{24 \times 1.5(u_k^2 - 1)} \cdot (36u_k^3 - 36u_k - 12u_k^3 + 36u_k + 24 \times 9) \Rightarrow \\
 u_{k+1} &= \frac{1}{24 \times 1.5(u_k^2 - 1)} \cdot (24u_k^3 + 24 \times 9) = \frac{u_k^3 + 9}{1.5(u_k^2 - 1)} = \frac{u_k^3 + 9}{J}
 \end{aligned}$$

avec $J = 1.5(u_k^2 - 1)$. Calculons maintenant v_{k+1} :

$$\begin{aligned}
 v_{k+1} &= v_k - \frac{1}{36(u_k^2 - 1)} [-6(4u_k^3 + 6v_k) + 12u_k^2(6u_k + 3v_k + 36)] \Rightarrow \\
 v_{k+1} &= \frac{1}{36(u_k^2 - 1)} [36u_k^2 v_k - 36v_k - (-24u_k^3 - 36v_k + 72u_k^3 + 36u_k^2 v_k + 12 \times 36u_k^2)] \Rightarrow \\
 v_{k+1} &= \frac{1}{24 \times 1.5(u_k^2 - 1)} [36u_k^2 v_k - 36v_k + 24u_k^3 + 36v_k - 72u_k^3 - 36u_k^2 v_k - 24 \times 18u_k^2] \Rightarrow \\
 v_{k+1} &= \frac{24u_k^3 - 72u_k^3 - 24 \times 18u_k^2}{24 \times 1.5(u_k^2 - 1)} = -\frac{2u_k^3 + 18u_k^2}{1.5(u_k^2 - 1)} = -\frac{2u_k^3 + 18u_k^2}{J}
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D

Correction 71.**Figure 6.3** | Détermination de la distance maximale.

1. De l'équation du plan (P) $x + y + z = 1$, le vecteur $u = (1, 1, 1)^T$ est orthogonal au plan. Soit $m(x', y', z')$ le point projection orthogonale du point M sur le plan (P). L'équation paramétrique de la droite (Δ) passant par M et orthogonale au plan (P) a pour équation:

$$\Delta = \begin{cases} x = X + 1.t \\ y = Y + 1.t \\ z = Z + 1.t \end{cases}$$

Cherchons t tel que le point $m \in (\Delta)$, ce qui donne:

$$\begin{cases} x' = X + 1.t \\ y' = Y + 1.t \\ z' = Z + 1.t \end{cases} \Rightarrow x' + y' + z' = 1 = X + Y + Z + 3t \Rightarrow t = \frac{1 - X - Y - Z}{3}$$

La distance $d = Mm$ est calculée par :

$$d^2 = (X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2 = 3t^2 = 3 \cdot \frac{(1 - X - Y - Z)^2}{3^2} \Rightarrow d = \frac{|X + Y + Z - 1|}{\sqrt{3}}$$

2. Pour répondre à la question posée ci-dessus, on considère la fonction: $E(x, y, z, \lambda) = -(x + y + z - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Les points critiques de (E) sont déterminés par $\frac{\partial E}{\partial x_i} = 0$. D'où:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} = -2(x + y + z - 1) - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y} = -2(x + y + z - 1) - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial z} = -2(x + y + z - 1) - 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1 + \lambda)y + z = 1 \\ x + y + (1 + \lambda)z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

3. On suppose que $\lambda = -1$, on obtient $x = y = z = 1/2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3/4 \neq 1$ d'où la contradiction. On suppose que $\lambda = 0$. On trouve que x, y, z vérifient:

$$x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ce sont les points d'intersection du plan (P) et de la sphère $\mathbb{S}^2$: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

4. On suppose que $\lambda \notin \{-3, -1, 0\}$. Résoudre le système (1). Soit le point M_2 tel que ses coordonnées sont négatives. Comme $\lambda \neq -1$, la première équation de (1) donne $x = \frac{1-y-z}{1+\lambda}$, on obtient alors le système en y, z :

$$\begin{cases} x + (1+\lambda)y + z = 1 \Rightarrow \frac{1-y-z}{1+\lambda} + (1+\lambda)y + z = 1 \Rightarrow \lambda(\lambda+2)y + \lambda z = \lambda \\ x + y + (1+\lambda)z = 1 \Rightarrow \frac{1-y-z}{1+\lambda} + y + (1+\lambda)z = 1 \Rightarrow \lambda y + \lambda(\lambda+2)z = \lambda \Rightarrow \end{cases}$$

Or $\lambda \neq 0$, le système devient:

$$\begin{cases} (\lambda+2)y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - (\lambda+2)y \\ y + (\lambda+2)z = 1 \Rightarrow y + (\lambda+2)[1 - (\lambda+2)y] = 1 \Rightarrow \lambda \neq -1, -3; y = \frac{\lambda+1}{(\lambda+1)(\lambda+3)} = \frac{1}{\lambda+3} \\ \Rightarrow z = 1 - (\lambda+2)y = \frac{1}{\lambda+3} \Rightarrow x = \frac{1-y-z}{1+\lambda} = \frac{1}{\lambda+3} \end{cases}$$

On utilise maintenant la quatrième équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{(\lambda+3)^2} = 1$. On obtient l'équation du second degré: $\lambda^6 + 6\lambda + 6 = 0$ ce qui donne $\lambda_1 = \sqrt{3} - 3$, $\lambda_2 = -\sqrt{3} - 3$. λ_2 vérifie $x = y = z = 1/(\lambda_2 + 3) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$. On a donc $M_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$.

5. La fonction $E(x, y, z)$ est une fonction de classe C^∞ pour les 3 variables, $\lambda = \lambda_2$. La matrice hessienne de E qu'on note par $\nabla^2 E(x, y, z)$ est donnée par :

$$\nabla^2 E(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

On rappelle que :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -2(x + y + z - 1) - 2\lambda_2 x \Rightarrow \partial^2 E_{xx} = -2(1 + \lambda_2), \partial^2 E_{xy} = -2, \partial^2 E_{xz} = -2$$

Vu que la fonction E présente une symétrie des coordonnées x, y, z , on obtient les mêmes résultats. Le terme $-2(1 + \lambda_2) = -2(1 - \sqrt{3} - 3) = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$, on pose $\mu = 1 + \sqrt{3}$. Alors la matrice hessienne de $E(x, y, z)$ pour M_2 s'écrit sous la forme:

$$H = \nabla^2 E(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mu^2 & -2 & -2 \\ -2 & \mu^2 & -2 \\ -2 & -2 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

6. On pose $U = (X, Y, Z)^T \in (\mathbb{S}^2)$. Calculons $U^T \cdot H \cdot U$ sachant que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$:

$$\begin{aligned} U^T \cdot H \cdot U &= (X, Y, Z)^T \cdot \begin{pmatrix} \mu^2 & -2 & -2 \\ -2 & \mu^2 & -2 \\ -2 & -2 & \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (X, Y, Z)^T \cdot \begin{pmatrix} \mu^2 X - 2Y - 2Z \\ -2X + \mu^2 Y - 2Z \\ -2X - 2Y + \mu^2 Z \end{pmatrix} \Rightarrow \\ U^T \cdot H \cdot U &= X(\mu^2 X - 2Y - 2Z) + Y(-2X + \mu^2 Y - 2Z) + Z(-2X - 2Y + \mu^2 Z) \Rightarrow \\ U^T \cdot H \cdot U &= \mu^2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 4(XY + YZ + ZX) = 2(2 + \sqrt{3} - 2(XY + YZ + ZX)) \Rightarrow \\ U^T \cdot H \cdot U &= 2(2 + \sqrt{3} - ((X + Y + Z)^2 - 1)) = 2[3 + \sqrt{3} - (X + Y + Z)^2] \end{aligned}$$

Si on considère le point M_2 , on obtient que ses coordonnées X', Y', Z' et les coordonnées $-X', -Y', -Z'$ vérifient $U^T \cdot H \cdot U = 2(3 + \sqrt{3} - 3) = 2\sqrt{3} > 0$ telles que $(X + Y + Z)^2$ est maximum. On déduit que $U^T \cdot H \cdot U > 0$ pour tout $U \in (\mathbb{S}^2)$, c'est-à-dire que la matrice H est définie positive pour les points $U \in (\mathbb{S}^2)$.

7. D'après le théorème de (H. Cartan¹, 1979), le point M_2 est un point critique de E avec la matrice hessienne $\nabla^2 E(x, y, z)$ définie positive, alors M_2 est un minimum relatif strict de E . La distance de M_2 au plan (P) vaut $d = \frac{|X + Y + Z - 1|_{M_2}}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1.577$ est la distance maximale du plan (P) .

Oui, on a répondu à la question du problème.

6

6.2. MODÈLES NON-LINÉAIRES DE COMPENSATION

Correction 72.

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on a mesuré trois distances planes entre un point inconnu $P(X_1, X_2)$ vers trois points connus $P_i(a_i, b_i)_{i=1,3}$ dans trois directions différentes. On considère le modèle non linéaire de Gauss-Markov défini par:

$$\zeta(X) = L - e, \quad e \in \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

avec:

- L : le vecteur des observations $(3 \times 1) = (L_1, L_2, L_3)^T$;
- X : le vecteur des inconnues $(2 \times 1) = (X_1, X_2)^T$;
- e : le vecteur des erreurs $(3 \times 1) = (e_1, e_2, e_3)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$, P est la matrice des poids égale à la matrice unité I_3 , σ_0 une constante positive;
- ζ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par:

$$\zeta(X) = \zeta(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - b_1)^2] \\ \frac{1}{2} [(X_1 - a_2)^2 + (X_2 - b_2)^2] \\ \frac{1}{2} [(X_1 - a_3)^2 + (X_2 - b_3)^2] \end{pmatrix}$$

¹Henri Cartan (1904-2008): un des grands mathématiciens français du XXème siècle, fils du célèbre mathématicien Elie Cartan.

On prendra comme composante L_i du vecteur des observations la quantité $L_i = \frac{D_{i\text{observée}}^2}{2}$.

1. Calculons les vecteurs $Y_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial X_1}$, $Y_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial X_2}$, on obtient:

$$Y_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} = \begin{vmatrix} X_1 - a_1 \\ X_1 - a_2 \\ X_1 - a_3 \end{vmatrix}, \quad Y_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial X_2} = \begin{vmatrix} X_2 - b_1 \\ X_2 - b_2 \\ X_2 - b_3 \end{vmatrix}$$

Supposons que les vecteurs Y_1, Y_2 sont non indépendants, dans ce cas le produit vectoriel $\Omega = Y_1 \wedge Y_2 = 0$. Prenons la troisième composante du vecteur Ω , on obtient:

$$\begin{vmatrix} X_1 - a_1 & X_2 - b_1 \\ X_1 - a_2 & X_2 - b_2 \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} X_1 - a_1 & X_1 - a_2 \\ X_2 - b_1 & X_2 - b_2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{les vecteurs } P_1P, P_2P \text{ sont parallèles}$$

Or les directions PP_1, PP_2, PP_3 sont différentes, par suite les vecteurs P_1P, P_2P sont indépendants, ce qui entraîne que le vecteur Ω est non nul, on déduit que les vecteurs Y_1, Y_2 sont indépendants.

2. Le calcul de $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ donne:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_2^2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_2 \partial X_1} = 0$$

Il s'ensuit que les fonctions $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur U pour $i, j \in \{1, 2\}$.

3. Détaillons l'expression de la fonction $J(X_1, X_2)$:

$$J = \|L - \zeta(X)\|^2 = \sum_{i=1}^{l=3} \left(L_i - \frac{1}{2} [(X_1 - a_i)^2 + (X_2 - b_i)^2] \right)^2$$

Notons les coefficients de la matrice $\left(\frac{\partial^2 J}{\partial X_i \partial X_k} \right)$, $i, k \in \{1, 2\}$ par j_{ik} , d'où:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial X_1} &= -2 \sum_{l=1}^{l=3} (X_1 - a_l) \left(L_l - \frac{1}{2} [(X_1 - a_l)^2 + (X_2 - b_l)^2] \right) \\ j_{11} &= \frac{\partial^2 J}{\partial X_1^2} = -2 \sum_{l=1}^{l=3} \left(L_l - \frac{3}{2} (X_1 - a_l)^2 - \frac{1}{2} (X_2 - b_l)^2 \right) \\ j_{12} &= j_{21} = \frac{\partial^2 J}{\partial X_1 \partial X_2} = 2 \sum_{l=1}^{l=3} (X_1 - a_l)(X_2 - b_l) \\ j_{22} &= \frac{\partial^2 J}{\partial X_2^2} = -2 \sum_{l=1}^{l=3} \left(L_l - \frac{1}{2} (X_1 - a_l)^2 - \frac{3}{2} (X_2 - b_l)^2 \right) \end{aligned}$$

4. Soit la matrice carrée définie par:

$$g(X) = (g_{ij}) \quad \text{avec } g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i}, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_j} \right\rangle \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Le calcul des coefficients g_{ij} donne:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right\rangle = \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right\|^2 = \sum_{l=1}^{l=3} (X_1 - a_l)^2 \\ g_{12} &= g_{21} = \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_2} \right\rangle = \sum_{l=1}^{l=3} (X_1 - a_l)(X_2 - b_l) \\ g_{22} &= \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial X_2}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_2} \right\rangle = \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial X_2} \right\|^2 = \sum_{l=1}^{l=3} (X_2 - b_l)^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Soient A et B les deux vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} X_1 - a_1 \\ X_1 - a_2 \\ X_1 - a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} X_2 - b_1 \\ X_2 - b_2 \\ X_2 - b_3 \end{pmatrix}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} g_{11} &= A \cdot A = \|A\|^2, \quad g_{22} = B \cdot B = \|B\|^2, \quad g_{12} = g_{21} = A \cdot B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \theta \implies \\ g_{12} \cdot g_{21} &= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot \cos^2 \theta < \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 = g_{11} g_{22} \implies g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0 \end{aligned}$$

On déduit que la matrice (g_{ij}) est définie positive (les 3 points P_k sont supposés bien distribués autour du point P).

5. Introduisons la matrice B définie par:

$$B(X, L) = (B_{ij}) \quad \text{avec } B_{ij} = g_{ij} - \left\langle L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j} \right\rangle \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

On rappelle que $e = L - \zeta(X)$ est le vecteur des erreurs. On a vu aussi dans la question 2. que:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_2^2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_2 \partial X_1} = 0$$

Les éléments de la matrice B sont tels que:

$$\begin{aligned} B_{11} &= g_{11} - \sum_{l=1}^{l=3} e_l \approx g_{11}, \quad B_{22} = g_{22} - \sum_{l=1}^{l=3} e_l \approx g_{22}, \\ B_{12} &= g_{12}, \quad B_{21} = g_{21} \end{aligned}$$

Vu que la quantité $e_1 + e_2 + e_3$ est négligeable vis à vis les termes g_{11} et g_{22} , on peut écrire que $B_{11} B_{22} - B_{12}^2 > 0$ c'est-à-dire que la matrice (B_{ij}) est définie positive. Dans ce cas,

d'après le cours (chapitre : Interprétation géométrique de la compensation non-linéaire), les coordonnées (X_1, X_2) seront calculées par :

$$\min e^2 = \min J \iff \frac{\partial J}{\partial X_1} = 0, \text{ et } \frac{\partial J}{\partial X_2} = 0$$

7

BIBLIOGRAPHIE

1. **F.R. Helmert.** 1884. *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*, Vol 2, Leibzig, B.G Teubner(reprinted 1962).
2. **H. Poincaré.** 1905. Sur les Lignes géodésiques des surfaces convexes. Transactions of the American Mathematical Society. n°6, pp. 237-274; Œuvres 6, pp. 38-84.
3. **F. Tisserand & H. Andoyer.** 1912. *Leçons de Cosmographie*. 6ème édition. Librairie Armand Colin. 396p.
4. **G. Julia.** 1955. Cours de l'Ecole Polytechnique. *Cours de Géométrie Infinitésimale*. Cinquième Fascicule, Deuxième Partie: Théorie des Surfaces. Deuxième édition entièrement refondue. Editeur Gauthier-Villars. 141p.
5. **W.A. Heiskanen & H. Moritz.** 1967. *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria. 364p.
6. **J. Dieudonné.** 1968. *Calcul Infinitésimal*. 1ère édition. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris. 479p.
7. **A. Fontaine.** 1969. Rapport sur la Géodésie de la Tunisie. OTC.
8. **C.A.C.G.G. (le Comité Associé Canadien de Géodésie et de Géophysique).** 1973. Canadian Surveyor, Vol 27, n°3.
9. **A. Marussi.** 1974. Africa and Modern Geodesy. Proceedings of the First Symposium in Geodesy in Africa, 14-19 January. Khartoum. Soudan.
10. **B. Morando.** 1974. *Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre*. Gordon & Breach, Paris, London et New York. 255p.
11. **L. Bers.** 1977. Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology. Bulletin of the American Mathematical Society, vol 83, n°6, pp. 1083-1100, 1977.
12. **C. Fezzani.** 1979. Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 314p.
13. **C. Boucher.** 1979a. Systèmes géodésiques de référence et autres problèmes géodésiques liés à la localisation en mer. Colloque national sur la localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. IGN France.
14. **C. Boucher.** 1979b. Les Transformations géométriques entre systèmes géodésiques. Rapport Technique RT/G n°3, SGNM, IGN France.

15. P. Dombrowski. 1979. 150 Years after Gauss "disquisitiones generales circa superficies curvas". Astérisque n°62. Publication de la Société Mathématique de France. 153p.

16. H.M. Dufour. 1979. Systèmes de références: Systèmes Projectifs. Conférence présentée au Colloque national sur la Localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. 27p.

17. H. Monge. 1979. L'ellipsoïde de Clarke 1880. Bulletin d'Information de l'IGN France n°39-1979/3, pp. 37-38.

18. J. Lemenestrel. 1980. *Cours de Géodésie Élémentaire*, ENSG, IGN France.

19. J. Commiot. 1980. *Cours de Cartographie Mathématique*, ENSG, IGN France.

20. A. Danjon. 1980. *Astronomie Générale: Astronomie sphérique et Éléments de mécanique céleste*. Seconde édition, revue et corrigée. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. 454p.

21. B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. 1982. *Géométrie Contemporaine: Méthodes et Application*. Première Partie: Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. Edition Mir, Moscou. 438p.

22. M. Charfi. 1983. Les Travaux de revalorisation de la Géodésie Tunisienne. OTC.

23. P. Vaniček & E.J. Krakiwsky. 1986. *Geodesy: the Concepts*. North Holland Compagny. 2ème Edition. 697p.

24. Defense Mapping Agency(DMA). 1987a. DMA Technical Report 8350.2. Dept of Defense, World Geodetic System 1984, Its definition and relationships with local geodetic systems. 121p.

25. Defense Mapping Agency. 1987b. DMA Technical Report 8350.2-A. Part I: Methods, Techniques, and Data used in WGS84 development. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 412p.

26. Defense Mapping Agency. 1987c. DMA Technical Report 8350.2-A. Part II: Parameters, formulas, and graphics for the practical application of WGS84. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 775p.

27. H. Moritz & I.I. Mueller. 1988. *Earth Rotation :Theory and Observation*. Ungar Publishing Compagny. New York. 617p.

28. B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger et J. Collins. 1992. *Global Positioning System, Theory and Practice*. Springer-Verlag Wien New York. 382p.

29. M. Burša & K. Piě. 1993. *Gravity Field and Dynamics of the Earth*. Springer-Verlag. 385p.

30. Publications de l'Académie Bavaroise de Géodésie, n°58. 1997. Symposium de la Commission EUREF, Sofia, 4-7 juin 1997. Extrait du rapport présenté par la Suisse. pp. 212-218.

31. T. Soler. 1998. A Compendium of transformation formulas useful in GPS work. Journal of Geodesy, Vol.72, n°7/8, pp. 482-490.

32. E.W. Grafarend. 1998. Helmut Wolf: Das Wissenschaftliche Werk/ The Scientific Work. Publication de la Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Heft n°115, München 1998. 97p.

33. P. Petersen. 1998. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, n°171. Springer-Verlag. 435p.

34. A. Ben Hadj Salem. 1999. La Mise à niveau de la Géodésie Tunisienne par l'unification Carthage2000 de ses réseaux, présentée au Premier Atelier Maghrébin de

Géodésie. Tunis, 18-20 mai 2000. Publiée dans la revue Géo-Top de l'OTC numéro spécial mai 2000, pp. 6-16.

35. A. Ben Hadj Salem. 1999. Note sur les comparaisons des azimuts géodésiques du réseau géodésique primordial Tunisien. 5p.

36. H. Moritz. 2000. Geodetic Reference System 1980. Journal of Geodesy, vol. 74 n°1, pp. 128-134.

37. A. Ben Hadj Salem. 2001. Contrôle de l'azimut d'orientation du système géodésique tunisien Carthage34. Publié dans la revue Géo-Top de l'OTC, n°4 février 2002, pp. 63-68.

38. H.A. Kastrup. 2008. On the Advancements of Conformal Transformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics.

arxiv:<http://arxiv.org/physics.hist-ph/0808.2730v1>. www.arxiv.org 82p.

39. Arrêté du ministre de la Défense nationale du 10 février 2009. 2009. Journal Officiel de la République Tunisienne n°14 du 17 février 2009.

40. A.N. Pressley. 2010. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag Heidelberg. 395p.

41. M. Lemmens. 2011. *Geo-information: Technologies, Applications and the Environment*. Series Geotechnologies and the Environment. Volume 5. Springer Netherlands. 349p.

42. E. Zeidler. 2011. *Quantum Field Theory III: Gauge Theory A Bridge Between Mathematicians and Physicists*. Springer-Verlag Heidelberg. 1158p.

43. A. Ben Hadj Salem. 2012. Selected Papers. Tome II. pp 165-172.

44. A. Ben Hadj Salem. 2013. Histoire de la Topographie en Tunisie : Les Coordonnées Origines Fuseaux. 11p.

45. United Nations Committee of Experts on Global Geospatial Information Management (UN-GGIM). 2015. La Résolution adoptée par l'Assemblée générale le 26 février 2015. www.ggim.un.org/docs/A_RES_69_266_Epdf. 3p.

46. A. Ben Hadj Salem. 2017. *Éléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés - Pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*. Noor Publishing. 1^{ère} Edition, ISBN : 978 – 3 – 330 – 96843 – 1. 364p.

47. A. Ben Hadj Salem. 2019. A Note of Differential Geometry. 10p.

www.vixra.org/pdf/1903.0241v1.pdf

48. J.M. Ortega & W.C. Rheinboldt. 1970. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press. 527p.

49. A. Bjerhammer. 1973. *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*. Elsevier Scientific Publishing Compagny. Amsterdam. 420p.

50. H. Cartan. 1979. *Cours de Calcul Différentiel*. Nouvelle édition refondue et corrigée. Hermann Paris. Collection Méthodes. 365p.

51. P. Hottier. 1980. *Théorie des Erreurs*. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 81p.

52. A. Pázman. 1984. Probability distribution of the multivariate nonlinear least-squares estimates. Kybernetika n°20, pp. 209-230.

53. S.S Chern. 1985. Moving Frames. Société Mathématique de France. Astérisque, numéro hors série "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui". Lyon, 25-29 juin 1984. p 67-77.

54. P.J.G. Teunissen. 1985. *The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment*. Publications on Geodesy, n°1, Volume 8, Netherlands Geodetic Commission. 177p.

55. E.W. Grafarend & B. Schaffrin. 1989. The Geometry of non-linear adjustment - the planar trisection problem. *FESTCHRIFT to TORBEN KRARUP* edited by E. Kejlo, K. Poder and C.C. Tscherning. Geodætisk Institut, Meddelelse n°58, pp. 149-172. København, Danmark.

56. P.J.G. Teunissen. 1990. Nonlinear least squares. *Manuscripta Geodaetica*, Vol 15, n°2, pp. 137-150.

57. S. Amari & H. Nagaoka. 2000. *Methods of Information Geometry*. Traduit du japonais par Daishi Harada. *Translations of Mathematical Monographs*, Vol 191. Oxford University Press. AMS. 206p.

58. C. Brezinski. 2005. La Méthode de Cholesky. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, publication de la Société Mathématique de France. Vol 11 (2005), pp. 205-238.

59. P.J. Olver. 2013. *Nonlinear Systems*. 58p. Université de Minnesota.

60. J.P. Snyder & P.M. Voxland. 1989. *An Album of Map Projections*. U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, Littrow projection, page 155. United States Government Printing Office : 1989; 260 pages.

TABLE DES FIGURES

1	Photo récente de l'auteur	v
1.1	Le carré sphérique	4
1.2	Les coordonnées de Cassini-Soldner	5
2.1	Détermination de la hauteur de l'antenne	8
2.2	La Correspondance de la sphère de Jacobi	18
2.3	Représentation cylindrique conforme oblique tangente	27
3.1	La polygonale observée	38
4.1	Triangle sphérique	45
4.2	Triangle de position	46
4.3	Le carré sphérique	46
4.4	Les coordonnées de Cassini-Soldner	47
4.5	Les éléments du triangle sphérique PAM.	48
4.6	Calcul des hauteurs h_1 et h_2	49
4.7	Le lieu des étoiles toujours visibles	50
4.8	Le lieu des étoiles toujours non visibles	50
4.9	La condition pour qu'une étoile culmine au zénith	50
4.10	Egalité du jour et de la nuit	51
4.11	Egalité du jour et de la nuit en tout lieu sur l'équateur	51
4.12	Position de l'astre A lors du lever	52
4.13	Observation de la galaxie Andromède	53
4.14	L'auteur en concertation avec Dr. Ing. Chedly Fezzani (1er Atelier Maghré- bin de Géodésie, organisé par l'OTC, 18-20 mai 2000 à Tunis).	54
5.1	Le quadrilatère infinitésimal des courbes coordonnées	68
5.2	Les angles ψ et φ	76
5.3	L'Ellipsoïde de révolution	76
5.4	Les deux cercles dits surosculateurs	83
5.5	Le triangle infinitésimal au point M	88
5.6	Triangle sphérique	90
5.7	Le Tore $\mathbb{T}$	92
5.8	Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$ et le repère local en A	96
5.9	Le Repère Lambert Tunisie Sud	107
5.10	Représentation cylindrique conforme oblique tangente	113
5.11	Calcul du module linéaire au point $a(\varphi = 0, \lambda = \lambda_0)$	118
5.12	Calcul du module linéaire au point $a(\varphi, \lambda = 0)$ appartenant au méridien origine	119

5.13 Images des méridiens et des parallèles (le méridien central a pour longitude $\lambda = 90^\circ$ Ouest).	122
5.14 Le triangle sphérique psb	122
5.15 Calcul du gisement de la direction AB	128
5.16 Le plan de l'orbite du satellite artificiel	137
5.17 Le Repère Céleste	138
6.1 Le triangle ABC	144
6.2 La polygonale observée	149
6.3 Détermination de la distance maximale.	159

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Table des observations	39
6.1	Tableau des observations	152

INDEX

- Amari S., 168
 Andoyer H., 165
 Bers L., 165
 Bjerhammer A., 167
 Boucher C., 165
 Brezinski C., 168
 Burša M., 166
 Cartan H., 167
 Charfi M., 166
 Cholesky A.L., 168
 Clairaut A.C., 18
 Collins J., 166
 Commiot J., 166
 Danjon A., 166
 Dieudonné J., 165
 Dombrowski P., 166
 Doubrovine B., 166
 Dufour H.M., 166
 Fezzani C., 165
 Fomenko A., 166
 Fontaine A., 165
 Grafarend E.W., 166, 168
 H. Cartan, 61
 Heiskanen W.A., 165
 Helmert F.R., 165
 Hofmann-Wellenhof B., 166
 Hottier P., 167
 Jacobi C.G.J., 17
 Julia G., 165
 Kastrup H.A., 167
 Krakiwsky E.J., 166
 Lemenestrel J., 166
 Lemmens M., 167
 Lichtenegger H., 166
 Marussi A., 165
 Monge H., 166
 Morando B., 165
 Moritz H., 165
 Mueller I.I., 166
 Nagaoka H., 168
 Novikov S., 166
 Olver P.J., 168
 Ortega J.M., 167
 Pázman A., 167
 Petersen P., 166
 Poincaré H., 165
 Pressley A.N., 13, 167
 Rheinboldt W.C., 167
 Schaffrin B., 168
 Shiig-Shen Chern , 61
 Snyder J.P., 166
 Soldner J.G., 4
 Soler T., 166
 Tchebychev P., 12
 Teunissen P.J.G., 168
 Tisserand F., 165
 Vaniček P., 166
 Voxland P.M., 168
 Wolf H., 166
 Zeidler E., 167

 Angle horaire, 6
 Astronomie, 3
 Astronomie-Correction, 45

 Centre de courbure, 9
 Coordonnées de Cassini-Soldner, 4
 Coordonnées ellipsoïdiques de Jacobi, 22,
 99
 Coordonnées isothermes, 13
 Coordonnées équatoriales, 5
 Correction de la corde, 25
 Courbure moyenne en un point d'une sur-
 face, 11
 Courbure totale en un point d'une surface,
 9

 Defense Mapping Agency, 166

- Distance d'un point à un plan, 159
- Equation de Clairaut, 18
- Equation de Laplace, 31, 129
- Equations de Gauss-Weingarten, 14
- Excentricité de l'hyperbole, 121
- Facteur de la variance unitaire, 153
- Foyers de l'ellipse, 15
- Foyers de l'hyperbole, 121
- Géodésie, 7
- Géodésie-Correction, 55
- Hauteur, 5
- Heure sidérale de Greenwich, 6
- Indicatrice de Tissot, 26
- L'anomalie excentrique, 136
- L'anomalie vraie, 136
- L'apogée, 141
- L'équation des moindres carrés, 143
- La 2ème loi de Kepler, 138
- La convergence des méridiens, 25
- La correspondance de Jacobi, 18
- La latitude isométrique de l'ellipsoïde, 125
- La première loi de Kepler, 136
- La solution des moindres carrés, 144
- La transformation de Bursa-Wolf à 7 paramètres, 135
- Le module linéaire, 25
- Le modèle bidimensionnel de Helmert, 134
- Le modèle nonlinéaire de Gauss-Markov, 161
- Le périgée, 141
- Le repère de Frenêt, 8
- Le référentiel céleste, 138
- Les directions principales, 26
- Les points critiques d'une fonction, 157
- Lignes géodésiques de l'ellipsoïde, 19
- Lignes géodésiques de la sphère, 20
- Lignes géodésiques du tore, 20
- Matrice hessienne d'une fonction, 160
- Mode parallactique, 7
- Module linéaire stationnaire, 30
- Parallèle automécoïque, 30
- Paramétrisation conforme, 13
- Rayon de courbure d'une courbe, 9
- Représentation cylindrique conforme oblique tangente, 27
- Représentation de Littrow, 120
- Représentation plane équivalente, 28
- Réseau de Tchebychev, 12
- Surface d'Enneper, 9
- Surface isotherme, 13
- Théorie des moindres carrés, 37
- Théorie des moindres carrés- Correction, 143
- Variable de Mercator, 13

INDEX