

Procédures arithmétiques basiques pour la validation et le séquençage des nombres premiers

Auteur : Dominique Tremblay

(Chercheur indépendant)

514-707-4691 / les64cases@gmail.com

Résumé

Dans cet article, nous avons l'intention de présenter deux procédures de simplicité élémentaire, l'une permettant de prédire la séquence complète des nombres premiers, la seconde étant plus spécifiquement dédiée au repérage des paires de nombres premiers jumeaux, avec pour motivation première de parvenir à créer la méthode la plus concise de parvenir à cette fin. Pour détecter les nombres premiers dans le continuum des entiers naturels, notre étude s'inspire d'un algorithme bien connu des mathématiciens, soit la formule $p^2 = 24n + 1$, à laquelle nous avons greffé deux étapes supplémentaires de tamisage visant à discriminer les faux positifs. La procédure visant à prédire la suite spécifique des nombres premiers jumeaux peut se concevoir de manière indépendante ou se greffer opérationnellement à la précédente. Nous soumettons aussi à votre attention un ensemble de dix postulats concernant les nombres premiers jumeaux, ainsi qu'un échantillon de onze hypothèses supplémentaires de l'ordre de la conjecture.

1. Prédire la séquence des nombres premiers au moyen d'une procédure simple et infaillible

La recherche d'un modèle théorique formel révélant l'existence d'une structure cohérente dans l'ordonnement des nombres premiers à l'intérieur de notre système de numération a toujours suscité une grande fascination dans les milieux scientifiques, ainsi que chez le grand public. Il existe des méthodes permettant de détecter ces nombres, dont certaines se basent sur des formules assez basiques d'arithmétique algébrique, avec des résultats de satisfaction variable. Dans la présente étude, nous avons l'intention de comprendre les limitations de l'une de ces formules et d'y apporter les améliorations nécessaires sous la forme d'une procédure, aussi minimaliste que possible, permettant de repérer et valider la suite complète des nombres premiers, sans erreur ni omission et sans l'apport de données supplémentaires.

1.1 L'algorithme de départ

Sans plus attendre, présentons ledit algorithme et effectuons quelques calculs en guise de démonstration. L'équation algébrique peut s'écrire sous deux formes différentes, soit la variante A, qui est celle que l'on connaît, et la variante B, que nous vous proposons ici. Ces deux variantes correspondent aux deux principaux angles d'attaque à notre disposition pour identifier ou valider le nombre premier p .

Variante A :

p = Nombre premier vérifié ou recherché.

n = Nombre entier agissant comme facteur multiplicatif du nombre 24.

$$p = \sqrt{24n + 1} \quad \text{ou} \quad p^2 = 24n + 1$$

Variante B :

p = Nombre premier vérifié ou recherché.

n = N'importe quel nombre entier positif résultant d'une manipulation de p .

$$n = \frac{p^2 - 1}{24}$$

Dans les deux cas, la variable p est considérée comme un nombre premier potentiel si et seulement si n est un nombre entier. Autrement dit, jamais p ne sera premier si n n'est pas un nombre entier, mais l'affirmative ne constitue pas une validation pour autant. Nous pouvons traduire ces algorithmes sous forme d'énoncé ou de règle heuristique.

Règle générale : Le carré moins 1 de tous les nombres premiers est divisible par 24.

L'algorithme présente un taux de réussite de 100% dans le repérage des nombres premiers, n'omettant aucun d'eux. En d'autres mots, nous parvenons toujours à obtenir une correspondance entre le carré des nombres premiers et le nombre 24, en tant que facteur multiplicatif ou diviseur. La difficulté vient plutôt du fait que l'algorithme retient également des nombres composés dans ses filets, alors qu'il aurait dû les rejeter à l'eau. Nous considérons ces nombres composés comme étant des faux positifs.

Dans la présente étude, nous nous sommes lancé le défi de pousser la logique un peu plus loin, au point d'établir une procédure complète pour détecter les nombres premiers qui élimine les faux positifs et donne un aperçu de l'intrication arithmétique qui détermine la distribution des nombres premiers.

Une procédure adéquate de repérage des nombres premiers devrait comporter une fonction de triage visant à identifier ces faux positifs, de manière à les rejeter. C'est ce problème que nous avons choisi de résoudre. Pour y parvenir, il importe de comprendre la logique arithmétique causant la sélection erronée des nombres composés. C'est cette compréhension qui nous permettra d'ajuster notre procédure en conséquence en effectuant les réglages qui conviennent. Or, comme nous le montrerons plus loin, il est facile d'effectuer la mise au point nécessaire. Mais penchons-nous d'abord sur cette correspondance entre le carré des nombres premiers et les multiples du nombre 24.

1.2 Les blocs de la pyramide

Le tableau qui suit met en évidence la relation de proximité qui unit les nombres premiers et le nombre 24.

Tableau 1 : Lien entre le carré des nombres premiers et le nombre 24

Nombre premier	Son carré	Multiples de 24	Multiples de 24 + 1
5	25	24 (1 x 24)	25
7	49	48 (2 x 24)	49
11	121	120 (5 x 24)	121
13	169	168 (7 x 24)	169
17	289	288 (12 x 24)	289
19	361	360 (15 x 24)	361
23	529	528 (22 x 24)	529
29	841	840 (35 x 24)	841
31	961	960 (40 x 24)	961
37	1 369	1 368 (57 x 24)	1 369
41	1 681	1 680 (70 x 24)	1 681
43	1 849	1 848 (77 x 24)	1 849
47	2 209	2 208 (92 x 24)	2 209

Ces résultats témoignent de la correspondance avérée entre la séquence des nombres premiers et les multiples du nombre 24, comme si les nombres premiers s'articulaient et se distribuaient en fonction de lui. Bien sûr, les nombres 2 et 3, aussi premiers, sont exclus de notre tableau puisque leur carré est inférieur à 24, ce qui rend la division par 24 impossible. Nous pouvons néanmoins leur appliquer un même genre de procédé en divisant leur carré par des nombres inférieurs arithmétiquement liés au nombre 24, soit ses facteurs, considérant que le nombre 24 peut s'interpréter comme étant le produit de deux nombres.

$$24 = 3 \times 8$$

$$2^2 = 4 \quad 4 - 1 = 3 \quad 3 \div 3 = 1 \text{ (nombre entier)}$$

$$3^2 = 9 \quad 9 - 1 = 8 \quad 8 \div 8 = 1 \text{ (nombre entier)}$$

De même que :

$$5^2 = 25 \quad 25 - 1 = 24 \quad 24 \div 24 = 1 \quad (\text{ou } 24 \div 8 = 3 \text{ et } 3 \div 3 = 1)$$

Ainsi, les nombres premiers 2 et 3 font bel et bien partie intégrante de la même construction arithmétique que l'ensemble des nombres premiers. Nous obtenons un amusant résultat en poursuivant ce petit jeu de division par 2, 3, 8, 12, 24 ou 48 sur les carrés de la séquence croissante des nombres premiers.

$$5^2 - 1 = 24 \quad 24 \div 24 = 1$$

$$7^2 - 1 = 48 \quad 48 \div 24 = 2 \quad (\text{ou } 48 \div 3 = 16 \quad 16 \div 8 = 2)$$

$$11^2 - 1 = 120 \quad 120 \div 24 = 5 \quad (\text{ou } 120 \div 12 = 10 \quad 10 \div 2 = 5) \\ (\text{ou } 120 \div 8 = 15 \quad 15 \div 3 = 5)$$

$$13^2 - 1 = 168 \quad 168 \div 24 = 7 \quad (\text{ou } 168 \div 12 = 14 \quad 14 \div 2 = 7) \\ (\text{ou } 168 \div 8 = 21 \quad 21 \div 3 = 7)$$

La séquence des nombres premiers de 2 à 7 est quasi complète, car seul le nombre 3 est manquant. Nous l'obtenons tout de même au moyen de diverses opérations qui font appel au nombre 24 et à ses facteurs (2, 3, 4, 6, 8, 12) :

$$7^2 - 1 = 48 \quad 48 \div 8 = 6 \quad 6 \div 2 = 3$$

$$48 \div 24 = 2 \quad 8 \times 2 = 16 \quad 48 \div 16 = 3$$

$$48 \div 12 = 4 \quad 4^2 = 16 \quad 48 \div 16 = 3$$

Dans la logique de cette suite arithmétique, qui vise à obtenir la liste croissante des nombres premiers pour résultat, il faut aussi comprendre que plus le nombre augmente, plus il faut augmenter le diviseur pour maintenir la séquence (i.e. passer du diviseur 24, au 48, au 72, etc.). Ainsi, pour les nombres premiers qui succèdent à 7 dans la séquence, soit 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc., il est toujours possible de les obtenir en faisant appel à la même technique, consistant à mettre un nombre au carré, à lui soustraire 1 et à le diviser par un multiple de 24.

$$\begin{array}{llll}
 23^2 - 1 = 528 & 528 \div 48 = & \mathbf{11} & (\text{ou } 528 \div 24 = 22 \quad 22 \div 2 = 11) \\
 & & & (\text{ou } 528 \div 12 = 44 \quad 44 \div 4 = 11) \\
 25^2 - 1 = 624 & 624 \div 48 = & \mathbf{13} & (\text{ou } 624 \div 24 = 26 \quad 26 \div 2 = 13) \\
 35^2 - 1 = 1224 & 1224 \div 72 = & \mathbf{17} & (\text{ou } 1224 \div 24 = 51 \quad 51 \div 3 = 17)
 \end{array}$$

Bref, la séquence des nombres premiers nous apparaît à la suite de ces simples opérations de multiplication et de division s'articulant autour du nombre 24 ou de ses complices (ses facteurs et ses multiples), témoignage de l'adéquation de cet assemblage numéral. Il est vrai que le nombre 24 possède certains attributs distinctifs qui l'amènent à jouer un rôle particulier dans certains contextes arithmétiques, dont celui de l'étude des nombres premiers, nous incitant à réfléchir sur ses propriétés particulières, mais notre étude vise des objectifs différents.

1.3 Conditions à remplir pour reconnaître l'intégrité et la validité de notre procédure

En ayant l'algorithme $p = \sqrt{24n + 1}$ comme point de départ, le pas suivant consiste en l'élaboration d'une procédure qui traduit cette structure arithmétique sous la forme d'une suite d'étapes ayant une valeur prédictive. Idéalement, cette procédure devrait répondre adéquatement aux exigences et conditions suivantes :

- 1) Permettre une validation des nombres comme étant premiers ou non et prédire la suite des nombres premiers en ordre croissant ou décroissant, en ayant pour seul point de départ un nombre entier, premier ou non.
- 2) N'omettre aucun élément de la séquence (la suite des nombres premiers). Bref, ne pas rater une seule cible.

3) Ne pas reconnaître comme étant premier un nombre qui ne l'est pas, i.e. produire des résultats faux positifs. Elle doit être munie de tests de validation simples et efficaces permettant de repérer les intrus et de les éliminer de la liste, exposant le rationnel derrière cette apparente anomalie au moyen d'un nombre minimal d'opérations arithmétiques.

4) Être autosuffisante, en ce sens qu'il n'est pas nécessaire de lui greffer une chaîne d'opérations supplémentaires, ni de lui injecter des informations additionnelles non admises initialement pour obtenir le résultat attendu. Autrement dit, la procédure doit générer par elle-même les données dont elle aura besoin pour remplir sa tâche de validation/prédiction.

1.4 Les faux positifs : justification et solution

Les nombres pointés par l'algorithme sont parfois des faux positifs, i.e. identifiés par notre formule comme étant des nombres premiers alors qu'ils n'auraient pas dû l'être. Plus l'ordre de grandeur des nombres augmente, plus se multiplient les faux positifs. Afin de se donner une idée plus précise de cela, nous avons cherché à connaître le ratio qui existe entre le nombre de faux positifs (fp) – i.e. les nombres erronément retenus par l'algorithme – et le nombre de faux positifs potentiels (fpp) – i.e. l'ensemble des nombres qui pourraient être erronément identifiés par notre algorithme comme étant premiers, soit l'ensemble des nombres impairs non premiers (excluant ceux se terminant par le chiffre 5, que nous savons ne pas être premiers). Les pourcentages représentent le taux de rétention de fp sur l'ensemble des fpp . Ils s'accroissent progressivement en fonction de la taille des nombres, jusqu'à dépasser légèrement la barre des 50%.

Tableau 2 : Pourcentage de nombres faux positifs par tranches croissantes

Échantillons de nombres	Pourcentage de faux positifs (numérateur = fp , dénominateur = fpp)
1 à 100	18,75% (3/16) (ce sont 49, 77 et 91)
101 à 200	36,84% (7/19)
201 à 300	40% (10/25)
301 à 400	41,66% (10/24)
Entre 841(29 ²) et 961 (31 ²)	48,14% (13/27)
Entre 1 681 (41 ²) et 1 849 (43 ²)	50% (21/42)

Entre 3 481 (59^2) et 3 721 (61^2)	49,2% (31/63)
Entre 5 041 (71^2) et 5 329 (73^2)	56,09% (46/84)
Entre 10 201 (101^2) et 10 609 (103^2)	55% (66/120)

Il nous fallait aborder et résoudre ce problème. Nous nous sommes donc penchés sur l'analyse des propriétés des nombres premiers faux positifs, ce qui nous a permis de leur découvrir des caractéristiques communes qui les rend d'emblée faciles à identifier et à écarter. Comme le montre les exemples ci-après, leur détection par l'algorithme résulte toujours de l'une ou l'autre des deux raisons suivantes :

A) Ils sont une puissance d'un nombre premier.

$5^2 = 25$	$25 - 1 = 24$	$24 \div 24 = 1$	(5 est un nombre premier)
$25^2 = 625$	$625 - 1 = 624$	$624 \div 24 = 26$	(25 est un <i>fp</i> car $5^2 = 25$)
$7^2 = 49$	$49 - 1 = 48$	$48 \div 24 = 2$	(7 est un nombre premier)
$49^2 = 2\,401$	$2\,401 - 1 = 2\,400$	$2\,400 \div 24 = 100$	(49 est un <i>fp</i> car $7^2 = 49$)
$11^2 = 121$	$121 - 1 = 120$	$120 \div 24 = 5$	(11 est un nombre premier)
$121^2 = 14\,641$	$14\,641 - 1 = 14\,640$	$14\,640 \div 24 = 610$	(121 est un <i>fp</i> car $11^2 = 121$)
$7^3 = 343$	$343^2 = 117\,649$	$117\,649 - 1 = 117\,648$	$117\,648 \div 24 = 4\,902$ (343 est un <i>fp</i> car $7^3 = 343$)
$7^4 = 2\,401$	$2\,401^2 = 5\,764\,801$	$5\,764\,801 - 1 = 5\,764\,800$	$5\,764\,800 \div 24 = 240\,200$ (2 401 est un <i>fp</i> car $7^4 = 2\,401$)

B) Ils possèdent une paire de nombres premiers pour seuls facteurs.

$13 \times 17 = 221$	$221^2 = 48\,841$	$48\,841 - 1 = 48\,840$	$48\,840 \div 24 = 2\,035$
(221 est un faux positif car $13 \times 17 = 221$)			
$11 \times 23 = 253$	$253^2 = 64\,009$	$64\,009 - 1 = 64\,008$	$64\,008 \div 24 = 2\,667$
(253 est un faux positif car $11 \times 23 = 253$)			

On pourrait argumenter qu'un seul test s'avère nécessaire, puisqu'un nombre premier à la puissance 2 est l'équivalent du produit de deux nombres premiers, mais ce serait faire fi du fait que l'exposant peut être supérieur à 2. Par exemple, le nombre 2401 (7^4) est un faux positif. La plupart du temps, bien sûr, les faux positifs sont le produit de deux nombres premiers. Ces nombres sont connus sous le nom de semi-premiers. En d'autres termes, nos faux positifs représentent un sous-ensemble des semi-premiers.

Tableau 3 : Les nombres faux positifs et leur factorisation

Nombres faux positifs (<i>fp</i>)	<i>fp</i>²	$(n^2 - 1) \div 24$	Facteurs des <i>fp</i>
49	2 401	100	7 ²
77	5 929	247	7 x 11
91	8 281	395	7 x 13
119	14 161	590	7 x 17
121	14 641	610	11 ²
133	19 019	737	17 x 19
143	20 449	852	11 x 13
161	25 921	1 080	7 x 23
169	28 561	1 190	13 ²
187	34 969	1 457	11 x 17
203	41 209	1 717	7 x 29
209	43 681	1 820	11 x 19
217	47 089	1 962	7 x 31
221	48 841	2 035	13 x 17
247	61 009	2 542	13 x 19
253	64 009	2 667	11 x 23
259	67 081	2 795	7 x 37
287	82 369	3 432	7 x 41
289	83 521	3 480	17 ²
299	89 401	3 725	13 x 23
301	90 601	3 775	7 x 43
319	101 761	4 240	11 x 29
323	104 329	4 347	17 x 19
329	108 241	4 510	7 x 47
341	116 281	4 845	11 x 31
343	117 649	4 902	7 ³
361	130 321	5 430	19 ²
371	137 641	5 735	7 x 53
377	142 129	5 922	13 x 29
391	152 881	6 370	17 x 23

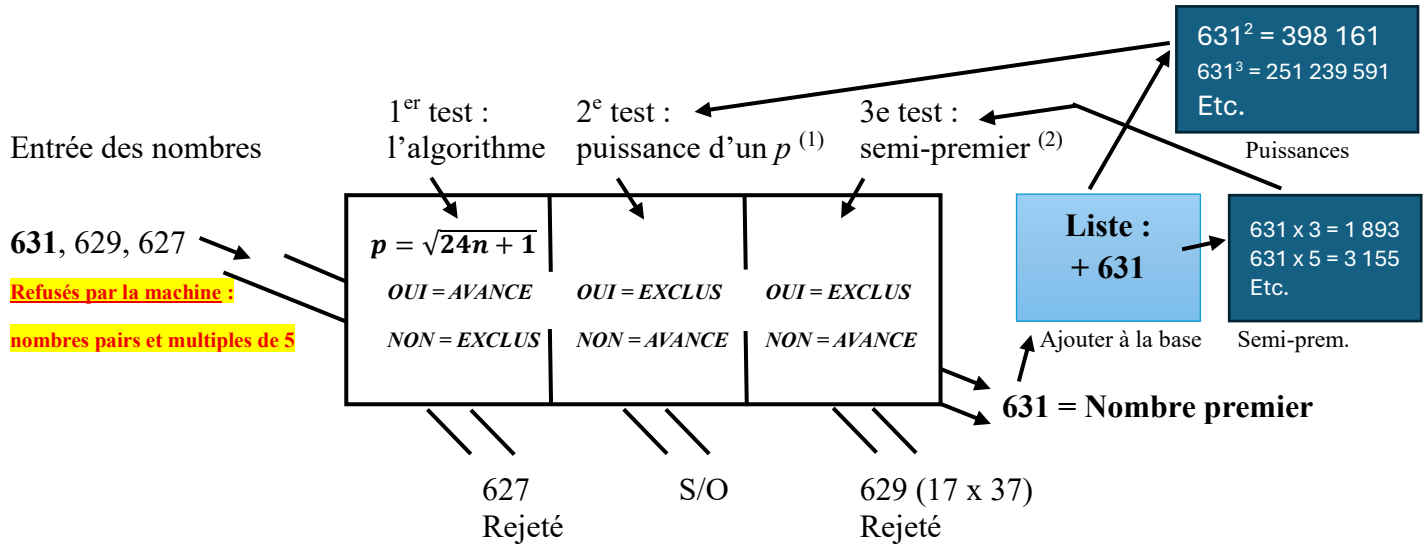
Cela ne signifie pas que tous les nombres semi-premiers – i.e. tous ceux qui sont le produit d'une paire de nombres premiers – sortiront de notre procédure en tant que faux positifs. Par exemple, les nombres semi-premiers peuvent être pairs, alors que notre procédure de validation n'identifiera jamais un nombre pair comme étant un nombre premier potentiel, le rejetant d'emblée dès la première étape du processus d'analyse. Pareillement, les nombres semi-premiers se terminant par un 5 ne sont pas pertinents, car nous savons déjà que ces nombres ne sont pas des nombres premiers et que, par conséquent, ils doivent être exclus sans autre considération.

Plutôt que d'invalider notre modèle, ces faux positifs ne font que nous rappeler que l'édifice numérique est une charpente traversée par une armature savamment articulée et dont les poutres d'acier sont les nombres premiers, ceux-là même qui en assurent l'intégrité et agissent à travers lui selon un principe d'extension et de redondance infailliblement rigoureux présidant à leur distribution. Cette analyse nous a directement conduits à l'ajout d'une étape supplémentaire à notre procédure de repérage des nombres premiers, que nous nommons « tamisage », à l'image des chercheurs d'or qui s'efforcent de ne conserver dans leur tamis que les pépites tant prisées. Nos pépites sont évidemment la constellation des nombres premiers, mais nous devons également souligner le rôle prépondérant des nombres semi-premiers dans la procédure de validation de notre modèle et leur rôle potentiel dans l'ensemble de l'architecture numérique. Nous verrons d'ailleurs plus loin qu'ils sont directement impliqués dans le séquençage des paires de nombres premiers jumeaux, ce qui, selon nous, leur confère des propriétés organisationnelles toutes particulières, sinon essentielles, dans notre système de numération, ainsi qu'un précieux pouvoir de prédiction.

1.5 Opérationnalisation de l'algorithme au moyen de la procédure de tamisage

De manière graphique, notre modèle pourrait se voir représenté sous l'aspect d'une « machine » effectuant un contrôle de qualité ou un test de conformité sur une chaîne de production, comme le montre l'illustration suivante. Notons que le même assemblage, présenté de manière visuelle pour les besoins de notre exposé, peut évidemment se traduire sous la forme d'un programme informatique.

Diagramme 1 : La machine à détecter des nombres premiers



⁽¹⁾ Vérifier si le nombre testé est une puissance d'un nombre premier (ex : 7³).

⁽²⁾ Vérifier si le nombre testé est le produit de deux nombres premiers (ex: 19 x 31).

Exemple :

Quel sont les deux nombres premiers qui succèdent à 251?

Appliquons la formule A, mais prenons tout d'abord le temps de vérifier si 251 est bel et bien un nombre premier.

$$p = \sqrt{24n + 1}$$

$$251 = \sqrt{24n + 1}$$

$$251^2 = 24n + 1$$

$$63\,001 - 1 = 24n$$

$$63\,000 = 24n$$

$$\frac{63\,000}{24} = n = 2\,625$$

Le résultat de la division par 24 du carré moins 1 de 251 est un nombre entier (2 625), 251 n'est pas une puissance d'un nombre premier et n'est pas le produit de deux nombres premiers, il est donc un nombre premier. Passons maintenant à l'étape suivante, qui consiste à choisir le nombre suivant à insérer

dans notre machine. Il ne doit pas s'agir d'un nombre pair ni d'un multiple de 5, ce qui élimine par défaut les nombres 252, 254, 255, 256, 258, 260, etc. Nous testerons donc dans l'ordre les nombres 253, 257, 259, 261, 263, etc.

$$p = \sqrt{24n + 1}$$

$$253 = \sqrt{24n + 1}$$

$$253^2 = 24n + 1$$

$$64\,009 - 1 = 24n$$

$$64\,008 = 24n$$

$$\frac{64008}{24} = 2\,667$$

Le carré moins 1 du nombre 253 est un multiple de 24, ce qui fait de lui un nombre premier potentiel ou « candidat ». Passons maintenant à l'étape suivante de notre procédure de validation, soit le tamisage à double filtre du nombre 253 :

1^{er} filtre : Est-il une puissance d'un nombre premier?

Réponse : NON → Passer au second filtre.

2^e filtre : Possède-t-il deux nombres premiers pour seuls facteurs (mis à part 1 et lui-même)?

Réponse : OUI (11 et 23) → Exclure, puisque c'est un nombre semi-premier.

Le nombre 253 doit donc être rejeté en tant que nombre premier, car il échoue l'épreuve de tamisage du 2^e filtre. Passons au nombre 257.

$$p = \sqrt{24n + 1}$$

$$257 = \sqrt{24n + 1}$$

$$257^2 = 24n + 1$$

$$66\,049 - 1 = 24n$$

$$66\,048 = 24n$$

$$\frac{64008}{24} = 2\,752$$

Le carré moins 1 du nombre 257 est un multiple de 24, ce qui fait de lui un nombre premier candidat. Après vérification, nous savons que ce nombre satisfait aux deux conditions de notre test de conformité. Nous sommes donc en présence d'un nombre premier.

Malgré la simplicité apparente de notre procédure, force est de reconnaître qu'elle fonctionne à merveille. Elle répond aux troisième et quatrième conditions de validation telles qu'exposées précédemment, puisqu'elle est munie d'une composante de vérification à deux volets, simple et efficace, dont la fonction est de détecter et d'éliminer les faux positifs. Le fait de connaître les attributs spécifiques des intrus réduit drastiquement le nombre d'opérations et le temps de calcul nécessaires à un programme informatique pour effectuer la validation (i.e. confirmer si un nombre doit être exclu ou retenu), puisque'il n'est plus obligatoire de chercher des diviseurs en dehors de cette classe de nombres et de la collection de facteurs déjà dans la base. De plus, si l'on postule que le programme démarre sa recherche à partir de zéro, celui-ci aura construit sa base de données à même les nombres premiers qu'il aura précédemment détectés et stockés en banque au cours du processus. En d'autres mots, cela signifie qu'il possédera déjà, dans un module de mémoire, la liste des facteurs premiers à utiliser pour effectuer sa tâche de tamisage et n'aura donc nul besoin d'être alimenté par l'ajout de nouvelles données, les mailles de son double filtre d'exclusion ayant été tissées par les informations recueillies au cours de l'opérationnalisation même de la procédure. Ce faisant, le nombre de facteurs que notre moteur est appelé à croiser pour générer sa liste de nombres semi-premiers est aussi limité que l'échantillon des nombres premiers faisant déjà partie intégrante de sa collection.

2. La caractérisation des nombres premiers jumeaux : postulats et hypothèses

2.1 Postulats

Comme nous le savons, nous sommes en présence d'une paire de nombres premiers jumeaux lorsque ceux-ci sont séparés par un seul nombre. Pour autant, nous ignorons la raison pour laquelle il en est ainsi. Quel beau défi que celui de mieux comprendre les propriétés des nombres premiers jumeaux et de trouver une règle d'organisation présidant à la répartition de ces nombres. Il est raisonnable de supposer qu'un modèle apte à générer la suite des nombres premiers pourrait se révéler utile pour toute autre tâche concernant les nombres appartenant à cette même catégorie, comme celle d'établir des correspondances

ou de repérer des régularités entre les nombres premiers jumeaux, voire celle de prédire leur suite. Pareil résultat témoignerait de sa polyvalence et irait dans le sens de sa validation par généralisation.

Ainsi, principalement par jeu d'association entre les carrés des paires de nombres jumeaux, des schémas nous sont apparus, nous invitant à formuler avec confiance un nombre de dix postulats, que nous vous proposons ci-après, précédés d'un exemple de postulat déjà connu du même acabit.

Exemple de postulat : La différence entre les sommes respectives de deux paires de nombres premiers jumeaux (successives ou non) est toujours un multiple de 12. [1]

Postulat 1) La somme des carrés moins 2 d'une paire de nombres premiers (jumeaux ou non, successifs ou non et excluant les nombres 2 et 3) est toujours un multiple du nombre 24. Cette propriété n'est pas unique aux nombres premiers jumeaux, puisqu'elle est vraie pour toute paire de nombres premiers, quels qu'ils soient, mais nous jugeons pertinent de la mentionner ici, puisqu'elle est fondamentale à notre modèle sur les nombres premiers dans leur ensemble. Attention : il n'est pas dit ici que tout multiple du nombre 24 correspond à la somme des carrés d'une paire de nombres premiers jumeaux moins 2. C'est plutôt l'inverse.

Postulat 2) La différence entre les carrés d'une paire de nombres premiers (jumeaux ou non / successifs ou non) est toujours un multiple de 24 (sauf pour la paire 3/5, dont la somme des carrés est inférieure à 24). Comme précédemment, cette propriété n'est pas exclusive aux nombres premiers jumeaux, puisqu'elle est vraie pour toute paire de nombres premiers, mais son importance est majeure dans l'élaboration de notre modèle, vu son lien avec le nombre 24.

Postulat 3) L'écart entre la somme des carrés de deux paires (successives ou non) de nombres premiers jumeaux est toujours un multiple du nombre 24 (hormis pour l'écart entre les paires 3/5 et 5/7).

Postulat 4) De même, l'écart entre la différence des carrés de deux paires (successives ou non) de nombres premiers jumeaux est toujours un multiple du nombre 24 (hormis pour l'écart entre les paires 3/5 et 5/7).

Postulat 5) La différence entre les carrés d'une paire de nombres premiers jumeaux, lorsque divisée par 24, est toujours un diviseur de la somme moins 2 de leurs carrés, divisée par 24. Autrement dit, le quotient obtenu de la division par 24 de la somme moins 2 des carrés de deux nombres premiers

jumeaux est toujours un multiple du quotient obtenu de la division par 24 de la différence entre ces mêmes carrés.

Postulat 6) La somme des deux nombres d'une paire de nombres premiers jumeaux, lorsqu'on la prend comme diviseur et que le dividende est le carré moins 1 de l'un ou l'autre de ces deux mêmes nombres, donnera toujours pour résultat un nombre entier, dont l'ordre de grandeur va croissant proportionnellement au nombre de départ.

Postulat 7) La somme des carrés moins 2 de deux nombres premiers jumeaux est toujours divisible par la somme de ceux-ci.

Postulat 8) Le nombre séparateur (ns) est le nombre situé entre les deux nombres d'une paire de nombres premiers jumeaux (pj). Faire la différence entre le carré du nombre séparateur (ns) d'une paire de nombres premiers jumeaux et le carré d'un nombre de deux unités inférieur. Faire la différence entre le carré d'un nombre de deux unités supérieur au ns et le carré du ns . L'addition de ces deux résultats est égal à $8ns$ (huit fois le ns). Cela est vrai pour toute paire de nombres séparés de deux unités. La particularité avec le ns d'une paire de nombres pj est que l'addition de ces deux résultats est un multiple de 24, qui correspond à $24 \frac{ns}{3}$.

Postulat 9) La différence entre les carrés d'une paire de nombres pj est égale à leur somme multipliée par deux. Vrai pour toute paire de nombres dont la différence est de deux unités. La particularité d'une paire de nombres pj est que le résultat est un multiple de 24 dont le facteur multiplicatif correspond à leur somme divisée par 12 ou au nombre séparateur (ns) divisé par 6.

Postulat 10) Les multiples du carré du nombre 24 (i.e. les multiples de 576) correspondent *parfois* à la différence entre la somme des carrés de deux paires de nombres premiers jumeaux (successives ou non). Comme nous le verrons plus loin, ce dernier postulat nécessite une analyse plus poussée et une meilleure compréhension de notre part pour refléter correctement et plus généralement le principe arithmétique qu'il sous-tend.

Pour les fins de nos analyses, nous ignorerons les postulats qui sont des vérités mathématiques universelles, i.e. qui concernent toutes les paires de nombres entiers dont la différence est 2, qu'ils soient premiers ou non. Dans tel cas, ils sont de peu d'utilité pour discerner les spécificités des nombres premiers jumeaux. L'Annexe A en propose quelques exemples.

Afin de faciliter la compréhension des calculs qui vont servir à la démonstration de nos postulats, nous vous proposons les trois tableaux de données suivants, qui visent à brosser un portrait comparatif entre les paires de nombres premiers, avec l'objectif de repérer des *patterns* (des constantes et des correspondances). Cette approche exploratoire est celle que nous adoptons et préconisons de manière générale dans le cadre de cette étude. Ce n'est qu'un maigre échantillon, mais il nous aide à mieux visualiser les nombres avec lesquels nous jonglerons et pourra servir de point de départ à ceux et celles qui sont intéressés à analyser les nombres premiers jumeaux à travers le prisme de nos postulats et des lignes directrices de notre modèle. La majorité de nos postulats en sont inspirés.

Tableau 4 : Nombres premiers jumeaux et leurs carrés (1)

Paires de n^{bre} premiers	Carré de ces nombres	Somme des carrés	Écart entre ces sommes	Différence entre les carrés	Écart entre ces diff.
3 / 5	9 / 25	34	Nul	16 (2 x 8)	Nul
5 / 7	25 / 49	74 (3x24+2)	+40 (5 x 8)	24 (1 x 24)	+8 (1 x 8)
11 / 13	121 / 169	290 (12x24+2)	+216 (9 x 24)	48 (2 x 24)	+24 (1 x 24)
17 / 19	289 / 361	650 (27x24+2)	+360 (15 x 24)	72 (3 x 24)	+24 (1 x 24)
29 / 31	841 / 961	1 802 (75x24+2)	+1 152 (2 x 24 ²)	120 (5 x 24)	+48 (2 x 24)
41 / 43	1 681 / 1 849	3 530 (147x24+2)	+1 728 (3 x 24 ²)	168 (7 x 24)	+48 (2 x 24)
59 / 61	3 481 / 3 721	7 202 (300x24+2)	+3 672 (153 x 24)	240 (10 x 24)	+72 (3 x 24)
71 / 73	5 041 / 5 329	10 370 (432x24+2)	+3 168 (132 x 24)	288 (12 x 24)	+48 (2 x 24)
101 / 103	10 201 / 10 609	20 810 (867x24+2)	+10 440 (435 x 24)	408 (17 x 24)	+120 (5 x 24)
107 / 109	11 449 / 11 881	23 330 (972x24+2)	+2 520 (105 x 24)	432 (18 x 24)	+24 (1 x 24)
137 / 139	18 769 / 19 321	38 090 (1587x24+2)	+14 760 (615 x 24)	552 (23 x 24)	+120 (5 x 24)
149 / 151	22 201 / 22 801	45 002 (1875x24+2)	+6 912 (288 x 24)	600 (25 x 24)	+48 (2 x 24)

Tableau 5 : Nombres premiers jumeaux et leurs carrés (2)

A Paires de n^{bre} premiers	B Somme des carrés -2 ÷ 24	C Différence entre les carrés ÷ 24	D C x n = B	E n = C x 3
3 / 5	32 ÷ 8 = 4	16	Nul	Nul
5 / 7	72 ÷ 24 = 3	24 ÷ 24 = 1	1 x 3 = 3	3 = 1 x 3
11 / 13	288 ÷ 24 = 12	48 ÷ 24 = 2	2 x 6 = 12	6 = 2 x 3

17 / 19	$648 \div 24 = 27$	$72 \div 24 = 3$	$3 \times 9 = 27$	$9 = 3 \times 3$
29 / 31	$1\ 800 \div 24 = 75$	$120 \div 24 = 5$	$5 \times 15 = 75$	$15 = 5 \times 3$
41 / 43	$3\ 528 \div 24 = 147$	$168 \div 24 = 7$	$7 \times 21 = 147$	$21 = 7 \times 3$
59 / 61	$7\ 200 \div 24 = 300$	$240 \div 24 = 10$	$10 \times 30 = 300$	$30 = 10 \times 3$
71 / 73	$10\ 368 \div 24 = 432$	$288 \div 24 = 12$	$12 \times 36 = 432$	$36 = 12 \times 3$
101 / 103	$20\ 808 \div 24 = 867$	$408 \div 24 = 17$	$17 \times 51 = 867$	$51 = 17 \times 3$
107 / 109	$23\ 328 \div 24 = 972$	$432 \div 24 = 18$	$18 \times 54 = 972$	$54 = 18 \times 3$
137 / 139	$38\ 088 \div 24 = 1\ 587$	$552 \div 24 = 23$	$23 \times 69 = 1\ 587$	$69 = 23 \times 3$
149 / 151	$45\ 000 \div 24 = 1\ 875$	$600 \div 24 = 25$	$25 \times 75 = 1875$	$75 = 25 \times 3$

Tableau 6 : Nombres premiers jumeaux et leurs carrés (3)

A Paires de n ^{bres} premiers	B Somme de ces deux n ^{bres}	C Carrés de ces deux n ^{bres} - 1	D C ÷ B	E B ÷ par 12 ou 24	F Somme de C ÷ B
3 / 5	$3 + 5 = 8$	8 / 24	$8 \div 8 = 1$ $24 \div 8 = 3$	nil	4 ($32 \div 8$)
5 / 7	$5 + 7 = 12$	24 / 48	$24 \div 12 = 2$ $48 \div 12 = 4$	$12 \div 12 = 1$	6
11 / 13	$11 + 13 = 24$	120 / 168	$120 \div 24 = 5$ $168 \div 24 = 7$	$24 \div 12 = 2$ $24 \div 24 = 1$	12
17 / 19	$17 + 19 = 36$	288 / 360	$288 \div 36 = 8$ $360 \div 36 = 10$	$36 \div 12 = 3$ $36 \div 24 = 1,5$	18
29 / 31	$29 + 31 = 60$	840 / 960	$840 \div 60 = 14$ $960 \div 60 = 16$	$60 \div 12 = 5$ $60 \div 24 = 2,5$	30
41 / 43	$41 + 43 = 84$	1 680 / 1 848	$1\ 680 \div 84 = 20$ $1\ 848 \div 84 = 22$	$84 \div 12 = 7$ $84 \div 24 = 3,5$	42
59 / 61	$59 + 61 = 120$	3 480 / 3 720	$3\ 480 \div 120 = 29$ $3\ 720 \div 120 = 31$	$120 \div 12 = 10$ $120 \div 24 = 5$	60
71 / 73	$71 + 73 = 144$	5 040 / 5 328	$5\ 040 \div 144 = 35$ $5\ 328 \div 144 = 37$	$144 \div 12 = 12$ $144 \div 24 = 6$	72
101 / 103	$101 + 103 = 204$	10 200 / 10 608	$10\ 200 \div 204 = 50$ $10\ 608 \div 204 = 52$	$204 \div 12 = 17$ $204 \div 24 = 8,5$	102
107 / 109	$107 + 109 = 216$	11 448 / 11 880	$11\ 448 \div 216 = 53$ $11\ 880 \div 216 = 55$	$216 \div 12 = 18$ $216 \div 24 = 9$	108
137 / 139	$137 + 139 = 276$	18 768 / 19 320	$18\ 768 \div 276 = 68$	$276 \div 12 = 23$	138

$$\begin{array}{llll}
 149 / 151 & 149 + 151 = 300 & 22\,200 / 22\,800 & 19\,320 \div 276 = 70 \quad 276 \div 24 = 11,5 \\
 & & & 22\,200 \div 300 = 74 \quad 300 \div 12 = 25 \quad 300 \\
 & & & 22\,800 \div 300 = 76 \quad 300 \div 24 = 12,5
 \end{array}$$

Quelques observations :

Nous avons repéré diverses correspondances entre les nombres de nos différents tableaux, dont nous ignorons la raison d'être d'ordre arithmétique. En voici quelques-unes.

Le nombre 288 est : - Le carré moins 1 du nombre 17.
 - La différence entre les carrés des nombres jumeaux (71, 72).
 - La somme des carrés moins 2 divisée par 24 de la paire des nombres jumeaux (11, 13).

Le nombre 360 est : - Le carré moins 1 du nombre 19.
 - La différence entre la somme des carrés des paires de nombres jumeaux (11, 13) et (17, 19).

Le nombre 432 est : - La différence entre les carrés de la paire de nombres jumeaux (107, 109).
 - La somme des carrés moins 2 divisée par 24 de la paire de nombres jumeaux (71, 73).

Le nombre 1 680 est : - Le carré moins 1 du nombre 41.
 - La différence entre les carrés de la paire de nombres jumeaux (419, 421).

Voici maintenant l'illustration détaillée de notre liste de dix postulats, formules à l'appui, précédée d'un exemple déjà connu du même type.

Postulat) La différence entre les sommes respectives de deux paires de nombres premiers jumeaux est toujours un multiple de 12.

Exemple détaillé :

Paire (11, 13)	Paire (29, 31)
$11 + 13 = 24$	$29 + 31 = 60$
	$60 - 24 = 46$
	$46 \div 12 = 3$

Formule :

(pja, pjb) = Une paire de nombres premiers jumeaux $> (pjc, pjd)$.

(pjc, pjd) = Une paire de nombres premiers jumeaux $< (pja, pjb)$.

n = Nombre entier.

$$n = \frac{pja + pjb - pj c - pjd}{12}$$

Application de la formule :

$(pja, pjb) = (29, 31)$

$(pjc, pjd) = (11, 13)$

$$n = \frac{29 + 31 - 11 - 13}{12}$$

$$n = \frac{60 - 24}{12}$$

$$n = \frac{36}{12}$$

$$n = 3$$

Postulat 1) La somme des carrés moins 2 d'une paire de nombres premiers (jumeaux ou non, successifs ou non et excluant les nombres 2 et 3) est toujours un multiple du nombre 24.

Exemples détaillés :

Paire (11, 13)		Paire (23, 37)	
$11^2 = 121$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$37^2 = 1\ 369$
$121 + 169 = 290$		$529 + 1\ 369 = 1\ 898$	
$290 - 2 = 288$		$1\ 898 - 2 = 1\ 896$	
$288 \div 24 = 12$		$1\ 896 \div 24 = 79$	

Les nombres 12 et 79 sont des entiers, tel que prévu.

Formules :

pja = Nombre premier jumeau $> pjb$.

pjb = Nombre premier jumeau $< pja$.

n = Nombre entier.

$$A) n = \frac{pja^2 + pjb^2 - 2}{24}$$

$$B) 24n + 2 = pja^2 + pjb^2$$

Application de nos deux formules :

$$pja = 107$$

$$pjb = 109$$

$$n = \frac{107^2 + 109^2 - 2}{24}$$

$$n = \frac{11\,449 + 11\,881 - 2}{24}$$

$$n = \frac{23\,330 - 2}{24}$$

$$n = \frac{23\,328}{24}$$

$$n = 972$$

* * *

$$24n + 2 = 107^2 + 109^2$$

$$24n + 2 = 11\,449 + 11\,881$$

$$24n + 2 = 23\,330$$

$$24n = 23\,330 - 2$$

$$24n = 23\,328$$

$$n = \frac{23\,328}{24}$$

$$n = 972$$

Les formules montrent que la division par 24 donne bel et bien un nombre entier.

Postulat 2) La différence entre les carrés de deux nombres premiers est toujours un multiple de 24.

Exemple détaillé :

Paire (29, 31)

$$29^2 = 841 \qquad 31^2 = 961$$

$$961 - 841 = 120$$

$$120 \div 24 = 5$$

Formules :

(pja, pjb) = Une paire de nombres premiers jumeaux.

n = Nombre entier.

$$A) \ n = \frac{pjb^2 - pja^2}{24}$$

$$B) \ 24n = pjb^2 - pja^2$$

Application de nos deux formules :

$$pja = 7$$

$$pjb = 5$$

$$n = \frac{7^2 - 5^2}{24}$$

$$n = \frac{49 - 25}{24}$$

$$n = \frac{24}{24} \qquad n = 1$$

* * *

$$24n = 7^2 - 5^2$$

$$24n = 49 - 25$$

$$24n = 24$$

$$n = \frac{24}{24} \qquad n = 1$$

Postulat 3) L'écart entre la somme des carrés des nombres de deux paires de nombres premiers jumeaux est toujours un multiple du nombre 24.

Exemples détaillés :

Paire (17, 19)

$$17^2 = 289$$

$$19^2 = 361$$

$$289 + 361 = 650$$

Paire (41, 43)

$$41^2 = 1\ 681$$

$$43^2 = 1\ 849$$

$$1\ 849 + 1\ 681 = 3\ 530$$

$$3\ 530 - 650 = 2\ 880$$

$$2\ 880 \div 24 = 120$$

Formules :

(pja, pjb) = Une paire de nombres premiers jumeaux $> (pjc, pjd)$.

(pjc, pjd) = Une paire de nombres premiers jumeaux $< (pja, pjb)$.

n = Nombre entier.

$$A) \ n = \frac{pja^2 + pjb^2 - pj c^2 - pjd^2}{24}$$

$$B) \ 24n = pja^2 + pjb^2 - pj c^2 - pjd^2$$

Application de la formule A :

$$(pja, pjb) = (29, 31)$$

$$(pjc, pjd) = (11, 13)$$

$$n = \frac{29^2 + 31^2 - 11^2 - 13^2}{24}$$

$$n = \frac{841 + 961 - 121 - 169}{24}$$

$$n = \frac{1\ 802 - 290}{24}$$

$$n = \frac{1\ 512}{24}$$

$$n = 63$$

La formule montre que la division par 24 donne bel et bien un nombre entier.

Postulat 4) L'écart entre la différence des carrés des nombres de deux paires de nombres premiers jumeaux est toujours un multiple du nombre 24.

Exemples détaillés :

Paire (59, 61)		Paire (101, 103)	
$59^2 = 3\ 481$	$61^2 = 3\ 721$	$101^2 = 10\ 201$	$103^2 = 10\ 609$
$3\ 721 - 3\ 481 = 240$		$10\ 609 - 10\ 201 = 408$	
$408 - 240 = 168$			
$168 \div 24 = 7$			

Formules :

$(pja, pjb) =$ Une paire de nombres premiers jumeaux $> pjc / pjd$.

$(pjc, pjd) =$ Une paire de nombres premiers jumeaux $< pja / pjb$.

$n =$ Nombre entier.

$$A) \ n = \frac{pjb^2 - pja^2 - pjc^2 - pjd^2}{24}$$

$$B) \ 24n = pjb^2 - pja^2 - pjc^2 - pjd^2$$

Application de la formule A :

$(pja, pjb) = (29, 31)$

$(pjc, pjd) = (11, 13)$

$$n = \frac{31^2 - 29^2 - 11^2 - 13^2}{24}$$

$$n = \frac{1\ 849 - 1\ 681 - 841 - 961}{24}$$

$$n = \frac{48}{24}$$

$$n = 2$$

La formule montre que la division par 24 donne bel et bien un nombre entier.

Postulat 5) La différence entre les carrés d'une paire de nombres premiers jumeaux, lorsque divisée par 24, est toujours un diviseur de la somme moins 2 de leurs carrés, divisée par 24.

Exemple détaillé :

Paire (41, 43)

$$41^2 = 1\ 681 \quad 43^2 = 1\ 849$$

$$41^2 = 1\ 681 \quad 43^2 = 1\ 849$$

$$1\ 681 + 1\ 849 = 3\ 530$$

$$1\ 849 - 1\ 681 = 168$$

$$3\ 530 - 2 = 3\ 528$$

$$168 \div 24 = 7$$

$$3\ 528 \div 24 = 147$$

$$147 \div 7 = 21$$

Formule :

(pja, pjb) = Une paire de nombres premiers jumeaux.

n = Nombre entier.

$$n = \frac{(pja^2 + pjb^2 - 2) \div 24}{pjb^2 - pja^2 \div 24}$$

Application de la formule :

$(pja, pjb) = (41, 43)$

$$n = \frac{(41^2 + 43^2 - 2) \div 24}{43^2 - 41^2 \div 24}$$

$$n = \frac{(1\ 681 + 1\ 849 - 2) \div 24}{1\ 849 - 1\ 681 \div 24}$$

$$n = \frac{(3\ 530 - 2) \div 24}{168 \div 24}$$

$$n = \frac{3\ 528 \div 24}{7}$$

$$n = \frac{147}{7}$$

$$n = 21$$

Postulat 6) La somme des deux nombres d'une paire de nombres premiers jumeaux, lorsqu'on la prend comme diviseur et que le dividende est le carré moins 1 de l'un ou l'autre de ces deux mêmes nombres, donnera toujours pour résultat un nombre entier, dont l'ordre de grandeur va croissant proportionnellement au nombre de départ.

Exemple détaillé :

Paire (29, 31)

$$29 + 31 = 60$$

$$29^2 = 841$$

$$31^2 = 961$$

$$841 - 1 = 840$$

$$961 - 1 = 960$$

$$840 \div 60 = 14$$

$$960 \div 60 = 16$$

Formule :

(pja, pjb) = Une paire de nombres premiers jumeaux.

n = Nombre entier.

$$n = \frac{pja^2 - 1}{pja + pjb}$$

$$n = \frac{pjb^2 - 1}{pja + pjb}$$

Application de la formule :

$(pja, pjb) = (29, 31)$

$$n = \frac{29^2 - 1}{29 + 31}$$

$$n = \frac{31^2 - 1}{29 + 31}$$

$$n = \frac{841 - 1}{60}$$

$$n = \frac{961 - 1}{60}$$

$$n = \frac{840}{60}$$

$$n = \frac{960}{60}$$

$$n = 14$$

$$n = 16$$

Postulat 7) La somme des carrés moins 2 de deux nombres premiers jumeaux est toujours divisible par la somme de ceux-ci.

Exemple détaillé :

Paire (29, 31)

$$29 + 31 = 60$$

$$29^2 = 841$$

$$31^2 = 961$$

$$841 + 961 = 1\,802$$

$$1\,802 - 2 = 1\,800$$

$$1\,800 \div 60 = 30$$

Formule :

(pja, pjb) = Une paire de nombres premiers jumeaux.

n = Nombre entier.

$$n = \frac{pja^2 + pjb^2 - 2}{pja + pjb}$$

Application de la formule :

$(pja, pjb) = (71, 73)$

$$n = \frac{71^2 + 73^2 - 2}{71 + 73}$$

$$n = \frac{5\,041 + 5\,329 - 2}{144}$$

$$n = \frac{10\,370 - 2}{144}$$

$$n = \frac{10\,368}{144}$$

$$n = 72$$

Postulat 8) Faire la différence entre le carré du nombre séparateur (ns) d'une paire de nombres premiers jumeaux et le carré d'un nombre de deux unités inférieur. Faire la différence entre le carré d'un nombre de deux unités supérieur au ns et le carré du ns . L'addition de ces deux résultats est égal à $8ns$ et est un multiple de 24, qui correspond à $24(ns/3)$.

Exemples détaillés :

Paire (5, 7) $ns = 6$

$$6^2 - 4^2 = 20$$

$$8^2 - 6^2 = 28$$

$$20 + 28 = 48$$

$$(48 = 8 \times 6 = 24 \times \frac{6}{3})$$

Paire (11, 13) $ns = 12$

$$12^2 - 10^2 = 44$$

$$14^2 - 12^2 = 52$$

$$44 + 52 = 96$$

$$(96 = 8 \times 12 = 24 \times \frac{12}{3})$$

Formules : (la procédure nécessite trois formules)

ns = Nombre séparateur d'une paire de nombres premiers jumeaux.

$$x = ns - 2.$$

$$y = ns + 2.$$

c = Multiple de 24 égal à $8ns$ ainsi qu'à $24 \frac{ns}{3}$.

$$ns^2 - x^2 = a$$

$$y^2 - ns^2 = b$$

$$a + b = c$$

Paire (17, 19)

Pair (17, 19)

$$18^2 - 16^2 = 68$$

$$20^2 - 18^2 = 76$$

$$68 + 76 = 144$$

$$144 = 8 \times 18$$

$$144 = 24 \times \frac{18}{3}$$

Postulat 9) La différence entre les carrés d'une paire de nombres pj est égale à leur somme multipliée par deux. Vrai pour toute paire de nombres dont la différence est de deux unités. La particularité d'une paire de nombres pj est que le résultat est un multiple de 24 dont le facteur multiplicatif correspond à leur somme divisée par 12 ou au nombre séparateur (ns) divisé par 6.

Exemples détaillés :

Paire (4, 6)

Paire (17, 19)

$$4 + 6 = 10 / 2 \times 10 = 20$$

$$17 + 19 = 36 / 2 \times 36 = 72$$

$$4^2 = 16 / 6^2 = 36 / 36 - 16 = 20$$

$$17^2 = 289 / 19^2 = 361 / 361 - 289 = 72$$

$$(36 \div 12 = 18 \div 6 = 3 / 24 \times 3 = 72)$$

Paire (29, 31)

$$29 + 31 = 60 \quad / \quad 2 \times 60 = 120$$

$$29^2 = 841 \quad / \quad 31^2 = 961 \quad / \quad 961 - 841 = 120$$

$$(60 \div 12 = 30 \div 6 = 5 \quad / \quad 24 \times 5 = 120)$$

Formules : (la procédure nécessite plusieurs opérations)

$$x = \text{Nombre premier jumeau} = y - 2.$$

$$y = \text{Nombre premier jumeau} = x + 2.$$

$$ns = \text{Nombre séparateur de la paire de nombres premiers jumeaux.}$$

$$x + y = a \quad 2a = b \quad x^2 = c \quad y^2 = d \quad d - c = b$$

$$\frac{a}{12} = \frac{ns}{6} = e \quad 24e = b$$

Ainsi, la somme de deux nombres d'une paire de nombres pj multipliée par 2 est égale à la différence entre leurs carrés, qui correspond à 24 fois le douzième de leur somme ou à 24 fois le sixième du nombre séparateur (ns).

Postulat 10) Les multiples du carré du nombre 24 (i.e. les multiples de 576) correspondent *parfois* à la différence entre la somme des carrés de deux paires de nombres premiers jumeaux (successives ou non).

Nous avons trouvé trois cas de ce genre :

$$1) \quad 1 \times 24^2 = 17^2 + 19^2 - 5^2 - 7^2$$

$$2) \quad 2 \times 24^2 = 29^2 + 31^2 - 17^2 - 19^2$$

$$3) \quad 3 \times 24^2 = 41^2 + 43^2 - 29^2 - 31^2$$

Exemples détaillés :

Paire (29, 31)

$$29^2 = 841$$

$$31^2 = 961$$

$$841 + 961 = 1\,802$$

Paire (41, 43)

$$41^2 = 1\,681$$

$$43^2 = 1\,849$$

$$1\,681 + 1\,849 = 3\,530$$

$$3\,530 - 1\,802 = 1\,728$$

$$1\,728 \div 576 = 3$$

Formules :

$(pja, pjb) =$ Une paire de nombres premiers jumeaux $> (pjc, pjd)$.

$(pjc, pjd) =$ Une paire de nombres premiers jumeaux $< (pja, pjb)$.

$n =$ Nombre entier.

$$A) n = \frac{pja^2 + pjb^2 - pj c^2 - pjd^2}{24^2} \quad B) 24^2 n = pja^2 + pjb^2 - pj c^2 - pjd^2$$

Application de la formule B :

$(pja, pjb) = (41, 43)$

$(pjc, pjd) = (17, 19)$

$$24^2 n = 41^2 + 43^2 - 17^2 - 19^2$$

$$576n = 1\,681 + 1\,849 - 289 - 361$$

$$576n = 3\,530 - 650$$

$$576n = 2\,880$$

$$n = \frac{2,880}{576}$$

$$n = 5$$

Ce dernier postulat ouvre de nombreuses autres possibilités arithmétiques fondées sur le même principe, nous laissant présumer que nous n'avons pas bien saisi et cerné le phénomène mathématique que nous tentons de décrire. Par exemple, de simple petits calculs nous font découvrir que, dans certains cas de figure, nous pouvons obtenir le même genre d'égalité en soustrayant le carré d'un nombre premier supplémentaire.

Par exemple :

$$4 \times 24^2 = 71^2 + 73^2 - 59^2 - 61^2 - \mathbf{29^2}$$

On constate que, pour obtenir 2 304 (soit 4×576), un cinquième nombre premier doit se joindre à la fête, ajoutant son carré aux deux autres nombres à soustraire. Cela signifie que moult autres combinaisons sont envisageables et qu'il suffirait d'effectuer quelques calculs pour en découvrir de nouvelles. Dès lors, une des questions qui s'impose à notre esprit est de savoir s'il existe toujours une

combinaison de nombres – peu importe le nombre de termes – permettant d’obtenir chacun des multiples de 24 par une série d’opérations de soustraction – ou une combinaison de soustractions et d’additions –, ces nombres étant les carrés de nombres premiers jumeaux, ou sinon les carrés d’autres nombres premiers non jumeaux.

Par exemple :

$$5 \times 24^2 = 109^2 - 73^2 - 61^2 + 7^2$$

Ici, nous nous montrons plus flexible en acceptant l’addition, mais plus les conditions s’assouplissent, plus le nombre d’opérations possibles augmente, ce qui rend du même coup le postulat moins intéressant et la tâche consisterait alors à le subdiviser en une série de postulats plus spécifiques. Il nous apparaît probable qu’on puisse obtenir tous les multiples de 24 si les contraintes sont insuffisantes, ce qui nous inciterait plutôt à les resserrer. Quoi qu’il en soit, le problème posé est fascinant et mérite de plus amples investigations.

Pour conclure cette section sur les postulats concernant les paires de nombres premiers jumeaux, disons qu’ils pavent la voie à des explorations plus avancées. Il serait souhaitable d’obtenir une certaine forme de validation ou de confirmation de nos postulats via la production de plusieurs milliers de cas sans erreur (i.e. sans exception ni omission), mais nous les considérons comme étant des évidences mathématiques.

2.2 Hypothèses sur les relations arithmétiques entre les nombres premiers jumeaux, les nombres épauettes, les nombres séparateurs et les nombres semi-premiers

En guise de complément à cette section portant sur les nombres premiers jumeaux (pj), nous formulons onze hypothèses qui visent à examiner une relation possible entre les nombres pj et :

- 1) les nombres situés au milieu d’une paire de pj , que nous nommons « nombres séparateurs » (ns);
- 2) les nombres situés de chacun de leurs côtés, que nous nommerons « nombres épauettes » (ne);
- 3) les nombres premiers faux positifs (fp) issus de notre algorithme, qui correspondent essentiellement à un sous-ensemble de nombres semi-premiers.
- 4) certains facteurs multiplicatifs associés au nombre 24.

Hypothèse 1 :

Le nombre séparateur (*ns*) est le nombre positionné entre les deux nombres d'une paire de nombres premiers jumeaux (*pj*). On peut aussi bien le considérer comme étant la moyenne des deux nombres d'une paire de *pj*. La séquence correspondante est inscrite sur le site de *L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers* (OEIS) [2] sous le numéro A014574 (<https://oeis.org/A014574>). Nous savons que le *ns* est toujours un multiple de 6. La seule exception à cette règle universelle concerne le premier d'entre eux, soit le nombre 4, qui est inférieur à 6 et ne peut donc en être un multiple.

Notre hypothèse exprimée sous forme de règle est la suivante :

Le *ns* d'une paire de *pj* est toujours égal à la somme de deux autres *ns* inférieurs ou d'un même *ns* doublé. Nous vous présentons ci-après quelques exemples afin d'illustrer ce concept.

$$\begin{array}{llllllll} 6 + 6 = 12 & 6 + 12 = 18 & 12 + 18 = 30 & 12 + 30 = 42 & 30 + 30 = 60 & 12 + 60 = 72 & 30 + 72 = 102 \\ 6 + 102 = 108 \text{ (ou } 48 + 60 = 108) & 30 + 108 = 138 & 42 + 108 = 150 & 30 + 150 = 180 \\ 12 + 180 = 192 \text{ (ou } 42 + 150) & 18 + 180 = 198 \text{ (ou } 60 + 138) & 30 + 198 = 228 \\ 42 + 198 = 240 \text{ (ou } 60 + 180 = 240) & 30 + 240 = 270 & 12 + 270 = 282 \text{ (ou } 42 + 240 = 282) \\ 30 + 282 = 312 & 108 + 240 = 348 \text{ (ou } 150 + 198 = 348) & \text{ETC.} \end{array}$$

Il existe moult autres combinaisons possibles, mais l'idée est toujours la même : il suffit d'additionner deux *ns* pour obtenir le *ns* d'une autre paire de *pj*. Tous ces nombres étant des multiples de 6, il est probable que cette correspondance s'observe indéfiniment. En l'absence de preuve, il nous semble raisonnable de considérer cette hypothèse comme une nouvelle conjecture.

Hypothèse 2 :

Lorsque nous examinons la séquence des paires de nombres premiers jumeaux, la problématique à laquelle nous sommes confrontés est la grande quantité de « faux positifs », soit tous les multiples de 6 qui ne sont pas des nombres séparateurs (*ns*). Nous nous sommes donc penchés sur l'analyse des propriétés particulières des nombres qui encadrent un multiple de 6 qui n'est pas un séparateur de nombres premiers jumeaux, cela afin de repérer des constantes et d'en extraire une règle heuristique. Nous en sommes venus à la constatation suivante, exprimée sous forme d'hypothèse :

Tous les multiples de 6 qui ne sont pas des nombres séparateurs de paires de nombres premiers jumeaux sont :

A) soit des nombres dont l'unité est 4 ou 6 (dès lors, il leur est impossible de trouver à leurs côtés deux nombres premiers, puisque les multiples de 5 n'en sont jamais, ce qui les exclut par défaut);

B) soit encadrés par l'un ou l'autre de ces nombres ou une combinaison de ceux-ci :

-un nombre premier (un seul, avant ou après, sinon il s'agirait d'une paire de nombres premiers jumeaux);

-un nombre semi-premier;

-une puissance de 3 ou plus d'un nombre premier.

Le prochain tableau illustre ce phénomène. On y retrouve la liste des 23 premiers multiples de 6 qui ne sont pas des *ns* (i.e. qui ne sont pas encadrés par une paire de nombres premiers jumeaux). Les nombres premiers jumeaux potentiels (*pjp*) apparaissent en caractère gras. Ce sont ceux associés à un multiple de 6 dont le chiffre aux unités est soit 0, 2 ou 8 et qui sont donc candidats à être premiers.

Tableau 7 : Multiples de 6 de 0 à 222 qui ne sont pas encadrés par une paire de nombres premiers jumeaux

$$24 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (23 = \text{premier}) + (25 = \text{semi-premier})$$

$$36 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (37 = \text{premier}) + (35 = \text{semi-premier})$$

$$48 = (47 = \text{premier}) + (49 = \text{semi-premier})$$

$$54 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (53 = \text{premier}) + (55 = \text{semi-premier})$$

$$66 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (67 = \text{premier}) + (65 = \text{semi-premier})$$

$$78 = (79 = \text{premier}) + (77 = \text{semi-premier})$$

$$84 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (83 = \text{premier}) + (85 = \text{semi-premier})$$

$$90 = (89 = \text{premier}) + (91 = \text{semi-premier})$$

$$96 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (97 = \text{premier}) + (95 = \text{semi-premier})$$

$$114 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (113 = \text{premier}) + (115 = \text{semi-premier})$$

$$120 = (119 + 121 = \text{semi-premiers})$$

$$126 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (127 = \text{premier}) + (125 = 5^3)$$

$$132 = (131 = \text{premier}) + (133 = \text{semi-premier})$$

$$144 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (143 + 145 = \text{semi-premiers})$$

$$156 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (157 = \text{premier}) + (155 = \text{semi-premier})$$

$$162 = (163 = \text{premier}) + (161 = \text{semi-premier})$$

$$168 = (167 = \text{premier}) + (169 = \text{semi-premier})$$

$$174 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (173 = \text{premier}) + (175 = \text{composé})$$

$$186 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (185 + 187 = \text{semi-premiers})$$

$$204 = 4 \text{ ou } 6 \text{ aux unités } (203 + 205 = \text{semi-premiers})$$

$$210 = (211 = \text{premier}) + (209 = \text{semi-premier})$$

$$216 = (215 + 217 = \text{semi-premiers})$$

$$222 = (223 = \text{premier}) + (221 = \text{semi-premier})$$

Comme nous pouvons le constater, il n'y a pas de nombre composé d'un côté ou de l'autre d'un multiple de 6 se terminant par 0, 2 ou 8 dans l'ensemble des paires qui ne sont pas des paires de nombres premiers jumeaux, sauf dans des cas rarissimes et particuliers, soit lorsque le nombre composé est une puissance d'un nombre premier égale ou supérieure à 3. Par exemple, pour la paire de nombres premiers jumeaux potentiels 341-343, situés de part et d'autre d'un multiple de 6 (342), nous observons que 341 est un nombre semi-premier et que 343 est le produit de 7^3 , ce qui semble reproduire le même schéma que celui que nous avons observé plus tôt pour la détection des nombres premiers.

Pour résumer la chose en une sorte de règle empirique, nous soutenons que :

Toutes les paires de nombres qui encadrent un multiple de 6 (ne se terminant pas par un 4 ou un 6) sont des paires de nombres premiers jumeaux, sauf si l'un ou l'autre des nombres de ces paires est :

- un nombre semi-premier;
- une puissance d'un nombre premier.

Sinon, les deux nombres sont condamnés à être des nombres premiers, et ils sont donc des nombres premiers jumeaux.

Nous pouvons dès lors proposer une méthode heuristique expéditive permettant d'obtenir une liste de paires de nombres premiers jumeaux. Elle fait un peu écho au fameux crible d'Ératosthène.

Méthode :

1. Faire la liste des multiples de 6 de x jusqu'à y .
2. Biffer les nombres dont l'unité est un 4 ou un 6. Les nombres restants sont des nombres séparateurs (*ns*) candidats de paires de nombres premiers jumeaux (*pj*). En d'autres mots, cela permet d'obtenir la liste des paires de nombres premiers jumeaux potentielles (*pjp*).
3. Faire la liste des nombres semi-premiers et des puissances de nombres premiers jusqu'à une hauteur maximale de y , puis biffer les paires de *pjp* ayant l'un ou l'autre de ces nombres. Évidemment, les nombres semi-premiers dont nous parlons ici ne sont jamais des multiples ou des puissances des nombres 2 (puisque'ils sont impairs) ou 5 (puisque'aucun multiple de 5 ne peut être premier). Les paires restantes sont toutes « par défaut » des paires de nombres premiers jumeaux, sans la moindre exception.

En guise de démonstration, prenons les 20 premiers multiples de 6.

Étape 1) Dresser la liste des 20 premiers multiples de 6 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, 114, 120.

Étape 2a) Identifier les multiples de 6 dont l'unité est un 4 ou un 6, puis éliminer les paires correspondantes (le nombre 6 fait bien sûr exception, puisque le nombre 5 est premier).

Multiples de 6 à retrancher : 24, 36, 54, 66, 84, 96, 114.

Paires éliminées (7/20) : (23, 25), (35, 37), (53, 55), (65, 67), (83, 85), (95, 97), (113, 115).

Étape 2b) Former des paires avec les nombres situés de chacun des côtés des multiples de 6 conservés. Il nous reste donc 13 paires de nombres premiers jumeaux potentielles (*pjp*).

Multiples de 6 conservés : 6, 12, 18, 30, 42, 48, 60, 72, 78, 90, 102, 108, 120.

Paires conservées (*pjp*) (13/20) : (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (47, 49), (59, 61), (71, 73), (77, 79), (89, 91), (101, 103), (107, 109), (119, 121).

Étape 3) Dresser la liste des nombres semi-premiers et des puissances de nombres premiers jusqu'à hauteur de 121 :

$$p^2 : \quad 3^2 = 9 \quad / \quad 7^2 = 49 \quad / \quad 11^2 = 121 \quad / \quad 3^3 = 27 \quad / \quad 3^4 = 81$$

$$p \times p : 3 \times 7 = \mathbf{21} / 3 \times 11 = \mathbf{33} / 3 \times 13 = \mathbf{39} / 3 \times 17 = \mathbf{51} / 3 \times 19 = \mathbf{57} / 3 \times 23 = \mathbf{69} / \\ 3 \times 29 = \mathbf{87} / 3 \times 31 = \mathbf{93} / 3 \times 37 = \mathbf{111} / 7 \times 11 = \mathbf{77} / 7 \times 13 = \mathbf{91} / 7 \times 17 = \mathbf{119}$$

Étape 4) Rayer les paires ayant l'un ou l'autre de ces nombres. Les paires restantes sont des paires de nombres premiers jumeaux, à tous les coups!

Paires éliminées (4/13) : (47, **49**), (**77**, 79), (89, **91**), (**119**, 121)

Paires conservées (9/13 ou 9/20 au total) : (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103) / (107, 109)

La tentation est forte de traduire ces énoncés en formule algébrique dont la fonction serait l'identification ou le repérage des paires de nombres premiers jumeaux, ce qui pourrait ressembler à ceci :

n = Multiple de 6 ayant un 0, un 2 ou un 8 à la position des unités.

p = Nombre premier.

sp = Nombre semi-premier.

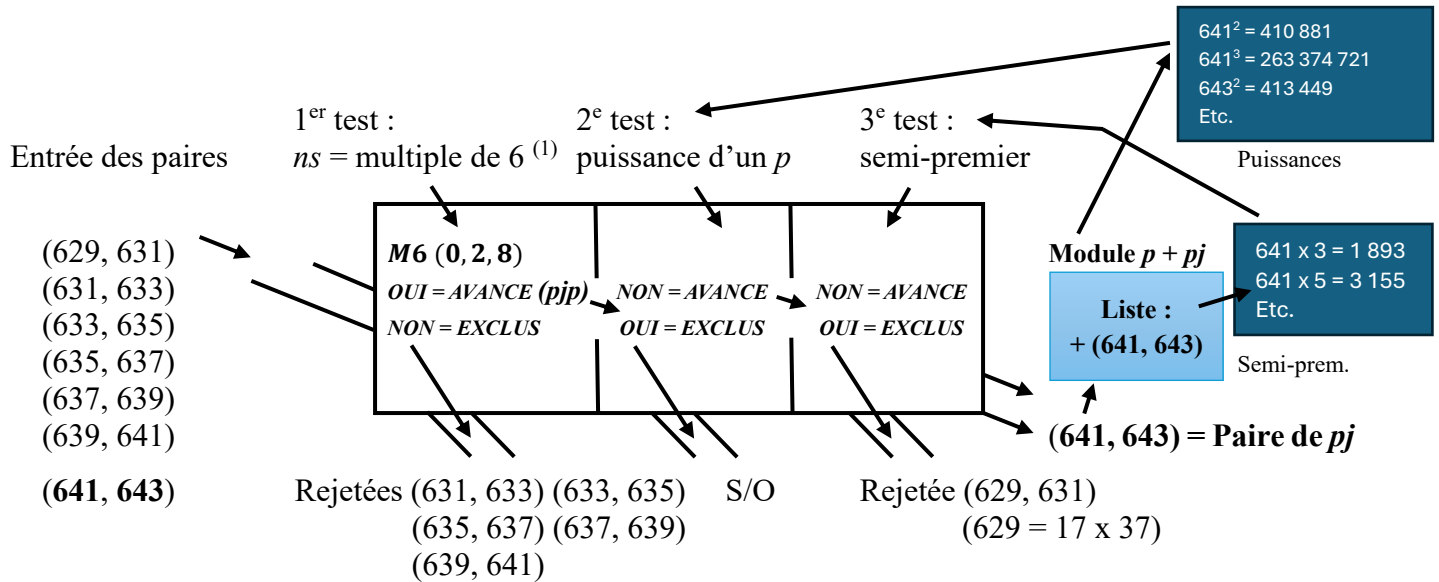
pj = Nombre premier jumeau.

x = Exposant.

Formule : Si $n - 1$ ou $n + 1 \neq p^x$ ou sp Alors $n + 1$ et $n - 1 = pj$

De manière graphique, notre modèle pourrait s'apparenter à notre machine à détecter des nombres premiers (voir Diagramme 1) et même s'y greffer fonctionnellement et opérationnellement via le module de mémoire, comme en témoigne le schéma suivant.

Diagramme 2 : La machine à détecter des paires de nombres premiers jumeaux



(1) Les paires doivent avoir en leur milieu un multiple de 6 dont les unités sont 0, 2 ou 8.

Le module de mémoire, dont la fonction initiale était de servir de base de données pour la sauvegarde des nombres premiers à la suite de la procédure d'identification, prouve une seconde fois son utilité en contribuant à la validation des paires de nombres premiers jumeaux. Mieux encore, nous n'avons nul besoin d'effectuer la moindre vérification ou le moindre calcul sur les nombres restant pour en valider le statut de nombres premiers jumeaux, puisqu'ils sont arithmétiquement condamnés à en être.

Le mécanisme auquel nous faisons usage ici pour valider les paires de nombres premiers jumeaux est fondé sur les propriétés essentielles de notre système de numération, qui s'articule en fonction de la multiplication des nombres premiers et de leurs « produits dérivés » sous forme de nombres semi-premiers ou de puissances de nombres premiers. Ce principe de construction est responsable de l'architecture d'ensemble et gouverne la répartition des paires de nombres premiers jumeaux. Cela nous ramène au principe arithmétique universel voulant que les nombres premiers sont les blocs de construction (*building blocks*) de notre système de numération, d'autant plus qu'ils sont eux qui distribuent les nombres semi-premiers et les puissances de nombres premiers sur le continuum des entiers naturels, produisant ainsi cette matrice invisible à l'origine de notre modèle.

Hypothèse 3 :

Dans le continuum des entiers positifs, le premier terme d'une paire de nombres premiers jumeaux est toujours précédé par un nombre entier qui lui est inférieur de 1 et le second terme est toujours suivi d'un nombre entier qui lui est supérieur de 1. Nous parlons bien ici des « nombres épaulettes » (*ne*).

Nous formulons l'hypothèse qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers jumeaux encadrés par des *ne* qui sont des nombres semi-premiers. De surcroît, ces *ne* semi-premiers semblent être systématiquement le résultat de la multiplication par deux de chacun des nombres appartenant à une autre paire de nombres *pj*, ce qui représente une spectaculaire singularité. Nous choisissons de baptiser ces paires de nombres premiers jumeaux arithmétiquement liées – i.e. dont les *ne* de l'une sont le double de l'autre – les paires de nombres « premiers jumeaux de Sophia » (*pjs*).

Lorsque nous avons remarqué la présence de nombres semi-premiers de chaque côté de certaines paires de nombres *pj*, nous avons cherché à en identifier l'origine. Nous avons donc analysé leurs diviseurs, ce qui nous a permis de constater qu'ils étaient le produit par 2 de nombres premiers appartenant à une autre paire de nombres *pj* plus petite. Nous supposons que ce phénomène arithmétique spectaculaire et inattendu est associé à la nature même de l'édification de la toile numérique, les nombres semi-premiers y jouant un rôle plus fondamental qu'anticipé.

Voici quelques exemples. Les nombres épaulettes (*ne*) sont en caractère gras. La « paire donneuse » correspond à celle des nombres multipliés par deux et la « paire receveuse » à celle qui est encadrée par les nombres épaulettes. Notons que, mis à part la paire (11, 13), les paires donneuses et receveuses doivent nécessairement avoir les chiffres 9 et 1 comme unités respectives, dans cet ordre précis, pour que cette opération de doublement soit rendue possible, aucune autre combinaison de paires de nombres *pj* n'offrant cette compatibilité. Ce critère de rigueur a l'avantage de faciliter leur repérage.

Paire donneuse :	(5, 7)	$5 \times 2 = \mathbf{10}$	$7 \times 2 = \mathbf{14}$
Paire receveuse :	(11, 13)	$\mathbf{10, 11, 12, 13, 14}$	
Paire donneuse :	(29, 31)	$29 \times 2 = \mathbf{58}$	$31 \times 2 = \mathbf{62}$
Paire receveuse :	(59, 61)	$\mathbf{58, 59, 60, 61, 62}$	
Paire donneuse :	(659, 661)	$659 \times 2 = \mathbf{1\ 318}$	$661 \times 2 = \mathbf{1\ 322}$
Paire receveuse :	(1 319, 1 321)	$\mathbf{1\ 318, 1\ 319, 1\ 320, 1\ 321, 1\ 322}$	

Paire donneuse :	(809, 811)	$809 \times 2 = \mathbf{1\ 618}$	$811 \times 2 = \mathbf{1\ 622}$
Paire receveuse :	(1 619, 1 621)	$\mathbf{1\ 618, 1\ 619, 1\ 620, 1\ 621, 1\ 622}$	
Paire donneuse :	(2 129, 2 131)	$2\ 129 \times 2 = \mathbf{4\ 258}$	$2\ 131 \times 2 = \mathbf{4\ 262}$
Paire receveuse :	(4 259, 4 261)	$\mathbf{4\ 258, , 4\ 259, 4\ 260, 4\ 261, 4\ 262}$	
Paire donneuse :	(2 549, 2 551)	$2\ 549 \times 2 = \mathbf{5\ 098}$	$2\ 551 \times 2 = \mathbf{5\ 102}$
Paire receveuse :	(5 099, 5 101)	$\mathbf{5\ 098, 5\ 099, 5\ 100, 5\ 101, 5\ 102}$	

Une autre manière de représenter les paires de nombres *pjs* est de cibler le nombre séparateur (*ns*) entre les deux paires concernées et de multiplier par deux celui de la paire inférieure, ce qui est mathématiquement plus simplement exprimé. Les formules servant à définir les paires de nombres premiers jumeaux de Sophia pourraient donc être les suivantes :

pjsa = Les deux nombres de la « paire donneuse » de nombres premiers jumeaux de Sophia.

pjsb = Les deux nombres de la « paire receveuse » de nombres premiers jumeaux de Sophia.

ns = Nombre séparateur de la paire indiquée.

S = Somme des deux nombres de la paire indiquée.

Formules :

$$Spjsa = \frac{Spjsb}{2}$$

ou

$$2nspjsa = \frac{nspjsb}{2}$$

Nous pouvons formuler l'hypothèse qu'une troisième paire viennent se greffer aux deux autres, qui serait le double de la seconde, de telle sorte que la paire *pjsb* soit à la base du calcul permettant d'obtenir une paire *pjsc* plus grande qu'elle-même. Nous nommons « paires de nombres premiers jumeaux de Sophia **triples** » les trois paires de nombres *pjs* qui, exceptionnellement, seraient liées par cette relation arithmétique. Les équations suivantes traduisent la situation où les trois paires de nombres premiers jumeaux de Sophia – soit *pjsa*, *pjsb* et *pjsc* – sont des paires de nombres *pjs* triples.

Formules :

$$Spjsa = \frac{Spjsb}{2} = \frac{Spjsc}{4}$$

ou

$$2nspjsa = \frac{nspjsb}{2} = \frac{nspjsc}{4}$$

Dès lors, deux questions s'imposent à nous :

- 1) Existe-t-il une infinité de paires de nombres pjs ?
- 2) Existe-t-il des paires de nombres pjs quadruples ou même quintuples, etc.?

Nous formulons l'hypothèse qu'il existe une infinité de paires de nombres pjs . Nous supposons également l'existence de paires de nombres pjs triples, bien que nous n'en ayons pas encore repérées, n'ayant pas à notre disposition les moyens technologiques nécessaires; c'est davantage le travail de mathématiciens professionnels. Nous considérons le phénomène énigmatique des paires de nombres premiers de Sophia comme une évidence mathématique dont il faut décoder les mécanismes arithmétiques et comprendre la signification. Nos interrogations à ce sujet représentent une conjecture exigeant validation et nous invitons la communauté des chercheurs à s'y intéresser.

Hypothèse 4 :

Nous avons vu précédemment que notre algorithme initial, soit la formule $p = \sqrt{24n + 1}$, accepte un certain nombre de faux positifs (fp), que notre procédure rejette à la suite d'un tamisage. Nous avons cherché à savoir s'il pouvait exister une corrélation entre le nombre de faux positifs (fp) et les nombres premiers jumeaux (pj). Nous avons observé l'écart qui sépare les carrés d'une paire de nombres pj et comptabilisé le nombre de fp situés à l'intérieur de cet intervalle, afin d'y repérer une correspondance. Les résultats obtenus plaident en faveur d'une analyse plus poussée que celle que nous avons effectuée, car ils nous amènent à supposer l'existence d'une corrélation entre le nombre de fp contenus dans la fourchette des carrés des nombres pj – sous la forme d'une suite numérique croissante – et les paires de nombres pj .

Notre hypothèse est la suivante : le nombre de nombres premiers faux positifs situés entre les carrés d'une paire de nombres premiers jumeaux représente un terme faisant partie d'une suite logique. Par exemple, il y a :

- 0** nombre *fp* entre les carrés de 3 (9) et 5 (25) non inclusivement.
- 0** nombre *fp* entre les carrés de 5 (25) et 7 (49) non inclusivement.
- 3** nombres *fp* entre les carrés de 11 (121) et 13 (169) non inclusivement.
- 7** nombres *fp* entre les carrés de 17 (289) et 19 (361) non inclusivement.
- 13** nombres *fp* entre les carrés de 29 (841) et 31 (961) non inclusivement.
- 21** nombres *fp* entre les carrés de 41 (1 681) et 43 (1 849) non inclusivement.
- 31** nombres *fp* entre les carrés de 59 (3 481) et 61 (3 721) non inclusivement.
- 46** nombres *fp* entre les carrés de 71 (5 041) et 73 (5 329) non inclusivement.
- 66** nombres *fp* entre les carrés de 101 (10 201) et 103 (10 609) non inclusivement.

Note 1) Par « non inclusivement », on entend que les carrés des nombres premiers jumeaux, qui sont aussi des faux positifs, sont exclus du calcul. Nous ne comptons que les nombres situés entre leurs carrés.

Note 2) Les nombres qui sont des multiples de 5 (comme 25) ne sont pas considérés ici, puisque notre procédure de validation n'accepte pas les nombres ayant le chiffre 5 aux unités.

Ce qui nous donne la suite numérique suivante :

0, 3, 7, 13, 21, 31, 46, 66,...

Les écarts (bonds) entre les items peuvent servir à générer une autre suite numérique : +4, +6, +8, +10, +15, +20. Cette nouvelle séquence correspond à certaines suites archivées par l'OEIS, dont les deux suivantes :

A) Suite no A211856 (<https://oeis.org/A211856>) : Nombre de représentations de n comme somme de produits de paires distinctes d'entiers positifs, considérées comme équivalentes lorsque les termes ou les facteurs sont réorganisés.

1, 1, 2, 3, **4, 6, 8, 10, 15**, 20, 24, 34, 46, 58, 76, 97,...

B) Suite no A238876 (<https://oeis.org/A238876>) : Partitions à croissance sous-diagonale.

1, 1, 1, 2, 3, **4, 6, 8, 10, 15**, 20, 25, 34, 44, 56, 74, 94,...

En quoi cela peut-il nous être utile? Selon nous, ces progressions pourraient servir d'indicateur de la logique organisationnelle des nombres premiers jumeaux, sinon une méthode de prédiction de la paire de nombres premiers jumeaux suivante.

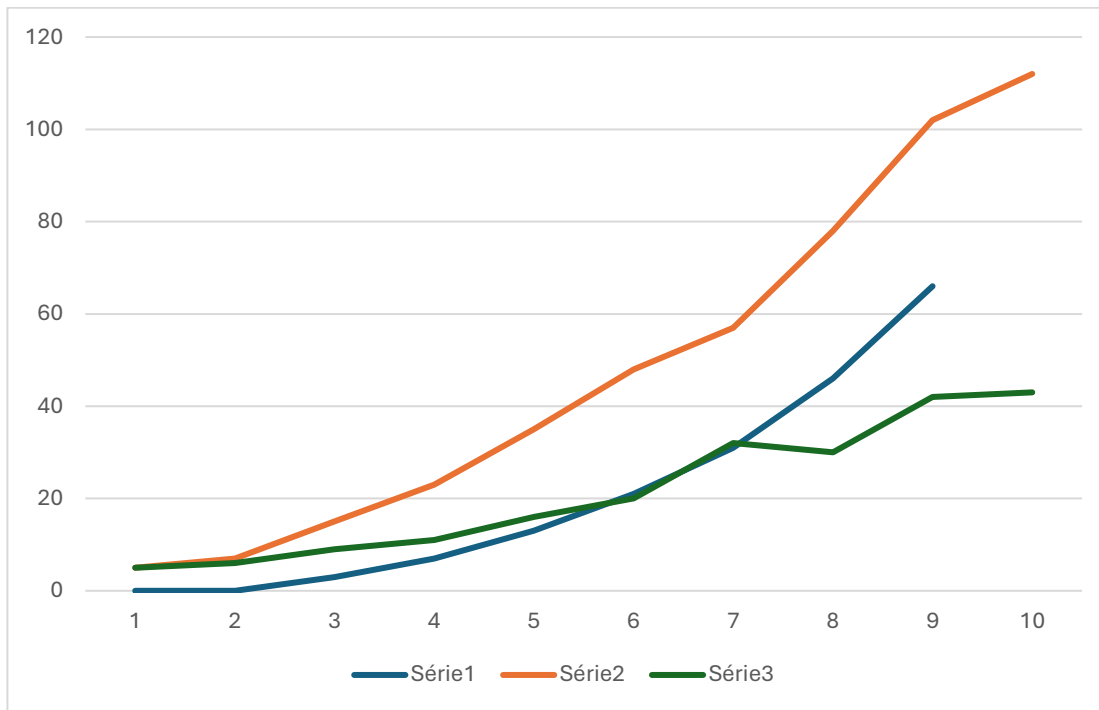
Par exemple, sachant qu'il se trouve un nombre de 31 *fp* entre les carrés des nombres de la paire de *pj* (59, 61) et que le terme suivant de la suite est supérieur de 15 à ce nombre, nous pouvons déterminer que l'écart entre les carrés de la prochaine paire de *pj* (71, 73) sera de 46 *fp* (car $31 + 15 = 46$). Ainsi, lorsque notre modèle détectera le nombre premier suivant la paire (59, 61), il pourra statuer que celui-ci est un *pj* si et seulement si :

- A) ce nombre premier ne se termine pas par le chiffre 3;
- B) un nombre exact de 46 *fp* se trouvent entre son carré et le carré du prochain nombre premier, qui dans tel cas lui sera jumeau.

Dans la négative, on passe au nombre premier suivant et on vérifie les deux mêmes conditions. Après avoir rejeté 67, le nombre premier suivant est 71. Il ne se termine pas par 3 et le nombre de faux positifs entre son carré et celui du nombre premier suivant (73) est de 46. Il s'agit donc de la paire de nombres premiers jumeaux (71, 73).

La correspondance observée est pour le moins intrigante : le nombre de faux positifs (*fp*) que l'on retrouve dans l'intervalle entre les carrés d'une paire de nombres premiers jumeaux semble suivre une progression arithmétique apparentée à une suite logique. D'un point de vue arithmétique, nous pourrions considérer ces nombres résultant de l'opérationnalisation de notre algorithme comme étant également des nombres semi-premiers, puisqu'ils en sont pratiquement un sous-ensemble (sauf pour les nombres résultant d'un exposant égal ou supérieur à 3 et qui ne sont donc pas *sp*), nous invitant à nous interroger sur une possible fonction organisatrice des nombres semi-premiers dans la distribution des nombres premiers jumeaux, agissant comme des bornes ou des points de repère. Mais en examinant de plus près cette correspondance, on découvre que les nombres *fp* et l'ensemble des nombres *sp* ne donne pas lieu à la même courbe de progression, comme le montre le diagramme suivant :

Diagramme 3 : Comparaison entre le nombre de faux positifs, de semi-premiers et de nombres premiers situés entre les carrés d'une paire de nombres premiers jumeaux



1 = Entre les carrés de la 1^e paire (3, 5) 2 = Entre les carrés de la 2^e paire (5, 7) Etc.

Série 1 : Nombres faux positifs

Série 2 : Nombres semi-premiers ⁽¹⁾

Série 3 : Nombres premiers ⁽²⁾

(1) Voir la séquence numéro A391619 de l'OEIS (<https://oeis.org/A137859>).

(2) Voir la séquence numéro A137859 de l'OEIS (<https://oeis.org/draft/A391619>).

La courbe issue des nombres faux positifs présente une allure constante, presque parfaitement régulière, alors que les deux autres courbes ne présentent pas une telle forme. Nous n'avons pas poussé cet examen plus loin, mais cette corrélation entre le nombre de faux positifs et la distribution des paires de nombres premiers jumeaux mérite d'être explorée plus en profondeur afin de lui attribuer la bonne interprétation, car dans l'éventualité où il y aurait un lien à établir, cela représenterait une percée scientifique majeure.

Hypothèse 5 :

La conjecture de l'infinité des paires de nombres premiers jumeaux est un thème central des chercheurs en théorie des nombres. Nos observations nous poussent à aborder cette question en ces termes : si les nombres semi-premiers et les puissances des nombres premiers ne suffisent pas à remplir toutes les cases situées de chaque côtés des multiples de 6 (i.e. si cela est arithmétiquement impossible), force est de conclure qu'il y a une infinité de paires de nombres pj , puisqu'il y a une infinité de multiples de 6.

Considérant les résultats qui précèdent et en admettant qu'ils sont avérés, nous devons nous interroger à savoir s'ils représentent une preuve mathématique de la conjecture portant sur l'infinité des paires de nombres premiers jumeaux ou s'ils permettent tout au moins d'en envisager l'élaboration. La question pourrait se poser dans les termes suivants : existe-t-il suffisamment de nombres semi-premiers et de puissances de nombres premiers pour combler toutes les cases des paires de nombres premiers jumeaux potentielles? Si la chose est arithmétiquement impossible, alors les paires de nombres premiers jumeaux sont infinies. Voici un tableau qui peut nous éclairer en cette matière.

Tableau 8 : Semi-premiers, multiples de 6 et nombres premiers jumeaux par tranche de 100

sp = Nombres semi-premiers.

$M6$ = Multiples de 6.

pjp = Paires de nombres premiers jumeaux potentielles (soit les multiples de 6 se terminant par un 0, un 2 ou un 8 aux unités).

pj = Paires de nombres premiers jumeaux.

Échantillon	Nbre de sp	Nbre de sp impairs	Nbre de $M6$	Nbre de paires de pjp	Nbre de paires = pj	Nbre de paires $\neq pj$
1-100	34	19	16	9	8	1
101-200	28	18	17	11	7	4
201-300	32	22	17	10	4	6
301-400	32	22	16	9	2	7
401-500	27	20	17	11	3	8
501-600	33	24	17	10	3 (599-601)	7
601-700	26	18	16	9	3	6
701-800	30	22	17	11	0	11
801-900	28	20	17	10	5	5
901-1000	29	21	16	9	0	9
TOT	299	206	166	99	35	64

Ce tableau montre de manière assez éloquente que, lorsque l'on considère les paires de nombres premiers jumeaux potentielles (pjp), le nombre de véritables paires de nombres pj est systématiquement inférieur au nombre de paires qui n'en sont pas dès la troisième centaine. Seules les deux premières tranches (1-100 et 101-200) présentent un nombre plus élevé de paires de nombres pj que de paires qui n'en sont pas (8 vs 1 et 7 vs 4). Toutes les autres fourchettes de cent montrent un ratio inférieur. Cela nous indique, sur l'ensemble des paires de nombres pjp , une raréfaction du taux de paires de nombres pj et une augmentation du ratio de paires qui n'en sont pas (i.e. qui ne sont pas composées de deux nombres premiers). Reste à savoir si, arrivé à un certain point, les nombres semi-premiers et les puissances de nombres premiers occupent toutes les cases qui pourraient potentiellement appartenir à une paire de nombres pj . Dans la négative, nous pourrions détenir une preuve de l'infinité des paires de nombres premiers jumeaux.

Hypothèse 6 :

Comme nous le savons, le nombre séparateur (ns) est le nombre situé entre les deux nombres d'une paire de nombres premiers jumeaux (pj). Lors de nos explorations, nous avons observé que le fait de soustraire n'importe quel nombre premier (p) supérieur à 3 de n'importe quel ns égal ou supérieur à 6 donne toujours pour résultat un autre nombre p , à l'exclusion de certains cas particuliers bien définis. Sous forme de règle, notre hypothèse pourrait se lire ainsi :

Soustraire d'un ns égal ou supérieur à 6 n'importe quel nombre p égal ou supérieur à 5 donne toujours un nombre p , sauf si le résultat :

- a le chiffre 5 pour unité (en excluant le nombre 5 lui-même);
- est la puissance d'un nombre p ;
- est 1.

Série croissante des 9 premiers ns consécutifs (en excluant le 4) : 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, 102, 108,...

Opération de soustraction entre les 9 ns de notre liste et l'ensemble des nombres p qui leur sont numériquement inférieurs :

6-3=3 / 6-5=1 / 12-3=9 / 12-5=7 / 12-7=5 / 18-3=15 / 18-5=13 / 18-7=11 / 18-11=7 / 18-13=5 / 18-17=1
 / 30-3=27 / 30-5=5 / 30-7=23 / 30-11=19 / 30-13=17 / 30-17=13 / 30-19=11 / 30-23=7 / 30-29=1 / 42-3=39 / 42-5=37 / 42-7=35 / Etc.

Même démonstration à partir d'une paire de nombres pj située plusieurs centaines plus loin :

(641, 643) / $ns = 642$ / 642-641=1 / 642-631=11 / 642-619=23 / 642-617=25 / 642-613=29 / 642-607=35
 / 642-601=41 / 642-599=43 / 642-593=49 / 642-587=55 / Etc.

Formule :

p = Nombre premier.

pj = Nombre premier jumeau.

$$\frac{pj + pj}{2} - p = p$$

Exemple :

Si paire de nombres $pj = (29, 31)$

Si $p = 23$

$$p = \frac{29 + 31}{2} - 23$$

$$p = \frac{60}{2} - 23$$

$$p = 30 - 23$$

$$p = 7$$

Hypothèse 7 :

Il est toujours possible d'obtenir un nombre premier pour résultat en faisant la différence entre un multiple de 24 et le carré d'un nombre premier qui lui est inférieur.

Voici une série d'exemples visant à exposer cette idée. Les nombres premiers résultant de la soustraction entre un multiple de 24 et le carré d'un nombre premier sont en caractère gras. La première soustraction d'une série est toujours effectuée à partir du carré le plus élevé (i.e. celui immédiatement inférieur au multiple de 24).

Exemples :

$$48 - 25 = \mathbf{23}$$

$$144 - 121 = \mathbf{23}$$

$$240 - 169 = \mathbf{71}$$

$$72 - 49 = \mathbf{23}$$

$$168 - 121 = \mathbf{47}$$

$$264 - 169 = \mathbf{95}$$

$$(264 - 121 = \mathbf{143})$$

$$(264 - 49 = \mathbf{215})$$

$$(264 - 25 = \mathbf{239})$$

$$336 - 289 = \mathbf{47}$$

$$432 - 361 = \mathbf{71}$$

$$360 - 289 = \mathbf{71}$$

$$456 - 361 = \mathbf{95}$$

$$(456 - 289 = \mathbf{167})$$

$$96 - 49 = \mathbf{47}$$

$$192 - 169 = \mathbf{23}$$

$$288 - 169 = \mathbf{119}$$

$$(288 - 121 = \mathbf{167})$$

$$384 - 361 = \mathbf{23}$$

$$480 - 361 = \mathbf{119}$$

$$(480 - 289 = \mathbf{191})$$

$$120 - 49 = \mathbf{71}$$

$$216 - 169 = \mathbf{47}$$

$$312 - 289 = \mathbf{23}$$

$$408 - 361 = \mathbf{47}$$

$$504 - 361 = \mathbf{143}$$

$$(504 - 289 = \mathbf{215})$$

$$\begin{array}{llll}
 & & & (504 - 169 = \mathbf{335}) \\
 & & & (504 - 121 = \mathbf{383}) \\
 528 - 361 = \mathbf{167} & 552 - 529 = \mathbf{23} & 576 - 529 = \mathbf{47} & 600 - 529 = \mathbf{71} \\
 624 - 529 = \mathbf{95} & 648 - 529 = \mathbf{119} & 672 - 529 = \mathbf{143} & 696 - 529 = \mathbf{167} \\
 (624 - 361 = \mathbf{263}) & (648 - 361 = \mathbf{287}) & (672 - 361 = \mathbf{311}) & \\
 & (648 - 289 = \mathbf{359}) & & \\
 720 - 529 = \mathbf{191} & 744 - 529 = \mathbf{215} & 768 - 529 = \mathbf{239} & 792 - 529 = \mathbf{263} \\
 & (744 - 361 = \mathbf{383}) & & \\
 816 - 529 = \mathbf{287} & 840 - 529 = \mathbf{311} & 864 - 841 = \mathbf{23} & \text{ETC.} \\
 (816 - 361 = \mathbf{455}) & & & \\
 (816 - 289 = \mathbf{527}) & & & \\
 (816 - 169 = \mathbf{647}) & & &
 \end{array}$$

Comme on peut le constater, c'est bien souvent le carré du nombre premier immédiatement inférieur au multiple de 24 qui permet d'obtenir un nombre premier comme résultat de la soustraction (25 fois sur 35).

Autre observation, on n'obtient jamais pour résultat un nombre premier lorsque le chiffre aux unités du multiple de 24 est un 4 et que le chiffre aux unités du carré du nombre premier est un 9, ou lorsque ces chiffres sont un 6 et un 1, puisque le résultat de leur différence donne un 5 aux unités. Cependant, comme le laisse supposer notre liste d'exemples, on parvient toujours, après un certain nombre d'essais avec les carrés de divers nombres premiers, à obtenir un nombre premier pour résultat.

Hypothèse 8 :

Notre huitième hypothèse porte sur un nouveau concept : les nombres semi-premiers jumeaux de Rose (ou « nombres de Rose »). Ce concept de notre invention, qui caractérise une certaine classe de nombres, se définit ainsi :

Nous sommes en présence de nombres de Rose (*nr*) lorsque la multiplication par 2 de chacun des nombres d'une paire de nombres premiers jumeaux (*pj*) donne pour résultat des nombres semi-premiers situés de chaque côté des nombres d'une autre paire de nombres premiers jumeaux qui lui est supérieure. Ces nombres semi-premiers jumeaux sont donc une classe particulière de ce que nous nommons les nombres épaulettes (*ne*). Voici en exemple quelques paires de *nr* (en caractères gras).

Paire de <i>pj</i>	Opérations	Paire de <i>nr</i>	Paire de <i>pj</i> correspondante
(5, 7)	$5 \times 2 = 10$ et $7 \times 2 = 14$	(10, 14)	10, (11, 13), 14

(29, 31)	$29 \times 2 = 58$ et $31 \times 2 = 62$	(58, 62)	58, (59, 61), 62
(809, 811)	$809 \times 2 = 1\,618$ et $811 \times 2 = 1\,622$	(1 618, 1 622)	1 618, (1 619, 1 621) , 1 622

Une autre manière d'effectuer une association similaire entre les nombres serait de simplement multiplier par 2 le nombre séparateur (*ns*), soit celui situé au centre d'une paire de nombres premiers jumeaux (*pj*) et de vérifier si la somme correspond au *ns* d'une autre paire de nombres *pj*, puis de s'assurer que les nombres épaulettes de cette seconde paire sont bel et bien des nombres semi-premiers (voir ci-après).

Paire de <i>pj</i>	Nombre Séparateur (<i>ns</i>)	Opération	Paire de <i>pj</i> correspondante avec ses <i>nr</i>
(5, 7)	6	$6 \times 2 = 12$	10, (11, 13), 14
(29, 31)	30	$30 \times 2 = 60$	58, (59, 61), 62
(809, 811)	810	$810 \times 2 = 1\,620$	1 618, (1 619, 1 621), 1 622

Il nous paraît tout à fait concevable qu'il existe une infinité de paires de nombres de cette catégorie. Cette supposition est de l'ordre de la conjecture et reste à être démontrée. Un défi pour la recherche serait de vérifier s'il n'existe pas une logique arithmétique derrière l'existence de ces nombres ou s'il s'agit de simples curiosités ou « coïncidences mathématiques », si tant est qu'une telle chose soit possible.

Hypothèse 9 :

Dans un même ordre d'idées, nous avons cherché à savoir ce que l'on obtient en multipliant par deux les nombres épaulettes (*ne*) d'une paire de nombres premiers jumeaux (*pj*), soit ceux immédiatement situés de chaque côté. Il nous est apparu mathématiquement intéressant de constater que certains de ces *ne*, lorsque doublés, avaient parfois pour résultat des nombres qui jalonnaient deux autres paires de nombres premiers jumeaux, la plus petite somme se retrouvant immédiatement après une paire de nombres *pj*, l'autre immédiatement avant une autre paire de nombres *pj*. Nous désignons les nombres issus de cette opération comme étant des paires de « nombres épaulettes d'Alexy » (*nea*):

Dans les exemples suivants, les nombres en caractères gras représentent les nombres épaulettes (*ne*) qui, lorsque doublés, se positionnent entre deux paires – toujours consécutives – de nombres *pj*.

1 ^e paire de nombres <i>pj</i> encadrée de ses <i>ne</i>	Opérations	2 ^e et 3 ^e paires de nombres <i>pj</i> nanties de leurs <i>nea</i>
4 , (5, 7), 8	4 x 2 = 8 8 x 2 = 16	(5, 7), 8 ... 16 , (17, 19)
10 , (11, 13), 14	10 x 2 = 20 14 x 2 = 28	(17, 19), 20 ... 28 , (29, 31)
70 , (71, 73), 74	70 x 2 = 140 74 x 2 = 148	(137, 139), 140 ... 148 , (149, 151)
640 , (641, 643), 644	640 x 2 = 1 280 644 x 2 = 1 288	(1 277, 1 279), 1 280 ... 1 288 , (1 289, 1 291)
ETC.		

Voici deux caractéristiques de ces *nea* :

- Les *ne* ainsi doublés sont séparés de 8 unités et les paires de nombres *pj* qui les bordent sont séparés de 10 unités.
- L'un ou l'autre de ces nombres peut être semi-premier, mais ce n'est pas obligatoirement le cas.

Encore une fois, nous supposons qu'il en existe une infinité et nous déposons cette hypothèse sur la table.

Hypothèse 10 :

Il nous semble pertinent d'accorder une attention particulière à l'enchaînement des facteurs multiplicatifs du nombre 24 associés aux nombres premiers, qui composent des suites directement rattachées au repérage des nombres premiers dans le continuum des nombres entiers et peuvent donc nous renseigner sur la logique arithmétique de leur distribution. Nous examinons ici le résultat de la formule que nous utilisons.

Tableau 9 : Facteurs multiplicatifs de 24 (*n*) et nombres premiers

n = Facteur multiplicatif de 24.

Caractère gras = Nombres premiers jumeaux.

Souligné = Nombres faux positifs.

<i>n</i>	24<i>n</i> + 1	$\sqrt{24n + 1}$	<i>n</i>	24<i>n</i> + 1	$\sqrt{24n + 1}$
1	25	5	187	4 489	67
2	49	7	210	5 041	71
5	121	11	222	5 329	73
7	169	13	247	5 929	<u>77</u> (7 x 11)

12	289	17	260	6 240	79
15	361	19	287	6 889	83
22	529	23	330	7 921	89
35	841	29	345	8 281	<u>91</u> (7 x 13)
40	961	31	392	9 409	97
57	1 369	37	425	10 201	101
70	1 681	41	442	10 609	103
77	1 849	43	477	11 449	107
92	2 209	47	495	11 889	109
100	2 401	<u>49</u> (7 x 7)	532	12 769	113
117	2 809	53	590	14 161	<u>119</u> (7 x 17)
145	3 481	59	672	16 129	127
155	3 721	61	715	17 160	131

Nous obtenons ainsi les suites que voici et qui représentent les facteurs n des...

-Nombres premiers :

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 35, 40, 57, 70, 77, 92, 117, 145, 155, 187, 210, 222, 260, 287, 330, 392, 425, 442, 477, 495, 532, 672, 715,...

-Nombres premiers jumeaux :

1, 2, 5, 7, 12, 15, 35, 40, 70, 77, 145, 155, 210, 222, 425, 442, 477, 495...

-Faux positifs :

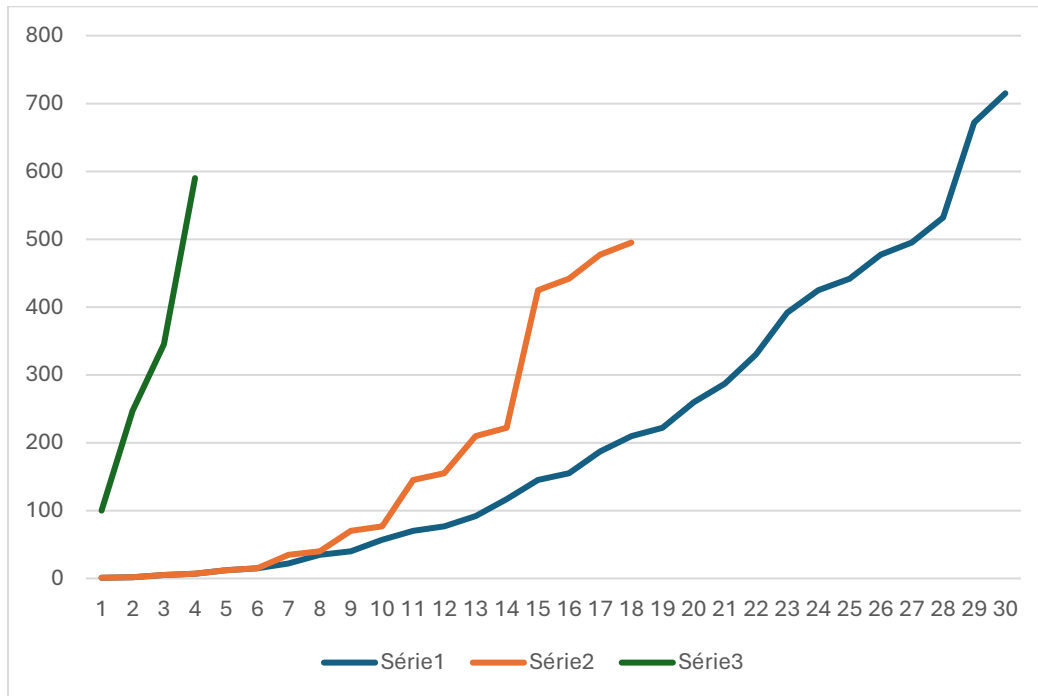
100, 247, 345, 590,...

La séquence associée aux nombres premiers fut inscrite dans la base de données de l'OEIS par Clark Kimberling en 1991 sous le numéro A024702 (<https://oeis.org/A024702>) et correspond à l'application de notre algorithme initial.

Puisque les suites sont d'un grand intérêt pour ceux qui cherchent des motifs cachés dans la distribution des nombres premiers, la question qui se pose ici est de savoir s'il est possible d'extraire une

règle de ces suites de nombres dépourvues de toute logique apparente et, au mieux, d'en déduire une formule algébrique. Voici un portrait graphique de ces trois progressions.

Diagramme 4 : Facteurs multiplicatifs du nombre 24 associés aux carrés des nombres premiers, des nombres premiers jumeaux et des faux positifs



Série 1: Nombres premiers

Série 2: Nombres premiers jumeaux

Série 3: Nombres faux positifs

Les facteurs multiplicatifs du nombre 24, lorsqu'ils sont couplés aux carrés des nombres premiers et des faux positifs, semblent suivre une courbe relativement régulière, nous invitant à aller plus loin. Pour ceux qui sont prêts à accomplir cette tâche, il leur faudrait tout d'abord augmenter significativement le nombre d'items de la suite des nombres faux positifs. Une idée pourrait être d'utiliser les données générant les courbes 1 et 3 puis, à l'aide de programmes informatiques, de voir si une fusion ou un certain « chevauchement arithmétique » de ces courbes pourrait nous en faire apprendre davantage sur la distribution des nombres premiers.

Hypothèse 11 :

Notre onzième et dernière hypothèse concerne la séquence numérique des facteurs multiplicatifs du nombre 24 associés à la différence entre les carrés de deux paires de nombres premiers jumeaux. Nous

nous demandons si, d'une quelconque manière, une telle séquence pourrait nous aider à mieux comprendre la distribution des paires de nombres premiers jumeaux.

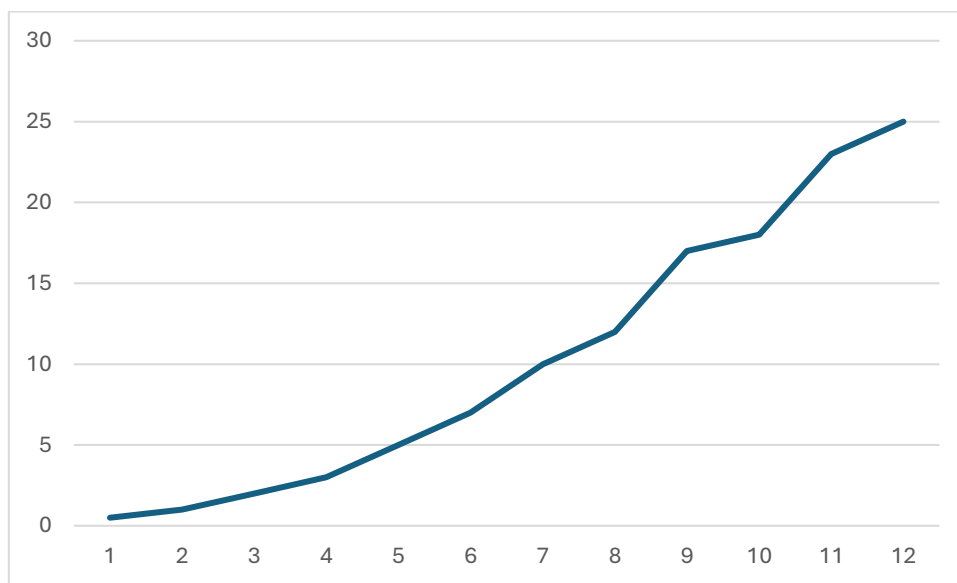
Comme l'affirme notre postulat 4, l'écart entre la différence des carrés de deux paires de nombres premiers jumeaux est systématiquement un multiple du nombre 24 (à l'exclusion de la paire (3, 5)). Or, quand on regarde la succession croissante des quotients résultant de cette opération (la division par 24), cela semble produire une suite logique, telle qu'on la retrouve dans la colonne « Différence entre les carrés » des tableaux 4 et 5.

0.5, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 17, 18, 23, 25,...

Cette séquence de termes est parfois nommée suite des « rangs jumeaux ». Elle est connue comme étant la suite numéro A002822 (<https://oeis.org/A002822>) de l'OEIS. Selon Lekraj Beedassy (2002), les termes pairs correspondent aux nombres premiers jumeaux de la forme $(4k - 1, 4k + 1)$, les termes impairs aux nombres premiers jumeaux de la forme $(4k + 1, 4k + 3)$.

Voyons comment cela se traduit sous forme graphique.

Diagramme 5 : Facteurs multiplicatifs du nombre 24 associés à la différence entre les carrés de deux paires de nombres premiers jumeaux successives



Suite : 0.5, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 17, 18, 23, 25,...

Intéressant, mais rien de bien concluant. Il faudrait produire un ensemble beaucoup plus important de termes pour aller plus loin dans notre exploration sur cette question, à savoir si ces données peuvent nous en apprendre davantage sur la distribution des nombres premiers jumeaux.

Dans l'ensemble, les résultats obtenus au sujet des nombres premiers jumeaux sont très encourageants. À défaut de n'avoir pas su découvrir l'astuce nous guidant tout droit vers l'écriture d'un algorithme prédisant leur séquence, nous avons franchi quelques pas supplémentaires dans cette direction. Les correspondances et régularités que nous avons observées prêchent dans le sens de l'existence d'une infinité de p_j , si l'on convient que le modèle que nous avons élaboré est solide et fiable. Il revient maintenant à la communauté des mathématiciens de se pencher sur nos résultats et d'en évaluer la pertinence, si nos postulats et hypothèses leurs paraissent dignes d'intérêt.

Discussion et conclusion : vers de nouveaux horizons théoriques

Comme le dit Cécile Dartyge, chercheuse à l'Institut Élie Cartan de l'Université de Lorraine, si notre système de numération peut se concevoir comme un mur dont chacun des nombres est une brique, alors les nombres premiers sont les briques élémentaires qui composent tous les nombres [3].

Notre modèle de l'agencement des nombres premiers suggère l'existence d'une règle de répartition structurante associée au nombre 24, qui traduit le motif organisateur subissant de notre système de numération, le nombre 24 apparaissant comme un marqueur majeur de l'agencement positionnel des nombres premiers.

Inspirée de cette conception, notre « machine » à détecter des nombres premiers identifie avec succès 100% des nombres premiers aussi loin que nous avons pu le tester, sans jamais n'en omettre un seul. Les faux positifs, retenus à prime abord dans la séquence de repérage, peuvent être rejetés systématiquement au moyen de l'application d'une simple technique de tamisage. Ces faux positifs, loin de mettre en doute la validité de notre modèle, agissent en complète cohérence avec lui. Nos analyses mettent en lumière le possible rôle de ces faux positifs dans le séquençage des paires de nombres premiers jumeaux, suggérant ainsi qu'ils pourraient avoir une valeur prédictive.

Sachant que Hardy considérait le théorème des nombres premiers comme faisant partie des énoncés dont la profondeur ne les rendait accessibles que par le biais de l'analyse complexe, la grande simplicité de nos procédures de détection des nombres premiers et des paires de nombres premiers

jumeaux ne sont rien de moins qu'étonnantes. Notre modèle dans son ensemble est le résultat d'un travail d'exploration qui, nous l'espérons, sera d'une certaine utilité en arithmétique algébrique et en théorie analytique des nombres, qui s'intéresse notamment à la distribution des nombres entiers au sein d'une série, en proposant d'abord les problèmes concernant les nombres premiers à la lumière de leur lien indissociable avec le nombre 24.

Annexe A

Formules mathématiques pour les paires de nombres entiers, premiers ou non

- 1) La moyenne des nombres d'une paire de pj (leur somme divisée par deux) est égale à la racine carrée de leur produit plus 1. Vrai pour toute paire de nombres séparés de deux unités.

Exemples détaillés :

Paire (29, 31)

$$29 + 31 = 60$$

$$60 \div 2 = 30$$

$$29 \times 31 = 899$$

$$899 + 1 = 900$$

$$\sqrt{900} = 30$$

$$30 = 30$$

Paire (14, 16)

$$14 + 16 = 30$$

$$30 \div 2 = 15$$

$$14 \times 16 = 224$$

$$224 + 1 = 225$$

$$\sqrt{225} = 15$$

$$15 = 15$$

Formule : $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy + 1}$

$$\frac{29 + 31}{2} = \sqrt{29 \times 31 + 1}$$

$$\frac{60}{2} = \sqrt{899 + 1}$$

$$30 = \sqrt{900}$$

$$30 = 30$$

- 2) La somme des carrés moins 2 de deux pj est toujours le produit de leur somme multipliée par la moitié de leur somme. Vrai pour toute paire de nombres de type $x - y = 2$, peu importe si les nombres sont premiers ou non.

Exemples détaillés :

Paire (71, 73)

$$71^2 + 73^2 = 10\,370$$

$$71 + 73 = 144$$

$$10\,370 - 2 = 10\,368$$

$$144 \div 2 = 72$$

$$144 \times 72 = 10\,368$$

$$10\,368 = 10\,368$$

Paire (6, 8)

$$6^2 + 8^2 = 100$$

$$6 + 8 = 14$$

$$100 - 2 = 98$$

$$14 \div 2 = 7$$

$$14 \times 7 = 98$$

$$98 = 98$$

Formule : $x^2 + y^2 - 2 = (x + y) \frac{x+y}{2}$

$$71^2 + 73^2 - 2 = (71 + 73) \frac{71 + 73}{2}$$

$$5041 + 5329 - 2 = 144 \frac{144}{2}$$

$$10370 - 2 = 144 \times 72$$

$$10368 = 10368$$

- 3) La somme d'une paire de pj divisée par 2 est égale au carré de ces nombres moins 2 divisé par leur somme. Vrai pour toutes paires de nombres entiers dont la différence est deux, premiers ou non.

Exemples détaillés :

Paire (71, 73)

$$71 + 73 = 144$$

$$71^2 + 73^2 = 10\,370$$

$$144 \div 2 = 72$$

$$10\,370 - 2 = 10\,368$$

$$10\,368 \div 144 = 72$$

$$72 = 72$$

Paire (6, 8)

$$6 + 8 = 14$$

$$6^2 + 8^2 = 100$$

$$14 \div 2 = 7$$

$$100 - 2 = 98$$

$$98 \div 14 = 7$$

$$7 = 7$$

Formule : $\frac{x+y}{2} = \frac{x^2+y^2-2}{x+y}$

$$\frac{71 + 73}{2} = \frac{5041 + 5329 - 2}{71 + 73}$$

$$\frac{144}{2} = \frac{10370 - 2}{144}$$

$$72 = \frac{10368}{144}$$

$$72 = 72$$

- 4) La somme des nombres d'une paire de pj multipliée par 2 est égale à la différence entre leurs carrés. Nous proposons deux variantes, dont l'une est que leur somme est égale à la différence entre leurs carrés divisée par 2. Vrai pour toutes paires de nombres entiers dont la différence est deux, premiers ou non.

Exemples détaillés :

Paire (17, 19)

$$19^2 - 17^2 = 361 - 289$$

$$17 + 19 = 36$$

$$361 - 289 = 72$$

$$2 \times 36 = 72$$

$$72 = 72$$

Paire (14, 16)

$$16^2 - 14^2 = 256 - 196$$

$$14 + 16 = 30$$

$$256 - 196 = 60$$

$$2 \times 30 = 60$$

$$60 = 60$$

Formules : $2(x + y) = x^2 - y^2$ ou $4\left(\frac{x+y}{2}\right) = y^2 - x^2$ ou $x + y = \frac{x^2 - y^2}{2}$

$$13 + 11 = \frac{13^2 - 11^2}{2}$$

$$24 = \frac{169 - 121}{2}$$

$$24 = \frac{48}{2}$$

$$24 = 24$$

5) La différence entre les carrés des nombres d'une paire de pj est égale :

Variante A) à deux fois la somme des nombres pj ;

Variante B) au plus grand des deux nombres moins 1 (ou du plus petit nombre plus 1) multiplié par 4.

Les formules fonctionnent avec toute paire de nombres entiers ayant un écart de deux, premiers ou non.

Note : De même, la différence entre les carrés d'une paire de nombres pj et de son ns correspond à un multiple de 12, avec une différence de plus 1 par rapport au plus petit carré et moins 1 par rapport au carré le plus grand. Le même genre de principe mathématique s'applique également à tout triplet de nombres consécutifs.

Exemples détaillés :

Variante A)

Paire (11, 13)

$$13^2 - 11^2 = 169 - 121$$

$$11 + 13 = 24$$

$$169 - 121 = 48$$

$$2 \times 24 = 48$$

$$48 = 48$$

Paire (10, 12)

$$10^2 - 12^2 = 100 - 144$$

$$10 + 12 = 22$$

$$100 - 144 = 44$$

$$2 \times 22 = 44$$

$$44 = 44$$

Formule : $x^2 - y^2 = 2(x + y)$

$$13^2 - 11^2 = 2(13 + 11)$$

$$169 - 121 = 2 \times 24$$

$$48 = 48$$

Variante B)

Paire (11, 13)

$$13^2 - 11^2 = 169 - 121$$

$$13 - 1 = 12 \text{ (ou } 11 + 1 = 12)$$

$$169 - 121 = 48$$

$$4 \times 12 = 48$$

$$48 = 48$$

Paire (10, 12)

$$10^2 - 12^2 = 100 - 144$$

$$12 - 1 = 11 \text{ (ou } 10 + 1 = 11)$$

$$100 - 144 = 44$$

$$4 \times 11 = 44$$

$$44 = 44$$

Formule : $x^2 - y^2 = 4(x - 1)$

$$13^2 - 11^2 = 4(13 - 1)$$

$$169 - 121 = 4 \times 12$$

$$48 = 48$$

6) Équation liant les nombres pj et le nombre séparateur, i.e. celui situé entre les deux nombres de la paire. Valide pour toute paire de nombres entiers divergeant de deux unités.

Formule : $y + z = \frac{x^2 - y^2 + z^2 - x^2}{2}$

Paire (11, 13)

$$11 + 13 = \frac{12^2 - 11^2 + 13^2 - 12^2}{2}$$

$$24 = \frac{144 - 121 + 169 - 144}{2}$$

$$24 = \frac{23 + 25}{2}$$

$$24 = \frac{48}{2}$$

$$24 = 24$$

Paire (12, 14)

$$12 + 14 = \frac{13^2 - 12^2 + 14^2 - 13^2}{2}$$

$$26 = \frac{169 - 144 + 196 - 169}{2}$$

$$26 = \frac{169 - 144 + 196 - 169}{2}$$

$$26 = \frac{25 + 27}{2}$$

$$26 = \frac{52}{2}$$

$$26 = 26$$

Annexe B

Constatations parallèles : le nombre de facteurs des nombres résultant d'une puissance d'un nombre premier

Nous savons déjà que, lorsqu'un nombre est mis au carré, le nombre de ses facteurs augmente en raison de l'opération de mise au carré créant de nouvelles paires de facteurs. Un nombre carré a un nombre impair de facteurs, et le nombre de facteurs est lié à la factorisation première du nombre original.

Lors de nos analyses, nous avons observé quelque chose qui, nous semble-t-il, mérite d'être signalé aux chercheurs en théorie des nombres, s'il ne s'agit pas d'un fait déjà connu. Un nombre premier possède deux facteurs. Lorsque nous mettons au carré un nombre premier, le nombre résultant est un semi-premier composé de trois facteurs. Par exemple, $3^2 = 9$, dont les facteurs sont 1, 3 et 9. Nous étions curieux de savoir quel serait le nombre de facteurs résultant si nous continuions à mettre au carré les nombres suivants obtenus au moyen d'une telle procédure itérative de mise au carré, en commençant par un nombre premier. Voici la séquence résultante :

2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, 1025,...

Le premier élément de la séquence est le nombre de facteurs d'un nombre premier. L'élément suivant est le nombre de facteurs du carré de ce nombre premier, et ainsi de suite, en mettant au carré tous les nombres suivants de manière itérative.

Ex : 2 (2 facteurs), $2^2 = 4$ (3 facteurs), $4^2 = 16$ (5 facteurs), $16^2 = 256$ (9 facteurs), etc.

Ex : 5 (2 facteurs), $5^2 = 25$ (3 facteurs), $25^2 = 625$ (5 facteurs), $625^2 = 390,625$ (9 facteurs), etc.

Le nombre croissant de facteurs forme une séquence basée sur une règle très simple, qui consiste à doubler le nombre moins un ($2n - 1$). Une autre façon de caractériser la logique de cette progression est de se concentrer sur l'écart entre les éléments, car il double à chaque fois (+1, +2, +4, +8, +16, etc.). Fait intéressant, cette succession précise de nombres de facteurs apparaît quel que soit le nombre premier choisi au départ.

Cette chaîne exacte d'entiers est enregistrée dans l'OEIS sous le numéro de séquence A000051 (<https://oeis.org/A000051>), mais la formulation de la règle de la suite est différente ($a(n) = 3^n + 1$ plutôt que $3n - 2$). Plus encore, la séquence ne semble pas être liée à ce que nous considérons ici, c'est-à-dire le

nombre croissant de facteurs de la série de nombres résultant de cette opération de mise au carré répétitive, commençant par n'importe quel nombre premier.

Le même phénomène, celui d'une régularité observable au niveau du nombre de facteurs, se produit lorsqu'un nombre premier est mis au cube (à la puissance 3), puis ce résultat mis au cube à son tour, et ainsi de suite. La séquence est alors différente de celle issue des carrés, mais tel que vu précédemment, elle reste la même quel que soit le nombre premier choisi au départ, ce qui correspond à la séquence no A034472 (<https://oeis.org/A034472>) de l'OEIS :

2, 4, 10, 28, 82,...

Le premier item de la séquence est le nombre de facteurs d'un nombre premier. L'élément suivant est le nombre de facteurs du cube de ce nombre, et ainsi de suite, en mettant tous les nombres résultants suivants à la puissance 3 de manière itérative et en ajoutant à la séquence le nombre de facteurs de chacun de ces nombres.

Ex: 2 (**2** facteurs), $2^3 = 8$ (**4** facteurs), $8^3 = 512$ (**10** facteurs), $512^3 = 134217728$ (**28** facteurs), $134217728^3 = 2417851639229258349412352$ (**82** facteurs), etc.

Ex: 3 (**2** facteurs), $3^3 = 27$ (**4** facteurs), $27^3 = 19,683$ (**10** facteurs), $19,683^3 = 7\,625\,597\,484\,987$ (**28** facteurs), $7\,625\,597\,484\,987^3 = 443426488243037769948249630619149892803$ (**82** facteurs), etc.

Nous sommes aussi d'avis que le même motif arithmétique (une régularité du nombre de facteurs) se produira quel que soit le nombre premier ou l'exposant choisis au départ. Ainsi, une séquence débutant par un nombre premier quelconque mis à la puissance 4 produira toujours la même séquence, dont les termes sont le nombre de facteurs. Nous observerons alors la règle $a(n) = 4^n + 1$ ou $4n - 3$, les items de la suite étant toujours le nombre de facteurs des nombres obtenus, ce qui correspond à la séquence no A052539 (<https://oeis.org/A052539>) de l'OEIS :

2, 5, 17, 65,...

Ex: 2 (**2** facteurs), $2^4 = 16$ (**5** facteurs), $16^4 = 65\,536$ (**17** facteurs), $65\,536^4 = 18\,446\,744,073\,709\,551\,616$ (**65** facteurs), etc.

Ex: 3 (**2** facteurs), $3^4 = 81$ (**5** facteurs), $81^4 = 43\,046\,721$ (**17** facteurs), etc.

À notre connaissance, ces régularités n'ont pas été associées auparavant au nombre grandissant de facteurs que possèdent les nombres premiers mis au carré, au cube ou à toute autre puissance supérieure, quel que soit le nombre premier au départ de la séquence. Dans tel cas, il s'agit d'une hypothèse qui demande confirmation et nous suggérons de la considérer comme une nouvelle conjecture liée aux nombres premiers. S'il ne s'agit pas d'une nouveauté, nous nous en excusons.

Tableaux et graphiques :

Diagramme 1 : La machine à détecter des nombres premiers

Diagramme 2 : La machine à détecter des paires de nombres premiers jumeaux

Diagramme 3 : Comparaison entre le nombre de faux positifs, de semi-premiers et de nombres premiers situés entre les carrés d'une paire de nombres premiers jumeaux

Diagramme 4 : Facteurs multiplicatifs du nombre 24 associés aux carrés des nombres premiers, des nombres premiers jumeaux et des faux positifs

Diagramme 5 : Facteurs multiplicatifs du nombre 24 associés à la différence entre les carrés de deux paires de nombres premiers jumeaux

Tableau 1 : Lien entre le carré des nombres premiers et le nombre 24

Tableau 2 : Pourcentage de nombres faux positifs par tranches croissantes

Tableau 3 : Les nombres faux positifs et leur factorisation

Tableau 4 : Nombres premiers jumeaux et leurs carrés (1)

Tableau 5 : Nombres premiers jumeaux et leurs carrés (2)

Tableau 6 : Nombres premiers jumeaux et leurs carrés (3)

Tableau 7 : Multiples de 6 de 0 à 222 qui ne sont pas encadrés par une paire de nombres premiers jumeaux

Tableau 8 : Semi-premiers, multiples de 6 et paires de nombres premiers jumeaux par tranche de 100

Tableau 9 : Facteurs multiplicatifs de 24 (n) et nombres premiers

Annexe A : Formules mathématiques pour les paires de nombres entiers, premiers ou non

Annexe B : Constatations parallèles : le nombre de facteurs des nombres résultant d'une puissance d'un nombre premier

Références :

Aucun article scientifique publié dans une revue de mathématiques n'a été consulté en lien avec ce travail de recherche sur les nombres premiers. Le contenu dans son entièreté (tableaux, exemples, calculs, algorithmes, résultats, etc.) est uniquement le fruit des investigations personnelles de l'auteur. Tous les postulats, hypothèses, analyses de données et conclusions du présent article sont exclusivement le fruit des efforts individuels d'un chercheur indépendant qui explore de manière très libre, intuitive et imaginative, l'univers des nombres. N'étant pas mathématicien de profession, il est probable que certains éléments de notre article soient peu pertinents ou ne soient pas entièrement nouveaux. Dans tel cas, nous nous en excusons et ne voulons en aucun cas nous attribuer la paternité des idées, formules ou résultats de recherche déjà existants. Nous accueillerons avec plaisir tout commentaire constructif visant l'amélioration de nos travaux à l'adresse courriel suivante : les64cases@gmail.com.

[1] Tiré du site *Récéomath* (http://www.recreomath.qc.ca/dict_jumeaux_np.htm).

[2] N.J.A. Sloane, *L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers* (OEIS).

[3] Anaïs Culot : Ces nombres qui dessinent le monde, CNRS – Le Journal (2021).