



below

FISICO DENTRO FISICO - RACCOLTA

Abstract: una raccolta di casi in cui un fisico si ritrova dentro un altro fisico.

Leonardo Rubino
Luglio 2025

HEISENBERG DENTRO COULOMB

Ricordiamo il Principio di Indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

Considerando che esso sicuramente regola la comparsa (pre annichilazione) di una coppia particella (+) / antiparticella (-), tipo positrone/elettrone, segue che quando le due particelle compaiono, si separano (in un tempo Δt) alla velocità della luce c e fino a raggiungere la distanza reciproca $\Delta x = r = c\Delta t$ e sappiamo altresì che in fisica la forza F vale: $F = \Delta p / \Delta t$, da cui:

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar/2 = h/4\pi \approx F\Delta t \cdot r = F \frac{r}{c} \cdot r = F \frac{r^2}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow F = \left(\frac{hc}{4\pi}\right) \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

ossia proprio la stessa dipendenza di F da $1/r^2$, caratteristica della Legge di Coulomb (*):

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}.$$

(*): le due costanti non coincidono, ossia: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \neq \frac{hc}{4\pi}$, ma bensì: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = (2\alpha) \frac{hc}{4\pi} \cong \left(\frac{2}{137}\right) \frac{hc}{4\pi}$,

dove α è la Costante di Struttura Fine; ciò (ossia il coefficiente aggiuntivo 2α) è causato dal fatto che il Principio di Indeterminazione di Heisenberg è calibrato sull'atomo e non su una coppia particella/antiparticella; infatti, mentre la particella e l'antiparticella, nel comparire, si separano alla distanza r percorrendo ciascuna la distanza $r/2$ dal centro di massa, nel caso di un atomo (di idrogeno H), il protone è così massivo rispetto all'elettrone ($m_p = 1836m_e$) che sta praticamente fermo nel centro di massa, percorrendo così la distanza di $0r$, mentre tutta la distanza r è percorsa dal leggero elettrone ($1r$), da cui la media $(0r + 1r)/2 = r/2$ ed il 2 è così giustificato.

Per giustificare invece il 137, basta osservare che, sempre data la differenza di massa tra protone ed elettrone, succede che la velocità di separazione non è c , ma bensì quella (unica, poichè il protone sta fermo nel centro di massa) che ha l'elettrone intorno al protone nell'atomo H, ossia notoriamente $c/137$.

MAXWELL DENTRO EINSTEIN

CAMPO MAGNETICO ILLUSIONE RELATIVISTICA

Premesse:

Un giorno Coulomb (1785) ci insegnò che due cariche (ad esempio, di segno opposto) si attraggono con una certa forza:

$$\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

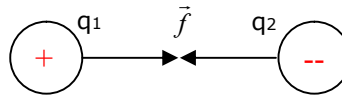


Fig. 1.

Se poi le due cariche sono una grande Q ed una piccola (di prova) q, definiamo il campo elettrico E generato da Q. Avendosi:

$$\vec{f} = \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}, \text{ allora: } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Campo elettrico generato da un filo infinito:

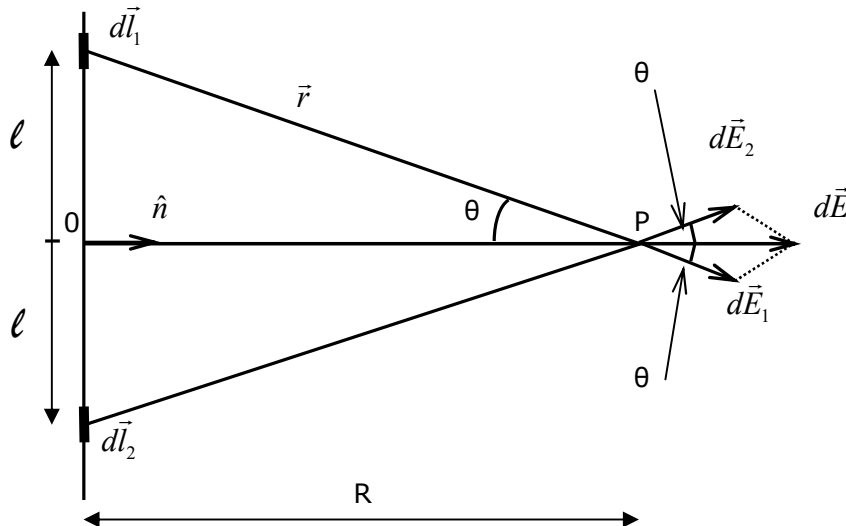


Fig. 2.

Consideriamo due elementi di filo dl_1 e dl_2 e valutiamo il campo elettrico generato in P:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = (|dE_1| + |dE_2|) \cos \theta \cdot \hat{n} = \frac{2 \cos \theta \cdot \hat{n} \lambda dl}{4\pi\epsilon r^2} \quad (1)$$

Inoltre: $r = R / \cos \theta$ e $l = R \cdot \tan \theta$; differenziando: $dl = R \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$. Sostituendo nella (1) e tenendo conto che $\lambda = \text{cost}$ (densità lineare di carica):

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\hat{n}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta \lambda \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{R^2} = \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{n}} \quad (2)$$

L'illusione relativistica:

qual è la formula simbolo della “Teoria” della Relatività? Sicuramente, la maggior parte risponderà $E=mc^2$. Questa equazione, però, nella sua forma, è un po’ quella dell’energia cinetica di Newton $((1/2)mv^2)$ e non rappresenta proprio una novità. Invece, la più rappresentativa, ossia quella che davvero, inequivocabilmente, ti dice che si sta parlando di relatività, è la seguente:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ ossia, meglio ancora, la sola radice } \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \text{ o, ancor più semplicemente:}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Quando si vede tale espressione, si capisce che si sta parlando di Relatività!

E tale quantità era già nascosta nell'elettromagnetismo del 700 e dell'800.

Qui, però, semplificando un tantino i ragionamenti, si abbia una distribuzione lineare di cariche positive n (n cariche al metro) ed una singola carica q a distanza d , come in figura 3:

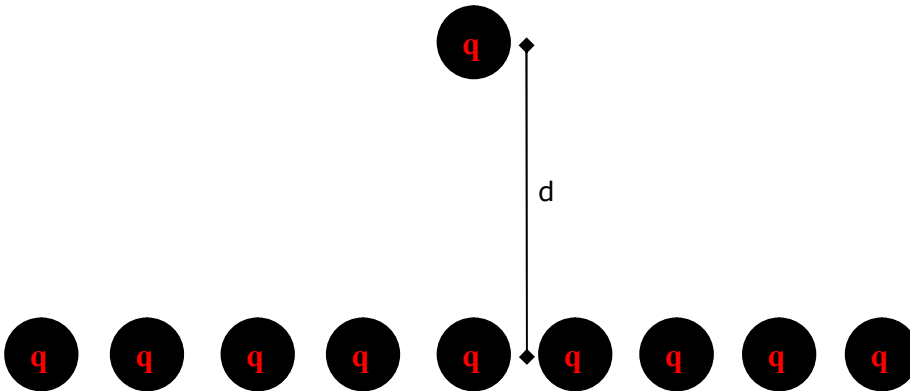
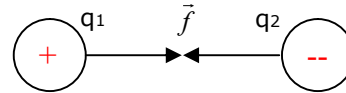


Fig. 3.

Se la densità lineare di carica è λ [C/m], allora, dalla Legge di Coulomb del 1785, ossia dalla:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{r} \quad (\text{Coulomb-1785})$$



discende il campo elettrico E generato da tale distribuzione lineare di carica e la conseguente forza F di repulsione sulla carica singola q :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} \quad (\text{per Coulomb-1785}), \text{ dove } \lambda = nq.$$

E, in tale situazione, tutte le cariche appaiono inizialmente ferme.

Se ora io, osservatore, immagino di viaggiare a velocità v verso destra, allora vedrò delle cariche muoversi indietro, verso sinistra, ossia delle correnti elettriche, e sappiamo dal magnetismo dell'ottocento che correnti di verso concorde si attraggono (due fili elettrici percorsi da correnti di verso concorde si attraggono; un po' quello che succede nei motori elettrici ogni giorno).

Allora, la carica singola la vedremo non solo respinta elettricamente, ma anche attratta magneticamente, verso la distribuzione di cariche.

Per la Forza di Lorentz totale risultante, si avrà ($\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{t}$, per Biot-Savart-1820):

$$\vec{F}' = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv \hat{n}, \text{ ma essendo, dalla definizione di corrente elettrica, che:}$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(n\Delta x)}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv = \lambda v \quad (\Delta x = v\Delta t \text{ è lo spazio percorso}), \text{ allora:}$$

$$\vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q \lambda v^2}{2\pi d} \hat{n}.$$

Ricordiamo ora la arcinota equazione che fornisce la velocità delle onde elettromagnetiche c nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (1856), \text{ da cui: } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}, \text{ e si avrà, per la forza risultante sulla}$$

$$\text{carica singola: } \vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q \lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{q \lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{v^2}{c^2} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n}, \text{ ossia:}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} \quad ; \text{ è spuntata l'espressione simbolo della Relatività!}$$

Si noti che $\vec{F}' \neq \vec{F}$, ossia l'osservatore fermo e quello in moto vedono due situazioni differenti...c'è qualcosa che non va. Non va bene. Per far tornare i conti, le distanze tra una carica e l'altra devono apparire differenti ai due osservatori, ossia la distanza dovrà risultare una grandezza relativa all'osservatore....e lo stesso per il tempo.

Comparirà una $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ relativistica nell'espressione nuova per λ ed una $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ relativistica nella

valutazione dei tempi in gioco, che annulleranno appunto la nuova espressione $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ appena comparsa. Si noti che qui l'equazione più recente che abbiamo usato nel ragionamento risale al 1856, quando Albert Einstein non era ancora nato!

Ma la verità qual è? Sono spazio e tempo che devono diventare relativi per compensare l'effetto di comparsa della forza magnetica, oppure è la forza magnetica, che come forza a sé stante, non esiste, ma bensì è un delta di forza elettrica dovuto al fatto che spazio e tempo sono relativi? La visione giusta è la seconda, anche se formalmente, o matematicamente, poco cambia.

EINSTEIN DENTRO MAXWELL

GENESI DI UN VETTORE DI POYNTING

Il fotone prende forma proprio perché la velocità massima consentita nell'universo è limitata ed è c , da cui il ritardo temporale nella percezione degli eventi da parte degli osservatori.

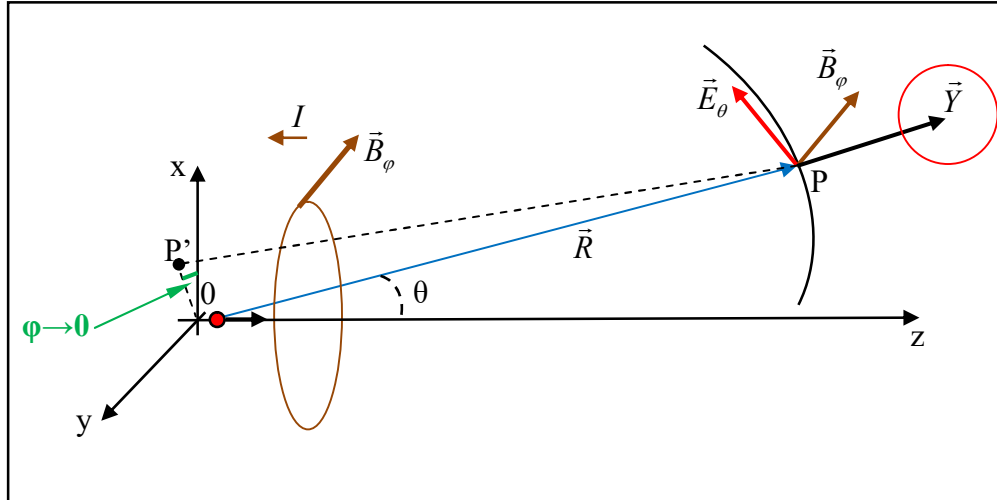


Fig. 1.1: Il Vettore di Poynting $\vec{Y}$ (qui $\varphi=0$, vista la totale simmetria intorno a z).

Con riferimento alla Fig. 1.1, abbiamo un elettrone e^- (●) che si muove lungo z , verso destra, e appena supera l'origine, per qualche motivo (un urto od altro) in un breve spazio decelera e si arresta. Ovviamente, la corrente I , lì rappresentata, ha verso opposto a quello dell'elettrone (essendo l'elettrone negativo e $I=dq/dt < 0$). A questo punto, il vettore rappresentante il campo magnetico generato da una tale corrente I non può che essere quello giacente lungo $\hat{\phi}$, ossia $\vec{B}_\phi$. Ed un effetto di campo magnetico si estenderà ovviamente, lungo $\hat{\phi}$, anche al punto P .

Ma non è un caso che, nello studio delle antenne, e dunque dei dipoli oscillanti, dove vi sono, presso l'origine, elettroni (di corrente alternata) che accelerano e decelerano, i campi lontani (far fields) superstiti sono proprio E_θ e B_ϕ ; vedere, a tal proposito, le (A9.17) nell'Appendice 9 al seguente link, dove lì i calcoli sono stati eseguiti in modo rigoroso:

(https://www.academia.edu/100124448/AN_INTRODUCTION_TO_ANTENNAS_ITA_ENG)

$$E_R \approx 0, \quad E_\theta = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} j\omega\mu \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin\theta, \quad B_\phi = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} j\beta \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin\theta, \quad (\text{far fields})$$

Nel passare dal campo "non lontano" a quello appunto lontano, l'unica componente di B è la sola B_ϕ mentre riguardo le componenti del campo elettrico E , nel passare dal campo "non lontano" a quello lontano si assiste alla sopravvivenza di E_θ ed all'annullarsi di E_R .

Ma mentre nel caso di B_ϕ → come unica componente di B , tutto è immediatamente ovvio, riguardo i comportamenti delle componenti di E , occorrono dei ragionamenti particolari per comprendere le motivazioni dell'annullamento di E_R e della sopravvivenza unica di E_θ →.

Vediamo quali sono tali motivazioni: occorre una analisi della Fig. 1.2, dove vi è la carica elettrica q (●), che idealmente viene vista provenire con velocità v ($\ll c$) da $-\infty$ da parte dell'osservatore, che, ad un certo punto, per qualche motivo (urto od altro), in $z=0$ (ed al tempo $t=0$) viene fatta decelerare (con una decelerazione a) e fermare in un tempo $t=\tau$ molto breve. Tra parentesi, una particella carica che decelera deve irradiare a livello elettromagnetico l'energia che perde.

Praticamente, la particella è poi ferma molto vicina all'origine (al punto di coordinata

$z = \frac{1}{2} a \tau^2 = \frac{1}{2} v \tau$, ovviamente) (●). E considereremo poi la particella anche relativamente lontana

dall'origine (●), al tempo T ($T \gg \tau$), posizione che invece avrebbe assunto se non fosse stata fermata. Ora, al tempo (grande) T , è passato un tempo $(T-\tau)$ da quando la particella è stata arrestata

e dunque, visto che le informazioni non possono trasmettersi a velocità superiore a quella della luce, solo eventuali osservatori che si trovino all'interno della sfera minore, di raggio $R' = c(T - \tau)$, possono essere venuti a sapere che la particella si è arrestata; per contro, osservatori anche un po' al di fuori della sfera interna, diciamo a partire dalla sfera esterna di raggio $R = cT$, non possono ancora sapere che la carica si è arrestata e pensano dunque che essa sia (al tempo T) nel punto arancione (●), a distanza $z = vT$ dall'origine. Quindi nel passo di uno spessore relativamente breve (quello della banda grigia), le conclusioni traibili dagli osservatori sono molto diverse tra loro: l'osservatore esterno "θ-Observer" immagina la carica come arancione (●), ad esempio, sotto l'angolo θ . Per fare invece un confronto tra tale percezione e ciò che invece sarebbe stato percepito se si fosse saputo che la carica invece si è fermata (●), bisogna traslarsi indietro (← ← ←), dal punto arancione a quello blu, ma, per coerenza, conservando l'angolo di osservazione θ , così spostandosi, sulla corona esterna grigia (di spessore $dR = c\tau$), dal punto P al punto P' . Ed il vettore campo elettrico, in tale breve tratto ("breve" sia a livello temporale che spaziale (sottile)) denuncia un delta pari a $\vec{\Delta E}$, il quale è dotato di componenti E_θ ed E_r , visualizzate nel cerchio viola in basso a destra, sempre in Fig. 1.2.

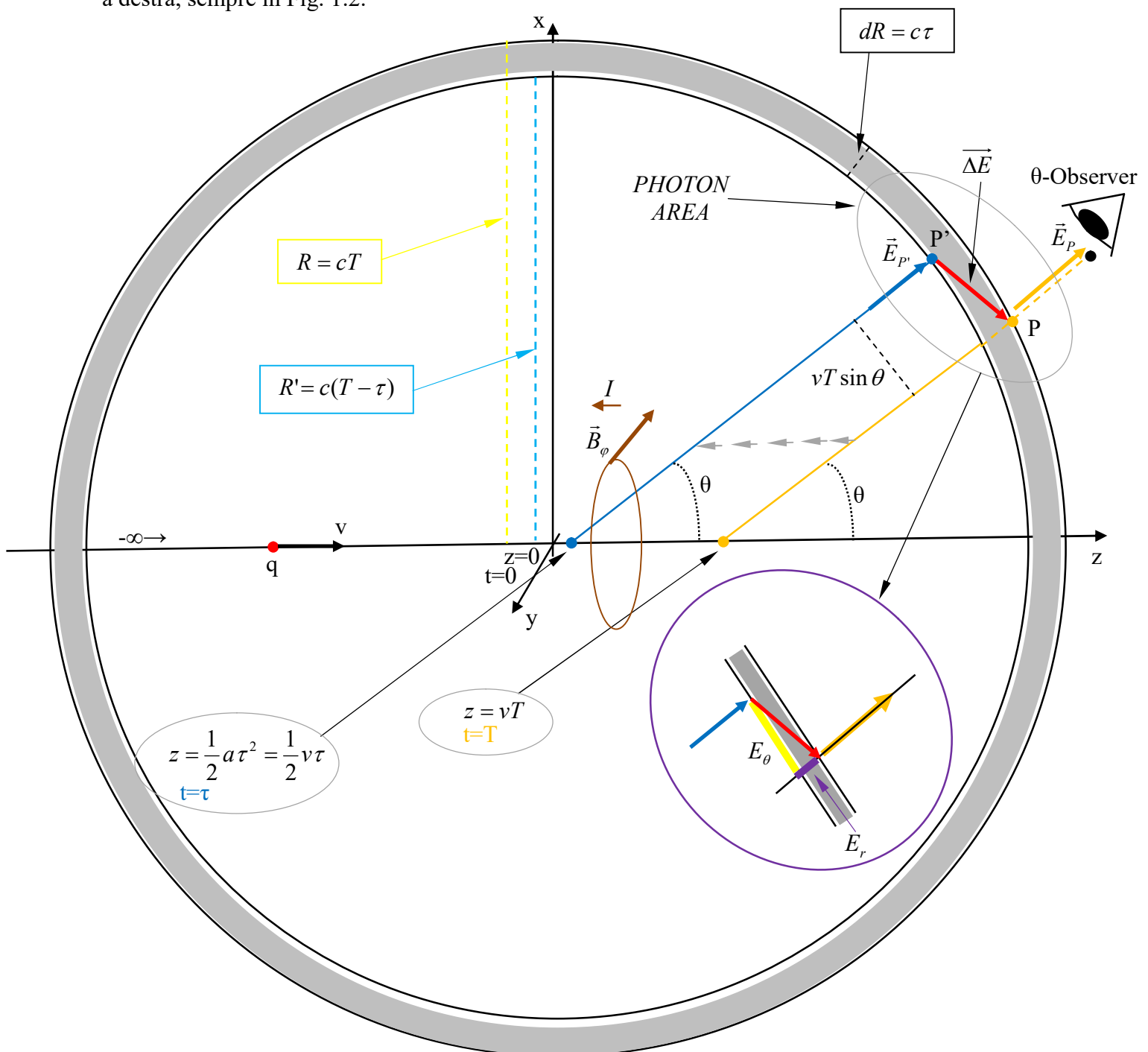


Fig. 1.2: Carica elettrica q che decelera bruscamente.

Possiamo anche dire che l'osservatore (che osserva sotto un angolo θ), nel varcare la corona grigia (da fuori a dentro) vede l'elettrone shiftare verso $-z$ (meno z) e dunque è come se subisse, per trascinamento, anch'egli uno shift in orizzontale, verso sinistra, ragion per cui il campo $\vec{\Delta E}$, che testimonia tale shift, ha una rilevante componente orizzontale.

C'è questa componente **trasversale** (cui già abbiamo fatto cenno) E_θ (lungo $\hat{\theta}$) che componendosi con un campo magnetico (in marrone, in Fig. 1.2) B_ϕ ($B_\phi = E_\theta/c$) lungo $\hat{\phi}$, dunque ortogonale sia ad R che a $\vec{\Delta E}$, ci dona un'onda EM. E ricordiamo che: $\tau \ll T$.

Si deduce ora facilmente, dalla figura, che:
$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{vT \sin \theta}{c\tau} \quad (1.1)$$

e
$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 T^2} \quad (1.2)$$

e dalle due si ottiene:
$$E_\theta = E_r \frac{vT \sin \theta}{c\tau} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 T^2} \frac{vT \sin \theta}{c\tau} = \frac{qv \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 T\tau} \quad (1.3)$$

Essendo poi $a=v/\tau$ ed $R=cT$, segue che:

$$E_\theta = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \quad (1.4)$$

Vediamo qui una cosa molto importante, e cioè che E_θ ha al denominatore solo R , mentre E_r ha R^2 . Ciò significa che, col passare del tempo e dunque con l'aumentare di R , E_θ diventa predominante; dunque noi ci concentreremo sulla sola presenza di E_θ nella corona grigia. E già qui abbiamo giustificato lo svanire di E_r . Sappiamo poi dall'Appendice qui sotto (eq. (A.1)), dove si valuta l'energia EM ed il Vettore di Poynting, che la densità di energia totale associata ad E_θ è:

$$\begin{aligned} \delta_{E_r} &= 2 \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \epsilon E^2 \\ \delta_{E_r} &= \epsilon_0 E_\theta^2 = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4 R^2} \quad [J/m^3] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Praticamente, si ha la componente elettrica $\delta_{el} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ e quella magnetica:

$$\delta_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon (cB)^2 = \frac{1}{2} \epsilon c^2 B^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{1}{\epsilon\mu} B^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}, \quad \text{dove abbiamo tenuto conto della identità}$$

$E=cB$, già deducibile da ragionamenti sulla Forza di Lorentz; infatti, sappiamo dalla espressione della Forza di Lorentz ($\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$) che il campo magnetico (vettore induzione magnetica B) applica ad una carica una forza che è ortogonale al suo moto; infatti, $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow (E_B = F_B/q = vB)$ è ortogonale a v (per il prodotto vettoriale); dunque, volendo interpretare B in termini di un campo elettrico E , è come se B determinasse un campo elettrico E_B ortogonale (**trasversale**) a v che agisce sulla carica con la forza F_B appunto.

E del campo magnetico (B) abbiamo tenuto conto nella Fig. 1.2, in marrone, tramite il vettore diretto lungo $\hat{\phi}$, ossia $\vec{B}_\phi$, come già spiegavamo riguardo la Fig. 1.1.

Dunque, per la (1.4) e per la $E=cB$, si ha:

$$B_\phi = \frac{E_\theta}{c} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \quad (1.6)$$

Ma, come controverifica finale, vediamo se davvero le espressioni dei far fields:

$$E_r \approx 0, \quad E_\theta = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} j\omega\mu \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin \theta, \quad B_\phi = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} j\beta \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin \theta \quad (\text{far fields})$$

sono proprio le espressioni (1.4) ed (1.6) che noi, con maggior semplicità ed intuizione, abbiamo trovato; allora, ignorando momentaneamente la componente angolare $e^{-j\beta R}$, peraltro di modulo unitario, e con: $I_0 = \frac{q}{\tau}$, $\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$, dove T_p , come periodo, si riferisce ad un

intero ciclo di corrente ($\alpha_{TOT}=2\pi$), mentre la semplice decelerazione del nostro elettrone non è un intero ciclo di oscillazione fatto di accelerazioni e decelerazioni, dunque il suo α è solo una frazione

$$(\tau/T_p) \text{ di } 2\pi, \text{ o: } \alpha = 2\pi \frac{\tau}{T_p} = \omega \tau, \text{ si ha: } |E_\theta| = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \omega \mu \frac{1}{R} \sin \theta = \frac{q}{\tau} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \sin \theta (\omega \Delta z) =$$

$$= \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \left(\frac{1}{\tau} \Delta z \frac{\alpha}{\tau} \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \left(\frac{\alpha \Delta z}{\tau^2} \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \left(\frac{2z}{\tau^2} \right) = \frac{q a \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R},$$

poiché α è la percentuale d'angolo di ciclo corrispondente alla decelerazione del nostro elettrone e $\alpha \Delta z$ è la percentuale del ciclo spaziale di "avanti e indietro" percorso dall'elettrone, cioè $2z$, visto che lo spazio di decelerazione z dell'elettrone non è inteso come ciclo completo, dunque esso è la metà della sua corrispondente percentuale di ciclo.

Dunque, abbiamo di nuovo la (1.4). Ora, per avere anche il B_ϕ della (1.6), abbiamo:

$$|B_\phi| = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \beta \frac{1}{R} \sin \theta = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{q}{\tau} \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{R} \sin \theta (\Delta z) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(c \frac{1}{\tau} \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{1}{\tau} \frac{2\pi}{T_p} \Delta z \right) =$$

$$= \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{1}{\tau} \omega \Delta z \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\alpha}{\tau} \Delta z \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{\alpha \Delta z}{\tau^2} \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{2z}{\tau^2} \right) = \frac{q a \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R}, \text{ che è proprio}$$

la (1.6) appunto.

Essendo poi che l'onda EM prende forma nella corona circolare grigia di volume:

$V = 4\pi R^2 dR = 4\pi R^2 c \tau$ ed essendo anche che il raggio R lo possiamo descrivere con x, y e z :

$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e non abbiamo direzioni privilegiate, nel senso che, esaminando noi una sfera, possiamo dire che $x=y=z$, allora: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3z^2$ ($\rightarrow R = \sqrt{3}z$) ed essendo, per ultimo, che z è la proiezione di R sull'asse z appunto, allora: $z = R \cos \theta$ e quindi: $R = \sqrt{3}z = \sqrt{3}R \cos \theta \rightarrow$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow$$

$\sin^2 \theta = \frac{2}{3}$ (*) (leggere nota in fondo) ed infine, grazie a quest'ultima, la (1.5) diventa:

$$\delta_{E_T} = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} = \frac{q^2 a^2}{24\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} [J/m^3] \text{ e chiedendo noi i joule, ossia l'energia}$$

$$E, \text{ abbiamo: } E_T = \delta_{E_T} \cdot V = \frac{q^2 a^2}{24\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} 4\pi R^2 c \tau = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \quad (1.7)$$

$$\text{che riscriviamo: } E_T = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi \varepsilon_0 c^3} [J] \quad (1.8)$$

Notiamo innanzitutto che R è scomparso, dunque trattasi di un pacchetto di energia che, nel propagarsi a velocità c , non decresce con la distanza, dunque un fotone.

E vediamo altresì che si ha a^2 e non a , ossia si ha lo stesso effetto sia con accelerazioni positive che negative (decelerazioni). Per quanto riguarda la potenza in watt:

$$P = \frac{E_T}{\tau} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} [J/s] = [W] \quad (1.9)$$

Trasformando un po' la (1.9):

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = (qa)^2 \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2} = (qa)^2 \frac{1}{6\pi c \epsilon_0 (1/\epsilon_0 \mu_0)} = (qa)^2 \frac{\mu_0}{6\pi c} = \langle P \rangle, \text{ ossia:}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = (qa)^2 \frac{\mu_0}{6\pi c}} \text{ che è proprio la Formula di Larmor.} \quad (1.10)$$

(*): se si vuole invece una spiegazione più convincente del fatto che $\sin^2 \theta = \frac{2}{3}$, basta osservare che, in coordinate sferiche, una areola dS è data dall'area del rettangolino che ha per altezza $Rd\theta$ e come base quella spazzata dal raggio orizzontale $R\sin\theta$ lungo φ , ossia: $R\sin\theta d\varphi$, cioè:

$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$; riguardo invece il volume infinitesimo dV , si ha $dV = dS dR$, ossia:

$$dV = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR \text{ e allora, riprendendo un attimo la (1.5): } \delta_{E_r} = \epsilon_0 E_\theta^2 = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4 R^2} [J/m^3],$$

da cui, per E_T :

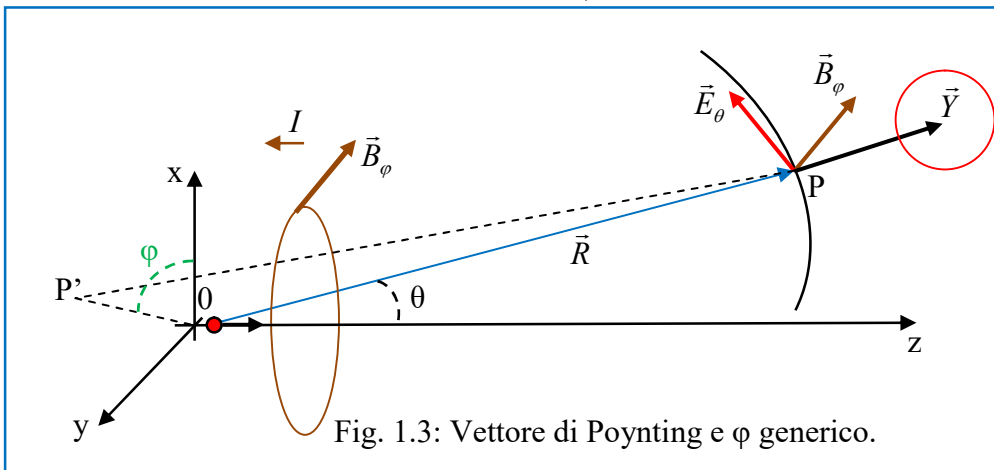
$$E_T = \int_0^V \delta_{E_r} dV = \int_0^V \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4 R^2} dV = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4} \int_0^{R, \theta, \varphi} \frac{1}{R^2} \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR =$$

$$= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R dR = \frac{q^2 a^2 R}{8\pi \epsilon_0 c^4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta, \text{ ed essendo ora che: } R/c = \tau, \text{ segue che:}$$

$$E_T = \frac{q^2 a^2 R}{8\pi \epsilon_0 c^4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{q^2 a^2 \tau}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{q^2 a^2 \tau}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi = \frac{q^2 a^2 \tau}{8\pi \epsilon_0 c^3} \frac{4}{3} = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi \epsilon_0 c^3},$$

ossia di nuovo la (1.7); ora, riguardo la potenza: $P = \frac{E_T}{\tau} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$, ossia di nuovo la (1.9).

Alla fine, abbiamo ottenuto un $\vec{E}_\theta$ ed un $\vec{B}_\varphi$, dunque abbiamo anche un Vettore di Poynting $\vec{Y}$:



In altre parole, è come se una particella di test in P si sottoponesse al campo elettrico $\vec{E}_\theta$ ed a causa di ciò, si muovesse lungo $\hat{\theta}$ appunto, ma così facendo, il campo $\vec{B}_\varphi$, per la Forza di Lorentz, la muove in avanti lungo $\hat{R}$, conferendo così all'onda elettromagnetica l'impulso che un fotone deve avere.

E ricordiamo, di conseguenza, la struttura del fotone: campo elettrico e campo magnetico ortogonali.

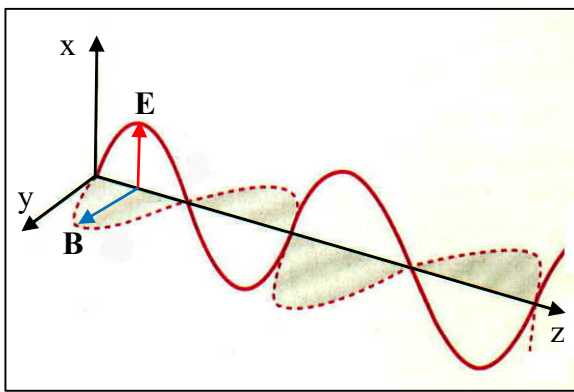


Fig. 1.4: Struttura del fotone.

-SUL MANCATO SCORRERE DEL TEMPO PER UN FOTONE:

Abbiamo visto che lo spazio in cui si estrinseca il fotone è quella corona grigia che si propaga e procede verso l'esterno. Ebbene, abbiamo altresì visto che essa rappresenta il confine tra coloro che già sono venuti a sapere degli eventi e coloro che ancora devono venire a sapere; in altre parole, tale corona è la linea di confine tra “già saputo” ed “ancora da sapere”, ossia, in ultima analisi, il confine tra passato e futuro, ragion per cui il fotone non è né nel passato né nel futuro, ma bensì è in un suo eterno presente, dove evidentemente il tempo non scorre, poiché per il tempo, trascorrere significherebbe estendersi ed estrinsecarsi nel futuro, cosa che il nostro fotone non fa, permanendo nella linea di confine del suo eterno presente, peraltro tracciata da esso stesso; dunque, esso stesso è la linea di confine tra passato e futuro, senza peraltro essere né l'uno né l'altro.

Ma in che modo un elettrone ci fornisce una informazione? Beh, sicuramente il fatto che esso generi un campo elettrico è un modo di comunicare. Campo elettrico significa forza. Un elettrone ed un positrone possono comparire dal “nulla”, purché, nell’ambito del rispetto del Principio di Indeterminazione, si impegnino, per così dire, a riannichilirsi al più presto. La loro forza di riattrazione reciproca altro non è che la loro volontà di riannichilirsi; ma il riannichilirsi ha radici statistiche, non prettamente fisiche.

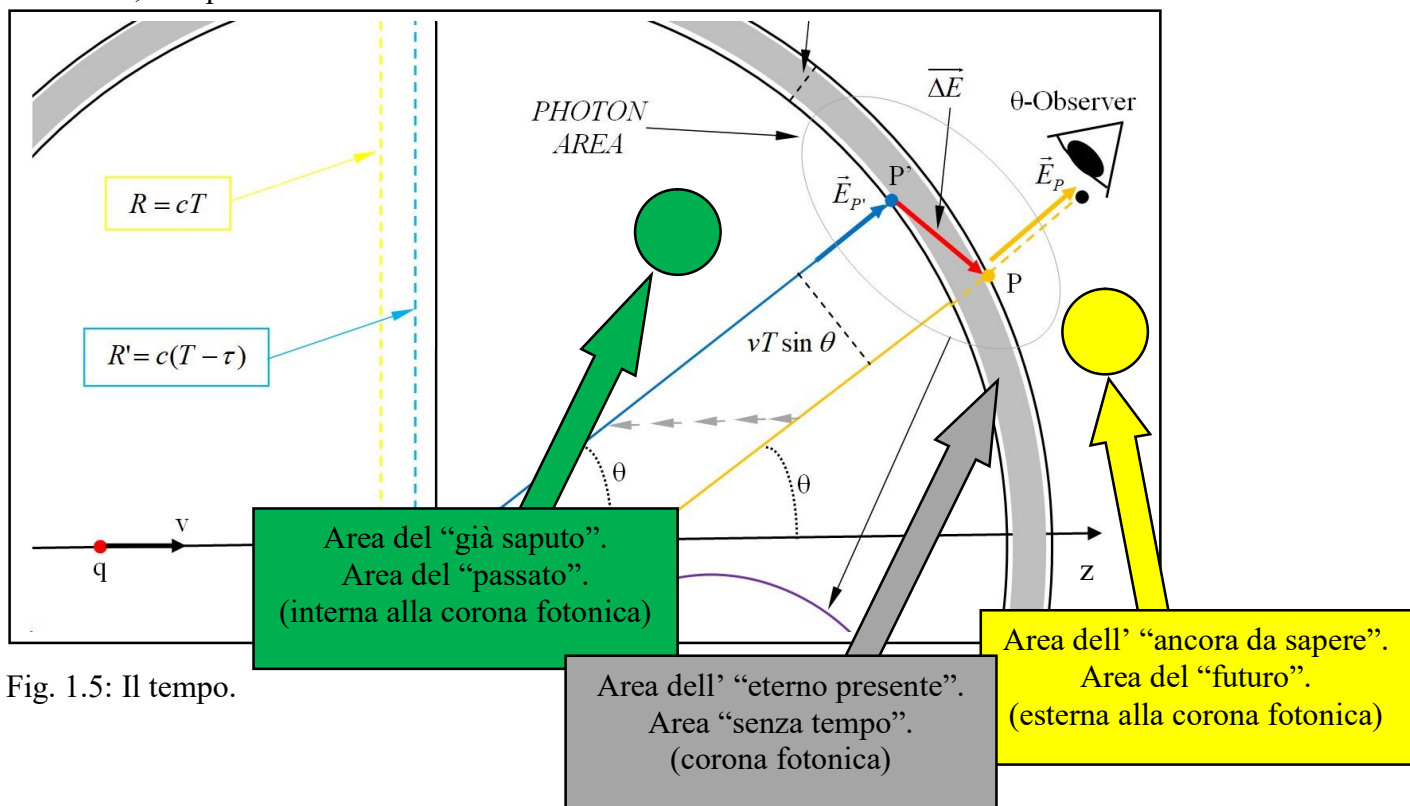


Fig. 1.5: Il tempo.

Il riannichilirsi ristabilisce un equilibrio statistico, poiché vi è la probabilità di comparsa della coppia elettrone-positrone, purché trovi spazio anche la probabilità (necessaria) che avvenga la riannichilazione (con riattrazione elettrica). Nulla di prettamente fisico, quanto piuttosto di statistico/probabilistico/matematico.

Ma se l'elettrone ed il positrone, nel comparire, si separassero a velocità infinita e, peggio ancora, si riavvicinassero l'un l'altro istantaneamente, dunque con velocità infinita, la loro durata sarebbe nulla, ossia come se non fossero mai comparsi e l'universo, inteso come schiuma quantistica, sarebbe come se non esistesse. Dunque, con la sussistenza stessa dell'universo, va da sé che la velocità debba avere un limite, che noi chiamiamo c . E non è un caso che c può essere considerata come una velocità peculiare dell'universo, nel senso che, guarda caso, l'inverso della Costante di Hubble H_0 è proprio l'età dell'universo, dove, guarda caso, $H_0 = c/R_u$, con R_u raggio della Sfera di Hubble. Il moto dell'universo, in espansione o contrazione che sia, è il clock dell'universo.

Riassumendo, esistere presuppone velocità limitata (c); esistere presuppone comparsa di coppie +/-, dunque con riannichilazione non istantanea (di nuovo c). Pulsione alla riannichilazione significa riattrazione, dunque, simbolicamente, forza elettrica di riattrazione $\rightarrow$ campo elettrico. Campo elettrico con velocità di propagazione limitata (a " c ") significa quanto esposto nel post, ossia generazione di fotoni, al fine della comunicazione dell'informazione. Il campo magnetico, poi, così come ci viene suggerito dalla relatività, è una sorta di surrogato del campo elettrico, poiché, in relatività, come noto, posso vedere un campo magnetico come un campo elettrico dotato di attributi relativistici.

-SEZIONE D'URTO THOMSON DELL'ELETTRONE

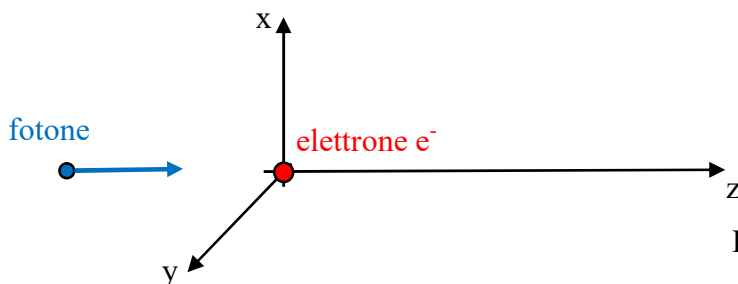


Fig. 1.6: Elettrone investito da un fotone.

Qualcuno ha associato l'energia della massa dell'elettrone ($E_0 = m_e c^2$) all'energia potenziale elettrostatica classica E_p dello stesso (a velocità c), qualora l'elettrone abbia un raggio (classicamente parlando) pari appunto al raggio classico dell'elettrone r_e . Ha senso tutto ciò?

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e}, \quad E_0 = m_e c^2, \quad E_p = E_0 \rightarrow r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e \cdot c^2} \cong 2,8179 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

E, tra parentesi, sappiamo dalla meccanica quantistica che: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2$

(Principio di Indeterminazione di Heisenberg preso con l'= $=$, per semplicità), e:

$\hbar / 2 = h / 4\pi = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ e se noi associamo al delta quantità di moto il valore $\Delta p = m_e c$,

abbiamo: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2 = m_e c \cdot |\Delta x| = 0,527 \cdot 10^{-34}$, ossia: $m_e c \cdot |\Delta x| = 0,527 \cdot 10^{-34}$; bene,

considerando ora $|\Delta x|$ come una pura quantità numerica, tralasciando cioè le unità di misura,

abbiamo che l'eguaglianza $m_e c \cdot |\Delta x| = 0,527 \cdot 10^{-34}$ sussiste e con esattezza se:

$$|\Delta x| = \frac{G\epsilon_0}{\pi} \left(\frac{cm_e}{e} \right)^2 \frac{1}{r_e} ! \text{ Ha senso tutto ciò? Può un elettrone, in senso classico, avere delle}$$

dimensioni dell'ordine di r_e ? Può un elettrone essere ritenuto (in senso classico) come una sferetta di raggio r_e ? A tal proposito, con riferimento alla Fig. 1.6, si abbia un elettrone nell'origine che viene investito da un fotone; per effetto del campo $\vec{E}$, l'elettrone oscillerà lungo x e così reirradierà

con una potenza data dalla Formula di Larmor (1.10): $\langle P \rangle = (ea)^2 \frac{\mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 \text{ [W]}$, ma

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{Ee}{m_e}, \text{ da cui: } \langle P \rangle = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \left(\frac{Ee}{m_e} \right)^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{Ee^2}{m_e} \right)^2 \text{ [W]}, \text{ ma vale la seguente:}$$

$$\delta_{E_T} = \epsilon_0 E^2 [J / m^3] \text{ (vedere la (1.5) e le precedenti), da cui discende una W:}$$

$W = \delta_{E_T} c = c \varepsilon_0 E^2 [J / s \cdot m^2]$; infatti $[c] = [m/s]$ e $[\varepsilon_0 E^2] = [J/m^3]$. Allora il rapporto $\langle P \rangle / W$ sarà una superficie σ :

$$\sigma = \frac{\langle P \rangle}{W} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{E e^2}{m_e} \right)^2 \frac{1}{c \varepsilon_0 E^2} = \frac{\mu_0 e^4}{6\pi c^2 \varepsilon_0 m_e^2} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} ; \text{ adesso moltiplichiamo e dividiamo } \sigma \text{ per } r_e^2 :$$

$$\sigma = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} r_e^2 \frac{1}{r_e^2} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} 16\pi^2 \varepsilon_0^2 \frac{m_e^2 c^4}{e^4} r_e^2 = \frac{8}{3} \pi r_e^2 [m^2/\text{elettrone}] , \text{ ossia: } \sigma = \frac{8}{3} \pi r_e^2 , \text{ che è la}$$

Sezione d'Urto Thomson.

Visto che, classicamente parlando, un elettrone visto frontalmente, in sezione, appare come una superficie pari a quella del suo cerchio equatoriale, ossia: $S = \pi r_e^2$, allora essendo $\sigma = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = \frac{8}{3} S$, segue che σ è paragonabile ad S e allora il valore di r_e come raggio (classico) di un elettrone è effettivamente plausibile!

APPENDICE:

VALUTAZIONE DEL VETTORE DI POYNTING:

$$\vec{Y} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad [W / m^2] . \text{ Infatti, ad esempio per un induttore, si ha che } v = L \frac{di}{dt} , \text{ ma è anche}$$

vero che, segni a parte, $v \propto \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (NSB) = NS \frac{dB}{dt}$, poiché si sa che:

$$B = \frac{d\Phi}{dS} \rightarrow \Phi = BS \rightarrow \Phi = NBS , \text{ essendoci nell'induttore l'effetto di } N \text{ spire. E ricordiamo altresì}$$

che in un induttore $B = \mu \frac{NI}{l} = \mu n I$, dove $\frac{N}{l} = n$ è il numero di spire al metro. Allora, per l'energia E , che è uguale alla potenza $P=VI$ per il tempo t , si ha: $dE = VI dt = (NS \frac{dB}{dt}) I dt = NSI \cdot dB = n l S I \cdot dB = n (Vol) I \cdot dB$, da cui, per la densità volumica

d'energia, ossia $dU [J/m^3]$, si ha: $dU = n I \cdot dB = \frac{1}{\mu} B dB$, ossia: $U = \frac{1}{\mu} \int B dB = \frac{1}{2\mu} B^2$. Ricordando

poi la Forza di Lorentz, $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, si ha che: $\vec{F}/q = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})$, da cui: $E = Bv$ e, nella fattispecie, essendo in regime di pura onda elettromagnetica, $E = Bc$. Tornando ora all'equazione

$$U = \frac{1}{2\mu} B^2 \text{ appena dimostrata, si ha che: } U = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \frac{E^2}{2\mu c^2} = \frac{E^2}{2\mu} \varepsilon \mu = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 , \text{ ossia,}$$

per la composizione delle due componenti elettrica e magnetica della densità volumica di energia, si

$$\text{ha: } U_{TOT} = U_E + U_B = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{B^2}{2} + \mu \varepsilon \frac{E^2}{2} \right) \text{ ed avendosi che } E=Bc \text{ e } B=E/c , \text{ si ha:}$$

$$U = U[J / m^3] = \frac{Y[W / m^2]}{c[m / s]} = \frac{Y}{c} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{BE}{2c} + \mu \varepsilon \frac{EBc}{2} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{BE}{2c} + \frac{1}{c^2} \frac{EBc}{2} \right) = \frac{EB}{c\mu} , \text{ da cui:}$$

$$\frac{Y}{c} = \frac{EB}{c\mu} , \text{ ossia: } Y = \frac{1}{\mu} EB \text{ e considerando che } E \text{ e } B \text{ sono ortogonali:}$$

$$(EB = E \times B = |E||B| \sin \frac{\pi}{2} = EB) , \text{ si ha: } Y = \frac{1}{\mu} (E \times B) \text{ cvd. } \text{ E per } U_{TOT}:$$

$$U_{TOT} = U_E + U_B = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{E^2}{(1/\varepsilon\mu)} = \varepsilon E^2 \quad (A.1)$$

FRIEDMANN DENTRO NEWTON

LE EQUAZIONI DI FRIEDMANN:

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{r^2} \quad (2)$$

Le Equazioni di Friedmann scaturiscono dalla Teoria della Relatività Generale di Einstein, ma tranquillamente anche dalla gravitazione classica di Newton; infatti, dopo aver premesso che, almeno in questa sede, i concetti verranno semplificati un tantino, si ha dalla fisica che:

$U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4}{3}\pi r^2 \rho Gm$, da cui, con qualche passaggio algebrico, si ottiene:

$$\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{r^2}, \text{ che è proprio la (2), dopo aver posto } k = -2U / mc^2.$$

Riguardo invece la (1), notiamo innanzitutto che, per il Primo Principio della Termodinamica, si ha che: $dU + pdV = dQ$ (energia interna + lavoro compiuto = calore scambiato) e considerando l'Universo, il dQ verso l'esterno è ovviamente 0, dunque: $dU + pdV = 0$, ossia ancora:

$$\frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0. \quad (3)$$

Si ha, ora, ovviamente, che: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e $U = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho c^2$, da cui, per la (3):

$$4\pi r^2 \rho c^2 \dot{r} + \frac{4}{3}\pi r^3 c^2 \dot{\rho} + p4\pi r^2 \dot{r} = 0, \text{ da cui:}$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{r}}{r}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (\text{equazione del fluido}) \quad (4)$$

Differenziando ancora, rispetto al tempo, la (2) già dimostrata, si ottiene:

$$2\frac{\dot{r}}{r}\frac{(r\ddot{r} - \dot{r}^2)}{r^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + \frac{2kc^2\dot{r}}{r^3}; \text{ sostituendo, ora, in quest'ultima la (4), si ottiene:}$$

$$\frac{\ddot{r}}{r} - \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{r^2} \text{ e usando ancora la (2) in quest'ultima, si ha finalmente:}$$

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \text{ ossia appunto la (1), cvd.}$$

COULOMB DENTRO HOOKE

In coordinate polari, per l'elettrone in orbita intorno al protone, in un atomo di idrogeno, si ha l'equilibrio tra forza di attrazione elettrostatica e forza centrifuga:

$$F_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + m_e \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + m_e \omega^2 r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + m_e \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + \frac{L^2}{m_e r^3}, \quad (1)$$

dove $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ e $L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m_e v r = m_e \omega r r = m_e \omega r^2$. Non si dimentichi che, in generale, $\omega = \omega(r)$ e $v = v(r)$, dunque noi valuteremo l'integrale (la (2)) dell'equazione (1), ma specificamente solo dell'ultima parte nel riquadro blu, siccome sappiamo che là L si conserva e può essere tenuto fuori dall'integrale. Si conserva poiché, per il momento, $\vec{m} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, siccome in un campo centrale F ed r sono paralleli, e dunque $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow L = \text{cost.}$ Valutiamo dunque l'energia corrispondente, integrando tale forza nello

spazio:
$$U = -\int F_r dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{L^2}{2m_e r^2} = U \quad (2)$$

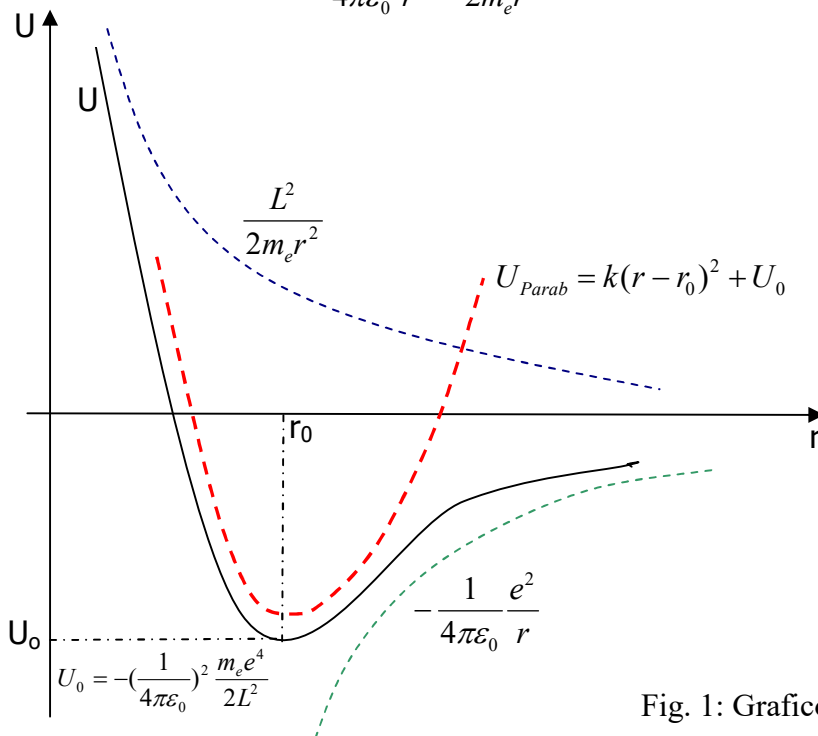


Fig. 1: Grafico dell'energia elettrostatica.

Il punto di minimo in (r_0, U_0) è punto di equilibrio e di stabilità ($F_r=0$) e lo si calcola annullando la derivata prima della (2) (e cioè ponendo appunto $F_r=0$). Inoltre, in r_0 , la curva esprimente U è visivamente approssimabile con una parabola U_{Parab} e cioè, in quell'intorno, si può scrivere: $U_{Parab} = k(r - r_0)^2 + U_0$, e la corrispondente forza è: $F_r = -\partial U_{Parab} / \partial r = -2k(r - r_0)$ (3) che è, guarda caso, una forza elastica a tutti gli effetti ($F = -kx$ - Legge di Hooke).



SCHRODINGER DENTRO D'ALEMBERT DENTRO KLEIN-GORDON DENTRO DIRAC

Sappiamo dalla relatività che, per l'energia totale E , si ha:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (1.1)$$

Questa è l'espressione, per l'energia, più generale che abbiamo e vale appunto per una particella anche relativistica.

Ora, per un fotone, che è poi una « particella » con massa a riposo nulla, si ha $E^2 = p^2 c^2$, ossia:

$$E = pc \quad (1.2)$$

Per una particella non relativistica, sappiamo invece che vale, per la sua energia cinetica, la seguente espressione: $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$, ma quest'ultima è nascosta proprio nella (1.1), che è di valore più generale, appunto. Infatti, la (1.1) può essere così riscritta:

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2} \quad (1.3)$$

e ricordando che, per gli sviluppi di Taylor, si ha:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \text{ segue che, per la (1.3):}$$

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m_0^2 c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} \text{ e, per l'energia cinetica, si ha}$$

dunque:

$$E_k = E - m_0 c^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2} m_0 v^2 \text{ cvd.}$$

Consideriamo ora l'espressione generale di un'onda:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \cdot \vec{x} - \frac{2\pi}{\lambda} vt\right)}, \quad (1.4)$$

$$\text{in quanto: } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda};$$

Tale onda, contemporaneamente, si propaga nello spazio (x) ed oscilla nel tempo t ; infatti, se si pone $t=0$, si vede che si ha un'oscillazione lungo x ($\Psi = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})}$) e se si pone $x=0$ si ha una oscillazione nel tempo ($\Psi = A \cdot e^{-i(\omega t)}$).

Sappiamo inoltre che:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar \omega \quad (1.5)$$

e, valendo anche la (1.2), si ha:

$$pc = \hbar \omega, \text{ da cui :}$$

$$p = \hbar \frac{\omega}{c} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k = p \quad (1.6)$$

e la (1.4) diventa :

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{E}{\hbar} t)} \quad (1.7)$$

Per semplice sostituzione diretta di tale Ψ nelle seguenti equazioni:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\Psi = E\Psi = (\hbar\omega)\Psi \quad (1.8)$$

$$(\frac{\hbar}{i} \nabla)\Psi = \vec{p}\Psi = (\hbar\vec{k})\Psi ; \quad (1.9)$$

si ha che esse danno delle identità, ossia sono giuste.

$$\text{Nel caso monodimensionale : } (\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x})\Psi = p\Psi = (\hbar k)\Psi ; \quad (\nabla \text{ gradiente})$$

Dunque, possiamo rilevare le seguenti corrispondenze operatoriali:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.10)$$

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (1.11)$$

Valendo poi la (1.2), ossia: $E^2 = p^2 c^2$, si ha:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 \Psi = c^2 (\frac{\hbar}{i} \nabla)^2 \Psi, \quad (1.12)$$

ossia:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{o anche } (\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ laplaciano, divergenza del gradiente}): \Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

che è l'**Equazione delle Onde, o di d'Alembert**.

Si noti che tale equazione, di derivazione "relativistica" (fotone, ossia particella che si propaga a velocità c e con massa di riposo zero) è invariante per trasformazioni di Lorentz.

Passando ora al caso di particelle non relativistiche (gli atomi, ordinariamente, sono tali), otterremo un'equazione "d'onda" non relativistica, ossia l'Equazione di Schrodinger. Infatti, se nella (1.7)

consideriamo invece non più $E = pc$, ma $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$ (equazione appunto non relativistica), otteniamo:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{E_k}{\hbar} t)} = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{p^2}{2m_0 \hbar} t)} \quad (1.14)$$

e, proprio come abbiamo fatto per ottenere la (1.12), per sostituzione diretta della (1.14) nella seguente equazione:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2)\Psi \quad (1.15)$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi, \text{ nel caso monodimensionale}$$

si ottiene un'identità. Dunque, la (1.15) è vera. Attenzione, però, perché nella (1.14) abbiamo usato non più una E totale, ma solo la E_k , fatto di cui teniamo conto.

Il primo membro della (1.15) vale $(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\Psi = E_k \Psi$, ma sappiamo che $E_k = H - V$, da cui, sempre per

$$\text{la (1.15): } -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi = (H - V)\Psi, \text{ ossia:}$$

$$\Delta \Psi + \frac{2m_0}{\hbar^2} (H - V)\Psi = 0 \quad (1.16)$$

che altro non è che l'**Equazione di Schrodinger**.

Consideriamo ora il caso più generale, ossia particella relativistica e con massa a riposo non nulla.

Come abbiamo fatto in precedenza, visto che per la (1.1) si ha: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$, allora,

sostituendo tale E sempre nella (1.7) $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{E}{\hbar} t)}$, si avrà:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{\hbar} t)} \quad (1.17)$$

e, come al solito, sempre per sostituzione, si vede che tale Ψ è soluzione della seguente:

$$(\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (1.18)$$

che altro non è che l'**Equazione di Klein-Gordon** e che è simile a quella di d'Alembert, ma ha un elemento in più.

Proviamo ad effettuare veramente tale sostituzione della (1.17) nella (1.18), per verificare che

davvero vale tutto ciò. Si ha che $\nabla^2 \Psi = (i)^2 \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi$ e

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} (-i)^2 \frac{E^2}{\hbar^2} \Psi = \frac{1}{c^2 \hbar^2} (p^2 c^2 + m_0^2 c^4) \Psi \text{ e dunque:}$$

$$-\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi + \frac{1}{c^2 \hbar^2} (p^2 c^2 + m_0^2 c^4) \Psi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0, \text{ ossia } 0=0.$$

Poniamo ora $l = \frac{m_0 c}{\hbar}$; tale l ha le dimensioni del vettore d'onda k. Con tale l, si ha che le (1.17) ed (1.18) si riscrivono così:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \sqrt{(k^2 + l^2) c t})} = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - l^2 \Psi = 0 \quad (1.20)$$

con $\omega' = \sqrt{(k^2 + l^2)}c$.

Riscriviamo ora l'Equazione di Klein-Gordon (1.20) in questo modo:

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \Psi - l^2 c^2 \Psi = 0 \quad (1.21)$$

e ricordando che $i^2 = -1$ e $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, si ha che tale equazione può essere così riscritta:

$$\left\{ \left[i \frac{\partial}{\partial t} - (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0) \right] \left[i \frac{\partial}{\partial t} + (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0) \right] \right\} \Psi = 0, \quad (1.22)$$

ossia anche:

$$\begin{cases} \left[i \frac{\partial}{\partial t} - (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0) \right] \Psi = 0 \\ \left[i \frac{\partial}{\partial t} + (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0) \right] \Psi = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

e la (1.22) può essere così sviluppata:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\alpha \cdot \nabla)^2 + im_0 \beta (\alpha \cdot \nabla) + im_0 (\alpha \cdot \nabla) \beta - \beta^2 m_0^2 \right] \Psi = 0 \quad (1.24)$$

Quest'ultima equazione coincide con la (1.21) se:

$$\beta^2 = \frac{c^4}{\hbar^2}, \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0, \quad \alpha_i \alpha_j = c^2 \text{ se } i=j \text{ e } \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \text{ se } i \neq j$$

Le due ultime condizioni sugli alfa impongono che si ottenga proprio solo il ∇^2 e non termini misti in ∇ . La (1.23), che qui riscriviamo:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0 \right) \Psi = 0 \quad (1.25)$$

può essere considerata come l'**Equazione di Dirac**, che solitamente viene presentata nella seguente forma, in unità naturali ($\hbar = c = 1 \rightarrow \beta = 1$):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \Psi = 0, \quad (1.26)$$

dove $i\gamma^\mu \partial_\mu = i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, che contiene una sommatoria in convenzione di Einstein, fornisce, al variare di μ , la derivata sul tempo $\frac{\partial}{\partial t}$ e su x, y e z di $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \cdot \nabla$$

Ulteriori approfondimenti sull'Equazione di Dirac non verranno effettuati, in questa sede.

COULOMB DENTRO NEWTON

In “Heisenberg dentro Coulomb” si dimostra preliminarmente che Heisenberg è dentro Coulomb. Ora, qui dimostriamo che Coulomb è dentro Newton, da cui, infine, per la proprietà transitiva, Heisenberg risulterà anche dentro Newton.

-COULOMB DENTRO NEWTON

UNA PROPOSTA DI UNIVERSO CHE EVIDENZIA COME, APPUNTO, COULOMB SIA DENTRO NEWTON

Questo è l’Universo in questione:

$$\begin{aligned} M_{Univ} &= 1,59486 \cdot 10^{55} \text{ kg} \\ R_{Univ} &= 1,17908 \cdot 10^{28} \text{ m} \\ T_{Univ} &= \frac{2\pi R_{Univ}}{c} = 2,47118 \cdot 10^{20} \text{ s} \end{aligned}$$

La massa è maggiore di quella visibile (come attualmente predicato) e la densità è quella osservata:

$$\rho = M_{Univ} / \left(\frac{4}{3} \pi \cdot R_{Univ}^3 \right) = 2,32273 \cdot 10^{-30} \text{ kg} / \text{m}^3$$

La composizione di tutte le piccole interazioni elettriche nell’Universo va a comporre l’Universo stesso; infatti, casualmente:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}} \quad (\text{UNIFICAZIONE GRAVITÀ ELETTROMAGNETISMO})$$

ossia Newton dentro Coulomb.

$(r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e \cdot c^2} \cong 2,8179 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ è il raggio classico dell’elettrone). Inoltre, sempre casualmente:

$$m_e c^2 = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}}, \quad G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} = G \frac{m_e}{r_e^2} = a_{Univ} = 7,62 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2, \quad h = \frac{2m_e c^2}{T_{Univ}} \text{ (solo numericamente)}$$

$$R_{Univ} = \sqrt{N} r_e \quad (\text{essendo } N = M_{Univ} / m_e = 1,74 \cdot 10^{85}), \quad T_{Univ} \frac{G m_e^2}{h r_e} = \frac{1}{137} = \alpha$$

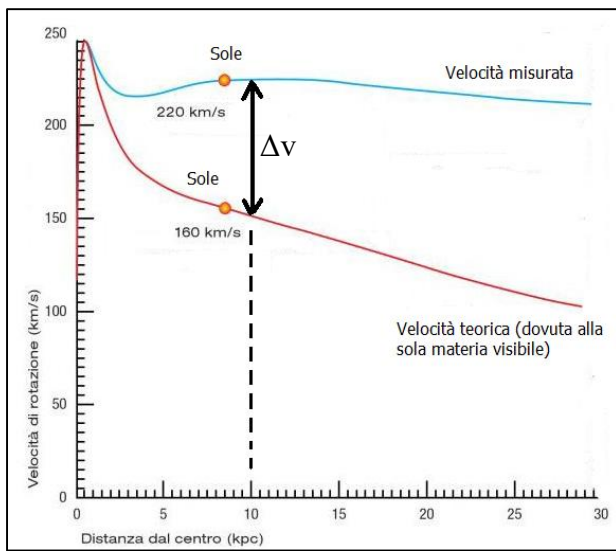
$$T_{CMBR} = \left(\frac{h}{2m_e \sigma} \frac{M_{Univ}}{4\pi R_{Univ}^2} \right)^{1/4} \cong 2,7 \text{ K} \quad (\text{dove } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4 \text{ è la Costante di Stefan-Boltzmann}).$$

$$\text{Inoltre: } T_{CMBR} = \left(\frac{3c^3}{80\pi\sigma} \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^3} \right)^{1/4} = \left(\frac{72Gc^{11}h^3\epsilon_0^4 m_e^6}{\pi^2 e^8 k^4} \right)^{1/4} = 2,72846(02218319896) \text{ K} \cong 2,72846 \text{ K}$$

-Essendo poi, per Heisenberg: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2$

(con il segno di eguaglianza, per semplicità, e $\hbar / 2 = h / 4\pi = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), possiamo dire che:

$$\Delta p \cdot \Delta x = m_e c \cdot \Delta x = m_e c \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^2} G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} \right] = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ (numericamente)}$$



-Nella nostra galassia (la Via Lattea) il Sole è ad una distanza di 8,5kpc dal centro e dovrebbe avere una velocità di rotazione di 160 km/s, se essa fosse dovuta solo alla materia barionica, cioè quella delle stelle e di tutta la materia visibile. Ma noi invece sappiamo che la velocità del Sole è 220 km/s. Dunque vi è una discrepanza Δv di 60 km/s: ($\Delta v = 220 - 160 = 60$ km/s). (1kpc=1000pc ; 1pc=1 Parsec=3,26 _a.l. = $3,08 \cdot 10^{16} m$; 1 anno luce a.l.= $9,46 \cdot 10^{15} m$) ($R_{Gal} = 8,5kpc = 27,71 \cdot 10^3$ _a.l. = $2,62 \cdot 10^{20} m$ è la distanza del Sole dal centro della ViaLattea). Se il Sole fosse stato ad una distanza R_{GAL} di 30 kpc, avrebbe avuto la stessa velocità di 220 km/s, ma la discrepanza Δv sarebbe stata più grande. In generale, sappiamo dalle curve di rotazione che:

$\Delta v = k\sqrt{R_{Gal}}$, dove k =costante. Ora, ci accorgiamo che, casualmente:

$$k = \sqrt{2G \frac{m_e}{r_e^2}} = \sqrt{\frac{2GM_{Univ}}{R_{Univ}^2}} .$$

SHANNON DENTRO BOLTZMANN -L'ENTROPIA DELL'INFORMAZIONE-

COME MISURIAMO L'INFORMAZIONE

se io sto attendendo un'informazione "x", sono in uno stato di incertezza e questa incertezza cessa non appena ricevo l'informazione stessa; dunque, la misura "I" dell'informazione è l'incertezza che essa elimina quando viene ricevuta. Ricordiamo poi che l'incertezza (eliminata da x) richiama il concetto di probabilità $p(x)$.

Non tutte le informazioni ricevute rimuovono la stessa incertezza; ad esempio, nella lingua italiana, ma anche in quella inglese, se ho appena ricevuto, come informazione, la lettera Q, allora l'informazione successiva è quasi sicuramente una U (come in QUADRO, o in QUASI), dunque tale U non mi elimina una grande incertezza, quando la ricevo, poiché essa è molto probabile. Oppure, se l'informazione che attendo è un numero (espresso in cifre), tipo 47599513,6301457 , oppure 29,012 , bene, allora se la prima cifra che ricevo (come informazione) è 0 , allora l'informazione successiva che attendo non può che essere la **virgola**, come, ad esempio:

0,678

Generalizzando, se ho un insieme di simboli $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e ciascuno con probabilità $p(x_i)$ di essere inviato, allora l'informazione $I(p)$ portata da uno di tali simboli o da un intero messaggio (composto, in generale, da più simboli) diminuisce con p e si annulla per $p=1$ (la p massima).

Se poi un messaggio M è composto, ad esempio, da x_1 e x_2 (che hanno probabilità p_1 e p_2), allora la probabilità (composta) del messaggio è $p_1 p_2$ e l'informazione $I(M)$ da esso portata sarà $I(p_1 p_2)$, ma è anche vero che l'informazione totale $I(M)=I(p_1 p_2)$ è data dalla somma delle singole informazioni $I(p_1)$ ed $I(p_2)$, da cui: $I(p_1 p_2) = I(p_1) + I(p_2)$ ed una tale relazione è rispettata dal logaritmo:

$\log(p_1 p_2) = \log(p_1) + \log(p_2) \rightarrow I(p) \equiv \log(p)$; nella fattispecie, noi scegliamo:

$$I(p) = -\log_2(p) , \quad (1)$$

poiché il segno meno ci garantisce la decrescenza (precedentemente invocata) di I rispetto a p su $]0,1]$, con l'annullamento per $p=1$ e poi $I(p) > 0$, poiché un'informazione negativa sarebbe assurda. Per ultimo, nel caso di $p=0$ (messaggio impossibile), noi forziamo $I(0)=0$.

La base due (2) del logaritmo richiama la situazione binaria (0 e 1); infatti, nel caso, ad esempio, dell'avere l'informazione del risultato del lancio di una moneta (testa T o croce C, ossia due valori di probabilità $p_1=p_2=1/2$), si ha, per la(1):

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = 1bit , \quad (2)$$

così abbiamo il bit come unità di misura dell'informazione.

Considerando ora una sorgente S d'informazione: $S = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, \dots, x_n \\ p_1, & p_2, \dots, p_n \end{pmatrix}$, dove ovviamente, per la

definizione stessa di probabilità, si ha: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$; allora si ha che l'informazione media I_m che la sorgente S genera nell'inviare messaggi è ovviamente la media di tutte le informazioni I_i date dalla (1) e pesate ovviamente ciascuna secondo la propria probabilità p_i :

$$I_m = \sum_{i=1}^n p_i I_i = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = H(S) \quad (3)$$

e tale informazione media di S la chiamiamo **entropia della sorgente S**, ossia: $H(S)$ (entropia di Shannon).

Avendo poi visto, tramite la (2), che l'informazione è misurata in bit, segue che $H(S)$ è il numero di bit medio per simbolo; dunque, per trasmettere i simboli di una sorgente S che ha entropia H, servono parole lunghe mediamente H bit.

Tornando al caso del lancio di una moneta (testa $T=x_1$ o croce $C=x_2$, ossia due valori di probabilità $p_1=p_2=q=(1-p)=1/2$), si ha:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p & (1-p) \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^2 p_i \log_2 p_i = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \quad (4)$$

e la (4) dà valore massimo pari a 1 bit quando, come nel caso appunto della Testa o Croce con moneta regolare, ($p=q=1/2$) e diminuisce per ogni altra coppia di valori di p e q, tipo $p=0$ e $q=1$ (moneta truccata che dà sempre croce o viceversa), per cui $H(S)=0$; in tali casi, infatti, il destinatario dell'informazione sa già in anticipo quale informazione sta per arrivare (solo testa o solo croce) non traendo da essa alcun beneficio.

Dunque: equiprobabilità dei simboli $\rightarrow H$ massima.

Per n simboli equiprobabili ($p_i=1/n$, $\forall i$): $H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = -n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n$; infatti, in campo binario, con un solo bit ($H=1$) si possono trasmettere due situazioni (0 ed 1) e con n bit 2^n situazioni ($H=3 \rightarrow 2^3=8 \rightarrow 000,001,010,011,100,101,110,111$).

H ha valenza di estremo, nel senso che ci vogliono almeno H bit, da cui:

$$H \leq \log_2 n = \ell \quad (5)$$

con ℓ che è la lunghezza della parola, e l'uguale si ha solo per le probabilità p_i tutte uguali.

Il codice ASCII con $H=7$ bit ed $n=128$ caratteri ($7=\log_2 128$) ci indica formalmente la necessità di 7 bit/carattere, ma, ad esempio, nella lingua italiana, abbiamo $H=4,65(<7)$; ciò perché in una lingua i caratteri non sono equiprobabili.

Esiste almeno un codice per cui: $H(S) \leq \ell \leq H(S) + 1$.

Nelle telecomunicazioni si tende ad effettuare delle compressioni per avere le parole come le più corte possibili ($\ell = H$), sia per trasmettere meno bytes (a parità di messaggio), sia per avere più capacità di immagazzinamento poi, con le memorie elettroniche.

Si usa, ad esempio, il **codice Huffman**, di cui diamo qui un esempio:

abbiamo una siffatta sorgente S, con simboli e relative probabilità:

$$S = \begin{pmatrix} x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H \\ p_A, p_B, p_C, p_D, p_E, p_F, p_G, p_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H \\ 8^{-1}, 4^{-1}, 16^{-1}, 32^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 8^{-1}, 32^{-1} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$H(S) = -\sum_{i=A}^H p_i \log_2 p_i = 2,6875 \text{ bit / symbol} . \text{ Notiamo preliminarmente che, ovviamente:}$$

$8^{-1} + 4^{-1} + 16^{-1} + 32^{-1} + 8^{-1} + 4^{-1} + 8^{-1} + 32^{-1} = 1$; adesso, avendo 8 simboli, potremmo scegliere un numero binario a tre cifre per esprimere gli 8 valori, come ad esempio: ($x_A=000$, $x_B=001$, $x_C=010$, $x_D=011$, $x_E=100$, $x_F=101$, $x_G=110$, $x_H=111$); in tal modo avremmo 8 simboli di tre cifre l'uno, da cui, per la lunghezza media delle parole:

$$\ell = 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 3 + 16^{-1} \cdot 3 + 32^{-1} \cdot 3 + 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 3 + 8^{-1} \cdot 3 + 32^{-1} \cdot 3 = 3 \geq H(S) = 2,6875 \text{ bit / symbol} .$$

Siamo allora legittimati ad escogitare un nuovo codice che ci abbassi ℓ , facendola avvicinare il più possibile al minimo ideale H. Per Hoffman si procede nel seguente modo:

-ordiniamo i simboli per probabilità crescenti:

$$S = \begin{pmatrix} x_D, x_H, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_D, p_H, p_C, p_A, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D, x_H, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 32^{-1}, 32^{-1}, 16^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix}; \quad (6)$$

sommiamo le due probabilità più basse p_D e p_H , ossia le prime due della riga, ottenendo: $p_\alpha = p_D + p_H = 32^{-1} + 32^{-1} = 16^{-1}$ e nella (6) eliminiamo le prime due posizioni D ed H (appena coinvolte) ed inseriamo al loro posto quanto ottenuto dalla somma:

$$S = \begin{pmatrix} x_\alpha, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_\alpha, p_C, p_A, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\alpha, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 16^{-1}, 16^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

ottenendo una nuova S con un elemento in meno, ossia con 7 elementi. A questo punto ripetiamo la cosa, con le due probabilità più piccole, che ora sono p_α e p_C , ottenendo:

$p_\beta = p_\alpha + p_C = 16^{-1} + 16^{-1} = 8^{-1}$ e nella (7) eliminiamo le prime due posizioni α e C (appena coinvolte) ed inseriamo al loro posto quanto ottenuto dalla somma:

$$S = \begin{pmatrix} x_\beta, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_\beta, p_A, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\beta, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix}; \text{ procediamo ancora:}$$

($p_\gamma = p_\beta + p_A = 8^{-1} + 8^{-1} = 4^{-1}$), ottenendo:

$$S = \begin{pmatrix} x_\gamma, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_\gamma, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\gamma, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 4^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix}; \text{ riordiniamo di nuovo per probabilità decrescenti,}$$

poiché ora ce n'è di nuovo bisogno:

$$S = \begin{pmatrix} x_E, x_G, x_\gamma, x_B, x_F \\ p_E, p_G, p_\gamma, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E, x_G, x_\gamma, x_B, x_F \\ 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} \text{ e procediamo ancora:}$$

($p_\delta = p_E + p_G = 8^{-1} + 8^{-1} = 4^{-1}$)

$$S = \begin{pmatrix} x_\delta, x_\gamma, x_B, x_F \\ p_\delta, p_\gamma, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\delta, x_\gamma, x_B, x_F \\ 4^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix}; \text{ procediamo ancora: } (p_\varepsilon = p_\delta + p_\gamma = 4^{-1} + 4^{-1} = 2^{-1})$$

$$S = \begin{pmatrix} x_\varepsilon, x_B, x_F \\ p_\varepsilon, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\varepsilon, x_B, x_F \\ 2^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix}; \text{ riordiniamo di nuovo per probabilità decrescenti, poiché anche}$$

qui ce n'è di nuovo bisogno:

$$S = \begin{pmatrix} x_B, x_F, x_\varepsilon \\ p_B, p_F, p_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B, x_F, x_\varepsilon \\ 4^{-1}, 4^{-1}, 2^{-1} \end{pmatrix}; \text{ procediamo ancora: } (p_\zeta = p_B + p_F = 4^{-1} + 4^{-1} = 2^{-1})$$

$$S = \begin{pmatrix} x_\zeta, x_\varepsilon \\ p_\zeta, p_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\zeta, x_\varepsilon \\ 2^{-1}, 2^{-1} \end{pmatrix} \text{ ed infine: } (p_\eta = p_\zeta + p_\varepsilon = 2^{-1} + 2^{-1} = 1^{-1} = 1) \rightarrow S = \begin{pmatrix} x_\eta \\ p_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\eta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Costruiamo ora una ramificazione di quanto fatto, partendo dal basso a sinistra e a salire ed iniziando una nuova ramificazione, più a destra, ogni volta che vi è la combinazione di due dati entrambi principali (ossia **A,B,C,D,E,F,G,H** e senza le greche **α,β,γ,δ,ε,ζ,η**):

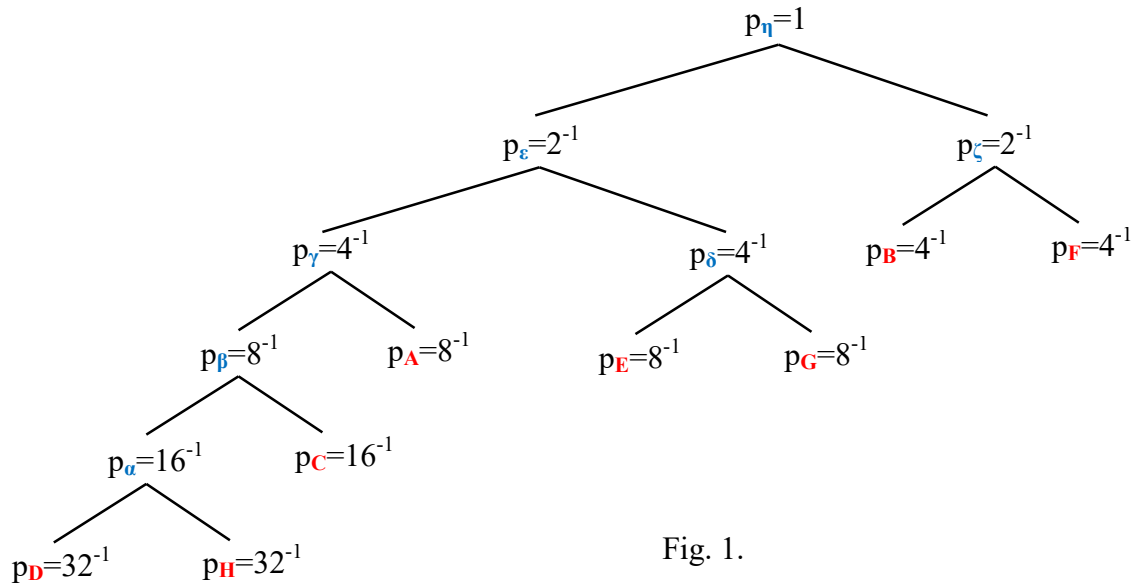


Fig. 1.

Fatto ciò, partendo dall'alto, ossia da $p_\eta=1$, ogni volta che si scende a sinistra si aggiunge uno zero (0) e si aggiunge invece un uno (1) quando si scende verso destra, ottenendo così:

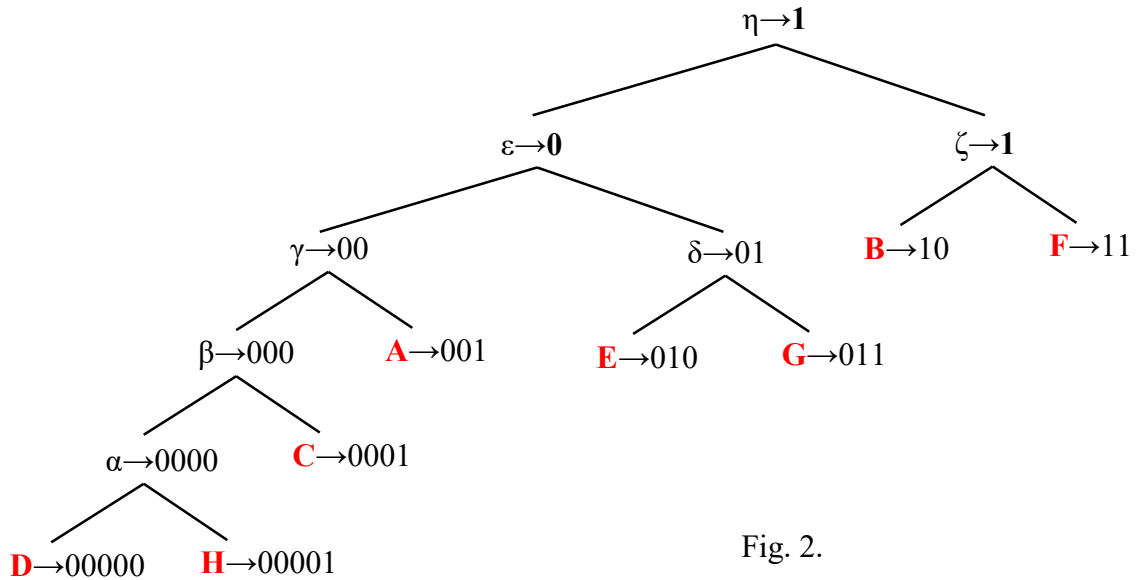


Fig. 2.

Abbiamo ottenuto così il nuovo codice: ($x_A=001$, $x_B=10$, $x_C=0001$, $x_D=00000$, $x_E=010$, $x_F=11$, $x_G=011$, $x_H=00001$) e per la nuova lunghezza media delle parole:

$$\ell = 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 2 + 16^{-1} \cdot 4 + 32^{-1} \cdot 5 + 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 2 + 8^{-1} \cdot 3 + 32^{-1} \cdot 5 = 2,6875 \text{ bit / symbol} = H(S);$$

abbiamo dunque accorciato la lunghezza media delle parole, portandola al minimo H .

Per finire, con riferimento all'Appendice che segue, è un po' come se, in termodinamica, nel valutare il valore dell'entropia, veniamo a ricevere un dato numerico che è appunto un'informazione e che ha una lunghezza minima, la quale può solo, al massimo, aumentare di valore.

Poi, in occasione della presentazione dell'equazione (5), abbiamo visto che la lunghezza del messaggio è minima (ossia pari al valore minimo, dell'entropia(minima)) quando le probabilità dei vari simboli sono tutte uguali; l'equivalente in termodinamica potrebbe essere che l'entropia è minima quando l'energia è equidistribuita (al meglio), ossia nella situazione di minor caos (allo zero assoluto).

APPENDICE: L'ENTROPIA IN TERMODINAMICA:

ENTROPIA E DISORDINE

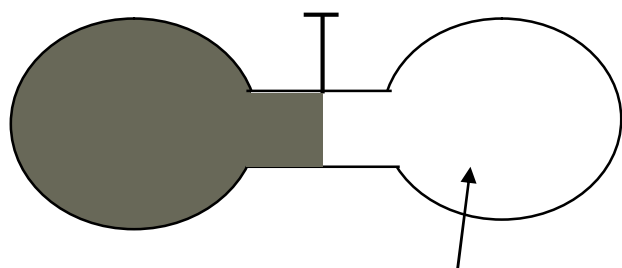


Fig. A1: Entropia e disordine.

vuoto

C'è un solo modo per avere tutto il gas in un solo recipiente (ad esempio quello di sinistra in Fig. A1), ed è quello di prendere tutte le molecole N e porle in tale recipiente, mentre per disporre le molecole metà di qua e metà di là vi sono W modi: si hanno N modi di scegliere la prima molecola (tra le $N/2$ che vanno prese) tra le N disponibili; poi $(N-1)$ modi per la seconda (essendone rimaste appunto $(N-1)$), $(N-2)$ per la terza ed $(N-N/2)=N/2$ per la $N/2$ -esima. In totale, si ha:

$W' = N(N-1)(N-2)\dots(N-N/2) = N!/(N/2)!$ Essendo poi le $N/2$ molecole indistinguibili e quindi permutabili (scambiabili) tra loro in $(N/2)!$ modi, si ha infine: $W = N! / [(N/2)!(N/2)!]$.

Sappiamo dimostrare che i sistemi evolvono spontaneamente verso lo stato di massima entropia. E' altrettanto vero che i sistemi evolvono spontaneamente verso lo stato più probabile (e quindi più disordinato); deve quindi esserci una relazione tra S e W ; troviamola:

mentre un sistema A composto da due sottosistemi A_1 e A_2 ha entropia pari ad $S_1 + S_2$ (additività dell'entropia), la probabilità W , ossia il n. di configurazioni microscopiche in cui quello stato macroscopico può essere realizzato è pari a $W_1 W_2$ (la probabilità è moltiplicativa, ossia la probabilità che due eventi si verifichino contemporaneamente è data dal prodotto delle probabilità); quindi: $S(W) = S(W_1 W_2) = S(W_1) + S(W_2) (= S_1 + S_2)$; tale condizione deve valere $\forall W_1$ e W_2 ; infatti, avendosi $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, si nota subito che sussiste una relazione del tipo $f(x) = C \ln x + \text{const}$. A meno di una costante, si ha dunque una relazione del tipo:

$$S = C \cdot \ln W. \quad (A1)$$

Per valutare C , consideriamo l'espansione libera di un gas perfetto che raddoppi il volume ($V_f/V_i=2$) a mo' di Esperienza di Joule:

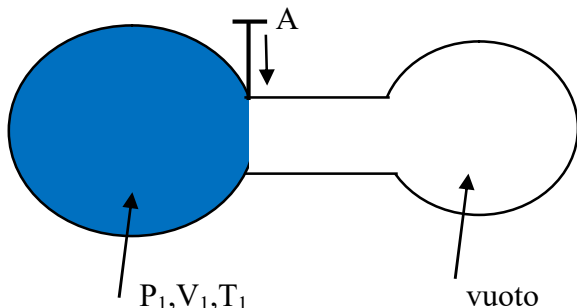


Fig. A2: Esperienza di Joule.

all'apertura della saracinesca A , il gas si espande nel vuoto, dunque $dL = 0$; inoltre, essendo il sistema isolato: $\delta Q = 0$ e allora, per il I Principio della Termodinamica: $\delta Q - dL = dU = 0$, ossia $dU = 0$ e dal momento che la temperatura T non cambia, si intuisce che $U = f(T)$.

Dunque: stato iniziale p_i, V_i, T e stato finale $p_f = p_i/2$ (per Boyle), $V_f = 2V_i, T$; per l'entropia:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f \delta Q = \frac{1}{T} \int_i^f (dU + p dV) = \frac{1}{T} \int_i^f p dV = \frac{1}{T} \int_i^f \frac{nRT}{V} dV = nR \int_i^f \frac{1}{V} dV = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) =$$

$= nR \ln 2 > 0$, cioè: $\Delta S = nR \ln 2 = nN_A k \ln 2 = Nk \ln 2$, ma per la (A1) si ha che:

$$\Delta S = C \ln \frac{W_f}{W_i} \quad (A2)$$

e $W_f = N! / [(N/2)!(N/2)!]$, nonché $W_i = 1$, da cui: $\Delta S = C \ln \frac{N!}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!}$ e per la Formula di Stirling(*)

per grandi N si ha: $\ln N! \cong N \ln N$ per cui: $\Delta S = C(N \ln N - \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2}) = C(N \ln N - N \ln \frac{N}{2}) = CN(\ln N - \ln \frac{N}{2}) = CN \ln 2$, che confrontata con la (A1) fornisce: $C=k$ e quindi:

$$S = k \ln W \quad (\text{Teorema di Boltzmann} - k = \text{cost. di Boltzmann}) \quad (A3)$$

Visto che i sistemi evolvono per $W_f \gg W_i$, dalla (A2) si ha che essi evolvono appunto per $\Delta S > 0$.

(*): consideriamo l'espressione $\ln x!$; per essa, se x è un intero, possiamo scrivere che:

$$\ln x! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(x-1) + \ln x = \sum_1^x \ln x = \sum_1^x \ln x \cdot (\Delta x) \quad , \quad \text{con } (\Delta x) = 1 \quad , \quad \text{in quanto, parlandosi di un}$$

intero, si hanno salti di una unità. Ora, per x molto grande, $(\Delta x) = 1$ sarà piccolo rispetto ad x stesso e dunque (Δx) sarà considerabile come un dx e la sommatoria diverrà un integrale:

$$\ln x! = \int_1^x \ln x \cdot dx = x \ln x - x + 1 \quad , \quad \text{ossia: } \ln x! = x \ln x - x + 1 \quad .$$

TAYLOR DENTRO EULERO DENTRO GAUSS

Premesse:

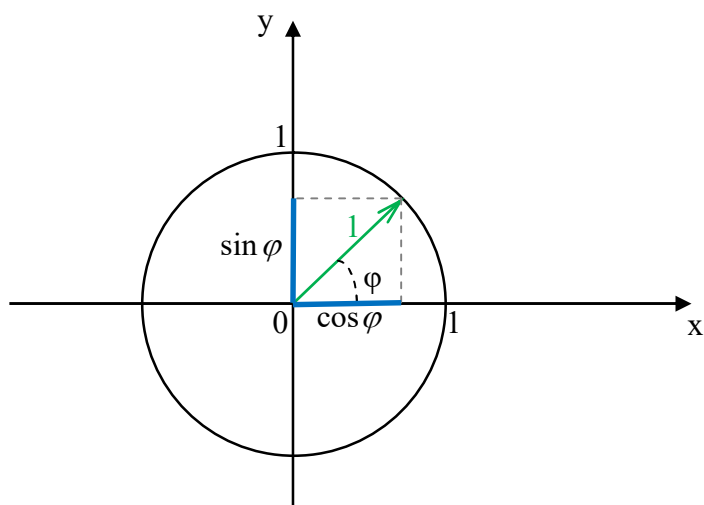


Fig. 1: Il cerchio trigonometrico.

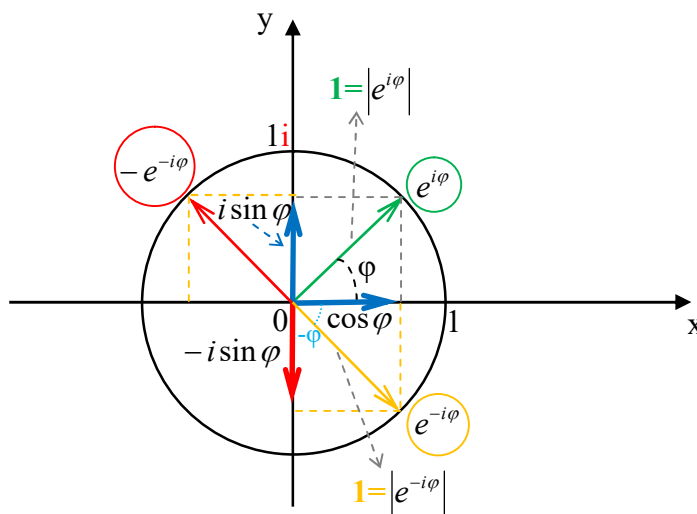


Fig. 2: Il Piano di Gauss.

Ricordiamo preliminarmente le Formule di Eulero, peraltro qui sotto dimostrate:

$e^{iφ} = \cos φ + i \sin φ$ ed $e^{-iφ} = \cos φ - i \sin φ$; ora, “immaginando” queste due equazioni come equazioni vettoriali, la prima, ad esempio, sarebbe del tipo: $\vec{v} = \vec{v}_x + i\vec{v}_y$ (con $\vec{v}_x = (\cos φ)\hat{x}$ e $\vec{v}_y = (\sin φ)\hat{y}$) e dunque:

$$\vec{v} = (\cos φ)\hat{x} + i(\sin φ)\hat{y}, \quad \text{con } |\vec{v}| = 1 = |e^{iφ}|, \text{ viste le sue componenti } \cos φ \text{ e } \sin φ.$$

Riguardo invece la seconda: $\vec{v} = \vec{v}_x - i\vec{v}_y$ (con $\vec{v}_x = (\cos φ)\hat{x}$ e $\vec{v}_y = (\sin φ)\hat{y}$) e dunque:

$$\vec{v} = (\cos φ)\hat{x} - i(\sin φ)\hat{y}, \quad \text{con } |\vec{v}| = 1 = |e^{-iφ}|, \text{ viste le sue componenti } \cos φ \text{ e } \sin φ \text{ [sin(-φ)=-sinφ]}.$$

Non solo, ma i due vettori verde ed arancione ($e^{iφ}$ ed $e^{-iφ}$) (di Fig. 2) vanno a comporre

$2\cos φ$ sull’asse orizzontale ($e^{iφ} + e^{-iφ} = 2\cos φ$), da cui la: $\cos φ = \frac{e^{iφ} + e^{-iφ}}{2}$ di Eulero, sempre qui sotto dimostrata.

E, per finire, i due vettori verde e rosso ($e^{iφ}$ e $-e^{-iφ}$) vanno a comporre $i2\sin φ$ sull’asse

verticale ($e^{iφ} + [-e^{-iφ}] = e^{iφ} - e^{-iφ} = i2\sin φ$), da cui la: $\sin φ = \frac{e^{iφ} - e^{-iφ}}{2i}$ di Eulero, sempre qui sotto dimostrata.

Dunque: **EULERO DENTRO GAUSS**.

APPENDICE - TAYLOR DENTRO EULERO:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Ho una $f(x)$ e suppongo che essa sia uguale, in un certo intorno del valore x_0 , ad una certa serie generica: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$; ora, supponendo che x_0 sia l'origine: ($x_0=0$) $\rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Essendo ora che: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, segue che:

$$f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 0^n = a_0 \quad \text{e poi anche: } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e:}$$

$$f'(0) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1 + 0 = a_1 \quad \text{e:}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2(2-1) a_2 x^{2-2} + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

da cui: $f''(0) = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n 0^{n-2} = 2a_2 + 0 = 2a_2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$ e così via, ottenendo:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \text{e quindi: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n, \text{ che è lo Sviluppo in Serie di Taylor (di}$$

MacLaurin, in questo caso). Applicandolo ora alla funzione $f(x) = e^x$, si ha:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n.$$

Consideriamo i tre seguenti sviluppi di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

se nel primo consideriamo in luogo di x , avremo:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot (ix)^n = 1 + ix + i^2 \frac{1}{2} x^2 + i^3 \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n = 1 + ix - \frac{1}{2} x^2 + i i^2 \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n =$$

$$= 1 + ix - \frac{1}{2} x^2 - i \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n, \text{ mentre il terzo sviluppo dà:}$$

$$i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} f^n(0) \cdot x^n = ix - i \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{i(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{e allora si intuisce che, per } e^{ix} :$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2} x^2 - i \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n = \cos x + i \sin x \quad ; \quad \text{similmente: } e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \text{ da cui,}$$

facendo sistema tra le due, si ottengono le seguenti Formule di Eulero: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$,

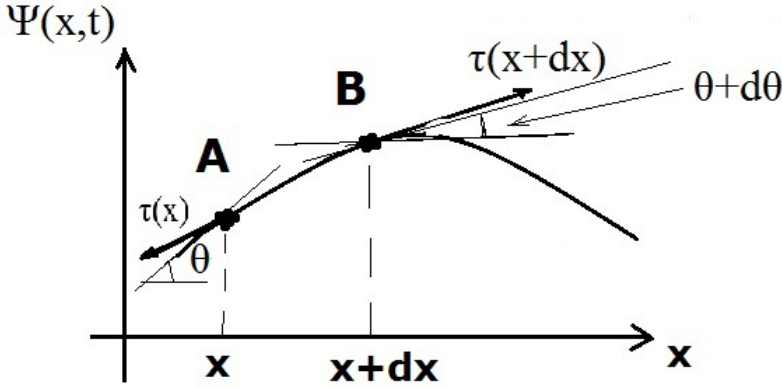
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \text{ Se nella } e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ poniamo } x=\pi, \text{ otteniamo: } e^{i\pi} + 1 = 0.$$

D'ALEMBERT DENTRO EINSTEIN

(ONDE GRAVITAZIONALI)

Premesse sull'Equazione di d'Alembert:

Banalmente, anche il caso di una corda vibrante ci porta all'Equazione delle Onde di d'Alembert:



τ è la tensione della corda, dm è l'elemento infinitesimo di massa e μ è la densità lineare della corda.

Sull'asse y si ha: $\tau \sin(\theta + d\theta) - \tau \sin \theta = dm \cdot a = \mu dx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$; ora, per angoli piccoli, sia il seno che

la tangente sono approssimabili con l'angolo: $\tau(\theta + d\theta) - \tau\theta = \tau d\theta = \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} dx$ ed inoltre

$\theta \approx \tan \theta = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ e $d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx$, da cui $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu}{\tau}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$, con $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$.

Onde gravitazionali (di d'Alembert) dalle Equazioni di Einstein.

Ponendoci nella Weak Field Approximation, esprimiamo il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ come la somma del tensore di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ (di uno spazio non curvo) e di una perturbazione $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (1)$$

Ricordiamo poi il tensore di Ricci ed i simboli di Christoffel:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \quad (2)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right); \quad (3)$$

si ha dunque: ($\eta \rightarrow \text{const}$)

$$R_{\mu\nu} \cong \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + O(h^2) \quad \text{e} \quad (4)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) + O(h^2) \quad (5)$$

($\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu} = h_{\nu}^{\lambda}$, $\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}$) e combinando le due:

$$R_{\mu\nu} \cong R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda}) \quad (6)$$

(Operatore d'Alembertiano $\Box^2 = \nabla^2(*) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2}$); infatti, per la (4), si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\lambda}) + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\mu\lambda}) \right] - \\
&- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu}) + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\rho} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} h_{\mu}^{\lambda} - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} h_{\mu}^{\rho} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} h_{\mu}^{\lambda} + \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[(\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[(\eta^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + \eta^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + \eta^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + \eta^{00} \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [(+1) \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + (-1) \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu}] - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} h_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} = \\
&= \frac{1}{2} (\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda}) \quad , \text{ ossia appunto la (6).}
\end{aligned}$$

E per le Equazioni di Einstein:

$$[R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}) = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}]$$

$$\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (7)$$

Poniamoci ora, per comodità, in un sistema di coordinate armoniche:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \quad ; \quad (8)$$

infatti, nel trattare l'equazione della geodetica, ci si imbatte nella seguente identità che esprime la

connessione affine: $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$. Infatti, un paracadutista in caduta libera non ha un

pavimento su cui il suo corpo può gravare, dunque lui, tra sé e sé, non avverte accelerazione di gravità, e si sente come sospeso nel vuoto e si accorge che sta cadendo solo se guarda gli altri oggetti attorno che si muovono. Per una particella in caduta libera, dunque, vi è ovviamente un sistema di riferimento in cui $\vec{a} = 0$, ossia:

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate euclidee}) \quad (9)$$

con $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$. Possiamo però vedere la (9) nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad . \text{ Moltiplichiamo ora entrambi i membri}$$

per $\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$ e teniamo conto del fatto che: $\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} = \delta_{\mu}^{\lambda}$; si avrà:

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate curvilinee}) \quad (10)$$

(equazione della geodetica, dove geodetica, qui sulla Terra, è la rotta minima tra una località e l'altra) con $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$ appunto.

Proseguendo il discorso, per trovare l'equazione di trasformazione della connessione affine, riscriviamo la stessa in un altro sistema di riferimento: $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$, da cui:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right] = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} ; \text{ differenziamo ora } \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\lambda} : \\ \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} &= - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}, \text{ da cui:} \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}, \end{aligned} \quad (11)$$

che è appunto l'equazione di trasformazione della connessione affine.

Se adesso quest'ultima la contraiamo con $g'^{\mu\nu}$ e la poniamo a zero, otteniamo:

$$g'^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho} - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} = 0, \text{ che altro non è che appunto la (8), cui ci si può sempre ricondurre calcolando un nuovo sistema di riferimento } x'^{\lambda}, \text{ tramite appunto la precedente equazione: } \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho} - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} = 0.$$

$$\text{La (8) e la (5) danno: } g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) + O(h^2)$$

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} [g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)] = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[\left(\frac{\partial h_{\rho}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial h_{\rho}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = 0 \rightarrow 2 \frac{\partial h_{\rho}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h_{\rho}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} h_{\mu}^{\mu} \text{ e ribattezzando } \rho \text{ con } \nu:$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\mu} \quad (12)$$

$$\text{che nella (7) fornisce: } \square^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (13)$$

La soluzione, verificabile per sostituzione diretta, è il potenziale ritardato:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d^3 \vec{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (14)$$

In ogni caso, semplificando, per radiazioni provenienti dall'infinito: ($T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} = 0$)

$$\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (15)$$

$$\text{ossia: } 0 = \nabla^2 h_{\mu\nu} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} \quad (\text{Equazione delle Onde}), \quad (16)$$

la cui soluzione, notoriamente, è appunto un'onda:

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} + e_{\mu\nu}^* e^{-ik_{\lambda} x^{\lambda}}; \quad (17)$$

$e_{\mu\nu}$ è il tensore di polarizzazione.

SNELL DENTRO EINSTEIN

(LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ TESTATA CON LA LEGGE DI SNELL)
(LA DEFLESSIONE DELLA LUCE DA PARTE DEL SOLE)

LA DEFLESSIONE DELLA LUCE DA PARTE DEL SOLE

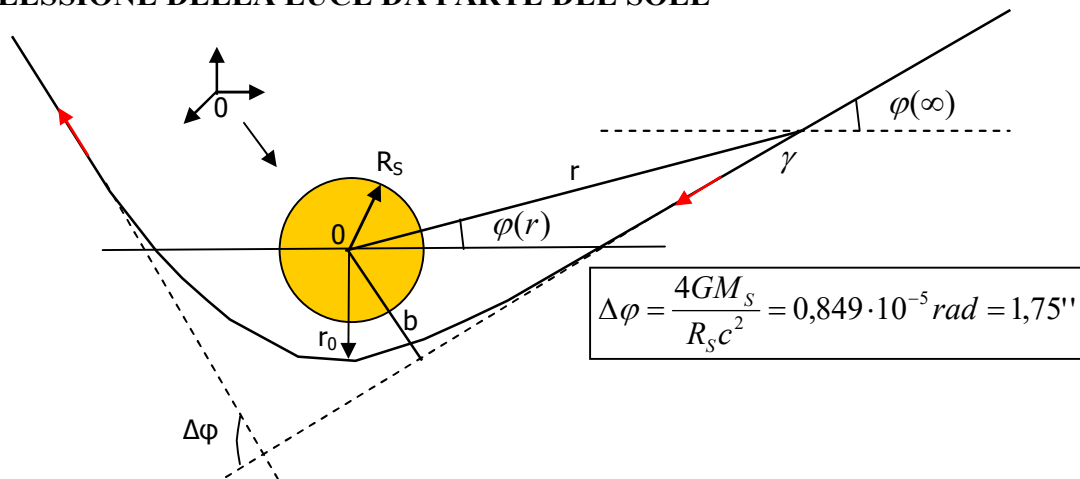


Fig. 1: La deflessione della luce tradizionale, da parte del Sole.

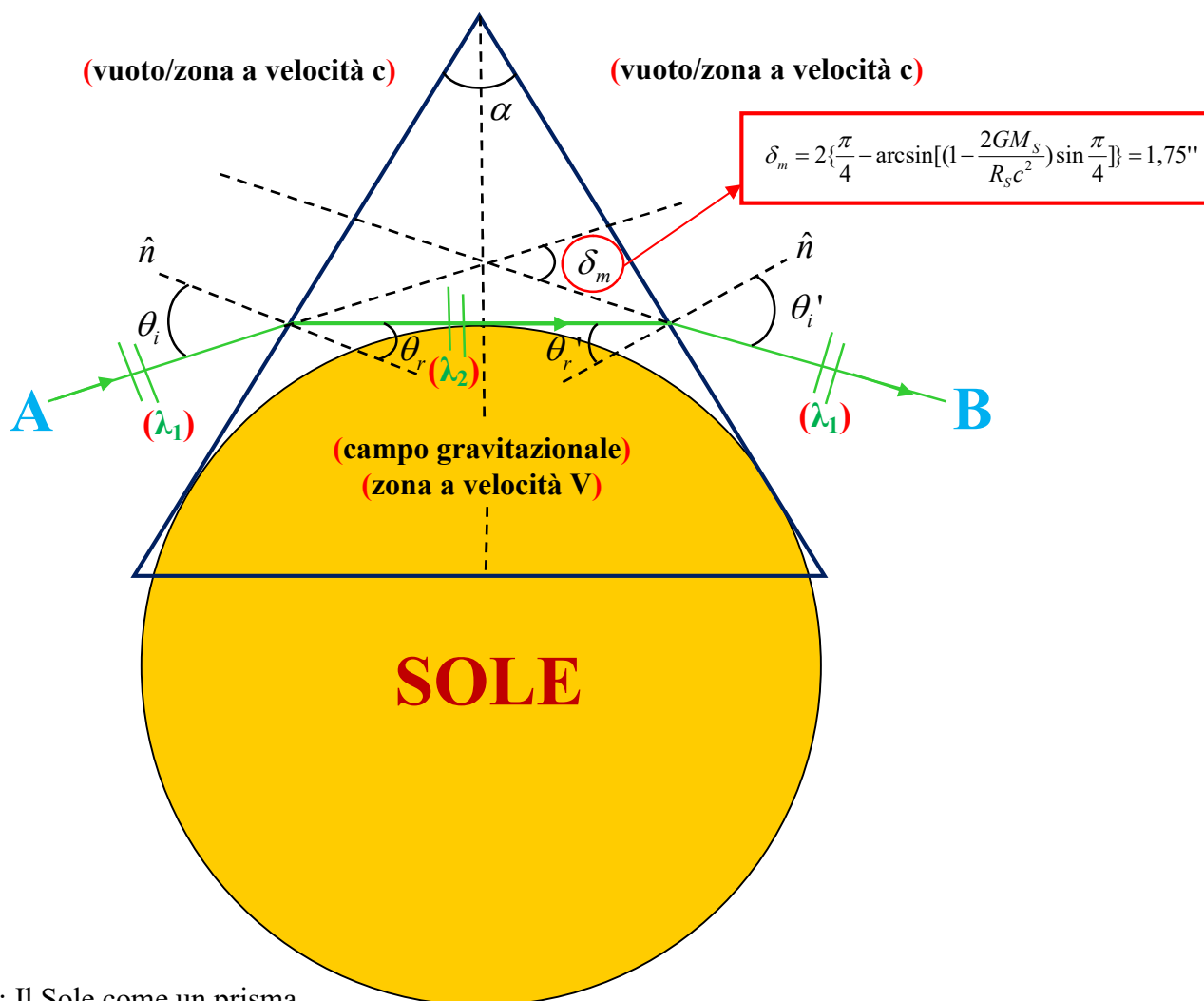


Fig. 2: Il Sole come un prisma.

Ovviamente, nella Fig. 2 qui sopra, il prisma può essere abbassato in modo da avere il tratto di raggio luminoso orizzontale (λ_2) sufficientemente corto. Ed il prisma può ovviamente essere ruotato intorno al centro dell'astro e riapplicato, per ragioni di simmetria.

Proprio come, nel fenomeno della rifrazione della luce, il raggio di luce piega entrando nell'acqua (SNELL-Rif. Fig. A1.1 in Appendice A1), così la luce che entra nel campo gravitazionale dell'astro viene deflessa. Ed altresì, così come in aria ed acqua la luce ha velocità diverse, anche nel caso del Sole si parlerà di c lontano da esso e di V in sua vicinanza.

Il metodo di calcolo tradizionale della deflessione della luce da parte del Sole fornisce il valore:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM_S}{R_S c^2} = 0,849 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75'' , \quad (1)$$

valore ottenuto, ad esempio, in Brasile durante l'eclissi del 1919.

($R_S = 6,95475 \cdot 10^8 \text{ m}$, $M_S = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ e $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Facciamo ora appunto leva sulla variazione di velocità che la luce subisce quando si approssima ad una massa.

Con riferimento alla Fig. 2 qui sopra, ricordiamo innanzitutto la (A1.6) in Appendice A1, che è comunque anche abbastanza intuitiva, sebbene sia là dimostrata ufficialmente:

$$\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r) = \Delta\varphi$$

(2)

δ_m è ovviamente l'angolo della deflessione subita dal raggio di luce che, provenendo da **A**, abbandona poi definitivamente il sistema prisma (rifrattivo), dirigendosi verso **B** , ed è altresì là dimostrato che $\delta = \delta_m$ è minimo quando θ_i è tale che il raggio interno al prisma è parallelo alla base e in tal caso si ha anche che $\theta_i = \theta_i'$ e $\theta_r = \theta_r'$, nonché anche la (2) (ossia la A1.6) appunto.

Ricordiamo poi la definizione di redshift:

$$z = \frac{\lambda_{\text{osservata}} - \lambda_{\text{emessa}}}{\lambda_{\text{emessa}}} \quad (3)$$

Inoltre, segue che: $1 + z = \frac{\lambda_{\text{osservata}}}{\lambda_{\text{emessa}}}$. $z > 0$ è redshift; $z < 0$ è blueshift. Dalla (3) si ottiene:

$$z = \frac{\lambda_{\text{osservata}} - \lambda_{\text{emessa}}}{\lambda_{\text{emessa}}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{V/f - c/f}{c/f} = \frac{-\Delta v}{c} = \frac{V}{c} - 1 \quad (4)$$

(ovviamente, alla sinistra del prisma, con λ_1 che è in zona **A**(sorgente) e λ_2 che è osservata dal prisma) e confrontando poi quest'ultima (la (4) appunto) con la (A2.8) in Appendice A2 (che scaturisce dalla Soluzione di Schwarzschild), ossia la: $V \cong c[1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$ ($\rightarrow \frac{V}{c} \cong [1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$), si ha

$$\text{che: } z = -\frac{2GM_S}{R_S c^2} = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} \quad (5)$$

Allora, per la Legge di Snell (A1.3), si ha: $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{c}{V} = n$, ma dalla (4) si ha che:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{V}{c} - 1 , \text{ da cui: } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V}{c} \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c}{V} \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ e allora:}$$

$$\sin \theta_r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \theta_i = \frac{(\lambda_1 - \Delta\lambda)}{\lambda_1} \sin \theta_i = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i \text{ e per la (5), si ha poi:}$$

$\sin \theta_r = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i = (1 - \frac{2GM_s}{R_s c^2}) \sin \theta_i$ ed infine:

$$\theta_r = \arcsin[(1 - \frac{2GM_s}{R_s c^2}) \sin \theta_i] \quad (6)$$

e la (6) nella (2) fornisce:

$$\delta_m = 2\{\theta_i - \arcsin[(1 - \frac{2GM_s}{R_s c^2}) \sin \theta_i]\} \quad (7)$$

Per finire, osservando la Fig. 3 qui sotto, si nota che l'angolo θ_i può variare tra 0° (ossia col raggio di luce perfettamente perpendicolare alla superficie sinistra del prisma) a 90° (ossia quando, al massimo, il raggio di luce diventa parallelo alla superficie sinistra del prisma), ed allora noi useremo per θ_i il suo valore medio, ossia $\bar{\theta}_i = \frac{0^\circ + 90^\circ}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} rad$, da cui, per la (7):

$$\delta_m = 2\{\frac{\pi}{4} - \arcsin[(1 - \frac{2GM_s}{R_s c^2}) \sin \frac{\pi}{4}]\} = 0,849 \cdot 10^{-5} rad = 1,75'' \quad !!!!! \quad (8)$$

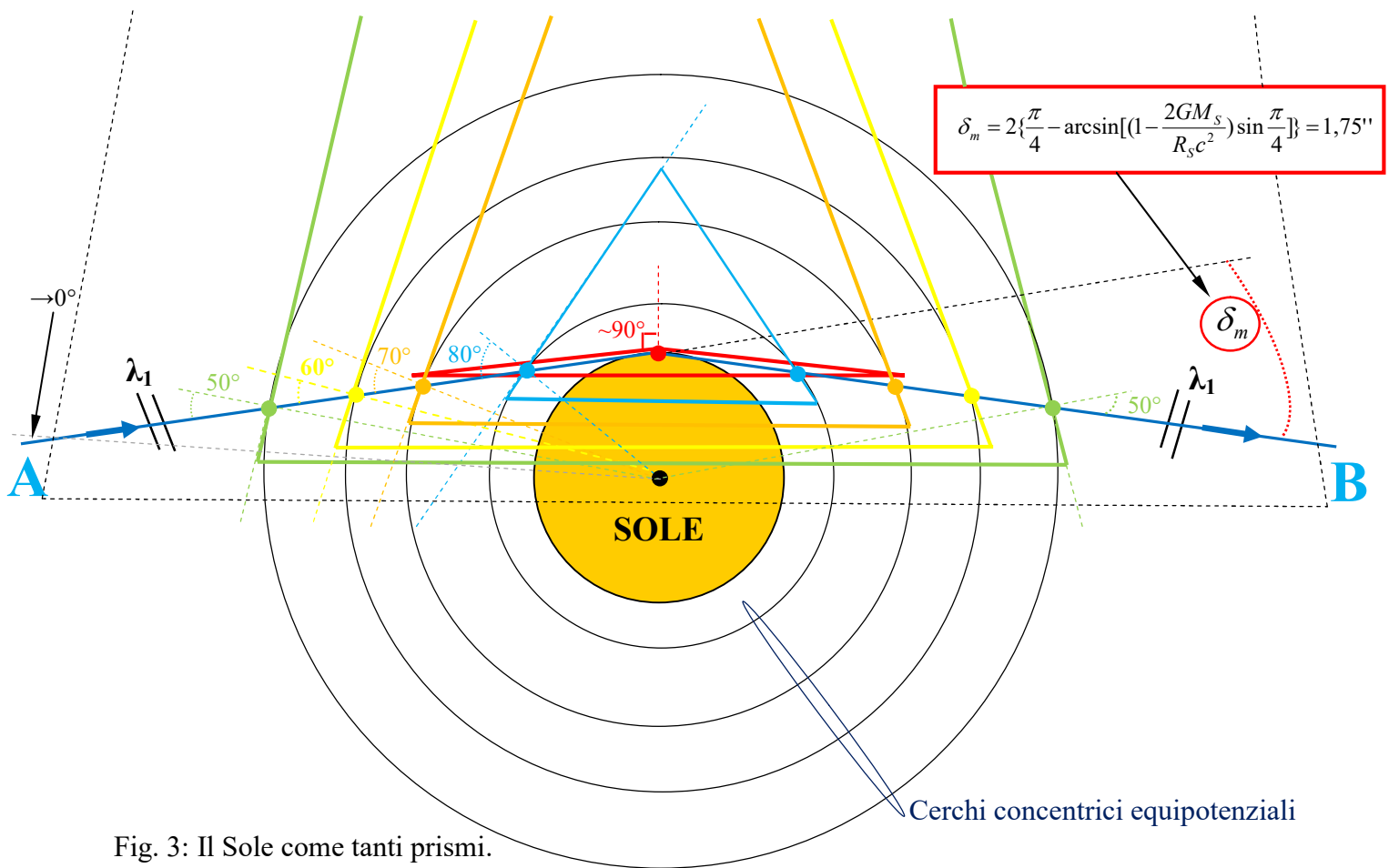


Fig. 3: Il Sole come tanti prismi.

APPENDICE 1: LA RIFRAZIONE E LA LEGGE DI SNELL

Rifrazione

Il bagnino

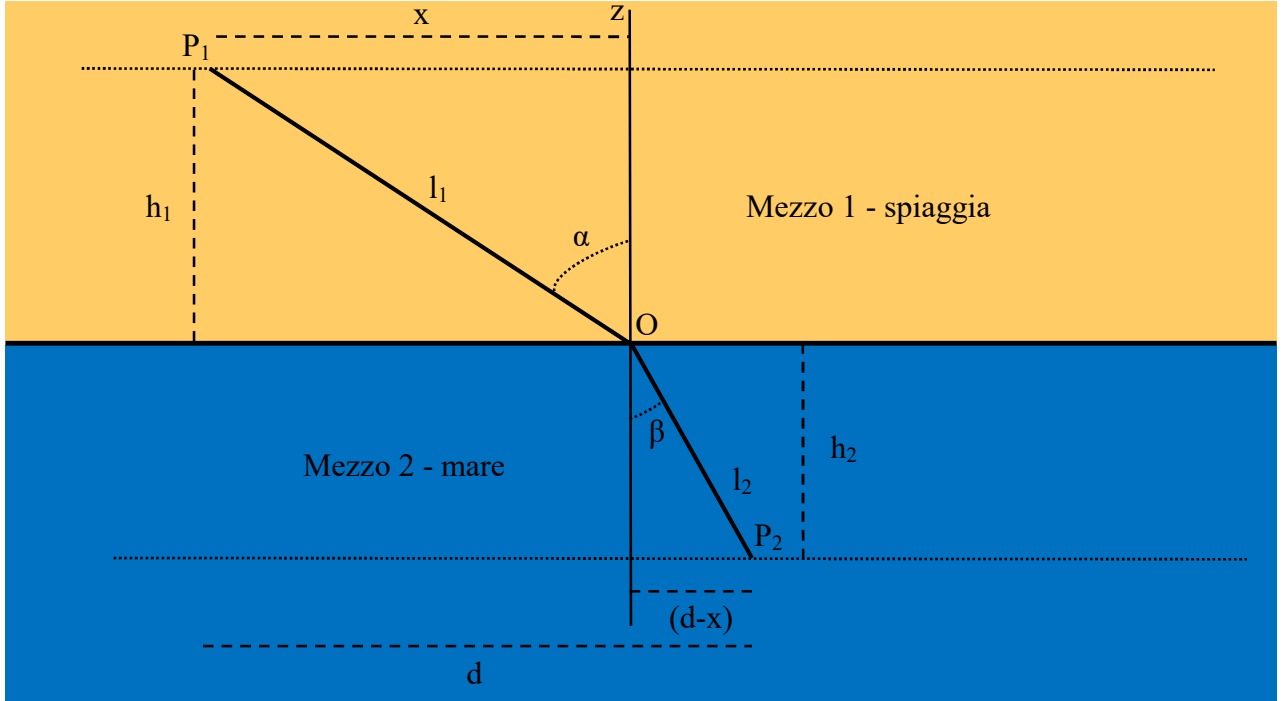


Fig. A1.1: Il bagnino in P_1 vede il bagnante in difficoltà in P_2 .

Il bagnino in P_1 deve raggiungere e soccorrere il bagnante in P_2 ; egli, però, sa anche che la corsa sulla spiaggia avviene a velocità v_1 maggiore della velocità v_2 del nuoto in acqua, dunque il percorso geometricamente più breve, dato dal segmento P_1 - P_2 non è il più veloce, perché fa stare il bagnino troppo in acqua, dove è più lento.

Valutiamo il tempo di percorrenza del viaggio del bagnino:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Ora, per valutare il minimo di t_B , calcoliamo la derivata ed annulliamola:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0, \text{ ma si ha che:}$$

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{e} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta, \text{ da cui: } \frac{dt_B}{dx} = \frac{2 \sin \alpha}{v_1} - \frac{2 \sin \beta}{v_2} = 0, \text{ ossia:}$$

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} = k, \tag{A1.1}$$

dunque, in entrambi gli strati (mezzo 1 e mezzo 2), il rapporto tra il seno dell'angolo con la verticale e la velocità è costante.

Legge di Snell

Se i percorsi l_1 ed l_2 fossero dei raggi di luce ed i mezzi 1 e 2 fossero, ad esempio, aria ed acqua, considerando che, per gli indici di rifrazione n_1 ed n_2 si ha, per definizione:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}, \quad (\text{A1.2})$$

si ottiene la Legge di Snell:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1/c}{v_2/c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n, \quad (\text{A1.3})$$

che è la responsabile del fatto che una scala semi immersa in una piscina la vediamo piegata. n_{21} è l'indice di rifrazione relativo del mezzo 2 rispetto al mezzo 1. Visto che $v_1 \neq v_2$, ossia: $v_i \neq v_r$ ("i" denota la radiazione incidente, mentre "r" denota quella rifratta) e $v_i = \lambda_i f_i$, $v_r = \lambda_r f_r \rightarrow$

$$\lambda_i = \frac{v_i}{f_i} = \frac{c/n_1}{\omega_i/2\pi} = \frac{c}{n_1} \frac{2\pi}{\omega_i} \quad \text{e} \quad \lambda_r = \frac{v_r}{f_r} = \frac{c/n_2}{\omega_r/2\pi} = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega_r};$$

$$\text{se, come vedremo, siamo nel caso di } f_1=f_2 \rightarrow \omega_1=\omega_2=\omega=(2\pi)f \rightarrow \lambda_r = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{n_2} \frac{\lambda_i n_1}{c} = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i, \text{ ossia:}$$

$$\lambda_r = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i \quad (\text{A1.4})$$

Essendo che la Legge di Snell è qui scaturita anche come calcolo del tempo di percorrenza minimo, viene confermato il Principio di Fermat, secondo cui il raggio di luce segue il cammino più breve.

Trattandosi ora di onde elettromagnetiche (E e B), si ha che: ($\vec{k}$ è il vettore d'onda) (onda incidente)

$$\vec{E}_i = E_{oi} \cdot e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} = E_{oi} \cdot e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \vec{k}_i \cdot \vec{r} - 2\pi f_i t)} \quad \text{e} \quad \vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{k}_i \times \vec{E}_i$$

(onda rifratta, con un tal sfasamento φ_r)

$$\vec{E}_r = E_{or} \cdot e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \quad \text{e} \quad \vec{B}_r = \frac{n_2}{c} \vec{k}_r \times \vec{E}_r$$

Essendo poi che $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (con j come densità di corrente e σ come conducibilità), si ha che se siamo tra mezzi isolanti, oppure tra vuoto e vuoto+campo gravitazionale, allora $\sigma=0$ e $\rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} = 0$ (e soprattutto nella zona di confine tra i due mezzi) e le Equazioni di Maxwell sono quelle per il vuoto ed esse condurranno all'Equazione delle Onde sia in "i" che in "r", le cui soluzioni sono quelle sopra riportate, sia in "i" che in "r", (in entrambe le zone si deve avere una $\propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$) ed allora passando da "i" ad "r" gli argomenti si devono conservare: $(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r) \rightarrow$

$$\varphi_r = 0, \quad (\omega_i = \omega_r \rightarrow f_i = f_r \text{ stessa frequenza}) \quad \text{e} \quad \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}; \text{ in particolare, si ha: } \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \rightarrow$$

$\rightarrow k_{i-x}x + k_{i-y}y + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z$ e considerando l'asse y come uscente dal foglio, si ha che $k_{i-y}=0$ (considerando il raggio incidente come contenuto nel piano x-z del foglio), da cui:

$$k_{i-x}x + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z \quad \text{e considerando il punto di attraversamento del confine (z=0, con z come asse verticale - rif. Fig. A1.1), si ha: } k_{i-x}x = k_{r-x}x + k_{r-y}y \rightarrow k_{r-y} = 0 \quad \text{e} \quad k_{i-x} = k_{r-x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \beta \quad \text{od anche:} \quad \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \theta_r \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \text{ ossia la}$$

riconferma della Legge di Snell.

Il Prisma

Si abbia un prisma di materiale trasparente, come in Fig. A1.2:

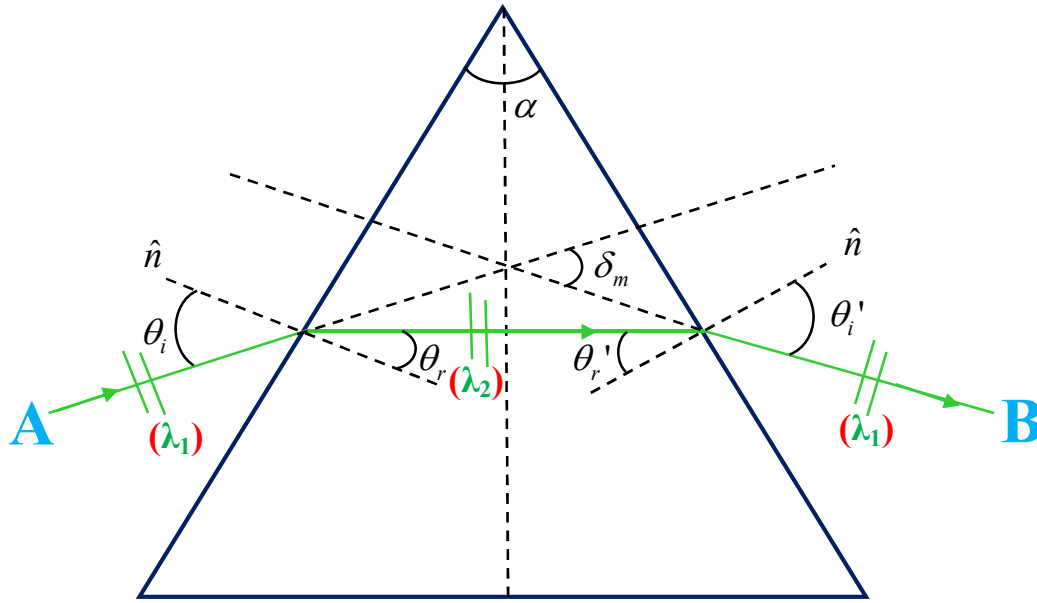


Fig. A1.2: Il prisma.

δ_m è l'angolo della deflessione subita dal raggio di luce che, provenendo da **A**, abbandona poi definitivamente il sistema prisma, dirigendosi verso **B**.

$\delta = \delta_m$ è minimo quando θ_i è tale che il raggio interno al prisma sia parallelo alla base e in tal caso si ha anche che $\theta_i = \theta'_i$ e $\theta_r = \theta'_r$. Mostriamo adesso anche che:

$$\theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \quad \text{e} \quad \theta_r = \frac{\alpha}{2}, \quad (\text{A1.5})$$

da cui:
$$n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\sin(\frac{\delta_m + \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}; \text{ dimostrazione:}$$

tra parentesi, dalle (A1.5) si ottiene:
$$\theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} = \frac{\delta_m + 2\theta_r}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r)} \quad (\text{A1.6})$$

Tornando alla dimostrazione, con riferimento alla Fig. A1.3 qui sotto, dal triangolo DEB si ha:

$$(\pi - \delta) + (\theta_i - \theta_r) + (\theta'_i - \theta'_r) = \pi, \text{ da cui:}$$

$$\delta = (\theta_i + \theta'_i) - (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A1.7})$$

Dal triangolo ABD si ha: $\alpha + (\frac{\pi}{2} - \theta_r) + (\frac{\pi}{2} - \theta'_r) = \pi$, da cui:

$$\alpha = (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A1.8})$$

Dal triangolo BCD si ha: $x + \theta_r + \theta'_r = \pi$, da cui: $x + \alpha = \pi \rightarrow x = (\pi - \alpha)$; la (A1.7) ci dice

$$\text{dunque che } (\theta_i + \theta'_i) = \delta + (\theta_r + \theta'_r) = \delta + \alpha \quad (\text{A1.9})$$

$$\text{ossia: } \delta = (\theta_i + \theta'_i) - \alpha \quad \text{e} \quad \frac{d\delta}{d\theta_i} = \frac{d\theta_i}{d\theta_i} + \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = -1 \quad (\text{A1.10})$$

APPENDICE 2:

LA GRAVITÀ RALLENTA IL TEMPO E LA SOLUZIONE DI SCHWARZSCHILD

-LA GRAVITÀ RALLENTA IL TEMPO

Anche la gravità rallenta il tempo! In montagna il tempo scorre più velocemente che a valle. Ovviamente, sulla Terra, la differenza è impercettibile, ma su una stella di neutroni, o in un buco nero, l'effetto è intensissimo.

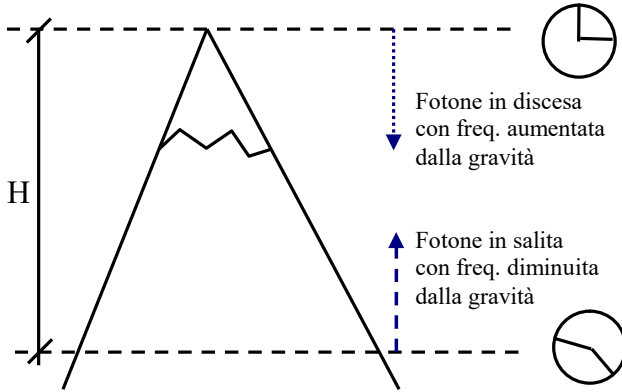


Fig. A2.1: Montagna, gravità e tempo.

$\Delta E = m_0 g H$ (delta energia del salto di quota); $\Delta E = h \Delta \nu$ (delta energia del calo di frequenza di un fotone). Dalle due: $\Delta \nu = m_0 g H / h$. Per un fotone, $E = h \nu$, ma in relatività si ha che: $E = m_0 c^2$, da cui, per un fotone: $m_0 = h \nu / c^2$ e dunque, per $\Delta \nu$: $\Delta \nu = \nu g H / c^2$ ed essendo il tempo l'inverso della frequenza, si ha: $\Delta \nu / \nu = \Delta t / t$ e dunque: $\Delta t = \frac{g H}{c^2} t$. (A2.1)

Dunque, su un tempo t , si ha un rallentamento Δt dato dalla gravità! Sappiamo che la velocità di fuga di un corpo celeste di massa M e raggio R vale: $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Se su quel corpo un oggetto viene lanciato verticalmente alla velocità di fuga, esso uscirà dal campo gravitazionale del corpo celeste ed andrà verso l'infinito, senza più ricadere. Un buco nero è un corpo così compresso (M grande ed R piccolo) che la velocità di fuga sulla sua superficie raggiunge il valore della velocità della luce e dunque neanche la luce vi sfugge, da cui il nome di buco nero; inoltre, per quanto detto sopra, si può affermare che in un buco nero il tempo è pressoché fermo!

Tornando al rallentamento, per la (A2.1): $\Delta t = \frac{g H}{c^2} t$, che può essere interpretata come: $dt = \frac{g dr}{c^2} t$ e

considerando che $|g| = \frac{GM}{r^2}$, segue che: $dt = t \frac{GM}{c^2 r^2} dr$, ossia: $\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow \int \frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \int \frac{dr}{r^2} \rightarrow$

$$\rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2 r} + k \rightarrow, \quad t = k \cdot e^{-\frac{GM}{c^2 r}} \rightarrow (e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = k(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow$$

$$(t = t_0 \gg r = \infty) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow (\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x) \rightarrow$$

$$\rightarrow t = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (A2.2)$$

D'altra parte, sappiamo che la formula per la contrazione di Lorentz ha la stessa forma della formula per la dilatazione del tempo, ma con la radice al denominatore, dunque:

$$r = r_0 / \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (A2.3)$$

LA SOLUZIONE DI SCHWARZSCHILD

Sappiamo che, in generale: $d\tau^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ (invariante quadridimensionale) ed essendo, per un fotone (che ha velocità c): $(d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2$, segue che: $d\tau^2 = 0$ (per un fotone appunto).

Sempre dal tensore metrico: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, passiamo alle più semplici coordinate sferiche:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (\text{A2.4})$$

ma per le (A2.2) e (A2.3):

$$dt = dt_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow dt^2 = dt_0^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dt_0^2 \underline{B(r)} \text{ e:}$$

$$dr^2 = dr_0^2 / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \cong dr_0^2 \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dr_0^2 \underline{A(r)}, \text{ poich , per Taylor: } 1/(1-x) \cong (1+x). \text{ Inoltre,}$$

non si ha contrazione di Lorentz sulle direzioni trasversali (ad esempio, y e z , oppure anche θ e φ), da cui, per la (A2.4):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{A2.5})$$

(e dopo aver ribattezzato r e t) che   la Soluzione di Schwarzschild. Applicandola al fotone:

$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$; inoltre, considerando luce che viaggia radialmente verso il Sole, possiamo annullare le componenti in $d\theta$ e $d\varphi$:

$$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2; \quad (\text{A2.6})$$

la velocit  della luce   $c = dr/dt$ lontano dalla massa del Sole, mentre in prossimit  dello stesso vale la (A2.6), dalla quale si ricava che:

$$V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c; \quad (\text{A2.7})$$

essendo quindi: $B(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]$ e $A(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]^{-1} \cong [1 + \frac{2GM}{rc^2}]$, allora dagli sviluppi in serie

sulla variabile $\frac{2GM}{rc^2}$ applicati alla (A2.7), si ha banalmente che:

$$V/c = ([1 - \frac{2GM}{rc^2}])^{1/2} / [1 + \frac{2GM}{rc^2}]^{1/2} \cong [1 - \frac{2GM}{2rc^2}][1 - \frac{2GM}{2rc^2}] \cong [1 - \frac{2GM}{rc^2}], \text{ ossia:}$$

$$V \cong c[1 - \frac{2GM}{rc^2}] \quad (\text{A2.8})$$

MENDELEEV DENTRO EINSTEIN

(LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ NASCOSTA NELLA TAVOLA PERIODICA DEGLI ELEMENTI)
(LA COSTANZA DELLA VELOCITÀ DELLA LUCE IN CHIMICA)

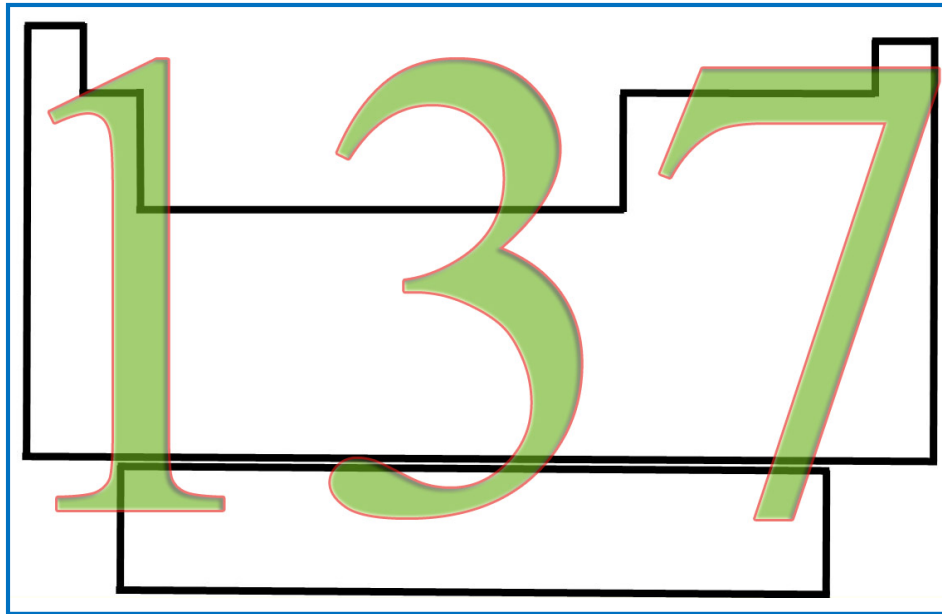


Fig. 1: La Tavola Periodica degli Elementi (Mendeleev-1869).

Sapiamo che la Teoria della Relatività di Einstein si fonda su due principi:

-Principio di Relatività: *le leggi fisiche assumono la stessa forma in tutti i sistemi inerziali* (cioè in moto relativo a velocità costante); non avendo infatti senso il moto assoluto rispetto ad un etere immobile che non esiste, tutti i sistemi di riferimento sono laboratori alla pari per verificarvi le leggi della fisica e non esistono dunque sistemi di riferimento privilegiati.

-Principio di Costanza della Velocità della Luce: *la velocità della luce nel vuoto ha in ogni sistema di riferimento inerziale sempre il valore $c=300.000$ km/s.*

Non importa dunque se la inseguì a 299.000 km/s o se fuggì da essa sempre con tale velocità; la luce nel vuoto sfuggirà o ti rincorrerà sempre a 300.000 km/s! ($c=299.792,458$ km/s) Essa è dunque una velocità limite.

Riguardo la velocità di rotazione dell'elettrone intorno al nucleo (al protone) in un atomo di

idrogeno H, si ha, per la (A4) in Appendice: $v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \rightarrow (Z=1 \text{ ossia un solo protone in H ed$

$n=1$, ossia primo ed unico orbitale) $\rightarrow v_{el_in_H} = \frac{e^2}{2h\varepsilon_0} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s} \cong \frac{c}{137}$. Tra parentesi,

$\alpha \cong \frac{1}{137}$ è la Costante di Struttura Fine. Se invece imponiamo all'elettrone la velocità della luce c , sempre mentre esso se ne sta sul suo primo orbitale ($n=1$), dobbiamo scrivere che:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} = \frac{Ze^2}{2h\varepsilon_0} = c = Z \frac{e^2}{2h\varepsilon_0} = Z v_{el_in_H} = Z \frac{c}{137} \rightarrow \boxed{Z=137}$$

Sulla Tavola Periodica degli Elementi, a livello di numero atomico Z , oggi giorno ci si aggira intorno al 118, che è un numero di taglia simile al numero 137 e parrebbe che 137 rappresenti dunque una sorta di limite superiore, al quale il numero 118 è già pericolosamente vicino. Dunque, la Tavola Periodica di Mendeleev ci indirizza, in qualche modo, verso il Principio Relativistico di Costanza della Velocità della Luce (velocità limite).

APPENDICE - Il modello atomico di Bohr

Si ha che: $E = h\nu$, $E = mc^2$. Poi, l'equilibrio tra forza elettrostatica e forza centrifuga, nel sistema nucleo elettrone, fornisce:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}; \quad (A1)$$

(Z è il numero atomico, cioè il numero di protoni (+) nel nucleo) poi, con ovvietà:

$$mc^2 = h\nu = mcv \gg \gg h = mc \frac{c}{v} = mc\lambda, \text{ da cui } \lambda = \frac{h}{mc}. \text{ Ora, per una particella con massa a riposo}$$

non nulla, si ha invece: $\lambda = \frac{h}{mv}$ (lunghezza d'onda di De Broglie, 1923).

Anche alla materia vengono dunque associate caratteristiche ondulatorie, in quanto una sfuggente particella non può essere ridotta ad un punto senza dimensioni, ma bensì ad una nuvoletta entro cui è più probabile trovare la particella stessa; matematicamente parlando: un'onda.

Se ora si suppone che la circonferenza dell'orbitale percorso dall'elettrone è n volte λ , allora:

$$mv\lambda = h = mv \frac{2\pi r}{n}, \text{ da cui:}$$

$$v = nh/2\pi mr \quad (A2)$$

e qui "n" è il numero quantico principale.

(tra parentesi, l'espressione $mv \cdot \lambda = h \rightarrow \Delta p \cdot \Delta x = h$ la consideriamo qui come una prima imbastitura del Principio di Indeterminazione di Heisenberg).

Ripartendo ora dalla (A1): $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m}{r} \left(\frac{nh}{2\pi mr} \right)^2$ da cui

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2} \quad (A3)$$

ossia $r = k \frac{n^2}{Z}$. Inserendo ora la (A3) nella (A2), si ottiene:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\epsilon_0} \quad (A4)$$

Per la 1^a orbita dell'idrogeno (n=1 e Z=1), si ha il raggio di Bohr ($r = 0,529 \cdot 10^{-10} m = 0,529 A$).

Considerando ora $v=0$ a distanza infinita dal nucleo, segue che il lavoro necessario per portare l'elettrone da r ad infinito è:

$$V(r) = (-U) = \int_{R=r}^{R=\infty} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R=r}^{R=\infty} \frac{Ze^2}{R^2} dR = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \text{ Per l'energia totale:}$$

$$E = E_k + U = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}, \text{ ma per la (1) si ha che } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}, \text{ da cui:}$$

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8n^2 \epsilon_0^2 h^2}. \quad (A5)$$

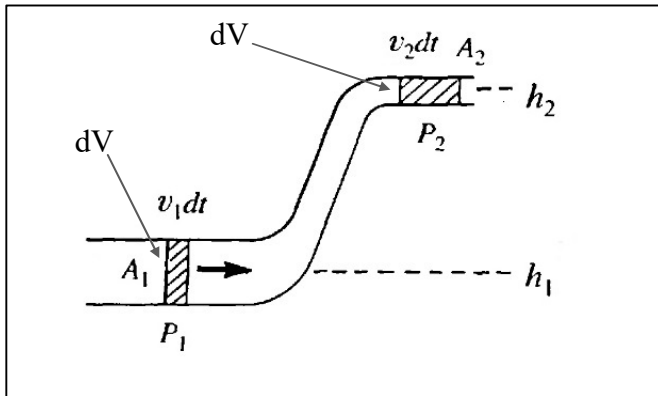
Dunque, nel passaggio da b ad a, si ha:

$$E_b - E_a = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8n_b^2 \epsilon_0^2 h^2} + \frac{Z^2 e^4 m_e}{8n_a^2 \epsilon_0^2 h^2} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right) = KZ^2 \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right) = h\nu \quad (A6)$$

Ora, essendo che $\frac{1}{\lambda} = \frac{h\nu}{hc} = \frac{\Delta E}{hc}$, segue che: $\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8h^3 \epsilon_0^2 c} \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right).$

NAVIER-STOKES DENTRO BERNOULLI

– PREMESSA: EQUAZIONE DI BERNOULLI



$$\rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{const} \quad , \text{ che è l'Equazione di Bernoulli.}$$

Energia cinetica: $\frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}(\rho dV)v^2$

Energia potenziale: $(dm)gh = (\rho dV)gh$

Energia associata alla pressione:

$$F \cdot ds = (pS) \cdot ds = p(Sds) = p dV .$$

Per la conservazione dell'energia:

$$p_1 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 + \rho dV g h_1 =$$

$$= p_2 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 + \rho dV g h_2 = \text{const} \rightarrow$$

- L' **Equazione di Navier-Stokes:**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \phi + \frac{\eta}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

$\frac{\vec{F}}{M} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \dots}$
 Accelerazione generale

$-\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$
 Forze di pressione

$-\vec{\nabla} \phi$
 Forze di gravità

$+\frac{\eta}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{v}$
 Forze viscoso

Ora, se ci troviamo in uno stato stazionario, dove $\vec{v} \neq f(t) \gg \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, poi $\rho = \text{const}$, e dove

inoltre non si hanno forze viscoso, la Equazione di Navier-Stokes si riduce sicuramente a quella di

Eulero: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{g}$ (infatti vale la seguente relazione vettoriale, come è possibile

verificare direttamente: $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2$), e, anzi, visto che, come

dicevamo, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, si ha: $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{g}$. Se ora consideriamo la divergenza e il gradiente in

termini di derivata direzionale, ed in direzione $d\vec{l}$, nella fattispecie, allora si ha $\frac{dv}{dl}$ in luogo di

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, e $\frac{dp}{dl}$ in luogo di $\vec{\nabla} p$. Inoltre, l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ (che si esercita lungo z, verso il

basso) va proiettata lungo $d\vec{l}$ ($\frac{dz}{dl}$ è il relativo coseno direttore), dunque, in totale:

$v \frac{dv}{dl} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} - g \frac{dz}{dl}$, da cui: $v dv + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0$ ed effettuando l'integrazione di quest'ultima:

$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0$, e moltiplicando tutto per la densità ρ , si ottiene: $\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gz = 0$ e cioè proprio l'Equazione di Bernoulli.

ZWICKY DENTRO THOMSON

Sussiste una strana parentela tra:

- le galassie (compresi i loro ammassi) (ZWICKY) e
- l'elettone (THOMSON).

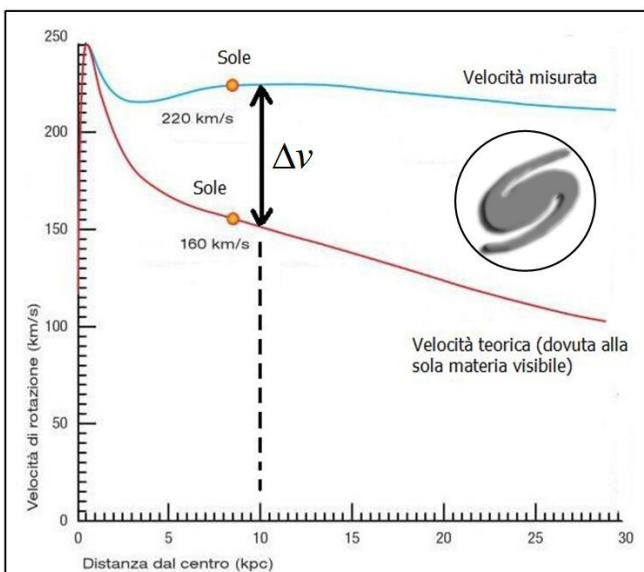
LA QUESTIONE DELLA MATERIA OSCURA

- Il problema con la Via Lattea
- Il problema con l'Ammasso di Galassie della Vergine
- Il problema con l'Ammasso di Galassie della Chioma di Berenice
- Giustificazione alternativa per l'ammanto di massa

Il problema con la Via Lattea: gas e stelle orbitano intorno al centro della galassia e gas e stelle che sono più distanti dal centro della galassia rispetto al Sole dovrebbero orbitare con una velocità minore, mentre invece succede che la velocità non decresce all'aumentare della distanza dal centro galattico. Si stima che la massa barionica all'interno dell'orbita galattica del Sole sia mediamente di 10^{11} stelle ($M \approx M_{MW} = 10^{11} M_S$) come il Sole. Invece, il suddetto comportamento anomalo, nonché il comportamento orbitale di gruppi satellite di stelle, molto lontane (10^6 a.l.), che orbitano intorno alla Via Lattea, ci fanno pensare che la massa totale della galassia sia almeno 10 volte quella barionica della materia direttamente identificabile, come un dark halo tutto intorno alla galassia visibile. La galassia nana sferoidale Leo I orbita intorno alla Via Lattea ad una distanza $r = 230 \text{ kpc} \approx 7 \times 10^{21} \text{ m}$, ad una velocità v di circa: $v = 177 \text{ km/s} = 1,77 \times 10^5 \text{ m/s}$.

Sappiamo poi dalla fisica che: $M_{LeoI} \frac{v^2}{r} = \frac{GM_{MW}M_{LeoI}}{r^2} \rightarrow M_{MW} = \frac{rv^2}{G} = 3,34 \cdot 10^{42} \text{ kg} = 1,6 \cdot 10^{12} M_S$, dunque una ventina di volte la massa barionica della Via Lattea.

Curva di rotazione:



Curva di rotazione della Via Lattea.

$M_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ è la massa del Sole; $M_{BG} \approx 10^{11} M_S \approx 2 \cdot 10^{41} \text{ kg}$ è la massa barionica della Via Lattea. Nella nostra galassia (la Via Lattea) il Sole è ad una distanza di 8,5 kpc dal centro e dovrebbe

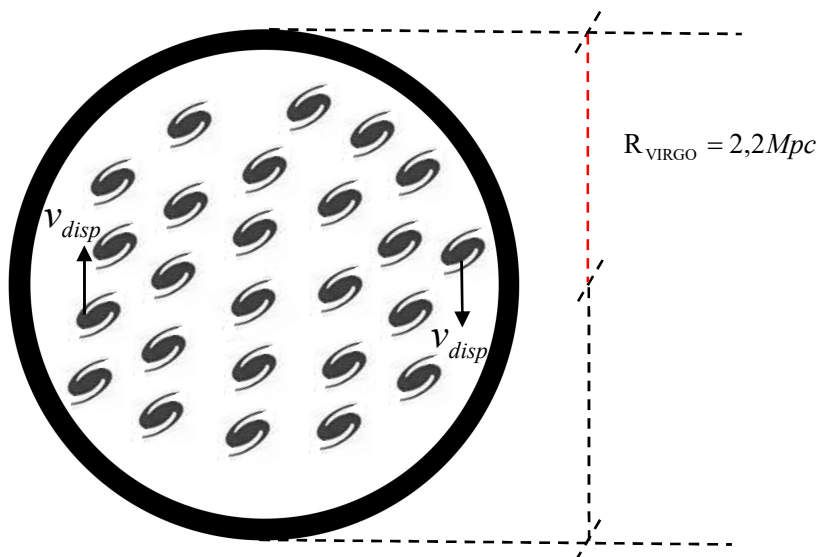
avere una velocità di rotazione di 160 km/s, se essa fosse dovuta solo alla materia barionica, cioè quella delle stelle e di tutta la materia visibile. Ma noi invece sappiamo che la velocità del Sole è 220 km/s. Dunque vi è una discrepanza Δv di 60 km/s: ($\Delta v = 220 - 160 = 60$ km/s). ($1 \text{ kpc} = 1000 \text{ pc}$; $1 \text{ pc} = 1 \text{ Parsec} = 3,26 \text{ a.l.} = 3,08 \cdot 10^{16} \text{ m}$; $1 \text{ anno luce a.l.} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$)

($R_{\text{Gal-Sun}} = 8,5 \text{ kpc} = 27,71 \cdot 10^3 \text{ a.l.} = 2,62 \cdot 10^{20} \text{ m}$ è la distanza del Sole dal centro della Via Lattea). Se il Sole fosse stato ad una distanza R_{GAL} di 30 kpc, avrebbe avuto la stessa velocità di 220 km/s, ma la discrepanza Δv sarebbe stata più grande. In generale, sappiamo dalle curve di rotazione che (vedere figura qui sopra):

$$\Delta v = k \sqrt{R_{\text{Gal-Sun}}}, \text{ dove } k = \text{costante}; \rightarrow k = \frac{\Delta v}{\sqrt{R_{\text{Gal-Sun}}}} = \frac{60 \cdot 10^3}{\sqrt{2,62 \cdot 10^{20}}} \cong 3,7 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s}. \quad (1.1)$$

Ricordiamo, per ultimo, il rapporto massa luminosità rilevato per la Via Lattea rispetto allo stesso rapporto calcolato per il Sole: $\frac{M_{\text{MW}}}{L_{\text{MW}}} \approx 100 \frac{M_{\text{Sun}}}{L_{\text{Sun}}}$; ciò starebbe a significare che la maggior parte della massa della galassia è non visibile.

Il problema con l'Ammasso di Galassie della Vergine:



Ammasso di galassie della Vergine.

$1 \text{ pc} \cong 3,26 \text{ a.l.} \cong 3,08 \cdot 10^{16} \text{ m}$ è il parsec, $v_{\text{disp}} \cong 1530 \text{ km/s} = 1,53 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ (è la v nell'ammasso).

$R_{\text{VIRGO}} = 2,2 \text{ Mpc} \cong 2,2 \cdot 10^6 \cdot 3,08 \cdot 10^{16} \text{ m} = 6,776 \cdot 10^{22} \text{ m}$ (è il raggio dell'ammasso).

$N_{\text{GAL}} \cong 1350$ (N di galassie nell'ammasso); considerando, come per la Via Lattea, 10^{11} stelle come il Sole per galassia, si ha: $M_{\text{VIRGO-baryonic}} \cong 1350 \cdot 10^{11} M_{\text{S}} = 1350 \cdot 10^{11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} = 2,68 \cdot 10^{44} \text{ kg}$ ed essendo la velocità delle galassie legata a massa e raggio dell'ammasso, si ha:

$$M_{\text{Gal}} \frac{v_{\text{disp}}^2}{R_{\text{VIRGO}}} = \frac{GM_{\text{VIRGO}} M_{\text{Gal}}}{R_{\text{VIRGO}}^2} \rightarrow v_{\text{disp}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{VIRGO}}}{R_{\text{VIRGO}}}} \text{ e}$$

$$\rightarrow M_{\text{VIRGO}} = \frac{v_{\text{disp}}^2 R_{\text{VIRGO}}}{G} = \frac{1,53^2 \cdot 10^{12} \cdot 6,776 \cdot 10^{22}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 2,38 \cdot 10^{45} \text{ kg} = 1,19 \cdot 10^{15} M_{\text{S}} > M_{\text{VIRGO-baryonic}}.$$

Dunque, per giustificare la v_{disp} osservata, occorre una massa maggiore di quella barionica osservata, da cui si ha massa nascosta o qualche altra forza cosmica invisibile per giustificare una

così forte velocità di 1530 km/s. Se la massa dell'ammasso fosse solo quella barionica delle galassie, allora si avrebbe una velocità v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{GM_{\text{VIRGO-baryonic}}}{R_{\text{VIRGO}}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,68 \cdot 10^{44}}{6,776 \cdot 10^{22}}} = 0,514 \cdot 10^6 \text{ m/s}; \text{ si ha dunque un } \Delta v \text{ pari a:}$$

$$\Delta v = v_{\text{disp}} - v_B = (1,53 - 0,514)10^6 = 1,016 \cdot 10^6 \text{ m/s}. \text{ Valutiamo ora la costante k:}$$

$$k = \frac{\Delta v}{\sqrt{R_{\text{VIRGO}}}} = \frac{1,016 \cdot 10^6}{\sqrt{6,776 \cdot 10^{22}}} \cong 3,91 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s}. \quad (1.2)$$

Una conferma della enorme velocità di rotazione la si ha anche dalla valutazione della velocità termica attribuibile agli atomi di idrogeno presenti tra le varie galassie; infatti, tutto l'ammasso è una potente sorgente di raggi X ed i raggi X sono stati rilevati come provenienti anche dall'idrogeno intergalattico. Dalla Legge di Wien sappiamo che tale gas è ad una temperatura di circa $3 \times 10^7 \text{ K}$: $T = 0,2897 \cdot 10^{-2} / \lambda_X = 3 \cdot 10^7 \text{ K}$ (Legge di Wien); evidentemente, si è misurata una lunghezza d'onda X pari a $\lambda_X = 9,66 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Ora, sappiamo dalla termodinamica che, per quel gas

ionizzato: $E_K = \frac{1}{2} m_H v^2 = \frac{1}{2} m_P v^2 = \frac{3}{2} kT$, da cui: $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_P}} = 0,862 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, ossia circa la v_{disp} osservata sulle galassie dell'ammasso.

Il problema con l'Ammasso di Galassie della Chioma di Berenice:

$v_{\text{disp}} \cong 1000 \text{ km/s} = 10^6 \text{ m/s}$ (è la velocità nell'ammasso). Distanza da noi: $r = 99 \text{ Mpc} = 321 \text{ M a.l.} = 3,05 \times 10^{24} \text{ m}$. Redshift $z = 0,0231$, da cui, per la velocità di allontanamento da noi, si ha: $v_{\text{All}} = zc = 6,925 \times 10^6 \text{ m/s}$. L'ammasso appare sotto un angolo θ di $100' = 0,029 \text{ rad}$, da cui:

$$R_{\text{COMA}} = \frac{1}{2} r \theta = 1,35 \text{ Mpc} \cong 4,16 \cdot 10^{22} \text{ m} \text{ (che è il raggio dell'ammasso).}$$

$N_{\text{GAL}} \cong 800$ (N di galassie nell'ammasso); considerando, come per la Via Lattea, 10^{11} stelle come il Sole per galassia, si ha: $M_{\text{COMA-baryonic}} \cong 800 \cdot 10^{11} M_S = 800 \cdot 10^{11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} = 1,6 \cdot 10^{44} \text{ kg}$ ed essendo la velocità delle galassie legata a massa e raggio dell'ammasso, si ha:

$$M_{\text{Gal}} \frac{v_{\text{disp}}^2}{R_{\text{COMA}}} = \frac{GM_{\text{COMA}} M_{\text{Gal}}}{R_{\text{COMA}}^2} \rightarrow v_{\text{disp}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{COMA}}}{R_{\text{COMA}}}} \text{ e}$$

$$\rightarrow M_{\text{COMA}} = \frac{v_{\text{disp}}^2 R_{\text{COMA}}}{G} = \frac{10^{12} \cdot 4,16 \cdot 10^{22}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,24 \cdot 10^{44} \text{ kg} = 3,12 \cdot 10^{14} M_S > M_{\text{COMA-baryonic}}.$$

Dunque, per giustificare la v_{disp} osservata, occorre una massa maggiore di quella barionica osservata, da cui si ha massa nascosta o qualche altra forza cosmica invisibile per giustificare una così forte velocità di 1000 km/s. Se la massa dell'ammasso fosse solo quella barionica delle galassie, allora si avrebbe una velocità v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{GM_{\text{COMA-baryonic}}}{R_{\text{COMA}}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,6 \cdot 10^{44}}{4,16 \cdot 10^{22}}} = 0,506 \cdot 10^6 \text{ m/s}; \text{ si ha dunque un } \Delta v \text{ pari a:}$$

$$\Delta v = v_{\text{disp}} - v_B = (1 - 0,506)10^6 = 0,494 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Una conferma della enorme velocità di rotazione la si ha anche dalla valutazione della velocità termica attribuibile agli atomi di idrogeno presenti tra le varie galassie; infatti, tutto l'ammasso è una potente sorgente di raggi X ed i raggi X sono stati rilevati come provenienti anche dall'idrogeno intergalattico. Dalla Legge di Wien sappiamo che tale gas è ad una temperatura di circa $4 \times 10^7 \text{ K}$:

$T = 0,2897 \cdot 10^{-2} / \lambda_X = 4 \cdot 10^7 K$; evidentemente, si è misurata una lunghezza d'onda X pari a $\lambda_X = 7,2 \cdot 10^{-11} m$. Ora, sappiamo dalla termodinamica che, per quel gas ionizzato:

$E_K = \frac{1}{2} m_H v^2 = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{3}{2} kT$, da cui: $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_p}} = 0,996 \cdot 10^6 m/s$, ossia circa la v_{disp} osservata sulle galassie dell'ammasso.

Una curiosità sull'Ammasso della Chioma: ricordiamo dalla fisica che $x = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} (at)t = \frac{1}{2} vt$, da cui: $t = \frac{2x}{v}$, che usata nella definizione di accelerazione a ci dà: $a = \frac{v}{t} = \frac{v}{\frac{2x}{v}} = \frac{v^2}{2x}$;

consideriamo ora il parametro k : $k = \sqrt{2a} = \frac{v}{\sqrt{x}}$ e se $v=v_{All}$ e x è la distanza r dell'ammasso da

$$\text{noi, allora: } k = \sqrt{2a} = \frac{v_{All}}{\sqrt{r}} = \frac{6,925 \cdot 10^6}{\sqrt{3,05 \cdot 10^{24}}} = 3,96 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s} \quad (1.3)$$

Giustificazione alternativa per l'ammacco di massa:

Una alternativa alla supposizione della esistenza della materia oscura può essere quella dell'esistenza di una accelerazione di trascinamento mareale g_{EL} , dovuta al moto di tutto l'universo, che è poi la stessa accelerazione a_{UNIV} dell'universo appunto.

Con riferimento alle equazioni (1.1), (1.2) ed (1.3), ci accorgiamo che, casualmente:

$$k = \sqrt{2G \frac{m_e}{r_e^2}} = 3,91 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s}, \text{ dove: } m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg \text{ è la massa dell'elettrone e:}$$

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e \cdot c^2} \cong 2,8179 \cdot 10^{-15} m \text{ è il raggio classico dell'elettrone.}$$

In un siffatto universo si ha che la massa è maggiore di quella visibile (come attualmente predicato) e la densità è quella osservata:

$$\rho = M_{Univ} / \left(\frac{4}{3} \pi \cdot R_{Univ}^3 \right) = 2,32273 \cdot 10^{-30} kg / m^3$$

$$M_{Univ} = 1,59486 \cdot 10^{55} kg$$

$$R_{Univ} = 1,17908 \cdot 10^{28} m$$

$$T_{Univ} = \frac{2\pi R_{Univ}}{c} = 2,47118 \cdot 10^{20} s$$

La composizione di tutte le piccole interazioni elettriche nell'Universo va a comporre l'Universo stesso; infatti, casualmente:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}} \quad (\text{UNIFICAZIONE GRAVITÀ ELETTROMAGNETISMO})$$

Inoltre, sempre casualmente: $m_e c^2 = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}}$, $G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} = a_{Univ} = G \frac{m_e}{r_e^2} = g_{EL} = 7,62 \cdot 10^{-12} m/s^2$,

$h = \frac{2m_e c^2}{T_{Univ}}$ (solo numericamente), $R_{Univ} = \sqrt{N} r_e$ (essendo $N = M_{Univ} / m_e = 1,74 \cdot 10^{85}$),

$T_{Univ} \frac{G m_e^2}{h r_e} = \frac{1}{137} = \alpha$, $T_{CMBR} = \left(\frac{h}{2m_e \sigma} \frac{M_{Univ}}{4\pi R_{Univ}^2} \right)^{1/4} \cong 2,7 K$ (dove $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W / m^2 K^4$ è la Costante di Stefan-Boltzmann);

$$T_{CMBR} = \left(\frac{3c^3}{80\pi\sigma} \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^3} \right)^{1/4} = \left(\frac{72Gc^{11}h^3\varepsilon_0^4 m_e^6}{\pi^2 e^8 k^4} \right)^{1/4} = 2,72846(02218319896)K \cong 2,72846K$$

-Essendo poi, per Heisenberg: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2$

(con il segno di eguaglianza, per semplicità, e $\hbar / 2 = h / 4\pi = 0,527 \cdot 10^{-34} J \cdot s$), possiamo dire

che: $\Delta p \cdot \Delta x = m_e c \cdot \Delta x = m_e c \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^2} G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} \right] = 0,527 \cdot 10^{-34}$ (numericamente).

Per finire, osserviamo che: $k = \sqrt{2G \frac{m_e}{r_e^2}} = \sqrt{\frac{2GM_{Univ}}{R_{Univ}^2}}$.

EINSTEIN DENTRO FIZEAU

L'esperimento di Fizeau.

Nel 1849, molto prima della formulazione della Teoria della Relatività Ristretta da parte di Einstein (1905), il fisico francese A.H.L. Fizeau condusse degli studi sulla velocità della luce nell'acqua e nei fluidi in movimento.

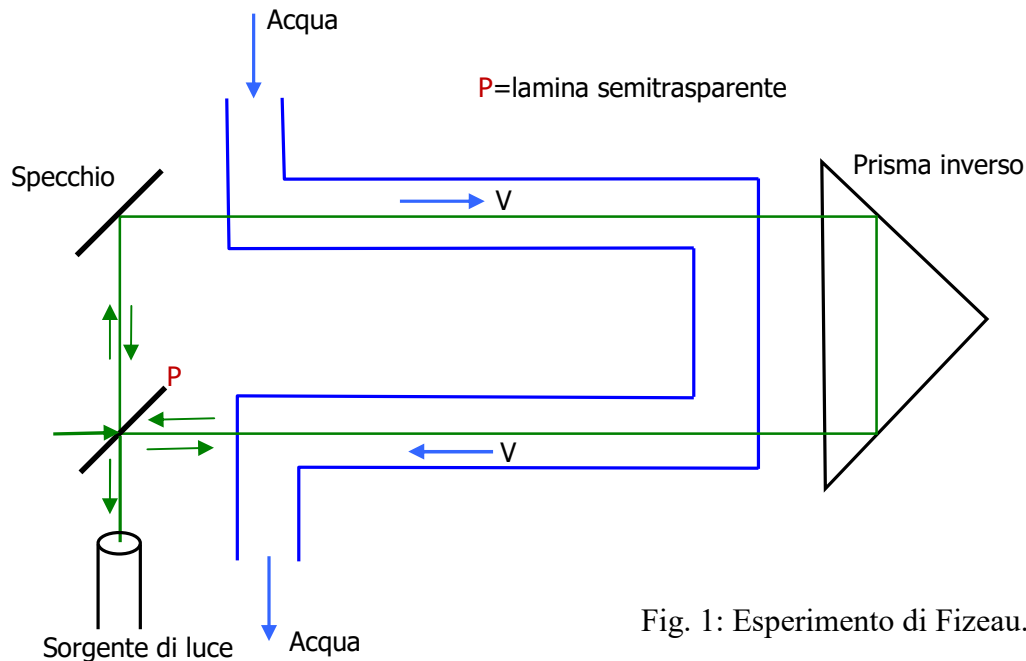


Fig. 1: Esperimento di Fizeau.

Nell'acqua in quiete la luce ha velocità $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,33} \cong 225.000 \text{ km/s}$, dove $n=1,33$ è l'indice

di rifrazione dell'acqua. Se ora l'acqua, o comunque il fluido nel quale si va a misurare la velocità della luce, scorre a sua volta con velocità V , allora, secondo i risultati di Fizeau, la velocità complessiva della luce nel fluido in scorrimento è:

$$v = \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (1)$$

in totale disaccordo con la fisica classica, secondo cui si dovrebbe avere più semplicemente:

$v = \frac{c}{n} + V$. Anni dopo, la TRR ha dato una spiegazione teorica della (1). Infatti, per il Teorema di

Addizione delle Velocità, si può scrivere che:

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{Vc}{nc^2}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{V}{nc}\right)}; \text{ ora, moltiplicando numeratore e denominatore per } \left(1 - \frac{V}{nc}\right), \text{ si ha:}$$

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{V}{nc}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{nc}\right)}{1 - \left(\frac{V}{nc}\right)^2} = \frac{\frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{V^2}{nc}}}{1 - \cancel{\left(\frac{V}{nc}\right)^2}}, \text{ ma le quantità } \frac{V^2}{nc} \text{ a numeratore e } \left(\frac{V}{nc}\right)^2 \text{ a}$$

denominatore sono ciascuna trascurabile ($\ll 1$) rispetto agli altri addendi e possono essere appunto

trascurate, da cui l'asserto: $v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

SNELL DENTRO GALILEI

Già Galileo Galilei aveva notato che un corpo che rotola lungo un arco di cerchio arriva a valle prima di un corpo che invece rotola lungo la corda, pur essendo quest'ultima ben più corta dell'arco. Tuttavia, la curva che assicura il tempo di percorrenza più breve non è esattamente l'arco di cerchio, ma bensì la cicloide, che è simile sì all'arco di cerchio, ma non esattamente coincidente con quest'ultimo.

1-Il bagnino

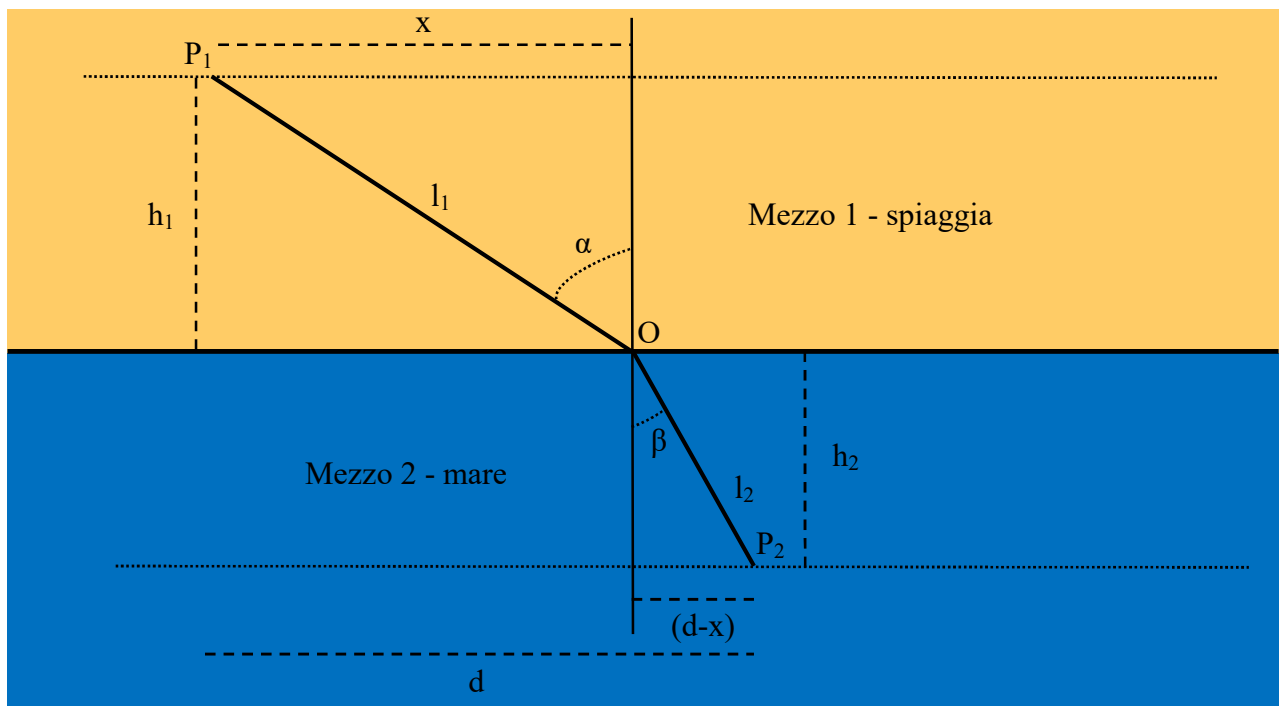


Fig. 1: Il bagnino in P_1 vede il bagnante in difficoltà in P_2 .

Il bagnino in P_1 deve raggiungere e soccorrere il bagnante in P_2 ; egli, però, sa anche che la corsa sulla spiaggia avviene a velocità v_1 maggiore della velocità v_2 del nuoto in acqua, dunque il percorso geometricamente più breve, dato dal segmento P_1 - P_2 non è il più veloce, perché fa stare il bagnino troppo in acqua, dove è più lento.

Valutiamo il tempo di percorrenza del viaggio del bagnino:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Ora, per valutare il minimo di t_B , calcoliamo la derivata ed annulliamola:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0, \text{ ma si ha che:}$$

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{e} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta, \text{ da cui: } \frac{dt_B}{dx} = \frac{2 \sin \alpha}{v_1} - \frac{2 \sin \beta}{v_2} = 0, \text{ ossia:}$$

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} = k, \quad (1.1)$$

dunque, in entrambi gli strati (mezzo 1 e mezzo 2), il rapporto tra il seno dell'angolo con la verticale e la velocità è costante.

2-Legge di Snell

Se i percorsi l_1 ed l_2 fossero dei raggi di luce ed i mezzi 1 e 2 fossero, ad esempio, aria ed acqua,

considerando che, per gli indici di rifrazione n_1 ed n_2 si ha, per definizione: $n_1 = \frac{c}{v_1}$ e $n_2 = \frac{c}{v_2}$,

si ottiene la Legge di Snell: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 / c}{v_2 / c} = \frac{c / v_2}{c / v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, che è la responsabile del fatto che una scala semi immersa in una piscina la vediamo piegata.

3-Principio di Fermat

Essendo che la Legge di Snell è qui scaturita anche come calcolo del tempo di percorrenza minimo, viene confermato il Principio di Fermat, secondo cui il raggio di luce segue il cammino più breve.

4-Brachistocrona

Anche un corpo che cade o scivola sotto l'effetto del campo gravitazionale, così come un raggio di luce nel caso della rifrazione (da aria ad acqua) o come il bagnino da spiaggia ad acqua, passa da punti ad una certa velocità (minore, in questo caso) a punti ad un'altra velocità (maggiore, in questo caso). Dunque, si può immaginare che un corpo che scivola verso il basso, sotto l'effetto del campo gravitazionale, attraversa infiniti strati di spessore infinitesimo, ognuno a velocità diversa.

Con riferimento alla Fig. 2, viene allora spontaneo chiedersi, anche qui, quale sia il percorso più veloce.

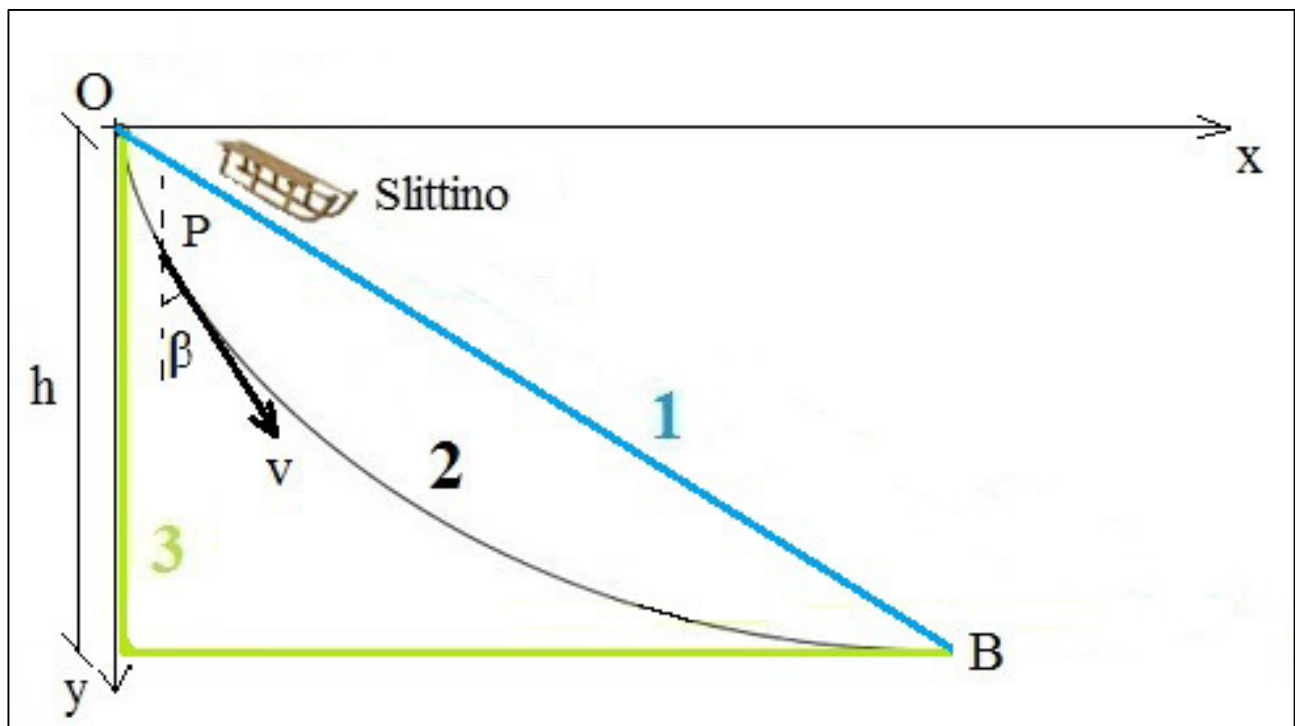


Fig. 2: Slittino che scivola senza attrito lungo il piano inclinato (1) o lungo la brachistocrona (2) o lungo il percorso (3) di caduta verticale + scivolamento fino a destinazione.

Sicuramente il più veloce non è il piano inclinato (1); è invece più veloce la brachistocrona (2). Intuitivamente, essa intelligentemente parte molto verticale, guarda caso all'inizio (in cima), dove la velocità è minore.

Consideriamo la (per ora) generica curva (2), con il vettore velocità di scivolamento v nel generico punto P e formante un angolo β con la verticale.

Inoltre, alla partenza O la velocità è nulla e la quota anche, mentre all'arrivo B la velocità sarà una tal v e la quota sarà h e sappiamo dalla meccanica che, in assenza di attrito:

$$\frac{1}{2}mv_{fin}^2 = mgh, \text{ da cui: } v_{fin} = \sqrt{2gh} \text{ e genericamente, a quota } y:$$

$$v = \sqrt{2gy} \quad (4.1)$$

Siamo infatti in un campo di forze conservativo e l'energia potenziale varia solo con la quota (r) e non con il percorso seguito per passare da una quota all'altra

$$(U = -G \frac{Mm}{r}).$$

Come dicevamo, ogni punto P può essere un punto di confine tra uno strato immaginario e l'altro, dunque, in analogia con la Fig. 1 e per l'equazione (1.1), possiamo scrivere:

$$\frac{v}{\sin \beta} = k \rightarrow \frac{v^2}{\sin^2 \beta} = k^2 \text{ e per la (4.1): } \frac{2gy}{\sin^2 \beta} = k^2 \rightarrow y = \frac{k^2}{2g} \sin^2 \beta \text{ e dunque il massimo di } y$$

sarà h , dove infatti $\sin^2 \beta$ è massimo, ossia dove $\sin \beta$ è massimo ($=1$), dunque: $y_{\max} = \frac{k^2}{2g} = h$, e

allora:

$$y = h \sin^2 \beta \quad (4.2)$$

Derivando ora la (4.2) rispetto a β :

$$\frac{dy}{d\beta} = 2h \sin \beta \cos \beta = h \sin 2\beta \quad (4.3)$$

(poiché, per la trigonometria, $2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta$); inoltre, dalla Fig. 2 emerge che $\frac{dx}{dy} = \tan \beta$ e

$$\text{dunque si ha anche che: } \frac{dx}{d\beta} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{d\beta} = 2h \sin \beta \cos \beta \tan \beta =$$

$$= 2h \sin^2 \beta = h(1 - \cos 2\beta) \quad (4.4)$$

(poiché, per la trigonometria, $\sin^2 \beta = \frac{(1 - \cos 2\beta)}{2}$). In definitiva, raggruppando le (4.3) e (4.4), si

ha:

$$\frac{dx}{d\beta} = h(1 - \cos 2\beta)$$

$$\frac{dy}{d\beta} = h \sin 2\beta$$

(4.5)

ed integrando le (4.5), si ottiene:

$$x = h(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta) + C_1$$

$$y = -\frac{h}{2} \cos 2\beta + C_2$$

(4.6)

Ora, visto che nell'origine O si ha che β , x ed y sono tutti nulli, si possono determinare le costanti C_1 e C_2 (uguali rispettivamente a 0 e $h/2$) e le (4.6) diventano:

$$\begin{aligned} x &= \frac{h}{2}(2\beta - \sin 2\beta) \\ y &= \frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta) \end{aligned} \quad \text{Brachistocrona} \quad (4.7)$$

la seconda delle quali, ovviamente, coincide con la (4.2) di partenza.

Le (4.7) sono le equazioni che descrivono la Brachistocrona e descrivono altresì la Cicloide (Fig. 3)

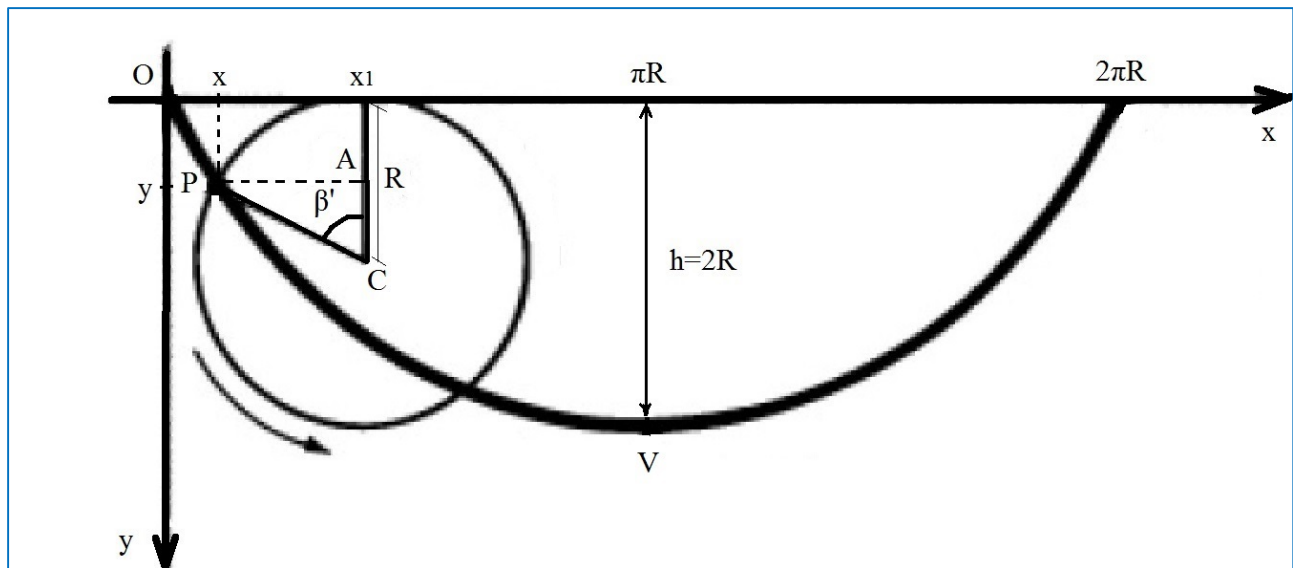


Fig. 3: La Cicloide. Il cerchio, rotolando sull'asse x , descrive la Cicloide col punto P .

Infatti, $x = \overline{Ox_1} - \overline{xx_1}$, ma $\overline{Ox_1} = \text{arco}(\overline{x_1P}) = R\beta'$; inoltre, $\overline{xx_1} = PA = R\sin\beta'$, da cui:

$$x = \overline{Ox_1} - \overline{xx_1} = R\beta' - R\sin\beta' = R(\beta' - \sin\beta') = x \quad (4.8)$$

Invece, riguardo y , si ha semplicemente che:

$$y = \overline{x_1C} - \overline{AC} = R - R\cos\beta' = R(1 - \cos\beta') \quad (4.9)$$

e dunque le (4.8) e (4.9), raccolte insieme, danno le (4.10):

$$\begin{aligned} x &= R(\beta' - \sin\beta') \\ y &= R(1 - \cos\beta') \end{aligned} \quad \text{Cicloide} \quad (4.10)$$

che altro non sono che le (4.7) con $h/2=R$ e $2\beta=\beta'$.

-Tempo di discesa a valle (da O a V, in Fig. 3):

Dalle (4.5) si ottiene:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = h(1 - \cos 2\beta)\dot{\beta}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = h(\sin 2\beta)\dot{\beta}$$

e, ovviamente, per la velocità di caduta v , si ha:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = h^2 \dot{\beta}^2 (1 + \cos^2 2\beta - 2 \cos 2\beta + \sin^2 2\beta) = h^2 \dot{\beta}^2 (2 - 2 \cos 2\beta) = 2h^2 \dot{\beta}^2 (1 - \cos 2\beta) =$$

$$= 4h^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta, \text{ da cui: } \dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{4h^2 \sin^2 \beta} \text{ e per la (4.2), si ha: } \dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{4h^2 (y/h)} = \frac{v^2}{4hy} \text{ ed essendo}$$

che $v = \sqrt{2gy}$, segue che: $\dot{\beta}^2 = \frac{g}{2h}$, dunque: $\dot{\beta} = \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{d\beta}{dt}$ e:

$$\beta = \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot t \quad (4.11)$$

Inserendo ora la (4.11) nelle (4.7):

$$x = \frac{h}{2} \left(\sqrt{\frac{2g}{h}} t - \sin \sqrt{\frac{2g}{h}} t \right)$$

$$y = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{2g}{h}} t \right)$$

Adesso, con riferimento alla Fig. 2, al punto di valle B (che sarebbe anche il punto V della Fig. 3) corrisponde un $\beta = \pi/2$ ed indicando con T_B il tempo di Brachistocrona necessario per l'approdo a tale punto, per la (4.11) si ha:

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{g}{2h}} T_B, \text{ da cui:}$$

$$T_B = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}} \quad (4.12)$$

Volendo fare un confronto con un piano inclinato che va da O a V (rif. Fig. 3), questo avrebbe

lunghezza $l = \sqrt{h^2 + \frac{\pi^2 h^2}{4}} = \frac{h}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$ e chiamando φ l'angolo di inclinazione del piano inclinato

stesso, si ha: $\sin \varphi = \frac{h}{\frac{h}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$ e l'accelerazione "a" con cui avviene la scivolata lungo

il piano è: $a = g \sin \varphi = \frac{2g}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$ ed essendo che $l = \frac{1}{2} a T_{p.i.}^2 = \frac{g}{\sqrt{\pi^2 + 4}} T_{p.i.}^2$ (con $T_{p.i.}$ il tempo di

scivolata lungo il piano inclinato), allora: $T_{p.i.} = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{h(\pi^2 + 4)}{2g}} > T_B = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}$.

-Brachistocrona curva Tautocrona:

Con riferimento alla Fig. 3, se una slitta inizia a scivolare verso la valle V, ma non più partendo necessariamente dall'origine O, bensì anche eventualmente da un generico punto $P_0(x_0, y_0)$ più in basso di O (e sempre partendo da fermo), allora il tempo impiegato per giungere in V è sempre lo stesso. Sembra strano il fatto che se parte da più vicino ci metta sempre lo stesso tempo, ma il fatto è che chi parte da più lontano, sempre nel caso della Brachistocrona, prende più rincorsa e alla fine giunge a destinazione (V) sempre nello stesso tempo. Dimostrazione:

se si parte da quota y_0 non necessariamente uguale a zero, allora la velocità raggiunta in y sarà:

$$v = \frac{dl}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}, \text{ con } (y - y_0) \text{ come dislivello percorso e } dl (= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}) \text{ pari alla}$$

lunghezza infinitesima di curva percorsa nel tempo dt. Si ha:

$$dt = \frac{dl}{v} = \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2)}{2g(y - y_0)}} \quad (4.13)$$

Richiamiamo ora le (4.5) nella seguente forma:

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= h(1 - \cos 2\beta)d\beta \\ dy &= h \sin 2\beta d\beta \end{aligned}} \quad (4.14)$$

Inseriamo ora le (4.14) e la seconda delle (4.7) nella (4.13):

$$dt = \sqrt{\frac{[h(1 - \cos 2\beta)d\beta]^2 + [h \sin 2\beta d\beta]^2}{2g[\frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta) - \frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta_0)]}} = \sqrt{\frac{h(1 - \cos 2\beta)^2 + h \sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta)}} d\beta \quad \text{e dunque, visto che in}$$

V l'angolo β vale $\pi/2$:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{h(1 - \cos 2\beta)^2 + h \sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta)}} d\beta = \sqrt{\frac{h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta + \sin^2 2\beta}{\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta}} d\beta = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta}} d\beta = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{2\sin^2 \beta}{2\cos^2 \beta_0 - 1 - 2\cos^2 \beta + 1}} d\beta = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta_0 - \cos^2 \beta}} d\beta = T \end{aligned} \quad (4.15)$$

(poiché, per la trigonometria, $\sin^2 \beta = \frac{(1 - \cos 2\beta)}{2}$ e $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1$)

Adesso, nella (4.15) effettuiamo il seguente cambio di variabile:

$u = \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0}$, da cui: $du = -\frac{\sin \beta}{\cos \beta_0} d\beta$, sicchè la (4.15) diviene (per $\beta = \beta_0 \rightarrow u = 1$ e per $\beta = \pi/2 \rightarrow u = 0$):

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_1^0 \frac{-\sin \beta}{\cos \beta_0 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta_0}}} \frac{\cos \beta_0}{\sin \beta} du = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left| \arcsin u \right|_0^1 = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}, \text{ ossia:}$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}} \quad (T \text{ non dipende da } \beta_0, \text{ ossia non dipende dal punto di partenza !!!!)$$

DOPPLER DENTRO EINSTEIN

Effetto Doppler Relativistico (longitudinale).

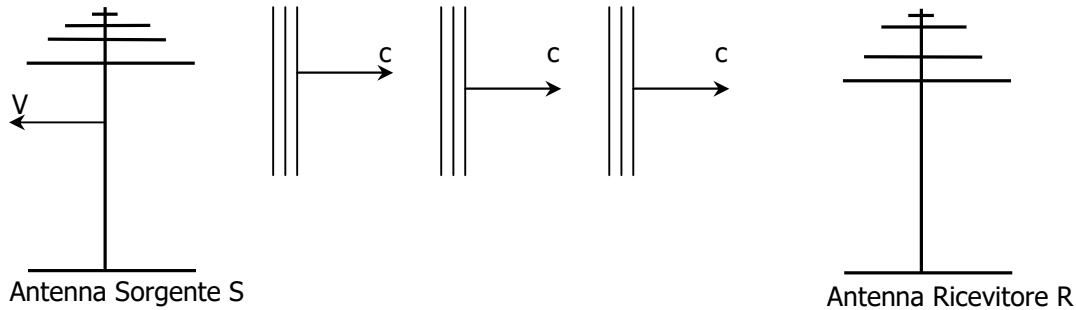


Fig. 1: Effetto Doppler longitudinale (esempio di sorgente S in allontanamento da R con velocità V (β)).

L'antenna sorgente invia a quella ricevente segnali elettromagnetici di periodo T_S ; per il fenomeno della dilatazione del tempo l'antenna ricevente li riceverà con un periodo T'_S tale che:

$T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}}$; inoltre, l'allontanamento di S determinerà un $\Delta T'_S$ tra un fronte d'onda e l'altro

pari a: $\Delta T'_S = \frac{VT'_S}{c} = \frac{V}{c} \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}}$; dunque, si avrà in totale per T_R :

$$T_R = T'_S + \Delta T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} + \beta \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 + \beta) = \frac{T_S}{\sqrt{(1-\beta)\sqrt{1+\beta}}} (1 + \beta) =$$

$$= \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta}} \sqrt{1+\beta} = T_S \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} = T_R$$

che riscriviamo: $T_R = T_S \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}$; (S ed R in allontanamento) (1)

lo stesso vale se è il ricevitore ad allontanarsi. Se poi S ed R sono in avvicinamento, per gli stessi ragionamenti, vale la seguente:

$$T_R = T_S \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \quad (\text{S ed R in avvicinamento}). \quad (2)$$

Il Paradosso dei Gemelli spiegato con l'Effetto Doppler Relativistico!

Supponiamo che uno dei due gemelli parta per un viaggio spaziale a velocità pari a $3/5 c = 180.000$ km/s, in allontanamento dalla Terra per 25 min (misurati sulla Terra) e poi inverta la rotta e ritorni sulla Terra alla stessa velocità, impiegando dunque altri 25 min. Si trascurino ovviamente, per semplicità, le fasi di accelerazione e decelerazione.

Ora, per dimostrare che la dilatazione del tempo agisce anche sulla frequenza cardiaca del gemello in viaggio (ma sempre agli occhi del gemello sulla Terra, nonché al reincontro dei gemelli a fine viaggio), supponiamo, per semplicità, che entrambi i gemelli abbiano un battito cardiaco al secondo e che il gemello sulla Terra trasmetta un impulso radio (dunque a velocità c) ogni secondo, cioè ogni suo battito cardiaco, verso l'astronave, per tenere informato il fratello gemello in viaggio sulla propria frequenza cardiaca. Ricordiamo che per il gemello "vecchio" (old) che resta sulla Terra il viaggio dura, per ipotesi, $25+25=50$ min (3000 battiti cardiaci), mentre, se la dilatazione del tempo è vera, per il gemello giovane (young) la durata sarà di ($V=3/5 c$, cioè $\beta=3/5$):

$$T_{young} = T_{old} \sqrt{(1 - \beta^2)} = T_{old} \sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})} = 50 \text{ min} \sqrt{(1 - \frac{9c^2}{25c^2})} = 40 \text{ min} (=2400 \text{ battiti cardiaci})$$

Invece, sotto un'analisi Doppler del fenomeno, possiamo dire che, per la (1), il gemello sulla Terra (old) trasmette i suoi battiti cardiaci ogni secondo, ma dal gemello in viaggio essi verranno ricevuti, nella fase di andata, ogni due secondi; infatti, durante l'andata ("to"):

$$T_{young}(to) = T_{old}(to) \frac{\sqrt{(1 + \beta)}}{\sqrt{(1 - \beta)}} = 1s \frac{\sqrt{1 + (3/5)}}{\sqrt{1 - (3/5)}} = 2s \text{ e dunque, durante l'andata, il gemello in viaggio, il}$$

cui tempo di andata è di 20 min=1200s=1200 battiti, ha ricevuto dal fratello sulla Terra un battito ogni 2s, cioè solo 600 battiti.

Dunque, il gemello in volo, durante i suoi 20 min(=1200s) di andata, ha constatato su se stesso ovviamente 1200 battiti e ne ha ricevuti però solo 600 del fratello sulla Terra.

Dopo 20 min del gemello in volo, la rotta si inverte ed inizia il ritorno verso la Terra, di altri 20 min (sempre secondo il tempo del gemello in volo). In questi altri 20 min di ritorno ("from"), però, il gemello sulla Terra trasmette sempre ogni secondo, ma quello in volo ora riceve ogni mezzo secondo; infatti, ora, per la (2):

$$T_{young}(from) = T_{old}(from) \frac{\sqrt{(1 - \beta)}}{\sqrt{(1 + \beta)}} = 1s \frac{\sqrt{1 - (3/5)}}{\sqrt{1 + (3/5)}} = 0,5s, \text{ dunque, durante questi suoi altri 20min=}$$

=1200s=1200 battiti su se stesso, il gemello in volo riceve ben 2400 battiti dal fratello dalla Terra.

Dunque, il gemello in volo, durante gli altri suoi 20 min(=1200s) di ritorno, ha constatato su se stesso ovviamente altri 1200 battiti e ne ha ricevuti però ben 2400 dal fratello dalla Terra.

Riassumiamo:

in totale, durante il suo intero viaggio di 20+20=40 min, il gemello in volo ha contato ovviamente 1200+1200=2400 battiti cardiaci su se stesso e ben 600+2400=3000 battiti cardiaci dal fratello gemello rimasto sulla Terra. Deve per forza ritenersi più giovane!!!

KEPLERO DENTRO NEWTON

Le orbite dei pianeti sono ellissi.

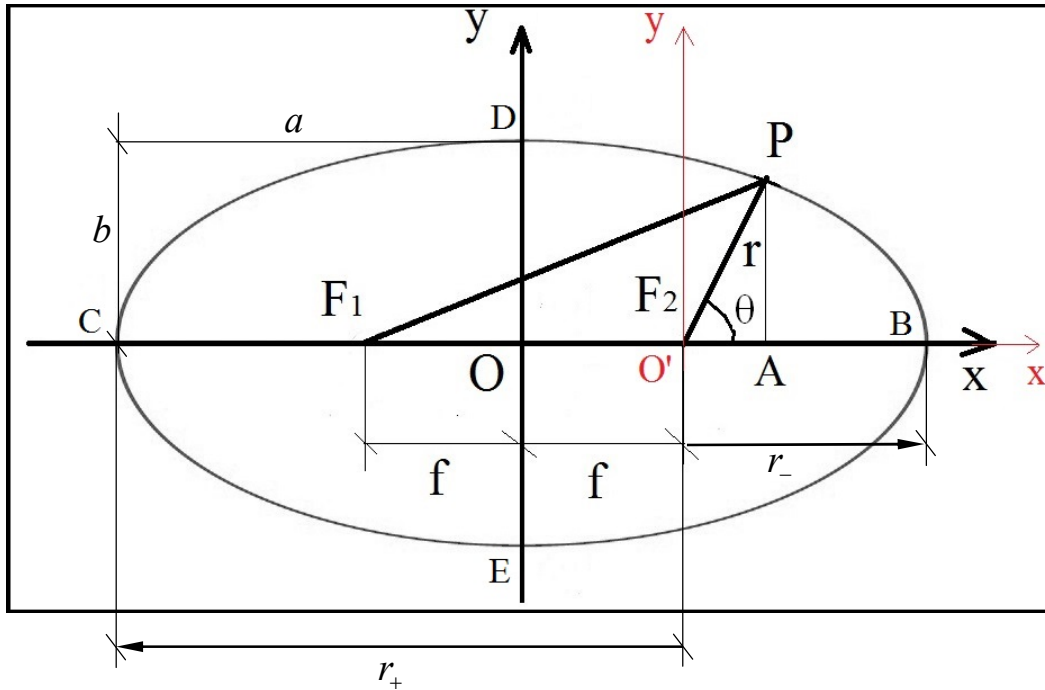


Fig. 1: Ellisse su piano cartesiano Oxy e su piano polare $O'xy$, dove $O' (=F_2)$ è, per comodità di studio, non più al centro, ma in uno dei fuochi, dove notoriamente, a livello planetario, risiede il Sole.

$OB=OC$ è il semiasse maggiore, che chiamiamo “a”.

$OD=OE$ è il semiasse minore, che chiamiamo “b”.

A livello cartesiano l'ellisse la definiamo come quel luogo per cui vale la seguente identità:

$F_1P + F_2P = k = \text{cost}$, cioè la somma delle distanze del punto generico P (dell'ellisse) dai due fuochi è costante. Essendo che, quando P giunge, ad esempio, in B, si ha che:

$F_1P = a + OF_1 = a + f$ e $F_2P = a - OF_2 = a - OF_1 = a - f$ (per la simmetria dei due fuochi rispetto all'origine O) e dunque: $k = F_1P + F_2P = a + f + a - f = 2a$, ossia:

$$F_1P + F_2P = 2a \quad (1)$$

Considerando ora il punto $P(x,y)$ di Fig. 1, la (1) si traduce così:

$$F_1P + F_2P = 2a = \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \quad \text{da cui:}$$

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}; \quad \text{ora, elevando entrambi i membri al quadrato, si ottiene:}$$

$$(x^2 + f^2 - 2fx + y^2) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + (x^2 + f^2 + 2fx + y^2), \quad \text{da cui:}$$

$$-2fx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + 2fx, \quad \text{ossia: } a^2 + fx = a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}. \quad \text{Elevando ora ancora al quadrato entrambi i membri e portando poi tutti gli elementi al primo membro, si ottiene:}$$

$$(a^2 - f^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - f^2) = 0 \quad (2)$$

Ovviamente, anche visivamente si ha che $a \geq f \rightarrow (a^2 - f^2) \geq 0$ e denominando provvisoriamente

$$\sqrt{a^2 - f^2} = w, \quad \text{la (2) diventa: } w^2x^2 + a^2y^2 - a^2w^2 = 0, \quad \text{ossia:}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{w^2} = 1 \quad (3)$$

Adesso, quando $x=0$, dalla (3) si ha che $y=w$, ma $x=0$ significa che ci si trova, ad esempio, nel punto D, da cui $y=OD=w$, ma OD già lo denominammo “b”, ossia il semiasse minore, da cui, per la (3), si ha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

che è l'equazione cartesiana dell'ellisse.

Definiamo ora l'eccentricità “e” come:

$$e=f/a \quad (5)$$

Essendo che f ed a sono positivi ed f non è mai maggiore di a, allora $0 \leq e \leq 1$. Per $e=0$, si ha $f=0$ e dunque, avendo prima detto che:

$$\sqrt{a^2 - f^2} (= w) = b, \quad (6)$$

segue che $a=b$ e la (4) diviene: $x^2 + y^2 = a^2$, ossia un cerchio. Perciò, un cerchio è un'ellisse con eccentricità zero.

Se $e=1$, si è in corrispondenza di un caso degenero, in quanto, per la definizione stessa di eccentricità, $f=a$ e dunque la (1) ci dice che $F_1P + F_2P=2f$, ma ciò è possibile solo se la figura geometrica in esame è la congiungente di F_1 con F_2 ; saremmo ossia in un caso di rotta di collisione?

Per la (5) e la (6) si ha che:

$$b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1 - e^2} \quad (7)$$

Si ha inoltre: $r_{\pm} = (1 \pm e)a$, poiché, osservando la Fig. 1, si ha che: $r_+ = a + f = a + ea = (1 + e)a$ e

$r_- = a - f = a - ea = (1 - e)a$ e definendo L come semilato retto ($\frac{1}{L} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})$), si ha,

sostituendo in quest'ultima le espressioni appena fornite per r_+ ed r_- : $L = (1 - e^2)a$.

In coordinate polari, con riferimento alla Fig. 1, consideriamo l'origine in uno dei fuochi (F_2); ora, per il Teorema di Pitagora, si ha:

$$(F_1P)^2 = (PA)^2 + (F_1F_2 + F_2A)^2 = (2f + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \quad (8)$$

ma la (1) ci dice che $F_1P + F_2P=2a$, (ed $F_2P=r$), dunque la (8) diventa:

$\sqrt{(2f + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} + r = 2a$, da cui: $\sqrt{4f^2 + 4rf \cos \theta + r^2} = 2a - r$, da cui elevando al quadrato e semplificando: $r(a + f \cos \theta) = a^2 - f^2$ che, in forza della (5) e della (6), fornisce:

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \theta)} \quad (9)$$

che è l'Equazione dell'Ellisse in coordinate polari. Dalla (9) si ha: $r(a + ea \cos \theta) = b^2$, e per la (5):

$r(a + f \cos \theta) = b^2$, nonché, per la (6), secondo cui: $\sqrt{a^2 - b^2} = f$, si ha finalmente:

$$r(a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta) = b^2 \quad (10)$$

-Gravitazione:

Partiamo dalla definizione di lavoro compiuto per spostarsi da A a B lungo il generico cammino s:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}; \quad (11)$$

si ha che:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot d\vec{v} = \int_A^B m\vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A, \quad (12)$$

($E_k = \frac{1}{2}mv^2$), ma si ha anche che, in un campo gravitazionale, dunque conservativo, L_{AB} dipende solo da A e B e non dal percorso seguito per andare da A a B; infatti, si ha che, per **Newton**:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (13)$$

e dunque:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = +GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = V_B - V_A = U_A - U_B \quad (14)$$

($U(r) = -G \frac{Mm}{r}$) Allora, unendo la (12) e la (14) si ottiene: $K_B - K_A = U_A - U_B$, da cui, per l'energia totale E_T : $E_T = K_B + U_B = K_A + U_A = K + U = \text{const.}$

$$\text{Possiamo allora scrivere che: } E_T = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} \quad (15)$$

Tra parentesi, eguagliando la forza gravitazionale con quella centrifuga per il semplice caso di una intuitiva orbita circolare (ellisse con eccentricità nulla), si ha: $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$, da cui:

$$\frac{1}{2}mv^2 = G \frac{Mm}{2r} \text{ e la (15) diventa: } E_T = K + U = G \frac{Mm}{2r} - G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{2r} < 0, \text{ ossia } E_T \text{ è negativa:}$$

$$E_T = -|E_T| \quad (16)$$

Ora, in coordinate polari, v ha componenti lungo r e lungo θ : $v_r = \frac{dr}{dt}$ e $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r$, dove poi:

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}; \quad (17)$$

infatti, si ha per il momento angolare L (con α come angolo generico tra $\vec{r}$ e $\vec{v}$, rif. Fig. 2):

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mrv \sin \alpha \hat{L} = mr(v \sin \alpha) \hat{L} = mrv_\theta \hat{L} = mrr \frac{d\theta}{dt} \hat{L} = m\omega r^2 \hat{L} \quad (18)$$

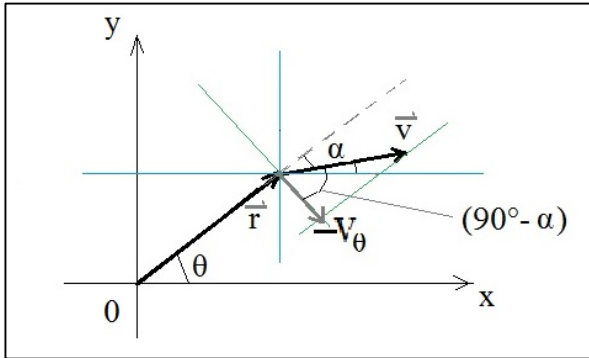


Fig. 2: $|v_\theta| = |v| \cos(90^\circ - \alpha) = |v| \sin \alpha = \left| \frac{rd\theta}{dt} \right|$

Notiamo anche che L si conserva poiché, per quanto riguarda il momento m , esso è uguale a zero, siccome, in un campo centrale, F ed r sono paralleli:

$$\vec{m} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = 0, \text{ e dunque:}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow L = \text{cost.} \quad (18b)$$

Inserendo dunque la (17) nella (15), si ottiene:

$$E_T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{eff} , \quad (19)$$

$$\text{dove denominiamo } V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} . \quad (19b)$$

Inoltre, per la (18) si ha:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} , \quad (20)$$

mentre per la (19) si ha:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left\{ 2 \frac{[E_T - V_{eff}(r)]}{m} \right\}^{1/2} \quad (21)$$

Adesso, dividendo m.a.m. la (21) e la (20), si ottiene:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{mr^2}{L} \left\{ \frac{2}{m} [E_T - V_{eff}(r)] \right\}^{1/2} \quad (22)$$

Dalla (22) si ha:

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{L}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2E_T}{m} - \frac{2V_{eff}(r)}{m} \right]}} = \frac{L}{mr^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{2E_T}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)}} , \text{ ossia:}$$

$$d\theta = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm \frac{L}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2E_T}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)}} \text{ e per la (16) } (E_T = -|E_T|):$$

$$d\theta = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm \frac{L}{m}}{\sqrt{\left(\frac{-2|E_T|}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)}} = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm \sqrt{\frac{L^2}{2m|E_T|}}}{\sqrt{\left(-1 + \frac{GMm}{|E_T|r} - \frac{L^2}{2m|E_T|r^2} \right)}} \quad (23)$$

$$\text{Denominiamo ora: } b = \sqrt{\frac{L^2}{2m|E_T|}} \text{ ed } a = \frac{GMm}{2|E_T|} \text{ e la (23) diviene: } d\theta = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm b}{\sqrt{\left(-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)}} , \text{ da}$$

$$\text{cui, per integrazione: } \theta = \arccos \frac{(b^2 - ar)}{r\sqrt{a^2 - b^2}} , \text{ ossia: } \cos \theta = \frac{(b^2 - ar)}{r\sqrt{a^2 - b^2}} , \text{ ossia ancora:}$$

$$r(a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta) = b^2 , \text{ che altro non è che la (10), **ossia un'ellisse!!!**}$$

$$\text{Per ultimo, ricordiamo un attimo la (9): } r = \frac{b^2}{a} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)} \text{ e riscriviamola, in modo più generico,}$$

nel seguente modo, ossia svincolandoci da a e b:

$$r = \frac{k}{(1 + e \cos \theta)} \quad (24)$$

Bene, abbiamo detto che se $0 < e < 1$, siamo nel caso di un'ellisse, mentre se $e=0$ siamo nel caso di un cerchio; nel caso in cui $e=1$, la (24) diviene:

$$r = \frac{k}{(1 + \cos \theta)} , \text{ ossia: } r + r \cos \theta = k \quad (25)$$

Adesso, visto che, nel passaggio da polari a cartesiane si ha ovviamente che: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, allora, inserendo queste nella (25) si ha:

$\sqrt{x^2 + y^2} + x = k$, ossia: $\sqrt{x^2 + y^2} = k - x$; adesso, quadrando e semplificando, si ottiene:

$y^2 = k^2 - 2kx$, ossia: $x = -\frac{y^2}{2k} + \frac{k}{2}$, che altro non è che una parabola.

Se invece $e > 1$, graficando la (24), si ottiene un'iperbole.

Dunque: retta (collisione), cerchio, ellisse, parabola ed iperbole sono tutte orbite possibili.

Adesso, dalla (7) si ha che: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ (26)

e ricordando poi come abbiamo definito a e b per la (23):

$b = \sqrt{\frac{L^2}{2m|E_T|}}$, $a = \frac{GMm}{2|E_T|}$, ($E_T = -|E_T|$) , da cui: $b = \sqrt{\frac{-L^2}{2mE_T}}$, $a = \frac{-GMm}{2E_T}$, e quindi, per

la (26): $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E_T}{G^2 M^2 m^3}}$ (27)

e dalla (27) si evince che “e” non è mai negativa ed è uguale ad 1 ($e=1$) se $E_T=0$ (parabola), poi $e > 1$ (iperbole) se $E_T > 0$, poi ancora è $e=0$ (cerchio) se $E_T = \frac{-G^2 M^2 m^3}{2L^2} = E_0$ ed infine è $e < 1$ (ellisse, $0 < e < 1$) se $(E_0) < E_T < 0$. Ed ecco la tabella riassuntiva:

Eccentricità “e”	Energia E_T	Orbita
$0 < e < 1$	$(E_0) < E_T < 0$	ellisse
$e=0$	$E_T = E_0$	cerchio
$e=1$	$E_T = 0$	parabola
$e > 1$	$E_T > 0$	iperbole

VERIFICA DELLE TRE LEGGI DI KEPLERO:

I-I pianeti compiono, nel loro moto intorno al Sole, orbite piane di forma ellittica, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

La soluzione sopra ottenuta per la (23) ne costituisce la prova.

II-Il moto dei pianeti avviene con velocità areolare costante: ciò significa che il raggio vettore, scelto con origine nel Sole, spazza aree uguali in tempi uguali.

La prova:

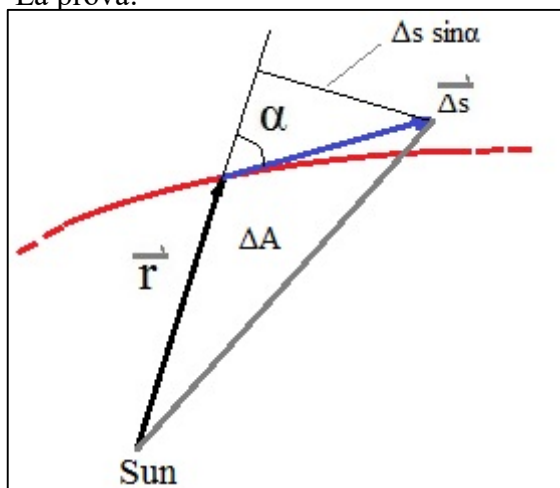


Fig. 3: Sulla velocità areolare.

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot \Delta s \sin \alpha = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta \vec{s}|$$

$$A' = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{L}}{m} \right| = \text{const}$$

poiché, per la (18b), L è costante.

III-Per i vari pianeti è costante il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione T e il cubo del semiasse maggiore " a " dell'orbita.

La prova: eguagliando la forza gravitazionale con quella centrifuga per il semplice caso di una intuitiva orbita circolare (ellisse con eccentricità nulla), si ha: $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = m \frac{(\omega r)^2}{r} = m \omega^2 r$, da

cui: $GM = \omega^2 r^3$, ossia, essendo anche che $\omega = \frac{2\pi}{T}$: $GM = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3$ e infine: $\frac{GM}{(2\pi)^2} = \frac{r^3}{T^2} = \text{const}$.

EINSTEIN DENTRO NEWTON

Quando io spingo da dietro un'automobile, con le mani, il contatto meccanico tra le mie mani ed il baule della macchina è solo apparente, perché, in realtà, tra la materia della mia mano e quella del baule c'è campo elettromagnetico; una spinge l'altra con dei fotoni. Non è che gli elettroni si spingono direttamente l'un l'altro.

Partiamo dalla definizione di energia:

$$dE = dL = Fds ,$$

ma $ds = vdt$ e $F = ma = m \frac{dv}{dt}$, da cui:

$$dE = dL = Fds = m \frac{dv}{dt} vdt = mv dv \quad (1)$$

Anche se non sarà il nostro caso, notiamo che nel caso di massa costante, la massa può uscire dall'integrale e si ha la nota espressione dell'energia cinetica classica:

$$(((\quad E = \int dE = \int mv dv = m \int v dv = \frac{1}{2} mv^2 \quad)))$$

Ricordiamo inoltre che, dalla definizione di forza di cui sopra, $dq = fdt = mdv$, ma per generalizzare, possiamo anche scrivere che: $dq = fdt = mdv = d(mv)$, dove $d(mv) = mdv$ e basta se la massa è costante e dunque se può uscire dalla derivata. Più in generale, scriviamo dunque: $dq = d(mv) = mdv + vdm$ (dove ora non si esclude più la variazione della massa) e $q = mv$. Allora, sempre per motivi di maggior generalità, dalla meno generale (1), ossia da $dE = mv dv = mdv \cdot v$ si passa alla:

$$dE = (mdv + dm \cdot v) \cdot v \quad (2)$$

Il piccolo fotone è portatore di una piccola energia dE : $dE = hf$, ma possiamo riconoscergli, per le sue qualità non solo ondulatorie, ma anche corpuscolari, una piccola massa dm , che sappiamo essere dinamica (e si ricordi la (2)): $dE = hf = (dm \cdot c + m \cdot dc)c = (dm \cdot c + 0)c = dm \cdot c^2 = dE$

Il fotone, evidentemente, è inaccelerabile ed indecelerabile, in quanto è, nell'universo, come un insetto che può sì essere catturato con un retino (assorbito dalla materia), ma nel retino continua a volare con la sua velocità c (fotone in orbita intorno all'elettrone, ad esempio). Infatti, un corpo per noi fermo può assorbire (inglobare) un fotone e poi rimetterlo a velocità c . Essendo il fotone non catturabile in senso assoluto, esso conserva la velocità che ha alla nascita, dettata dall'universo, ossia c . E, di conseguenza, $dc=0$.

Come ulteriore esempio, anche un'onda che si propaga può, se interagisce con la sua riflessa, nascondersi dentro l'onda "stazionaria" che ne scaturisce. Ma poi, se matematicamente si sottrae la riflessa, l'onda originaria torna ad essere quella di prima ed a ripropagarsi come prima.

Immaginiamo ora il semplice ed ingenuo esempio di un fotone di massa dm che urta la macchina di prima, di massa M_0 , inizialmente ferma. Valutiamo l'energia prima e dopo l'incontro.

Prima (in forza della (2)):

$$dE_{\text{fotone}} + dE_{\text{macchina}} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = [(dm \cdot c + 0)c] + [0] = dm \cdot c^2 = dE_{\text{fotone}}$$

poiché $dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$ (macchina ancora ferma, che non varia né di massa, né di velocità).

Dopo l'incontro del fotone con la macchina, M_0 diventerà M , in quanto avrà incapsulato la dm del fotone, e v_0 diventerà una certa v ; in altre parole, esiste solo un corpo, ossia la macchina con a bordo il fotone: $dE_{macchina+fotone} = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Ora, innanzitutto notiamo che $dM = dm$, in quanto la variazione di massa della macchina è causata dall'aver conglobato la dm del fotone, e poi le due energie, prima e dopo, devono eguagliarsi, per la conservazione dell'energia:

$$dE_{fotone} + dE_{macchina} = dE_{macchina+fotone}, \text{ ossia: } dm \cdot c^2 = dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v. \text{ Riscriviamola:}$$

$$dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v \quad (3)$$

Ora, integriamo questa equazione differenziale:

$$dM(c^2 - v^2) = Mvdv, \text{ ossia: } \frac{dM}{M} = \frac{1}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} vdv. \text{ Integriamo appunto tra } M_0 \text{ ed } M \text{ e tra } 0 \text{ e } v:$$

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = \int_0^v \frac{1}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} vdv \rightarrow \ln \frac{M}{M_0} = -\frac{1}{2} \ln(1 - \frac{v^2}{c^2}), \text{ ossia:}$$

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma M_0, \quad (4)$$

che è la ben nota equazione relativistica per la massa dinamica!

((La conservazione dell'energia la si è dovuta scrivere in termini differenziali, come nella (3) e non come somma di termini del tipo $\frac{1}{2}mv^2$, come avviene ordinariamente in teoria dell'urto, in quanto espressioni del tipo $\frac{1}{2}mv^2$ presuppongono che l'integrale è già stato fatto e che la massa m era costante, così uscendo dall'integrale e fornendo appunto energie del tipo $\frac{1}{2}mv^2$.))

In termini di energia, dunque, dalla (4), possiamo scrivere che:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} M_0 c^2 = \gamma \cdot M_0 c^2$$

che, palesemente, vale negli acceleratori di particelle, dove gli addetti conferiscono energia alle particelle.

Si ottiene l'energia cinetica, notoriamente, togliendo l'energia di riposo da quella totale:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} M_0 c^2 - M_0 c^2 = M_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = M_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (5)$$

NEWTON DENTRO EINSTEIN

La metrica

In relatività abbiamo imparato a ragionare in termini quadridimensionali; dunque, non trattiamo limitatamente la lunghezza in tre dimensioni ($d\vec{x}$), ma bensì consideriamo la grandezza quadridimensionale ($d\tau$); il rispettivo invariante (lunghezza al quadrato in quattro dimensioni, derivante, in qualche modo, dalla estensione del Teorema di Pitagora a quattro dimensioni appunto) è:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{V}^2 dt^2. \quad (1)$$

In modo più compatto, possiamo scrivere: $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + d(ct)^2$; trovandoci, infatti, (per ora) in spazi euclidei (non curvilinei), abbiamo appunto il tensore di Minkowski η_{ik} (che vale 1 per $i=k=1,2,3$ e vale -1 per $i=k=4$; vale 0 per i diverso da k), dunque senza termini misti, cioè con i,k diversi, $\rightarrow \eta_{ik}=0$.

Passando a sistemi curvi ($d\xi^i \gg dx^i$), si ha:

$$d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -\eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \text{ con} \quad (2)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\nu} \quad (\text{tensore metrico } g_{ik}) \quad (3)$$

che è l'equazione di passaggio da un sistema all'altro.

Riserviamo, dunque, per gli indici, tendenzialmente le lettere dell'alfabeto comune (i,j,k ecc) in caso di spazi euclidei (η_{ik}) e le lettere dell'alfabeto greco (μ,ν ecc) per gli spazi curvi $g_{\mu\nu}$, a forte gravità.

Equazione della geodetica.

Un paracadutista in caduta libera non ha un pavimento su cui il suo corpo può gravare, dunque lui, tra sé e sé, non avverte accelerazione di gravità, e si sente come sospeso nel vuoto e si accorge che sta cadendo solo se guarda gli altri oggetti attorno che si muovono. Per una particella in caduta libera, dunque, vi è ovviamente un sistema di riferimento in cui $\vec{a} = 0$, ossia:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate euclidee}) \quad (4)$$

con $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$. Possiamo però vedere la (4) nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad \text{Moltiplichiamo ora entrambi i}$$

membri per $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ e teniamo conto del fatto che: $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda$; si avrà:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate curvilinee}) \quad (5)$$

(equazione della geodetica, dove geodetica, qui sulla Terra, è la rotta minima tra una località e l'altra) con $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$.

La relazione tra $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

Sappiamo dunque che: $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$; applichiamo ora a quest'ultima $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}; \text{ ricordando ora, dalla espressione di } \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \text{ che}$$

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}, \text{ segue che:}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \quad (6)$$

Similmente, si calcolano poi $\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}$ e $\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}$, da cui:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa; \text{ definendo ora una matrice (o tensore) reciproco } g^{\nu\sigma} \text{ tale che:}$$

$$g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\sigma, \text{ si avrà, dunque:}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (7)$$

Il limite Newtoniano.

Riprendendo la (1), sappiamo poi che nel limite newtoniano ($V \ll c$):

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{V}^2 dt^2 \cong c^2 dt^2.$$

Ciò equivale a dire che $V^i = dx^i / dt \ll dx^i / d\tau \ll dx^0 / d\tau \ll dx^0 / dt = d(ct) / dt = c$, ossia appunto: $dx^i / d\tau \ll dx^0 / d\tau$.

Con ciò, la (5) diviene: $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$ (qui, per ora, con la comoda convenzione $c=1$); inoltre, essendo, in tale limite, il campo stazionario, $g_{\mu\nu}$ tende a $\eta_{\mu\nu}$ (cost) e allora le derivate temporali di $g_{\mu\nu}$ sono nulle e allora, per la (7):

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \text{ e } g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \text{ con } |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \text{ e quindi: } \Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \text{ e:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} = 0 \text{ da cui:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} = 0 \text{ e} \quad (8)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \text{ da cui: } \frac{dt}{d\tau} = C.$$

Ora, sappiamo dalla gravitazione di **Newton** che: $m\vec{a} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$, da cui: $\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$,

ma: $\frac{GM}{r^2} \hat{r} = \nabla \left(-\frac{GM}{r} \right) = \nabla \phi$ (con $\phi = -\frac{GM}{r}$) e quindi: $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi$ e da quest'ultima con la (8), emerge che: $h_{00} = -2\phi + \text{const}$; visto che all'infinito $h_{00} = \phi = 0$, allora $\text{const} = 0$ e:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi = -(1 + 2\phi) \quad (9)$$

Equazione di Poisson:

Definiamo ora, con ovvietà, il flusso del vettore accelerazione $\vec{a}$: $\Phi(\vec{a})$; si ha:

$$d\Phi(\vec{a}) = \vec{a} \cdot d\vec{S} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{u} dS = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta dS = -GM \frac{dS_n}{r^2} = -GM d\Omega, \text{ da cui:}$$

$$\Phi(\vec{a}) = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = -GM \int d\Omega = -4\pi GM, \text{ ma: } M = \int_V \rho(x, y, z) dV, \text{ da cui:}$$

$$\Phi(\vec{a}) = -4\pi G \int_V \rho(x, y, z) dV = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \text{for Theorem of Div.} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV, \text{ e cioè:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = -4\pi G \rho(x, y, z). \text{ Adesso, visto che si ha dall'analisi matematica che } \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{r}}{r^2},$$

allora: $\nabla \phi = -\vec{a}$ e quindi:

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{Equazione di Poisson}) \quad (10)$$

Le dieci Equazioni del Campo Gravitazionale di Einstein.

Si tratta di 16 equazioni, in realtà, in quanto le stesse contengono tensori di rango 2, ossia a due indici, ognuno dei quali può assumere 4 valori, e dunque $4 \times 4 = 16$, ma tali equazioni non sono tutte linearmente indipendenti tra loro, ossia contengono dei doppietti, e quelle indipendenti sono appunto dieci.

Sappiamo dalla (9) che $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ (punto di contatto tra la teoria di **Einstein** e la teoria di **Newton** e base di partenza), mentre sappiamo che (*), per materia non relativistica: $T_{00} = \rho c^2 = \rho$ (con normalizzazione $c=1$); si ha poi che:

$$\Delta g_{00} = \nabla^2 g_{00} = \nabla^2 [-(1 + 2\phi)] = -2\nabla^2 \phi = -8\pi G \rho = -8\pi G T_{00} \text{ ossia:}$$

$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}$; possiamo quindi, per estensione, supporre che valga un'eguaglianza del tipo: $G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}$ e, per campi gravitazionali di intensità qualsiasi:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{con } T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_\mu U_\nu ; (*))$$

Deduciamo ora cinque particolarità che $G_{\mu\nu}$ deve evidentemente avere:

A) per definizione, $G_{\mu\nu}$ è un tensore, visto che il tensore momento-energia $T_{\mu\nu}$ lo è

B) $G_{\mu\nu}$ consiste di termini con derivate seconde del tensore metrico (ciò guardando $\nabla^2 g_{00}$)

C) $G_{\mu\nu}$ è simmetrico come $T_{\mu\nu}$

D) siccome $T_{\mu\nu}$ è conservato ($T_{\mu\nu;\mu} = 0$) allora anche $G_{\mu\nu}$ e simili lo sono ($G_{\nu;\mu}^\mu = 0$)

E) per campi stazionari deboli, non relativistici, si ha: $G_{\mu\nu} = \nabla^2 g_{00}$

A e B vogliono che $G_{\mu\nu}$ sia proporzionale al tensore di curvatura (*):

$$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] + g_{\eta\sigma} [\Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu k}^\sigma - \Gamma_{k\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma]$$

palesemente composto da derivate seconde del tensore metrico.

Inoltre, la simmetria degli indici vuole che il tensore di curvatura sia rappresentato dal tensore di Ricci (*) $R_{\mu k} = R_{k\mu}$:

$$(R_{\mu k} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k}, R_{\mu k} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda, R_{\mu k} = -g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\nu k} = -g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu k\nu} = +g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda k\nu})$$

$$\text{e dall'altrettanto simmetrico } R = R^\mu_\mu: G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (11)$$

ma sappiamo che contraendo il tensore di curvatura, si ottiene la seguente (*):

$(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R)_{;\mu} = 0$, da cui: $R^\mu_{\nu;\mu} = \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R_{;\mu} = \frac{1}{2}R_{;\nu}$; moltiplichiamo ora la (11) per $g^{\mu\mu}$:

$$G^\mu_\nu = C_1 R^\mu_\nu + C_2 R g^\mu_\nu \text{ e } G^\mu_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu_{\nu;\mu} + C_2 R_{;\nu} = \frac{C_1}{2} R_{;\nu} + C_2 R_{;\nu} = (\frac{C_1}{2} + C_2) R_{;\nu}$$

Per la particolarità D, o $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ o $R_{;\nu} = 0$; la seconda è da escludere poiché:

$G^\mu_\mu = (C_1 + g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} C_2) R = (C_1 + 4C_2) R = -8\pi G T^\mu_\mu$, quindi, se $R_{;\nu} = \partial R / \partial x^\nu$ si annulla, altrettanto deve accadere a $\partial T^\mu_\mu / \partial x^\nu$, ma noi non siamo ancora nel caso di materia non relativistica. Allora: $G_{\mu\nu} = C_1 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R)$ (12)

Ora, grazie alla particolarità E, calcoliamo C_1 : per sistemi non relativistici, si ha sempre:

$$|T_{ij}| \ll T_{00} \text{ , ossia: } |G_{ij}| \ll G_{00} \text{ , da cui, per la (12) qui sopra: } R_{ij} \cong \frac{1}{2} g_{ij} R \text{ ; inoltre, } g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta}$$

(tensore di Minkowski) e dunque: $R_{kk} \cong \frac{3}{2} R$ e $R_{00} \cong \frac{R}{2}$.

La (12) con $\mu = \nu = 0$ ($g_{00} \cong \eta_{00}$) fornisce:

$G_{00} = C_1 (R_{00} - \frac{1}{2} (-1) 2 R_{00}) = 2 C_1 R_{00}$; inoltre, per campi deboli (tensore di curvatura $R_{\lambda\mu\nu k}$ con ovviamente i vari $\Gamma^c_{ab} = 0$):

$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} [\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}]$ e $R_{\mu k} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k}$; essendo il campo statico, le derivate temporali si annullano:

$$R_{00} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda 0 \nu 0} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}) = \frac{1}{2} \eta^{ij} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}) - \frac{1}{2} \eta^{00} 0 = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} \text{ , da cui:}$$

$$G_{00} = 2 C_1 \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} = C_1 \nabla^2 g_{00} \text{ , da cui } (C_1 = 1) \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \text{ e quindi:}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (13)$$

che sono le **equazioni del campo gravitazionale di Einstein**, che riscriviamo ora complete, ossia senza più la convenzione $c=1$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

che ci dicono che la curvatura ($\propto R_{\mu\nu}$, R) dello spazio-tempo è uguale alla presenza di materia-energia ($\propto T_{\mu\nu}$) nello stesso!!!

Contraendo ora con $g^{\mu\nu}$, si ha: $R - 2R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\mu$, ossia $R = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\mu$ e quindi:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda) \text{ (altra forma delle equazioni di **Einstein**).$$

Nel vuoto, $f(T)=0$ e quindi $R_{\mu\nu} = 0$.

(*) : vedere mio pdf sulla Relatività Generale.

EINSTEIN DENTRO MAXWELL.2 - ADVANCED

(IL CAMPO MAGNETICO NON ESISTE)

La forza magnetica è niente altro che una (relativistica) forza elettrica di Coulomb(!)

A tal proposito, immaginiamo la seguente situazione, dove vi è un conduttore, ovviamente composto da nuclei positivi e da elettroni, e poi un raggio catodico (di elettroni) che scorre parallelo al conduttore:

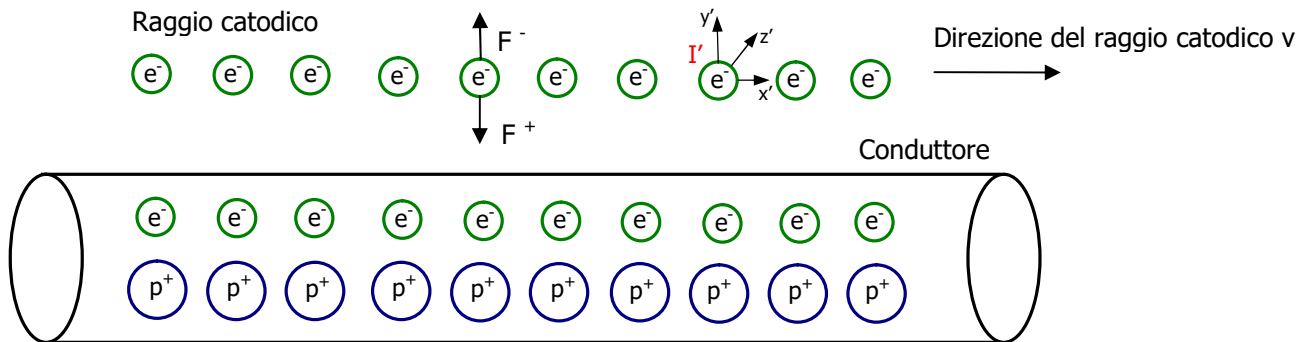


Fig. 1: Conduttore non percorso da corrente, visto dal sistema di riferimento I' (x', y', z') di quiete del raggio catodico.

Sappiamo dal magnetismo che il raggio catodico non sarà deflesso verso il conduttore perché in quest'ultimo non scorre nessuna corrente che possa determinare ciò. Questa è l'interpretazione del fenomeno in chiave magnetica; in chiave elettrica, possiamo dire che ogni singolo elettrone del raggio è respinto dagli elettroni del conduttore con una forza F^- identica a quella F^+ con cui è attratto dai nuclei positivi del conduttore.

Passiamo ora alla situazione in cui nel conduttore scorra invece una corrente con gli e^- a velocità u :

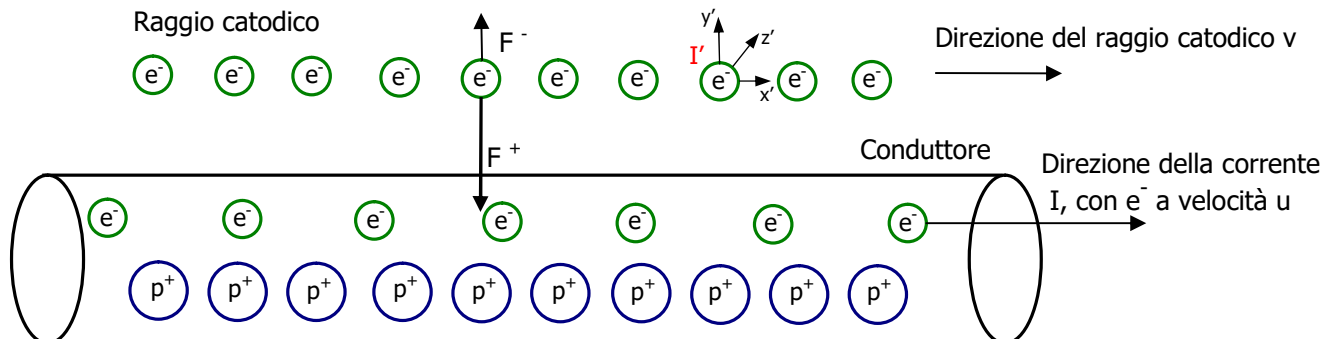


Fig. 2: Conduttore percorso da corrente (con gli e^- a velocità u), visto dal sistema di riferimento I' (x', y', z') di quiete del raggio catodico.

In quest'ultimo caso, sappiamo dal magnetismo che il raggio di elettroni deve deflettere verso il conduttore, in quanto siamo nel noto caso di correnti parallele e di verso concorde, che devono dunque attrarsi. Questa è l'interpretazione del fenomeno in chiave magnetica; in chiave elettrica, possiamo dire che dal momento che gli elettroni nel conduttore inseguono, per così dire, quelli del fascio, i primi, visti dal sistema di quiete del fascio (I'), avranno una velocità minore rispetto a quella che risultano avere i nuclei positivi, che invece sono fermi nel conduttore. Risulterà, perciò, che gli spazi immaginabili tra gli elettroni del conduttore subiranno una contrazione relativistica di Lorentz meno accentuata, rispetto ai nuclei positivi, e dunque ne risulterà una densità di carica negativa minore della densità di carica positiva, e dunque gli elettroni del fascio verranno elettricamente attratti dal conduttore. Ecco la lettura in chiave elettrica del campo magnetico. Ora, è vero che la velocità della corrente elettrica in un conduttore è molto bassa (mm/s o anche meno) rispetto alla relativistica velocità della luce c , ma è anche vero che gli elettroni sono miliardi di miliardi ..., e dunque un piccolo effetto di contrazione su così tanti interspazi determina l'apparire della forza magnetica.

Ora, però, vediamo se la matematica ci dà quantitativamente ragione su quanto asserito, dimostrandoci che la forza magnetica è una forza elettrica anch'essa, ma vista in chiave relativistica. Consideriamo allora una situazione semplificata in cui un elettrone e^- , di carica q , viaggi, con velocità v , parallelo ad una corrente di nuclei con carica Q^+ (a velocità u):

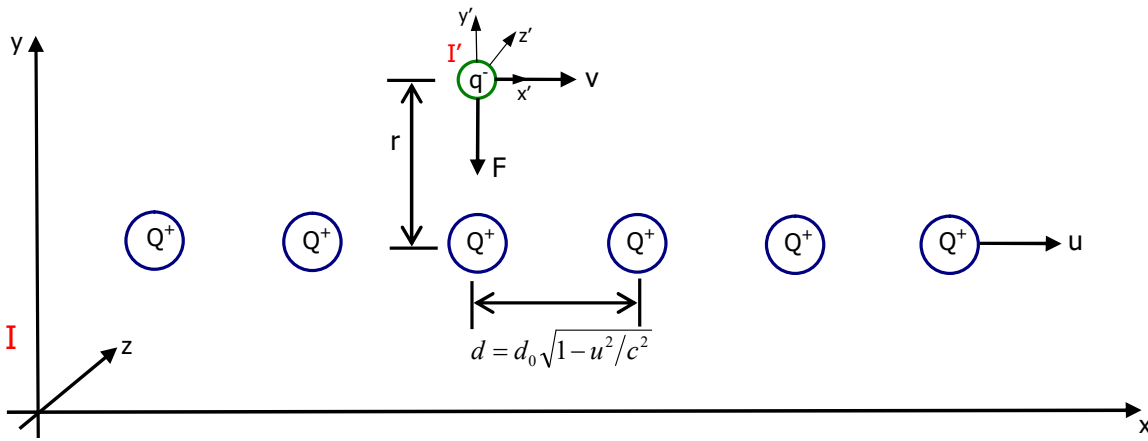


Fig. 3: Corrente di cariche positive (a velocità u) ed elettrone a velocità v nel sistema di quiete del lettore I .

a) Valutazione di F in chiave elettromagnetica, nel sistema I :

Ricordiamo innanzitutto che se ho N cariche Q , in linea, a distanza d una dall'altra (come in figura 3), allora la densità di carica lineare λ sarà:

$$\lambda = N \cdot Q / N \cdot d = Q/d \quad .$$

Ora, sempre con riferimento alla Fig. 3, nel sistema I , per l'elettromagnetismo l'elettrone sarà sottoposto alla forza di Lorentz $F_l = q(E + v \times B)$ che si compone di una componente originariamente già elettrica e di una magnetica:

$$F_{el} = E \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi r} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} \right) q \quad \text{dovuta all'attrazione elettrostatica di una distribuzione lineare di cariche } Q,$$

$$(\text{vedere la (7)}) \text{ e: } B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/t}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/(d/u)}{2\pi r} = \mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \quad (\text{Biot e Savart}).$$

$$\text{Dunque: } F_l = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v \mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \quad (1)$$

dove il segno meno indica che la forza magnetica è repulsiva, in tale caso, visti i segni reali delle due correnti, e dove la distanza d_0 di quiete risulta contratta a d , per Lorentz, nel sistema I in cui le cariche Q hanno velocità u ($d = d_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$).

b) Valutazione di F in chiave elettrica, nel sistema I' di quiete di q :

nel sistema I' la carica q è ferma e dunque non costituisce nessuna corrente elettrica, e dunque sarà presente solo una forza elettrica di Coulomb verso le cariche Q :

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r'} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \quad , \quad (2)$$

dove u' è la velocità della distribuzione di cariche Q nel sistema I' , che si compone di u e v tramite il noto teorema relativistico di addizione delle velocità:

$$u' = (u - v) / (1 - uv/c^2) \quad , \quad (3)$$

e d_0 , questa volta, si contrae appunto secondo u' : $d' = d_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}$.

Notiamo ora che, con un po' di algebra, vale la seguente relazione (vedere la (3)):

$$1 - u'^2/c^2 = \frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - uv/c^2)^2} \quad , \text{ che sostituita nel radicale della (2) fornisce:}$$

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r'} \right) \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

Vogliamo ora confrontare la (1) con la (4), ma ancora non possiamo, perché una fa riferimento ad I e l'altra ad I' ; rapportiamo allora F'_{el} della (4) in I anch'essa e, per fare ciò, osserviamo che, per la definizione stessa di forza, in I' :

$$F'_{el}(in_I') = \frac{\Delta p_{I'}}{\Delta t_{I'}} = \frac{\Delta p_I}{\Delta t_I \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F_{el}(in_I)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \text{ con } \Delta p_{I'} = \Delta p_I \text{ in quanto } \Delta p \text{ si estende lungo } y, \text{ e non}$$

lungo la direzione del moto relativo, dunque per le T. di Lorentz non subisce variazione, mentre Δt ovviamente sì.
Si ha allora:

$$\begin{aligned} F_{el}(in_I) &= F'_{el}(in_I') \sqrt{1-v^2/c^2} = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}} \sqrt{1-v^2/c^2} = \\ &= q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = F_{el}(in_I) \end{aligned} \quad (5)$$

Ora, dunque, possiamo confrontare la (1) con la (5), in quanto ora entrambe fanno riferimento al sistema I. Riscriviamole una sopra l'altra:

$$\begin{aligned} F_I(in_I) &= q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v\mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ F_{el}(in_I) &= q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{uv}{\epsilon_0 c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}$$

Possiamo dunque dire che le due equazioni sono identiche se è verificata la seguente identità: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, e la stessa è nota sin dal 1856. Essendo dunque identiche le due equazioni, la forza magnetica risulta ricondotta ad una forza elettrica di Coulomb, e dunque è compiuta l'unificazione dei campi elettrico e magnetico!!

Oppure, più semplicemente:

CAMPO MAGNETICO ILLUSIONE RELATIVISTICA

Premesse:

Un giorno Coulomb (1785) ci insegnò che due cariche (ad esempio, di segno opposto) si attraggono con una certa forza:

$$\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

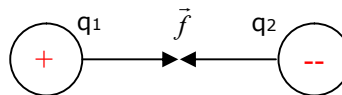


Fig. 4.

Se poi le due cariche sono una grande Q ed una piccola (di prova) q, definiamo il campo elettrico E generato da Q. Avendosi:

$$\vec{f} = \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}, \text{ allora: } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Campo elettrico generato da un filo infinito:

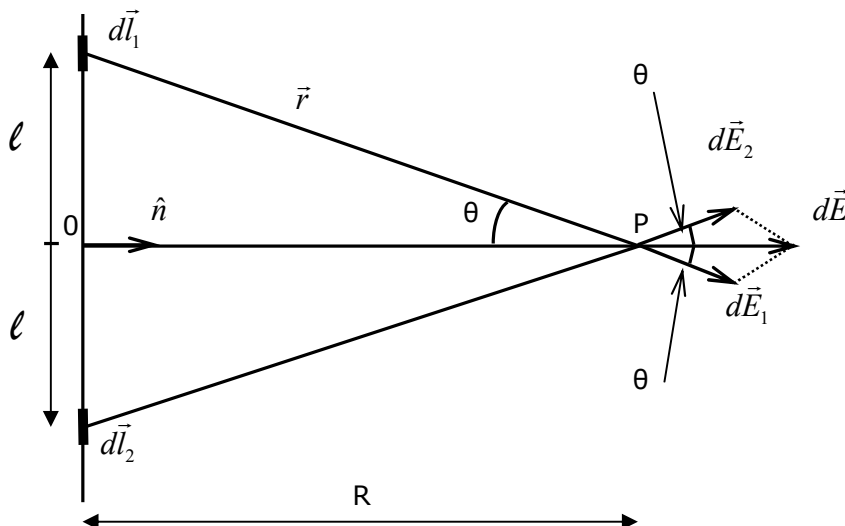


Fig. 5.

Consideriamo due elementi di filo dl_1 e dl_2 e valutiamo il campo elettrico generato in P:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = (|dE_1| + |dE_2|) \cos \theta \cdot \hat{n} = \frac{2 \cos \theta \cdot \hat{n} \lambda dl}{4\pi\epsilon r^2} \quad (6)$$

Inoltre: $r = R / \cos \theta$ e $l = R \cdot \tan \theta$; differenziando: $dl = R \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$. Sostituendo nella (6) e tenendo conto che $\lambda = \text{cost}$ (densità lineare di carica):

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\hat{n}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta \lambda \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{R^2} = \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{n}} \quad (7)$$

L'illusione relativistica:

qual è la formula simbolo della "Teoria" della Relatività? Sicuramente, la maggior parte risponderà $E=mc^2$. Questa equazione, però, nella sua forma, è un po' quella dell'energia cinetica di Newton $((1/2)mv^2)$ e non rappresenta proprio una novità. Invece, la più rappresentativa, ossia quella che davvero, inequivocabilmente, ti dice che si sta parlando di relatività, è la seguente:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ ossia, meglio ancora, la sola radice } \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \text{ o, ancor più semplicemente: } \boxed{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Quando si vede tale espressione, si capisce che si sta parlando di Relatività!

E tale quantità era già nascosta nell'elettromagnetismo del 700 e dell'800.

Qui, però, semplificando un tantino i ragionamenti, si abbia una distribuzione lineare di cariche positive n (n cariche al metro) ed una singola carica q a distanza d , come in figura 6:

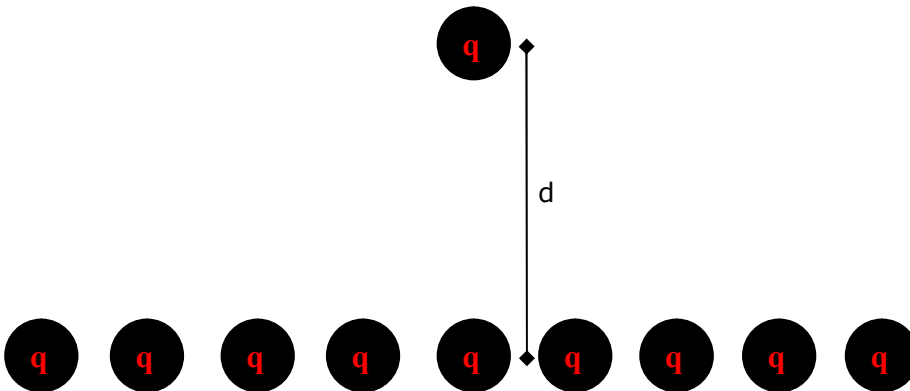
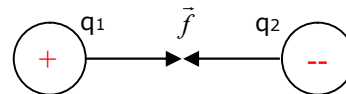


Fig. 6.

Se la densità lineare di carica è λ [C/m], allora, dalla Legge di Coulomb del 1785, ossia dalla:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{r} \quad (\text{Coulomb-1785})$$



discende il campo elettrico E generato da tale distribuzione lineare di carica e la conseguente forza F di repulsione sulla carica singola q :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} \quad (\text{per Coulomb-1785}), \text{ dove } \lambda = nq.$$

E, in tale situazione, tutte le cariche appaiono inizialmente ferme.

Se ora io, osservatore, immagino di viaggiare a velocità v verso destra, allora vedrò delle cariche muoversi indietro, verso sinistra, ossia delle correnti elettriche, e sappiamo dal magnetismo dell'ottocento che correnti di verso concorde si attraggono (due fili elettrici percorsi da correnti di verso concorde si attraggono; un po' quello che succede nei motori elettrici ogni giorno).

Allora, la carica singola la vedremo non solo respinta elettricamente, ma anche attratta magneticamente, verso la distribuzione di cariche.

Per la Forza di Lorentz totale risultante, si avrà $(\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{t}, \text{ per Biot-Savart-1820})$:

$$\vec{F}' = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv\hat{n} \quad , \text{ ma essendo, dalla definizione di corrente elettrica, che:}$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(n\Delta x)}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv = \lambda v \quad (\Delta x = v\Delta t \text{ è lo spazio percorso}), \text{ allora:}$$

$$\vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv\hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q\lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} .$$

Ricordiamo ora la arcinota equazione che fornisce la velocità delle onde elettromagnetiche c nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (1856), \text{ da cui: } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}, \text{ e si avrà, per la forza risultante sulla carica}$$

$$\text{singola: } \vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q\lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{v^2}{c^2} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} , \text{ ossia:}$$

$$\vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} \quad ; \text{ è spuntata l'espressione simbolo della Relatività!}$$

Si noti che $\vec{F}' \neq \vec{F}$, ossia l'osservatore fermo e quello in moto vedono due situazioni differenti...c'è qualcosa che non va. Non va bene. Per far tornare i conti, le distanze tra una carica e l'altra devono apparire differenti ai due osservatori, ossia la distanza dovrà risultare una grandezza relativa all'osservatore....e lo stesso per il tempo.

Comparirà una $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ relativistica nell'espressione nuova per λ ed una $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ relativistica nella valutazione dei

tempi in gioco, che annulleranno appunto la nuova espressione $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ appena comparsa. Si noti che qui l'equazione

più recente che abbiamo usato nel ragionamento risale al 1856, quando Albert Einstein non era ancora nato!

Ma la verità qual è? Sono spazio e tempo che devono diventare relativi per compensare l'effetto di comparsa della forza magnetica, oppure è la forza magnetica, che come forza a sé stante, non esiste, ma bensì è un delta di forza elettrica dovuto al fatto che spazio e tempo sono relativi? La visione giusta è la seconda, anche se formalmente, o matematicamente, poco cambia.

INCONGRUENZE EVENTUALI NELL'ELETTROMAGNETISMO

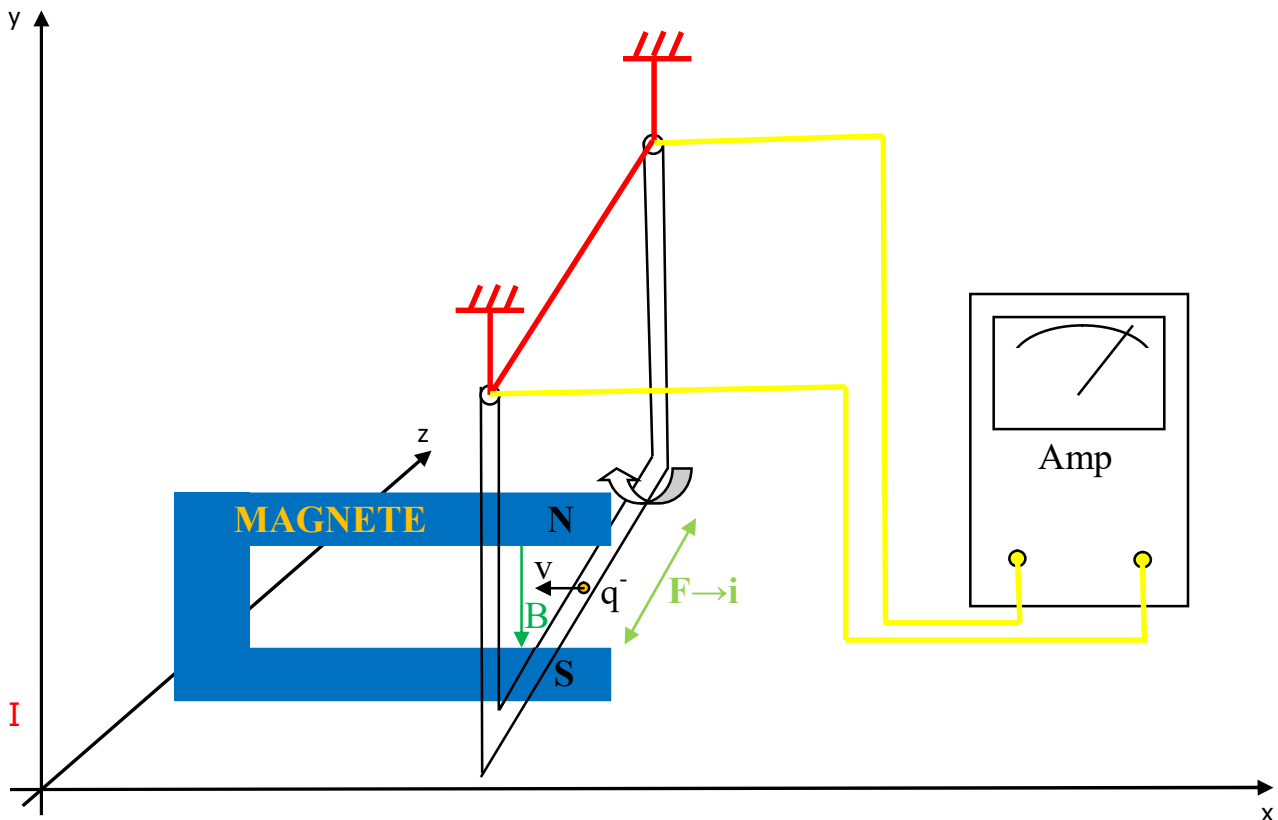


Fig. A: Altalena, connessa ad un amperometro, oscillante in un magnete permanente, in un sistema di riferimento I del laboratorio.

Con riferimento alla Fig. A e sapendo che cariche elettriche in movimento (dotate di velocità v) in un campo magnetico sono sottoposte alla Forza di Lorentz, con il moto (v) oscillante dell'altalena (che è un conduttore che contiene elettroni "liberi", disponibili alla conduzione elettrica) si leggerà una reazione sull'amperometro.

La Forza di Lorentz è la seguente:

$$F_L = q(E + v \times B) \quad , \quad (1890)$$

ma questa è quella generalizzata, dove si tiene conto anche di altre eventuali forze dovute alla presenza congiunta di campi elettrici (qE), altrimenti, in accordo con vari autori, nell'analisi delle cariche in moto in un campo magnetico, come nel nostro caso, considereremo la seguente equazione:

$$F_L = q(v \times B) \quad .$$

E si ricordi che gli elettroni liberi del conduttore a forma di altalena hanno carica negativa ($q < 0$), da cui il fatto che (a livello puramente vettoriale, di moto) un elettrone che oscilla verso sinistra con velocità v è come se fosse una carica positiva con velocità invertita, ossia che oscilla verso destra. Comunque, al di là di ciò, visto che le linee di flusso del campo magnetico del magnete permanente sono verticali, da N ad S (lungo y) e l'oscillazione indotta, ad esempio, dalla spinta della nostra mano (ad esempio, inizialmente verso sinistra, ossia lungo x) dell'altalena è ortogonale al campo magnetico B , allora si avrà una forza sugli elettroni liberi che si estenderà lungo z , a mo' di corrente che scorre appunto nell'altalena, verso l'amperometro (in accordo con la regola della mano destra, secondo cui tutti e tre questi attori sono ortogonali tra loro, da cui il prodotto vettoriale ($v \times B$)). Se l'altalena non oscilla, segue che $v=0$ ed $F=0$, da cui ancora la corrente $i=0$. Lorentz vinse il premio Nobel nel 1902.

PROBLEMI/INCONGRUENZE/PERPLESSITÀ (EVENTUALI):

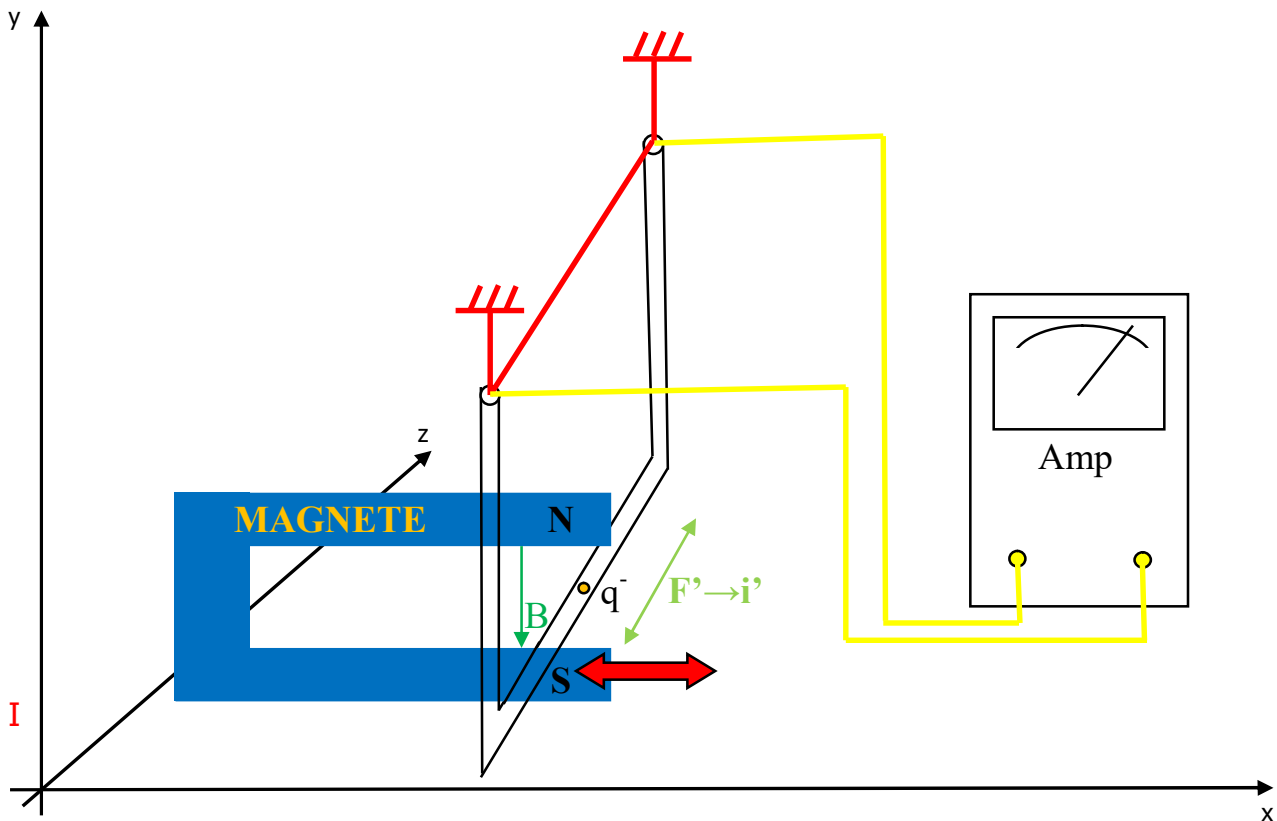


Fig. B: Altalena, connessa ad un amperometro, ma tenuta ferma ($v'=0$); il magnete ora oscilla lungo x , sempre nel sistema I .

Sempre mantenendoci nello stesso sistema di riferimento I , teniamo ora ferma l'altalena e muoviamo in modo oscillatorio il magnete permanente, lungo x (Fig. B); in questo caso, essendo l'altalena ferma, la nuova v' degli elettroni liberi in essa è zero ($v'=0$), ma, nonostante ciò, l'amperometro di nuovo reagisce, denunciando una corrente i' e dunque una forza F'_L comunque applicata agli elettroni costituenti tale corrente:

$$F'_L \neq 0 = q(v' \times B) = q(0 \times B) = 0 \neq 0 . ?$$

Il campo magnetico, che ora è variabile, evidentemente, ai nostri occhi, si tramuta in un nuovo campo elettrico (Maxwell) che genera e giustifica la i' .

GAUSS DENTRO STUDENT

Indice:

1-SULLA DISTRIBUZIONE NORMALE (GAUSSIANA)

2-STIMA DELLA MEDIA SU TUTTA LA POPOLAZIONE N_p , MA BASATA SU UN CAMPIONE N PICCOLO-LA DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

3-DIMOSTRAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

1-Sulla Distribuzione Normale (Gaussiana).

Come noto, su un campione con un N elevato vige sicuramente la Distribuzione Normale:

$$P_k = f(k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - \hat{k}}{\sigma_k} \right)^2} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\sigma_k} \right)^2} \quad (\text{Distribuzione Normale o Gaussiana}) \quad (1.1)$$

Essendo la media $\hat{k} = np$ e lo scarto $s = |k - \hat{k}| = |k - np|$ e sapendo che per lo scarto q.m. di k si ha:
 $\sigma(k) = \sqrt{\sigma^2(k)} = \sigma_k = \sqrt{npq}$, segue che:

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}} \quad (1.2)$$

E definendo la funzione $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2}$, con $z = \frac{(k - np)}{\sqrt{npq}}$ che è il Coefficiente di Confidenzialità, si ha che $\varphi(z)$ è appunto la “legge normale della probabilità” o “curva degli errori di Gauss”.

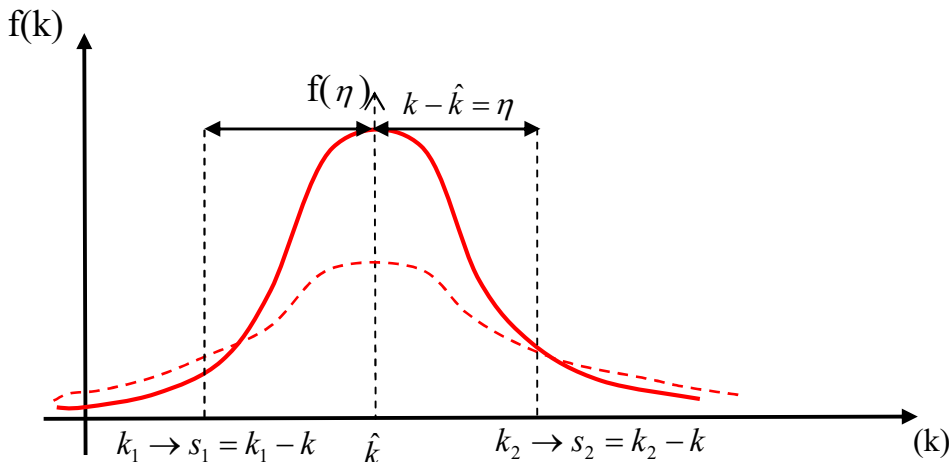


Fig. 1.1: Gaussiana.

Valutiamo ora la probabilità che un evento si verifichi un numero di volte compreso tra k_α e k_β :

$$P_{k_\alpha, k_\beta} = \int_{k_\alpha}^{k_\beta} P_k dk = \int_{k_\alpha}^{k_\beta} \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}} dk ; \text{ passando ora alla variabile d'integrazione } z:$$

$$P_{k_\alpha, k_\beta} = \int_{z_\alpha}^{z_\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{z_\alpha}^{z_\beta} \phi(z) dz . \text{ Consideriamo ora la funzione:}$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^t \phi(z) dz ; \text{ si ha che:}$$

$$P_{k_\alpha, k_\beta} = \phi(t_\beta) - \phi(t_\alpha) = \phi\left(\frac{k_\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{k_\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right) . \text{ Esistono tabelle di valori della funzione } \phi(t) .$$

-La regola del 3 σ

Riprendiamo la (1.1):

$$P_k = f(k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k - \hat{k}}{\sigma_k}\right)^2} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma_k}\right)^2} = P(s)$$

ora, a livello differenziale, la probabilità dp che lo scarto s sia compreso entro l'intervallo infinitesimo ds è:

$$dp = P(s)ds = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma_k}\right)^2} ds \text{ e, quindi, la probabilità che lo scarto s sia compreso tra i valori } s_1$$

ed s_2 è P:

$$P_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} dp = \int_{s_1}^{s_2} P(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma_k}\right)^2} ds \quad (1.3)$$

$P_{1,2}$ è l'area sottesa dalla Gaussiana tra s_1 ed s_2 ; si calcola facilmente, tramite l'integrale della (1.3), che:

$$\begin{aligned} -0,68\sigma < s < 0,68\sigma & \rightarrow P=50\% \\ -\sigma < s < \sigma & \rightarrow P=68,3\% \\ -1,64\sigma < s < 1,64\sigma & \rightarrow P=90\% \\ -2\sigma < s < 2\sigma & \rightarrow P=95,9\% \\ -2,58\sigma < s < 2,58\sigma & \rightarrow P=99\% \\ \mathbf{-3\sigma < s < 3\sigma} & \rightarrow \mathbf{P=99,7\%} \end{aligned}$$

Allora, la probabilità che lo scarto dal valore medio di una misura sia compreso tra -3σ e $+3\sigma$ ($\hat{k} - 3\sigma < k < \hat{k} + 3\sigma$) è del 99,7%, ossia un valore piuttosto accettabile, da cui la frequente adozione della regola del tre sigma appunto. In questo caso, il coefficiente di confidenzialità z vale

$$3 \text{ (} z_{0,997} = 3 \text{)}. \text{ Dall'espressione di z, ossia: } z = \frac{(x - \bar{x})}{\sigma}, \text{ abbiamo che: } x = \bar{x} \pm z\sigma . \quad (1.4)$$

Se ci riferiamo ora non al σ normale, ma al $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ della media (vedere appendice), si ha:

$x = \bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}}$., dove N è il numero di elementi del campione prelevato. Se il campione non è prelevato da una popolazione infinita ($N_p = \infty$), ma bensì da una popolazione finita di N_p elementi,

$$\text{allora si ha: } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} \quad (\text{vedere dimostrazione qui sotto}) \quad (1.5)$$

da cui: $x = \bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}}$; per una popolazione infinita si ha ovviamente che:

$$\sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} = \sqrt{\frac{(1 - \frac{N}{N_p})}{(1 - \frac{1}{N_p})}} = 1 \text{ e: } x = \bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Dimostriamo la (1.5):

abbiamo un set di 5 valori $\{3,4,5,6,7\}$ (la cui media ovviamente è $\mu=5$) ed estraiamo un campioncino di due valori ($N_p=5$, $N=2$); tutti i possibili campioncini sono:

$(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(3,7)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(4,7)$, $(5,6)$, $(5,7)$, $(6,7)$.

I rispettivi valori medi di questi possibili 10 campioncini sono: $3,5|4|4,5|5|4,5|5|5,5|6|6,5$ e la

loro media è: $\mu_{\bar{x}} = \frac{3,5+4+4,5+5+4,5+5+5,5+5,5+6+6,5}{10} = 5$ e la rispettiva deviazione

standard della media è: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(3,5-5)^2 + (4-5)^2 + \dots + (6,5-5)^2}{10}} = \pm 0,866$, mentre la deviazione

standard σ riferita a tutta la popolazione sarebbe:

$\sigma = \sqrt{\frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + \dots + (7-5)^2}{5}} = \pm 1,414$; notiamo così che la (1.5) è rispettata:

$\sigma_{\bar{x}} = \pm 0,866 = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} = \frac{\pm 1,414}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(5-2)}{(5-1)}}$. E notiamo inoltre che: $\mu_{\bar{x}} = \mu \cdot \text{cvd}$

2-Stima della media su tutta la popolazione N_p , ma basata su un campione N piccolo- La Distribuzione t di Student.

Un campione inizia ad essere non più piccolo se $N \geq 30$. Infatti, per $N \geq 30$, la distribuzione normale (gaussiana) è ben seguita. Lo stesso non si può dire per appunto $N < 30$.

Quando dunque il campione è piccolo, la statistica seguita non è più quella della distribuzione

normale (1.1), cioè quella del coefficiente di confidenzialità $z = \frac{(x - \bar{x})}{\sigma}$, ed in luogo di

quest'ultimo si usa un'equazione simile, ma a parametro t, basata sulla Distribuzione di Student (di W.S. Gosset) che, come dicevamo, non è quella Normale, essendo N piccolo:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} \quad (2.1)$$

dove $\bar{x}$ è la media del campioncino di N elementi, μ è la media di tutta la popolazione N_p , σ_N è la deviazione standard del campioncino (N). Sulla base di ciò, in luogo della (1.4), ossia della

$$x = \bar{x} \pm z\sigma, \text{ si ha: } x = \bar{x} \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}} \quad (2.2)$$

ovviamente, poiché qui lo scopo è stimare la media μ di tutta la popolazione e nella (2.2) x gioca appunto il ruolo di μ nella (2.1).

Si farà questa volta riferimento ad una nuova tabella di valori di t_p ; ad esempio, $t_{0,95}$ fa riferimento ad un livello di confidenzialità del 95%.

In tabella (di Student) i vari t_p sono forniti in funzione del parametro ν (nu) che è il numero di gradi

di libertà, ossia, nel nostro caso tipico, per la (2.1) si ha: $t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{\nu}$, poiché

σ_N e $\bar{x}$ ce li calcoliamo tramite i valori degli N elementi del campioncino, mentre l'incognita è una sola, ossia μ , ossia il valor medio di tutta la popolazione, dunque $\nu = N - n^\circ \text{ incognite} = N - 1$.

Dunque, in generale, $\nu \cong N$, dacché, in tabella t si forniscono i valori t_p per tutti i ν da 1 a 30, poiché, come dicevamo, tale statistica è per $N < 30$, mentre sopra i 30 si forniscono eventualmente solo i t per i ν 40, 60, 120 ed ∞ , poiché per i ν elevate la statistica torna ad essere quella normale (gaussiana).

3-Dimostrazione della Distribuzione t di Student.

Premesse:

ricordiamo qui il modo di valutare, tramite media pesata, i valori medi $\langle x \rangle$ ed $\langle y \rangle$ e poi anche le varianze $\sigma^2(x)$ e $\sigma^2(y)$, con una distribuzione (di probabilità) $f(x,y)$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy ; \quad \langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dx dy$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x,y) dx dy ; \quad \sigma^2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \langle y \rangle)^2 f(x,y) dx dy$$

Se adesso ho un cambio di coordinate, $x,y \rightarrow u,v$, con: $u=u(x,y)$ e $v=v(x,y)$ (e $x=x(u,v)$ e $y=y(u,v)$), allora, notoriamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v) f[x(u,v), y(u,v)] |J| du dv \quad (3.1)$$

dove $|J|$ è il determinante dello Jacobiano (del classico cambio di coordinate in un integrale multiplo):

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \text{ essendo: } \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d\bar{x} = (\frac{\partial x}{\partial u}) d\bar{u} + (\frac{\partial x}{\partial v}) d\bar{v} \\ d\bar{y} = (\frac{\partial y}{\partial u}) d\bar{u} + (\frac{\partial y}{\partial v}) d\bar{v} \end{cases} ; \text{ e infatti in } (x,y) \text{ l'areola è } dx dy,$$

mentre in (u,v) essa è l'area del parallelogramma $d\bar{x} \times d\bar{y}$:

$$d\bar{x} \times d\bar{y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = |J| du dv.$$

A volte capita di mediare (integrare) in anticipo su una delle due variabili (ad esempio y) e allora la (3.1) ci lascia con una funzione integranda in sol dx , del tipo:

$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$; anche qui, con un cambio di variabili del tipo $(x,y) \rightarrow (x,z/x)$ (cioè: $y=z/x$ e

$$z=xy), \text{ si ha: } F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \frac{z}{x}) |J| dx, \text{ con: } \begin{cases} x = x(x,z) \\ y = y(x,z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d\bar{x} = (\frac{\partial x}{\partial x}) d\bar{x} + (\frac{\partial x}{\partial z}) d\bar{z} \\ d\bar{y} = [\frac{\partial(z/x)}{\partial x}] d\bar{x} + [\frac{\partial(z/x)}{\partial z}] d\bar{z} \end{cases} \rightarrow ;$$

$$\rightarrow \begin{cases} d\bar{x} = 1 d\bar{x} + 0 d\bar{z} \\ d\bar{y} = -\frac{z}{x^2} d\bar{x} + \frac{1}{x} d\bar{z} \end{cases} \rightarrow |J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \rightarrow F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \frac{z}{x}) \frac{1}{|x|} dx \text{ e se } x \text{ ed } y \text{ sono variabili}$$

indipendenti, con densità di distribuzione f_1 ed f_2 , allora: $F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(\frac{z}{x}) \frac{1}{|x|} dx$.

Analogamente, se il cambio di coordinate è: $(x,y) \rightarrow (zy,y)$ (cioè: $z=x/y$), allora:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial(yz)}{\partial y} & \frac{\partial(yz)}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -y \rightarrow F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(yz, y) |y| dy \text{ e}$$

$$\boxed{F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(yz) f_2(y) |y| dy} \quad (3.2)$$

Distribuzione Gamma:

Con il passaggio dalla variabile x alla variabile x^2 si passa dalla Distribuzione Normale alla Distribuzione Gamma ($x \rightarrow y=x^2$). Da ciò discende che $x = \pm\sqrt{y}$ (due valori) e questo significa due cose, ossia che vale solo $y>0$ e però, nella trasformazione, devo moltiplicare per 2.

Ora, la Distribuzione Normale con $\bar{x} = 0$ è:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.3)$$

Visto che la probabilità totale deve essere la stessa con entrambe le distribuzioni, deve essere:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty g(y)dy \rightarrow f(x)dx = g(y)dy \rightarrow f(x) = g(y)\frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad g(y) = f(x)\frac{dx}{dy} \quad \text{e:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = 2\sqrt{y} \quad (\rightarrow y>0), \text{ da cui (più il coefficiente } x^2 \text{ di cui sopra...)}$$

$$g(y) = 2f(x)\frac{dx}{dy} = 2f[x(y)]\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\right) \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} = \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{\frac{1}{2}} = g(y)} \quad (3.4)$$

Tale $g(y)$ è normalizzata; infatti, effettuando l'ulteriore cambio di variabile $z = y/2\sigma^2$, si ha:

$$\left(\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sigma^2} \quad \text{e} \quad dy = (2\sigma^2)dz \right)$$

$$g(z)dz = g(y)dy \rightarrow g(z) = g(y)\frac{dy}{dz} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{\frac{1}{2}}\right)(2\sigma^2) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z2\sigma^2}{2\sigma^2}} z^{\frac{1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\right](2\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z} z^{\frac{1}{2}} = g(z) \quad ; \text{ e notiamo appunto che tale } g(z) \text{ è già normalizzata, ossia ha conservato la}$$

normalizzazione, giustificando peraltro anche il coefficiente 2 aggiunto; infatti:

$$\int_0^\infty g(z)dz = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-z} z^{t-1} dz\right)_{t=1/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1$$

($\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-z} z^{t-1} dz$ è la Funzione Gamma di Eulero); naturalmente, $\Gamma(1) = 1$; poi, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$;

infatti, dopo una integrazione per parti: $\Gamma(t) = e^{-z} \frac{z^t}{t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-z} z^t dz = 0 + \frac{1}{t} \Gamma(t+1)$ ed iterando

la $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, otteniamo: $\Gamma(n+1) = n!$.

Generalizzando la (3.4) ($g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{\frac{1}{2}}$), si ha:

$$\boxed{g(p, \sigma, y) = \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{p-1}} \quad , (y>0) \quad (3.5)$$

e la (3.4) ne è un caso particolare ($p=1/2$).

t-Student:

abbiamo visto che col passaggio da x ad x^2 , la distribuzione diventa Gamma; ora, essendo:

$$\sigma_N = \frac{\sqrt{\sum (x_i)^2}}{\sqrt{N}} = \frac{S}{\sqrt{N}} \quad (3.6)$$

ed essendo S una forma quadratica, essa è distribuita come Gamma, ossia con il $g(p, \sigma, y)$ della (3.5). Vogliamo ora capire la distribuzione $h(\sigma_N)$ di $\sigma_N = \frac{S}{\sqrt{N}}$; effettuiamo allora un cambio di variabile nella (3.5), da y ad $N\sigma_N^2$, ossia $y = N\sigma_N^2$ da cui:

$$dy = 2N\sigma_N d\sigma_N \quad \text{e} \quad h(\sigma_N) d\sigma_N = g(p, \sigma, y) dy \rightarrow$$

$$h(\sigma_N) = g(p, \sigma, y) \frac{dy}{d\sigma_N} = g(p, \sigma, N\sigma_N^2) 2N\sigma_N$$

(3.7)

Inoltre, valutiamo la distribuzione $r(Y)$ di $Y\sqrt{N}$, dove: $Y = (\frac{1}{N} \sum_j x_j) - \mu = \bar{x} - \mu$; essa è la distribuzione normale (di cui godono gli x_j), con varianza (della media) σ^2/n e consideriamoci sempre centrati sulla media pari a zero:

$$(\mu=0 \rightarrow Y = (\frac{1}{N} \sum_j x_j)) \quad (3.8)$$

$$r(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-NY^2}{2\sigma^2}}$$

che è la (3.3) in x. Procediamo ulteriormente per valutare ora la statistica di

$\frac{Y\sqrt{N}}{\sigma_N}$; la cosa ci interessa poiché dalla (2.2) si ha $\mu = \bar{x} \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}}$, da cui:

$$\bar{x} - \mu = Y = \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}} \cong \frac{t\sigma_N}{\sqrt{N}} \quad \text{e dunque la quantità } \boxed{\frac{Y\sqrt{N}}{\sigma_N}} \text{ è proprio il } t \text{ introdotto con la (2.2)}$$

appunto. E ricordiamo che la (2.2) è interessante per la sua similitudine con la (1.4). ($Y \propto \sigma_N \cdot t$)

Quindi, utilizziamo la (3.2) che compone le due distribuzioni in yz ed in y , ossia $f_1(x)=f_1(yz)$ ed $f_2(y)$, e nel nostro caso presente, il rapporto $z=x/y$ della (3.2) corrisponde appunto al rapporto

$\frac{Y\sqrt{N}}{\sigma_N}$ e dove la statistica f_1 (di $x=yz$) sarebbe quella di $Y\sqrt{N}$, ossia la $r(Y)$

$$(r(Y) = r(\sigma_N \cdot t) \rightarrow f_1(yz)),$$

mentre la $f_2(y)$ è la statistica di ciò che corrisponde appunto ad y , ossia σ_N ($y \rightarrow \sigma_N$)

($f_2(y) \rightarrow h(\sigma_N)$); applichiamo dunque la (3.2): $f(t) = \int_0^\infty r(\sigma_N \cdot t) \cdot h(\sigma_N) \big|_{\sigma_N} d\sigma_N$, ossia:

$$(Y \cong \frac{t\sigma_N}{\sqrt{N}}, p=N/2 \quad \text{e} \quad y = N\sigma_N^2)$$

$$f_p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\frac{-NY^2}{2\sigma^2}} g(p, \sigma, N\sigma_N^2) 2N\sigma_N^2 d\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} g(\frac{N}{2}, \sigma, N\sigma_N^2) 2N\sigma_N^2 d\sigma_N =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-y}{2\sigma^2}} y^{p-1} 2N\sigma_N^2 d\sigma_N =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-y}{2\sigma^2}} y^{\frac{N}{2}-1} 2N\sigma_N^2 d\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-N\sigma_N^2}{2\sigma^2}} (N\sigma_N^2)^{\frac{N}{2}-1} 2N\sigma_N^2 d\sigma_N = \frac{2}{\sqrt{N\pi}\sigma^{N+1} \Gamma(\frac{N}{2})} \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2(t^2+N)}{2\sigma^2}} \sigma_N^N d\sigma_N = f_N(t)$$

(3.9)

e considerando l'ultimo integrale, facciamo in esso il cambio di variabile $z = \frac{\sigma_N^2(t^2 + N)}{2\sigma^2}$:

$$(((\rightarrow dz = \frac{2(t^2 + N)}{2\sigma^2} \sigma_N d\sigma_N, \quad d\sigma_N = \frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N)} \frac{1}{\sigma_N} dz, \quad \sigma_N^2 = \frac{2\sigma^2}{(t^2 + N)} z \quad e$$

$$\sigma_N^N d\sigma_N = \sigma_N^N \left[\frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N)} \frac{1}{\sigma_N} dz \right] = \{\sigma_N^{N-1}\} \left[\frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N)} dz \right] = \left\{ \left(\frac{2\sigma^2}{(t^2 + N)} z \right)^{\frac{N-1}{2}} \right\} \left[\frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N)} dz \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma^2}{t^2 + N} \right)^{(N+1)/2} z^{(N-1)/2} dz \quad))))$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma_N^2(t^2 + N)}{2\sigma^2}} \sigma_N^N d\sigma_N = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma^2}{t^2 + N} \right)^{(N+1)/2} \int_0^\infty z^{(N-1)/2} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma^2}{t^2 + N} \right)^{(N+1)/2} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right), \quad \text{sicché la (3.9)}$$

diventa:

$$f_N(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi N} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} (t^2 / N + 1)^{-(N+1)/2} \quad (\text{che è dunque la distribuzione del } t \text{ di Student}). \quad (3.10)$$

Usiamo dunque la (2.2) per avere una valutazione della media μ di tutta la popolazione, con una confidenzialità data da $f_N(t)$ (eq. (3.10)).

$N = N_{\text{Sample}} - 1 = v$ è il n° di gradi di libertà.

La (3.10) ha la funzione di ripartizione, così come ce l'aveva la distribuzione normale (pag. 2), ed è la seguente:

$$\phi_N(t) = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi N} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_{-\infty}^t (\theta^2 / N + 1)^{-(N+1)/2} d\theta.$$

La probabilità che un dato valore t^* di Student sia compreso tra $-t$ e $+t$, ossia che $-t \leq t^* \leq +t$ è:

$$W_N(t) = \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta = 2\phi_N(t) - 1 \quad (3.11)$$

Infatti, $W_N(t)$ è tabulata. Vi è una tabella che dà i vari valori di t in funzione di W_N (al v , o N) e un'altra tabella che dà i vari valori W_N in funzione di t (t e v , o N).

$f_N(t)$ è una funzione pari, ossia $f_N(\theta) = f_N(-\theta)$ e inoltre, per la (3.11) si ha:

$$W_N(t) = \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta = 2 \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - 1 = 2 \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \left(\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta \right) - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \left(\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta + \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta + \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right) \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \left(\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta + 2 \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right) \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta - 2 \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta - 2 \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[(-2 \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta) + \int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[(-\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta) + \int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[-\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta \right] - \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \left[\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta + \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta \right] - \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta.$$

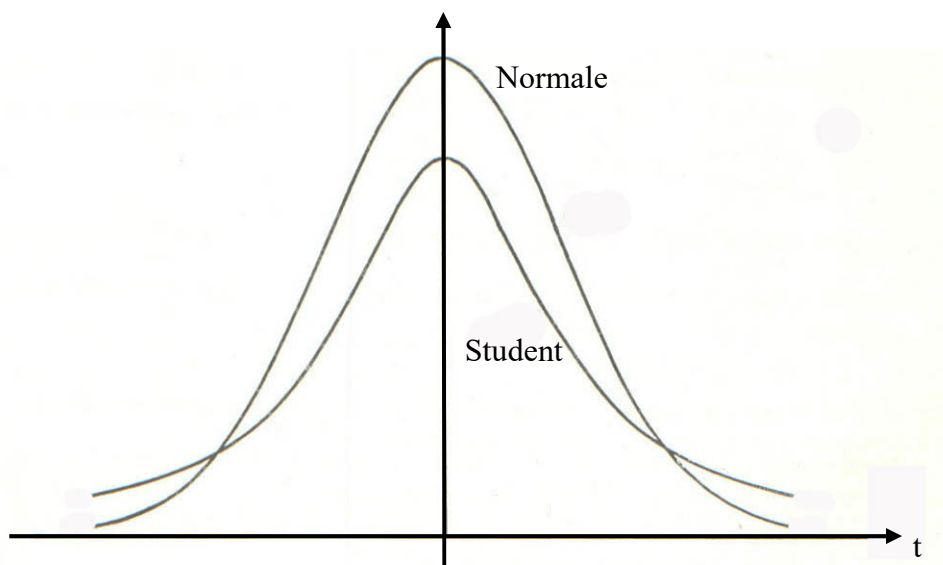


Fig. 3.1-Confronto tra Distribuzioni Normale e di Student.

Come si può vedere dalla Fig. 3.1, la distribuzione di Student è più schiacciata e più slargata; più schiacciata nell'origine poiché i dati maneggiati sono meno probabili, visto l'esiguo numero di elementi N , e più slargata ai lati (ossia lontani dai valori statisticamente meno errati/più probabili) poiché agli errori più grandi viene comunque riconosciuta più probabilità, sempre a causa dell'esiguo N ($N < 30$). Al crescere di N , le due distribuzioni vanno a sovrapporsi (già con $N=40$).

Per concludere, la probabilità che valga la (2.2):

$$\mu \rightarrow x = \bar{x} \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}}$$

con un determinato t è pari appunto al $W_N(t)$ della (3.11).

Se invece si impone la probabilità (W_N), dalle tabelle di W_N si può evincere per quale t ciò sia vero e da lì, tramite la (2.2), si ha una valutazione della media μ della popolazione (ma con quel W_N di probabilità) e si decide dunque se accettare e proseguire (ad esempio con dei cicli produttivi), o se invece rifiutare ed intervenire (ad esempio con un controllo dei macchinari di produzione).

Tra parentesi, si ha l'Errore di Tipo I quando (erroneamente) rifiuto invece di accettare e si ha l'Errore di Tipo II quando (erroneamente) accetto invece di rifiutare.

Analogamente al caso della Distribuzione Normale, basata sul parametro z , anche nel caso del parametro t di Student, con il campione di N elementi che è ovviamente molto inferiore alla popolazione N_p (se esso è noto) ($N < 30$), si può usare la formula:

$$\mu = \bar{x} + \frac{t|\sigma_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} \quad . \text{ Quando media e deviazione standard dell'intera popolazione non sono}$$

note, ecco la formula che si può usare come legame tra la deviazione standard del campione σ_N e quella di tutta la popolazione σ :

$$\sigma_N = \sigma \sqrt{\frac{N-1}{N}} \quad , \quad (3.12)$$

con il fattore $\frac{N-1}{N}$ che è noto come Fattore di Correzione di Bessel.

Dimostrazione (della (3.12)):

siano $\bar{x}$ la media del campioncino e μ quella della popolazione; abbiamo:

$$x_j - \bar{x} = (x_j - \mu) - (\bar{x} - \mu) \text{ da cui: } (x_j - \bar{x})^2 = (x_j - \mu)^2 - 2(x_j - \mu)(\bar{x} - \mu) + (\bar{x} - \mu)^2 \text{ e:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 = \sum (x_j - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) \sum (x_j - \mu) + \sum (\bar{x} - \mu)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) [\sum x_j - N\mu] + N(\bar{x} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) [N\bar{x} - N\mu] + N(\bar{x} - \mu)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - 2N(\bar{x} - \mu)^2 + N(\bar{x} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - N(\bar{x} - \mu)^2 \rightarrow \end{aligned}$$

(Calcolato con μ della popolazione, dunque esso è il σ della popolazione)

$$\rightarrow \left\langle \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 \right\rangle - N \left\langle (\bar{x} - \mu)^2 \right\rangle = N\sigma^2 - N\left(\frac{\sigma^2}{N}\right) =$$

(Il $\sigma_{\bar{x}}^2$ della media, che notoriamente vale $\frac{\sigma^2}{N}$)

allora, proseguendo con i calcoli: $= (N-1)\sigma^2 = N\sigma_N^2$, da cui: $\sigma_N^2 = \frac{(N-1)}{N}\sigma^2$, cvd.

Dunque, una stima di σ dà: $\sigma = \sigma_N \sqrt{\frac{N}{N-1}}$ e per $N \sim 30 \rightarrow \sigma = \sigma_N$ (3.13)

Ma tale (3.13) non può essere usata per campioni piccoli, ovviamente (Student) e si userà comunque la σ data dalla (3.12). Inoltre, $\mu = \bar{x} + \frac{|t|\sigma_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}}$ e per popolazioni non infinite, si

$$\text{ha: } \mu = \bar{x} + \frac{|t|\sigma_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}}.$$

Confronto tra due medie aritmetiche sperimentali:

1° provino, n items, media $\bar{x}$, dev.std. σ_x

2° provino, n items, media $\bar{y}$, dev.std. σ_y

Domanda: la differenza $\bar{x} - \bar{y}$ è reale e significativa, oppure è dovuta semplicemente al caso? Cioè, in quel caso, μ_x e μ_y , o $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ sono davvero diversi o la loro differenza è dovuta solo al caso?

Come σ_m (medio) considereremo ovviamente:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{(n-1)\sigma_x^2 + (m-1)\sigma_y^2}{(n-1) + (m-1)}} \quad \text{e} \quad \sigma_m^2 = \sigma_m^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right).$$

A questo punto si fissa la sicurezza statistica W e dalle tabelle si va a vedere per quale valore di t^* essa sussista. Ad esempio, si sceglie un $W=0,05 \rightarrow 5\%$ e si cerca in tabella quel W di 0,05 corrispondente ad un $v=n+m-2$. Ottenuto il t^* , per quanto già sappiamo sulla statistica della distribuzione di Student, si ha: $\mu = \bar{x} + |t|\sigma_m$ genericamente e, nello specifico nostro:

$$|\mu_x - \mu_y| = |\bar{x} - \bar{y}| + |t|\sigma_m; \quad (3.14)$$

Visto che l'ipotesi $\mu_x = \mu_y$ nella (3.14) fa sì che: $|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_m}$, allora l'ipotesi $\mu_x = \mu_y$ è accettata se:

$$\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_m} < t^*, \text{ mentre si ha il rifiuto e } \mu_x \neq \mu_y \text{ se } \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_m} \geq t^*.$$

Nel caso in cui siano invece note le deviazioni standard della popolazione, allora si prende:

$\sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$, e in tal caso non ci si rifà più a t, ma a z, poiché il parametro z segue la distribuzione normale e non quella di Student, avendo noi i valori delle σ della popolazione; in tal caso, allora $z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_D} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$ e fissato $W(z)$, si ottiene la z e $z > \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_D}$ determina

l'accettazione dell'ipotesi $\mu_x = \mu_y$ (proprio come nel caso precedente), mentre il rifiuto è rappresentato dalla situazione: $z \leq \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_D}$.

ESEMPIO 1 di uso della Distribuzione di Student:

Un macchinario ha prodotto rondelle con uno spessore medio di 0,05cm ($\mu=0,05$ cm). Per valutare se il macchinario sta lavorando bene, preleviamo un campione di $N=10$ rondelle, ne misuriamo gli spessori e valutiamo la media, che è, ad esempio, $\bar{x} = 0,053$ cm; valutiamo altresì la deviazione standard di questo campioncino, che è:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{x})^2}{(N-1)}} \text{ ed abbiamo, ad esempio, } \sigma_N = 0,003 \text{cm}.$$

Valutiamo dunque l'affidabilità del macchinario, prima per un livello di significatività del 5% (0,05) e poi dell'1% (0,01).

A)0,05: $N < 30$, dunque non usiamo la distribuzione normale, ma quella di Student:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} = \frac{(0,053 - 0,05)}{0,003} \sqrt{10-1} = 3,00.$$

Adesso, volendo stare dentro il 5% (0,05), ed essendo che il diametro può discostarsi sia in più che in meno, ho un +2,5% ed un -2,5% di pezzi out, portando il range di accettazione a 97,5% $(-(100\% - 2,5\%) \text{ e } +(100\% - 2,5\%))$, cioè tra -0,975 e +0,975; vado allora in tabella (di Student) e cerco il $t_{0,975}$ corrispondente a $v=N-1=9$ e trovo il valore $t_{0,975}=2,26$; visto che il nostro t è 3, esso sta fuori dal range $(-2,26 \div +2,26)$, dunque rifiuto e faccio controllare il macchinario.

B)0,01: viceversa, tenendomi sull'1%, posso sconfinare in alto o in basso dello 0,5%, dunque ho un range di accettazione di pezzi ok al 99,5% $(-(100\% - 0,5\%) \text{ e } +(100\% - 0,5\%))$ cioè tra -0,995 e +0,995 e allora vado in tabella (di Student) e cerco il $t_{0,995}$ in corrispondenza di un $v=N-1=9$ e trovo $t_{0,995}=3,25$; in conclusione, visto che il nostro $t=3$ sta dentro al range $(-3,25 \div +3,25)$, accetto

lo stato del macchinario (all'1%) e: $\bar{x} - t_{0,995} \frac{\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}} < \mu < \bar{x} + t_{0,995} \frac{\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}}.$

ESEMPIO 2 di uso della Distribuzione di Student:

Si producono cavi d'acciaio; prelevo un campioncino di $N=6$ cavi e la media del carico di rottura di tali 6 cavi è $\bar{x} = 7750$ kg (ma pretendo un valore di 8000kg), e con una deviazione standard σ_N pari a 145kg.

$$(\sigma_N = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_6 - \bar{x})^2}{(N-1)}} = 145 \text{kg})$$

Possiamo, sulla base dei risultati fornitici dal nostro campioncino di 6 cavi, tranquillizzare il produttore ad un livello di significatività di A)0,05 (5%) e B)0,01 (1%) ?

In questo caso il produttore è insoddisfatto solo quando $x < 8000$ kg, perché se $x > 8000$ kg, tanto meglio; dunque posso non sconfinare solo in basso (-):

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} = \frac{(7750 - 8000)}{145} \sqrt{6-1} = -3,86.$$

A)5% (0,05) Cerco poi in tabella di Student il $t_{0,95}$ in corrispondenza di un $v=6-1=5$ e trovo $t_{0,95}=+2,01$; $(-t_{0,95}=-2,01)$; visto che $t=-3,86 < -t_{0,95}=-2,01$, allora rifiuto e NON rassicuro il produttore.

B)1% (0,01) $t_{0,99(v=5)}=+3,36 \rightarrow (-t_{0,99}=-3,36)$; siccome il nostro $t=-3,86 < -t_{0,99}=-3,36$, rifiuto.

EINSTEIN DENTRO HUBBLE

In relatività il tempo t è considerato la quarta dimensione; ma il tempo inteso come una lunghezza (in quanto dimensione): $x_4 = c \cdot t$.

Il tempo non è niente altro che il nome che viene dato ad una relazione matematica di rapporto tra due spazi differenti; quando dico che per andare da casa al lavoro ho impiegato il tempo di mezz'ora, dico semplicemente che il percorrimiento dello spazio che separa casa mia dall'azienda in cui lavoro è corrisposto allo spazio di mezza circonferenza orologio percorsa dalla punta della lancetta dei minuti. E' dunque sempre e solo lo spazio tridimensionale che ci dà il senso della proporzione ed il senso fisico delle cose. Addirittura anche le grandezze elettromagnetiche sono subordinate allo spazio e traggono significato da esso: io constato che due elettroni si respingono nella misura in cui essi tendono ad incrementare lo spazio tra loro.

Inoltre, l'uomo ha da sempre misurato il tempo riferendosi agli eventi naturali ("spaziali"), come l'orbitare della Terra intorno al Sole (anno), la rotazione della Terra intorno a se stessa (giorno) eccetera.

Dunque, per approfondire, sappiamo dalla cosmologia che la Costante di Hubble H vale:

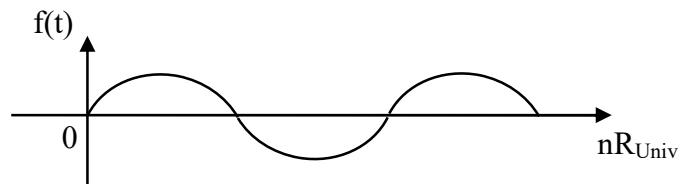
$H \cong 72 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc}) \cong 2,338 \cdot 10^{-18} [(\frac{\text{m}}{\text{s}})/\text{m}]$ e per il nostro universo vale la Legge di Hubble:

$H \cong c/R$, da cui: $R = \frac{1}{H} c = t_{\text{Univ}} c$, ossia l'inverso della Costante di Hubble è l'età dell'universo.

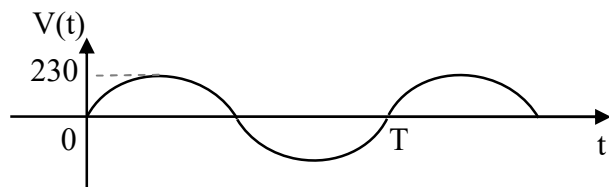
Allora il tempo è il raggio R dell'universo (inteso come sfera di Hubble), a meno di una costante c . L'universo è l'evento principe; è l'evento degli eventi, dunque è ad esso che ci si deve riferire, come fosse il clock di una CPU (microprocessore).

Un secondo è tanto o poco (e noi sappiamo che è poco) in base alla lunghezza del giorno, dal sorgere al tramonto del Sole e/o dell'anno (giro completo intorno al Sole).

Quindi, in ogni grafico, su ogni piano cartesiano dove vi è in ascissa il tempo t , possiamo sostituire t con nR_{Univ} .

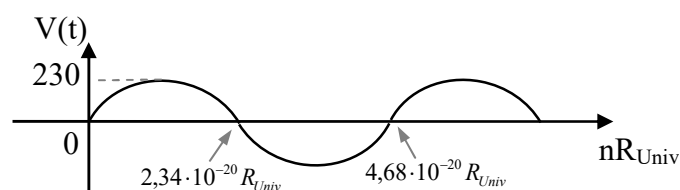


Come caso specifico, immaginiamo la tensione di rete $V(t)$ in casa nostra, a 230V ac, 50Hz, $V(t) = 230 \cdot \sin(2\pi 50t)$: (abbiamo posto, per semplicità, $V_M \approx V_{\text{eff}} = 230\text{V}$)



$$T = 1/f = 1/50 = 20 \times 10^{-3} \text{ s} = 20 \text{ ms}. \quad R_{\text{Univ}} = \frac{c}{H} = \frac{2,99792458 \cdot 10^8}{2,338 \cdot 10^{-18}} = 1,28 \cdot 10^{26} \text{ m}$$

$$R_T = cT = (H \cdot R_{\text{Univ}})T = 2,99792458 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 5,99 \cdot 10^6 \text{ m} = (H \cdot T)R_{\text{Univ}} = 4,68 \cdot 10^{-20} R_{\text{Univ}}$$



MICHELSON-MORLEY DENTRO EINSTEIN

Perché $E=mc^2$ e non $E=(1/2)mc^2$?

Nel rispondere al quesito proposto nel titolo, un primo suggerimento potrebbe provenire dal Teorema del Viriale, ossia, semplificando, dal fatto che:

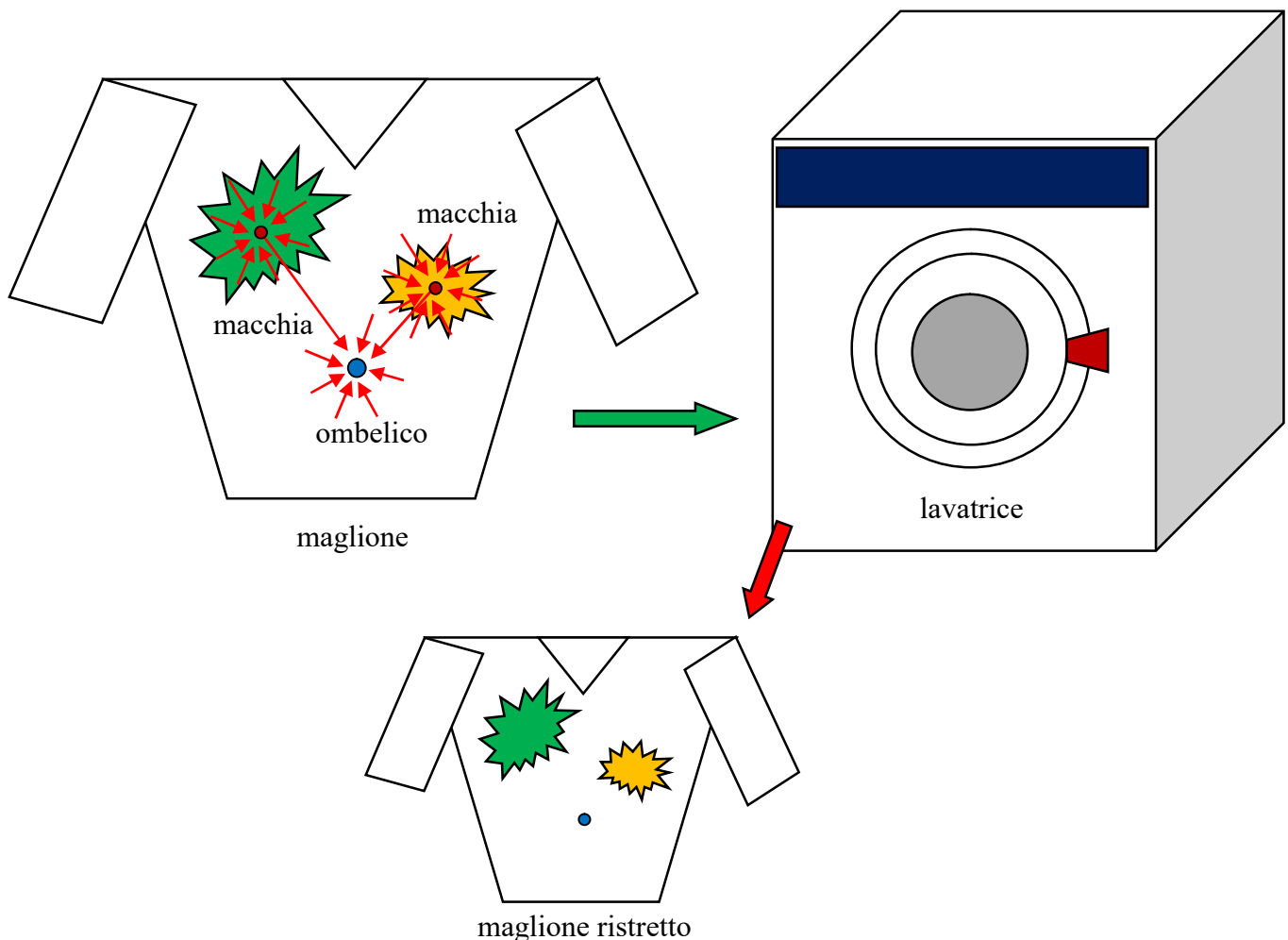
$|E_P| = |2E_K|$; infatti, riguardo l'energia cinetica, si ha: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ ed imponendo l'equilibrio tra

forza gravitazionale e forza centrifuga, si ha: $F = \frac{GMm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$, da cui:

$E_P = \vec{F} \cdot \vec{R} = F \cdot R = \frac{GMm}{R} = mv^2 = 2E_K$, dunque, identificando l'energia a riposo E_0 posseduta da

una massa m_0 con una energia potenziale E_P , si ha appunto: $E_0 = E_P = 2E_K = 2\frac{1}{2}m_0c^2 = m_0c^2$.

Non a caso, noi sappiamo (teoricamente) dalla Legge di Hubble che in qualsiasi direzione guardiamo, vediamo oggetti in allontanamento, dunque, nella caduta libera del tutto, a velocità (universale) c , all'interno dell'universo, qualsiasi direzione rappresenta il centro, ossia un ipotetico "centro di massa" dell'universo (in una geometria evidentemente non euclidea) per chi sostiene la contrazione accelerata verso "il centro", oppure rappresenta "l'esterno", verso cui l'universo si espande, per chi sostiene invece l'espansione (ossia il grosso della comunità scientifica), che però, purtroppo, ahimè, dovrebbe essere rallentata e non accelerata, come invece risulta essere attualmente.



È un po' come nella figura qui sopra, dove un maglione con delle macchie viene messo in lavatrice ed esce poi dal lavaggio tutto ristretto, ma il centro verso il quale il restringimento avviene non è solo quello generale, dell'intero maglione, rappresentato dall'ombelico, verso cui tutti i punti del maglione convergono, ma bensì anche i centri di ognuna delle due macchie sono, a loro volta, centri di restringimento, verso cui, appunto, tutti i punti delle singole macchie convergono. Per riassumere, ogni punto è il centro!

Dunque, per riassumere, una massa m_0 , immersa nel suo universo di massa M_{Univ} , avrà una energia potenziale $E_p = \frac{GM_{Univ}m_0}{R_{Univ}} = m_0 v_{Univ}^2 = m_0 c^2$. Adesso, se a questa massa m_0 in caduta libera

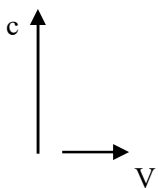
nell'universo, a velocità c , ma ferma rispetto a noi (che pure siamo in caduta libera con essa) imprimiamo una velocità V , succederà che la nuova velocità di caduta libera v_{Tr} di m_0 sarà una composizione di c e V ; nella fattispecie:

$$v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2}, \quad (1)$$

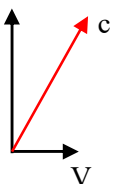
da cui:

$$V = \sqrt{c^2 - v_{Tr}^2}. \quad (2)$$

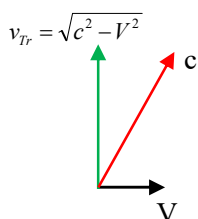
Per giustificare ciò, prendiamo, sulle due dimensioni di un disegno che raffigura tale esperimento, la velocità di caduta libera ordinaria c come verticale, dal basso verso l'alto e la V da noi impressa all'oggetto m_0 come trasversale, rispetto a c , e da sinistra a destra, ossia quanto qui rappresentato:



ora, la composizione di tali due velocità sarà vettorialmente quella rappresentata dal vettore rosso qui sotto:

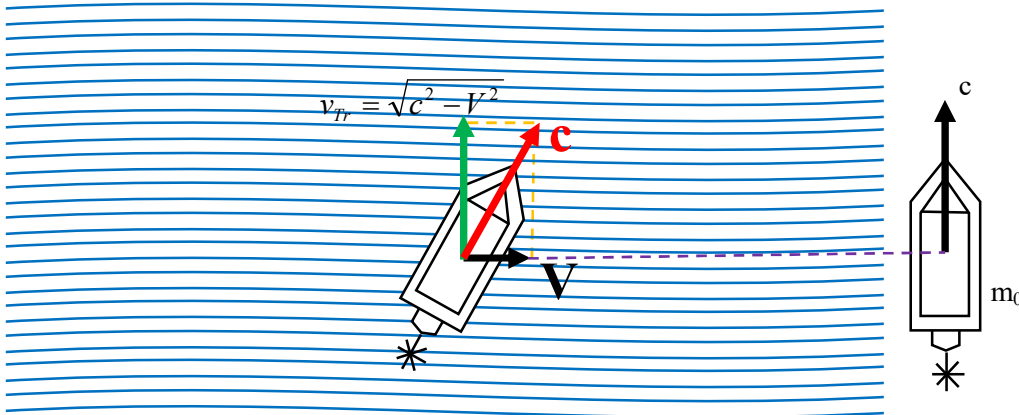


ma con la differenza che il vettore rosso, rappresentando comunque la caduta ordinaria di m_0 nell'universo, avrà lo stesso valore c , mentre noi osservatori che siamo in caduta libera insieme con m_0 , vedremo quest'ultima come dotata solo di V (orizzontale) e dovremo così concludere che la (a noi non direttamente visibile) nuova caduta libera di m_0 nell'universo sarà la v_{Tr} del vettore verde qui sotto, applicando il Teorema di Pitagora, che è inferiore a c :

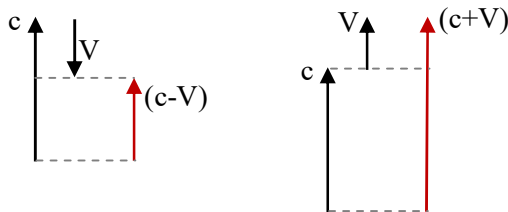


Per essere più chiari, supponiamo che la m_0 sia un motoscafo con un motore che è in grado di spingere l'imbarcazione a velocità c e supponiamo che nel fiume (che fa le veci dell'universo) vi sia una corrente d'acqua, trasversale, da sinistra a destra, a velocità V ; allora, a parità di punto d'approdo, il nuovo moto obliquo della barca nel fiume sarà comunque a velocità c , poiché il

motore (in acqua) questo sa dare, anche in obliquo, ma la nuova velocità con cui il motoscafo procederà verticalmente sarà $v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2}$:



Ricordiamo, per ultimo, che una velocità del tipo $v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2}$ salta fuori anche in caso di velocità V impartite parallelamente al senso di marcia, cioè (c+V) o (c-V):



infatti, la media geometrica tra le due velocità (c+V) e (c-V) è: $v_{Tr} = \sqrt{(c+V)(c-V)} = \sqrt{c^2 - V^2}$.

Inoltre, la (1) salta fuori anche dall'Esperimento di Michelson e Morley, più sotto riportato; infatti, è là evidenziata l'equazione (A1.1), che ci dice che quando la luce (c), ipoteticamente, si muove trasversalmente (v_{Tr}), rispetto al moto (V) della sorgente (dunque della Terra) nell'etere, allora è come se il target S_2 (il punto di approdo della luce) sfugga trasversalmente, costringendo la luce a compiere un tragitto più lungo (un'ipotenusa) che equivarrebbe poi a percorrere lo stesso tragitto corto (un cateto), ma con velocità ridotta dal Teorema di Pitagora, ossia appunto $v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2}$.

Adesso, ribadendo che l'energia intrinseca (dunque anche da fermo) E_0 di cui una massa m_0 è dotata sia una energia potenziale (ossia: $E_0 = m_0 c^2$) ad essa conferita proprio dall'universo, che suppone poi anche il moto di caduta libera, a velocità c, nell'universo stesso, ed intuendo altresì che quando, come supposto in precedenza, tale energia di caduta diventasse $E_{Tr} = E_0 + E_K$ quando appunto alla massa m_0 (ferma e dotata di energia E_0) fornisco (ovviamente) una energia cinetica E_K (quella corrispondente a V), allora la legge della proporzionalità inversa vuole che:

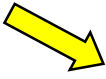
$$[v_{Tr}] \cdot [E_0 + E_K] = [c] \cdot [E_0] , \text{ ossia: } \frac{v_{Tr}}{c} = \frac{E_0}{E_0 + E_K} = \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K} , \text{ da cui:}$$

$$v_{Tr} = c \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K} \quad (3)$$

poiché abbiamo appunto una caduta a c con E_0 ed una caduta a v_{Tr} con una energia addizionata ($E_0 + E_K$). Inserendo adesso la (3) nella (2), otteniamo:

$$V = \sqrt{c^2 - v_{Tr}^2} = \sqrt{c^2 - \left(c \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K}\right)^2} \quad (4)$$

e ricavando da questa E_K , si ottiene finalmente:




$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (5)$$

che è esattamente l'espressione per l'energia cinetica E_K di Einstein e con un'energia totale $E_T = \gamma m_0 c^2$ ed il tutto a conferma della sussistenza della tesi, ossia che: $E_0 = m_0 c^2$!!

Inoltre, se $E_K \ll m_0 c^2$ e considerando che, per Taylor, con $x \ll 1$, si ha: $(1-x)^2 = 1-2x$ e $1/(1+x) = 1-x$ allora, sempre dalla (4) segue che:

$$V = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{E_K}{m_0 c^2}}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{E_K}{m_0 c^2}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2E_K}{m_0 c^2}\right)} = c \sqrt{\frac{2E_K}{m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{2E_K}{m_0}}$$

da cui: $E_K = \frac{1}{2} m_0 V^2$ (Newton!!).

E non è poi un caso che, per la (1), la nuova velocità di caduta libera v_{Tr} non è più c , ma tende a zero con l'approssimarsi a c della velocità V impressa al corpo ed una velocità di caduta libera pari a zero corrisponderebbe, guarda caso, ad un universo fermo, ossia ad un tempo fermo, proprio come previsto dalla teoria di Einstein per corpi che si approssimano a c .

Per ultimo, diamo un cenno di ciò che succede quando, invece, non è l'osservatore (l'uomo) ad imprimere una velocità addizionale (e dunque un'energia addizionale) ad un corpo, ma bensì è l'universo che, di suo, con il suo ciclo, ad esempio rallentando, fa sì che quel corpo perda energia (E_{Lost}), irradiandola; ma qui l'uomo non ne può nulla; è l'universo a decidere, con i suoi tempi; dunque, in tal caso, un'analogia della (3) ci direbbe che, riguardo questa perdita di energia di caduta libera, si ha:

$$v_{Tr} = c \frac{m_0 c^2 - E_{Lost}}{m_0 c^2} \quad (6)$$

che, ancora una volta, inserita nella (2), fornisce:

$$V = \sqrt{c^2 - v_{Tr}^2} = \sqrt{c^2 - \left(c \frac{m_0 c^2 - E_{Lost}}{m_0 c^2}\right)^2} \quad (7)$$

e ricavando da questa la E_{Lost} , si avrà:

$E_{Lost} = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) = m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$, rimanendo poi la sola $E_R = \frac{1}{\gamma} m_0 c^2$, totalmente sconosciuta alla relatività ufficiale.

L'Esperimento di Michelson e Morley

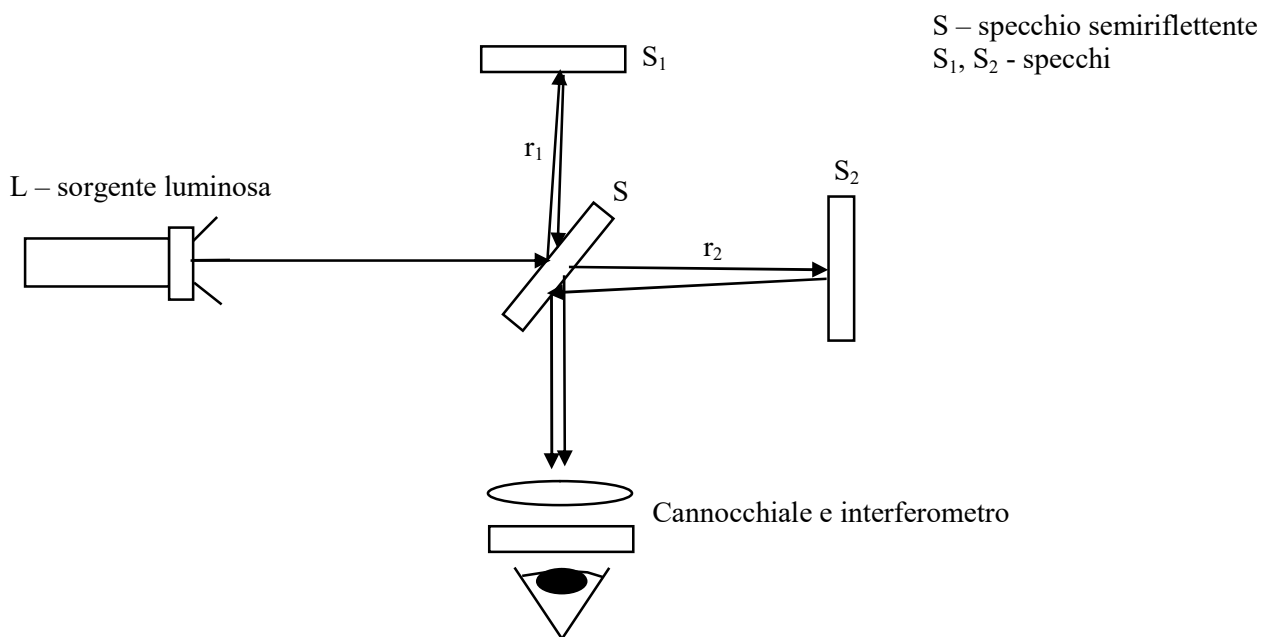


Fig. A1.1: Apparecchiatura di Michelson (interferometro).

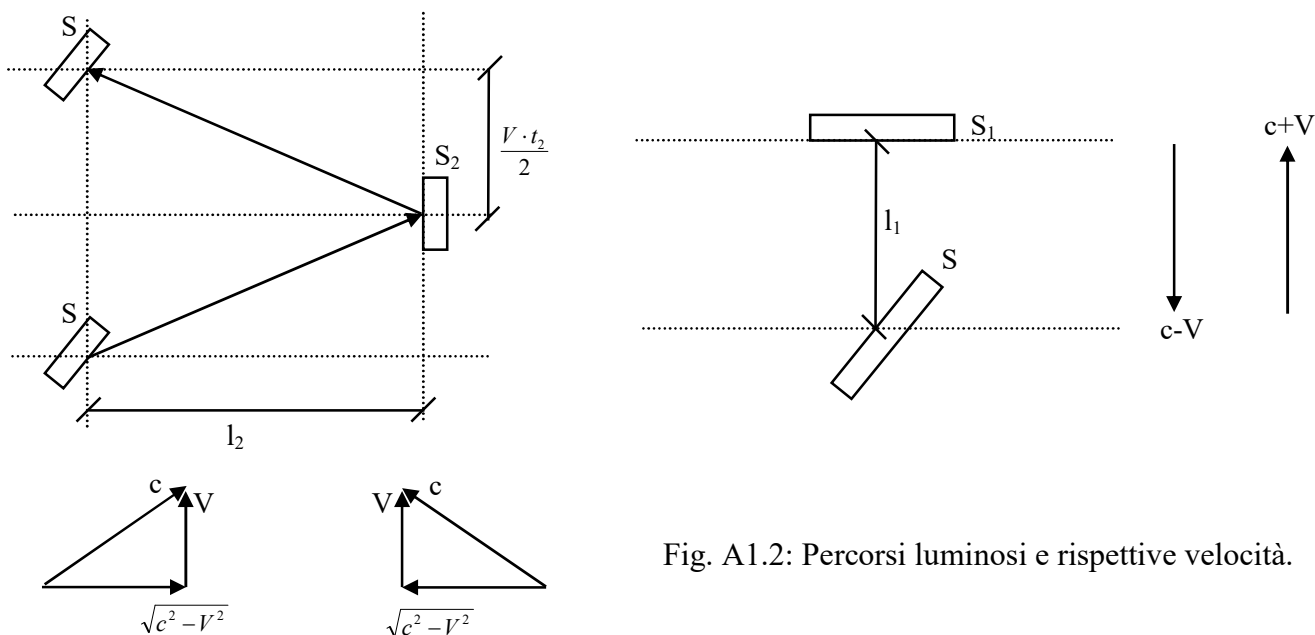


Fig. A1.2: Percorsi luminosi e rispettive velocità.

Prima di Einstein si pensava che le onde elettromagnetiche, e dunque anche la luce, dovessero necessariamente propagarsi in un mezzo, così come avviene per le onde sonore nell'aria. Si suppose dunque che lo spazio fosse permeato da un gas invisibile e leggerissimo, detto etere. La Terra ruota intorno al Sole con una velocità V di circa 30 km/s, dunque si muoverebbe nell'etere con tale velocità e la luce emessa da una sorgente luminosa solidale con la Terra stessa dovrebbe dunque avere, in generale, una velocità diversa da c ($c \pm V$ lungo la direzione di moto della Terra e $\sqrt{c^2 - V^2}$ trasversalmente).

Nel 1886 si iniziò a preparare l'esperimento, che doveva dimostrare il movimento della Terra nell'etere. A Cleveland venne bloccato il traffico durante l'esperimento, per evitare vibrazioni; l'apparecchiatura fu posta su una lastra di pietra galleggiante in un pozzo di mercurio, per effettuare la rotazione dell'apparecchiatura di 90° senza vibrazioni.

Ora, con l_1 lungo il moto della Terra, per il cammino di andata e ritorno compiuto dalla luce, si ha:

$$t_1 = \frac{l_1}{c+V} + \frac{l_1}{c-V} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{(1-V^2/c^2)} \text{ e per il moto trasversale lungo } l_2:$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} \quad (\text{A1.1})$$

Facendo giungere i due raggi su un interferometro per farli appunto interferire, gli stessi giungerebbero con un Δt pari a:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_1}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_2(1+V^2/2c^2) - l_1(1+V^2/c^2)]$$

in quanto si ha che $V/c \cong 10^{-4}$, $V^2/c^2 \cong 10^{-8}$ e $(1+x)^k \cong 1+kx$.

La lunghezza d'onda della luce utilizzata era $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} m$ e sappiamo che a λ corrisponde l'angolo giro 2π ; possiamo dunque scrivere la seguente proporzione che coinvolge l'angolo di sfasamento δ tra i due raggi e la differenza di cammino $c\Delta t$:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c\Delta t}{\delta}, \text{ da cui: } \delta = \frac{2\pi c\Delta t}{\lambda}.$$

Fissando la lunghezza di un braccio e regolando quella dell'altro tramite una vite micrometrica, si può rendere $c\Delta t$ dell'ordine di λ , realizzando il fenomeno di interferenza voluto.

Ora, senza variare la geometria dell'apparecchiatura, la si ruoti di 90° ; i ruoli di l_1 ed l_2 si invertiranno e si avrà:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_2}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_1(1+V^2/2c^2) - l_2(1+V^2/c^2)]$$

e inoltre si avrebbe: $\frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{\delta - \delta'}{2\pi} = \frac{c\Delta t - c\Delta t'}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \frac{V^2}{c^2} = \frac{22m}{5,5 \cdot 10^{-7} m} 10^{-8} \cong 0,4$, cioè, con la

rotazione dell'interferometro si dovrebbe osservare uno spostamento delle frange di interferenza pari a 0,4 volte la distanza λ fra due massimi successivi.

In realtà, nulla di tutto ciò fu osservato, nonostante la sensibilità degli strumenti fosse tale che si potesse avere anche $\frac{\Delta\delta}{2\pi} = 0,01$!

Michelson si dichiarò dunque deluso dall'esperimento, visto che non venne dimostrato il movimento della Terra nell'etere.

La questione venne risolta nel 1905 da un impiegato dell'Ufficio Brevetti di Berna, un certo Albert Einstein, che suggerì di cessare di cercare di dimostrare il moto della Terra nell'etere, per il semplice fatto che l'etere non esiste!



PHYSICIST INTO PHYSICIST - COLLECTION

Abstract: a collection of cases where a physicist is found into another physicist.

Leonardo Rubino

July 2025

HEISENBERG INTO COULOMB

Here is the Heisenberg Uncertainty Principle:

$$\begin{aligned} \Delta p \cdot \Delta x &\geq \hbar/2 \\ \Delta E \cdot \Delta t &\geq \hbar/2 \end{aligned}$$

As it absolutely rules the appearing (pre annihilation) of a pair particle (+) / antiparticle (-), like positron/electron, it follows that when the two particles appear, then they part (in a time Δt) with velocity c of light and up to reaching the mutual distance $\Delta x = r = c\Delta t$ and we also know from the physics that the force F is: $F = \Delta p / \Delta t$, so:

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar/2 = h/4\pi \approx F\Delta t \cdot r = F \frac{r}{c} \cdot r = F \frac{r^2}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow F = \left(\frac{hc}{4\pi}\right) \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

which is exactly the relation between F and $1/r^2$ in the Coulomb's Law (*):

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{r^2} .$$

(*): those two constants are not identical, that is: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \neq \frac{hc}{4\pi}$, but rather:

$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = (2\alpha) \frac{hc}{4\pi} \cong \left(\frac{2}{137}\right) \frac{hc}{4\pi}$, where α is the Fine Structure Constant; all this (the additional coefficient 2α) stands because the Heisenberg Uncertainty Principle is shaped over an atom and not over a particle/antiparticle pair; in fact, as long as a particle and its own antiparticle, while showing up, also part at a distance r by travelling the distance of $r/2$ each from the centre of mass, then, conversely, in case of an H atom, the proton is so massive, with respect to the electron ($m_p = 1836m_e$), that in practice it doesn't move at all and stays in the centre of mass of the system, so travelling for a length of $0r$, while all the distance r is run by the light electron ($1r$), from which we get an average value of $(0r + 1r)/2 = r/2$ and the 2 is so justified.

At last, in order to justify the 137, we just notice that, still due to the difference in mass between the proton and the electron, the parting velocity is no longer c , but rather that (the only one, as the proton is not moving and stays in the centre of mass) had by the electron around the proton in an H atom, that is (obviously) $c/137$.

MAXWELL INTO EINSTEIN

Magnetic field – a relativistic illusion:

One day, Coulomb (1785) taught us two charges (for instance, with opposite signs) attract each other with a certain force:

$$\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

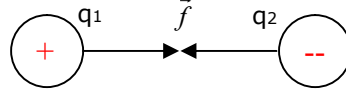


Fig. 1.

Moreover, if those two charges are a big one Q and a small one q (a test one), we define the electric field E generated by Q . As we have:

$$\vec{f} = \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}, \text{ then: } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Electric field generated by an infinite wire:

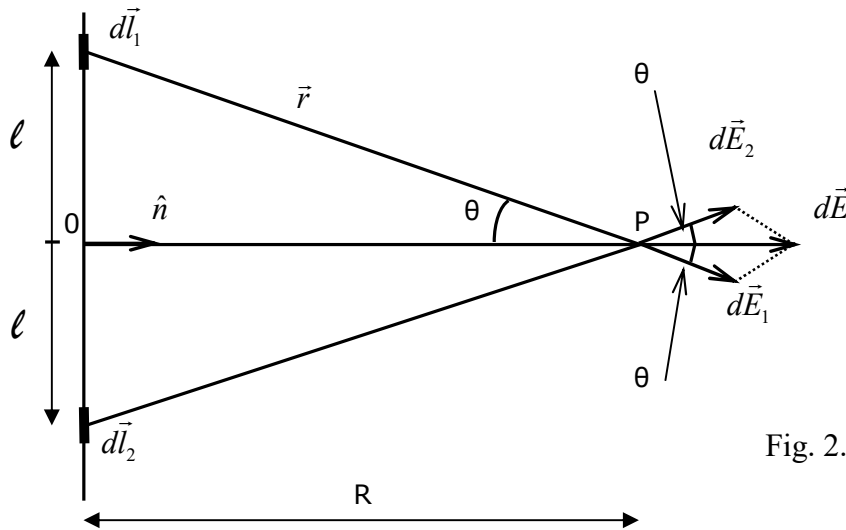


Fig. 2.

We consider two elements of wire dl_1 and dl_2 and we figure out the electric field generated in P:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = (|dE_1| + |dE_2|) \cos \theta \cdot \hat{n} = \frac{2 \cos \theta \cdot \hat{n} \lambda dl}{4\pi\epsilon r^2} \quad (1)$$

Moreover: $r = R / \cos \theta$ and $l = R \cdot \tan \theta$; by differentiating: $dl = R \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$. If now we put this in the

(1) and consider that $\lambda = \text{const}$ (linear density of charge):

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\hat{n}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta \lambda \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{R^2} = \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{n}} \quad (2)$$

The relativistic illusion:

what's the symbol equation of the "Theory" of Relativity? For sure, almost everybody will answer $E=mc^2$. But this equation looks like that of the kinetic energy of Newton ($(1/2)mv^2$); it's not so new. On the contrary, the most representative equation, which says we are really dealing with relativity, is the following:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ or, better, just the root } \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \text{ or, more simply: } \boxed{(1-\frac{v^2}{c^2})}.$$

This expression was already hidden into XVIII and XIX century's electromagnetism.

After simplifying a bit all reasonings which follows, we have a linear distribution of positive charges n (n charges per metre) and a single charge q at distance d , as shown in figure 3.

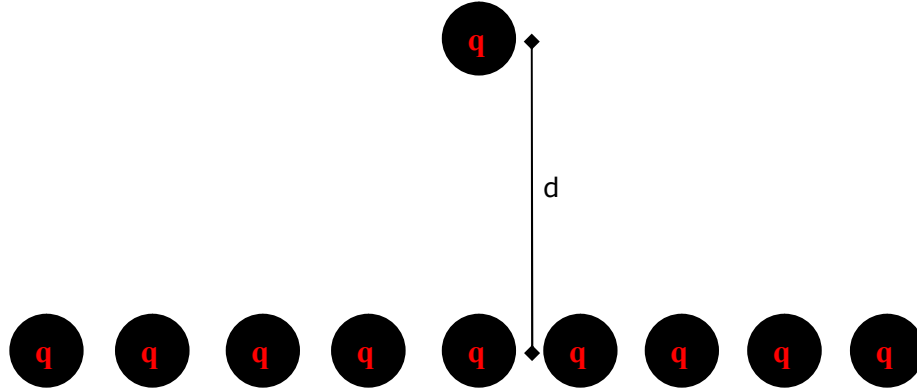
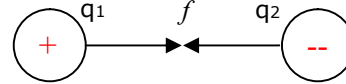


Fig. 3.

If the linear density of charge is λ [C/m], then, from the Law of Coulomb of 1785, that is:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{r} \quad (\text{Coulomb-1785})$$



we can get the electric field E generated by such a charge distribution and the relevant repulsion force F on the single charge q is:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} \quad (\text{for Coulomb-1785}), \text{ where } \lambda = nq.$$

And in such a situation, all charges initially look still.

Now, if I (the observer) suppose I travel with speed v to the right, then I will see charges moving backwards, to the left, so I see electric currents, and we know from the XIX century magnetism that currents with the same directions attract each other (two electric wires carrying electric currents with the same directions attract each other; it's what's happening in all electric motors, every day). Therefore, not only we see the charge repulsed, but also magnetically attracted, towards the charge distribution.

According to the total Force of Lorentz, we'll have ($\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{t}$, for Biot-Savart-1820):

$$\vec{F}' = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv\hat{n}, \text{ but, by the definition of an electric current:}$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(n\Delta x)}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv = \lambda v \quad (\Delta x = v\Delta t \text{ is the space travelled}), \text{ then:}$$

$$\vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv\hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q\lambda v^2}{2\pi d} \hat{n}. \text{ Now, we remind the well known equation for the}$$

$$\text{velocity of the electromagnetic waves } c \text{ in vacuum: } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (1856)$$

$$\text{and so: } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}, \text{ and we'll have, for the force on the single charge:}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q \lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{v^2}{c^2} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n}, \text{ that is:}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} \quad ; \text{ here is, again, the symbol expression of the Relativity!}$$

Notice that $\vec{F} \neq \vec{F}$, which means the observers (still one and moving one) are seeing two different situations...something's wrong. In order to tidy up calculations, all distances among charges must appear different to the observers, which means the distance must be a relative quantity to the

observer and the same must be for time. The relativistic expression $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ will appear in the

equation for the new λ and also another relativistic one $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ for the evaluation of involved

times and both of them will cancel with the new expression $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ just appeared. You can notice

the most recent equation we used in all this reasoning is about 1856, when Albert Einstein wasn't yet born! What's the truth? Are space and time to become relative to balance the appearing of a magnetic force effect, or, on the contrary, the magnetic force, not existing as a new force in itself, does not exist, but it's rather a delta of electric force due to the fact that space and time are relative? The right understanding is the latter, even though, formally, or mathematically, it doesn't make any difference.

EINSTEIN INTO MAXWELL

THE BIRTH OF A POYNTING VECTOR

A photon shows up just because the highest speed which can be reached in the universe is limited (indeed) and is c , so there comes a time delay in the perception of events by the observers.

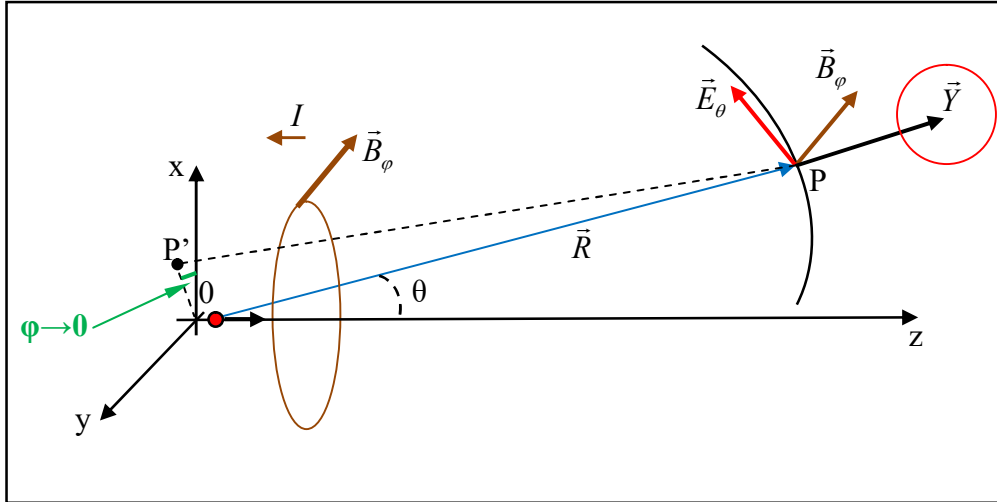


Fig. 1.1: The Poynting Vector $\vec{Y}$ (here $\phi=0$, as we have a complete symmetry around z).

With reference to Fig. 1.1, we have an electron e^- (●) which travels along z , to the right, and once it crosses the origin of axes, for some reason (a collision or something else) in a short space it decelerates and stops. Of course the current I , represented there, has got an opposite direction with respect to that of the motion of the electron (being the electron negative and $I=dq/dt<0$). At this point, the vector which represents the magnetic field generated by such a current I must lie along $\hat{\phi}$, and it is $\vec{B}_\phi$. And we will have a magnetic field also in P and still along $\hat{\phi}$, of course.

And it's not by chance that in the study of antennas and so also of the oscillating dipoles, where we have about the origin of axes electrons (of an alternating current) which accelerate and decelerate, the far fields which are left are really E_θ and B_ϕ ; see, on this purpose, the (A9.17) equations in the Appendix 9 at the following link, where the calculations there have been carried out in a rigorous way:

(https://www.academia.edu/100124448/AN_INTRODUCTION_TO_ANTENNAS_ITA_ENG)

$$E_R \approx 0, \quad E_\theta = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} j\omega\mu \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin\theta, \quad B_\phi = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} j\beta \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin\theta, \quad (\text{far fields})$$

In order to go from the “non far” field to that far one, indeed, the only B component is B_ϕ , while for what the E components are concerned, in order to go from the “non far” field to the far one, we see E_θ as a survivor and E_R vanishes.

But while for B_ϕ ————— as the only B component left, all is clear and obvious, conversely, regarding the behaviour of the E components, we need particular reasonings to understand why E_R vanishes and E_θ ————— survives.

Let's see what the reasons are; we need to analyse Fig. 1.2; there is an electric charge q (●), which is ideally seen by the observer to come with speed v ($\ll c$) from $-\infty$ and at a certain point, for some reason, (a collision or something else), in $z=0$ (and at the time $t=0$) it is decelerated (by a deceleration a) and stopped within a very short time $t=\tau$. Besides, a decelerating charged particle must irradiate electromagnetic waves corresponding to the energy it's losing.

In practice, that particle is then stopped very close to the origin of axes (at a point with coordinates $z = \frac{1}{2} a \tau^2 = \frac{1}{2} v \tau$, of course) (●). And we also consider that particle relatively far away from the

origin of axes, (●), at the time T ($T \gg \tau$), a position that would have had if it was not stopped. Now, at the time (long) T , a time $(T - \tau)$ has elapsed since the particle was stopped, so, as the information cannot be transmitted at a speed which is higher than that of light, then just any observers who are inside the inner sphere, with radius $R' = c(T - \tau)$, can have gotten to know that the particle has been stopped; conversely, even observers who are just a bit out of the inner sphere, say starting from the outer sphere with radius $R = cT$, cannot know yet that the particle stopped, so they think it is (at the time T) at the orange point (●), at a distance $z = vT$ from the origin. Therefore, within a relatively small thickness (that of the gray band), all conclusions made by the observers are much different from one another: the outer observer “ θ -Observer” thinks the charge is like the orange one (●), under an angle which is, say, θ . In order to carry out a comparison between such a perception and what would have been wondered if one knew that the charge was stopped (●), one has to shift backwards (← ← ←), from the orange point to the blue one, but, out of consistency, by preserving the observation angle θ , so moving, over the outer gray crown (whose thickness is $dR = c\tau$), from point P to point P' . And the electric field vector, in such a short stretch (“short” not only on a time base, but also on a space base (thin)) shows a delta equal to $\overline{\Delta E}$ which has got components E_θ and E_r , shown into the violet circle in the bottom right corner of the image, still in Fig. 1.2.

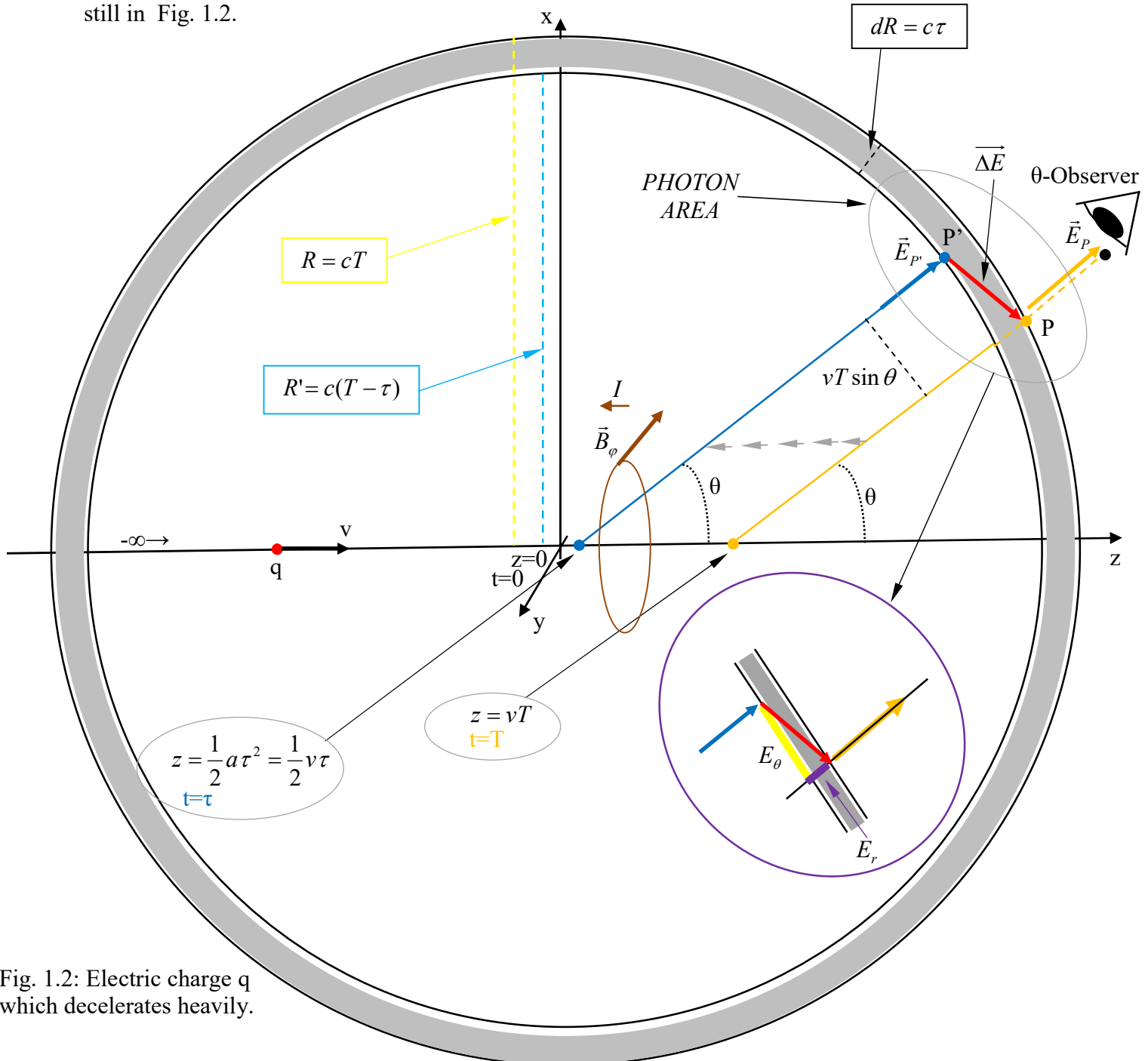


Fig. 1.2: Electric charge q which decelerates heavily.

We can also say that the observer (who observes under an angle θ), when crossing the gray crown (from outside to inside) sees the electron as shifting towards $-z$ (minus z) and so it's like if it itself was shifted horizontally, to the left; that's why the field $\vec{\Delta E}$, which states such a shift, has got a remarkable horizontal component.

There is such a **transversal** component (we already hinted at) E_θ (along $\hat{\theta}$) which in a composition with a magnetic field (in brown colour, in Fig. 1.2) B_ϕ ($B_\phi=E_\theta/c$) along $\hat{\phi}$, so orthogonal to both R and $\vec{\Delta E}$, gives us an EM wave. And we also know that: $\tau \ll T$.

Now, we easily understand, from the image, that:
$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{vT \sin \theta}{c\tau} \quad (1.1)$$

and
$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 T^2} \quad (1.2)$$

and from these two, we get:
$$E_\theta = E_r \frac{vT \sin \theta}{c\tau} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 T^2} \frac{vT \sin \theta}{c\tau} = \frac{qv \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 T \tau} \quad (1.3)$$

Then, being $a=v/\tau$ and $R=cT$, it follows that:

$$E_\theta = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \quad (1.4)$$

We see here a very important thing: E_θ has got just R in its denominator, while E_r has got R^2 . This means that as time elapses and so with the increase of R , E_θ becomes predominant; so we will concentrate just on E_θ , in the gray crown. And this clarify the reason why E_r disappears.

And we know from the Appendix below (eq. (A.1)), where the EM energy and the Poynting vector are evaluated, that the total energy density corresponding to E_θ is: $\delta_{E_r} = 2 \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \epsilon E^2$

$$\delta_{E_r} = \epsilon_0 E_\theta^2 = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4 R^2} \quad [J/m^3] \quad (1.5)$$

In practice, we have the electrical component $\delta_{el} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ and the magnetic one:

$$\delta_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon (cB)^2 = \frac{1}{2} \epsilon c^2 B^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{1}{\epsilon \mu} B^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}, \quad \text{where we have taken into account the}$$

identity $E=cB$, which can be deduced from reasonings on the Lorentz Force; in fact, we know from the Lorentz Force ($\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$) that the magnetic field (magnetic induction vector B) sets on a charge a force which is orthogonal to its motion; in fact, $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow (E_B = F_B / q = vB)$ is orthogonal to v (due to the vector product); so, if we want to see B in terms of an electric field E , then it's like if B creates an electric field E_B orthogonal (**transversal**) to v , which acts on that charge by the force F_B indeed.

And regarding the magnetic field (B), we have considered it in Fig. 1.2, in brown colour, through the vector directed along $\hat{\phi}$, that is $\vec{B}_\phi$, as we already gave explanations around Fig. 1.1.

Therefore, by the (1.4) and through the identity $E=cB$, we have:

$$B_\phi = \frac{E_\theta}{c} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \quad (1.6)$$

But, just as a final countercheck, let's see if the far field expressions:

$$E_r \approx 0, \quad E_\theta = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} j\omega \mu \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin \theta, \quad B_\phi = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} j\beta \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin \theta, \quad (\text{far fields})$$

are really the (1.4) and the (1.6) we have just derived with more simplicity and intuition; so, after neglecting for a bit the angular component $e^{-j\beta R}$, whose modulus is equal to one, and with: $I_0 = \frac{q}{\tau}$,

$\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$, where T_p refers to a whole current cycle period ($\alpha_{TOT}=2\pi$), while the deceleration of our electron is not a whole oscillating cycle made of accelerations and decelerations, so the α about it is just a fraction (τ/T_p) of 2π , or: $\alpha = 2\pi \frac{\tau}{T_p} = \omega\tau$, so:

$$|E_\theta| = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \omega \mu \frac{1}{R} \sin \theta = \frac{q}{\tau} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \sin \theta (\omega \Delta z) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \left(\frac{1}{\tau} \Delta z \frac{\alpha}{\tau} \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \left(\frac{\alpha \Delta z}{\tau^2} \right) =$$

$$= \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \left(\frac{2z}{\tau^2} \right) = \frac{qa \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R},$$

as α is the percentage of (angle) cycle corresponding to the deceleration of our electron and $\alpha \Delta z$ is the percentage of the “to and fro” (space) cycle run by the electron, so it is $2z$, as the z deceleration space of the electron is not intended as a cycle, so it's half its corresponding (cycle) percentage.

So we have back the (1.4). Now, in order to have also the B_ϕ in the (1.6), we have:

$$|B_\phi| = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \beta \frac{1}{R} \sin \theta = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{q}{\tau} \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{R} \sin \theta (\Delta z) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(c \frac{1}{\tau} \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{1}{\tau} \frac{2\pi}{T_p} \Delta z \right) =$$

$$= \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{1}{\tau} \omega \Delta z \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\alpha}{\tau} \Delta z \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{\alpha \Delta z}{\tau^2} \right) = \frac{q \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \left(\frac{2z}{\tau^2} \right) = \frac{qa \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R},$$

actually the (1.6).

Moreover, as the EM wave forms from the round gray crown whose volume is:

$V = 4\pi R^2 dR = 4\pi R^2 c \tau$; furthermore, being the radius R expressed through x, y and z : $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ and we do not have privileged directions (because we are analyzing a sphere and can say $x=y=z$) then: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3z^2$ ($\rightarrow R = \sqrt{3}z$) and being, at last, that z is the projection of R over the z axis indeed, then: $z = R \cos \theta$, so: $R = \sqrt{3}z = \sqrt{3}R \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{2}{3} (*) \text{ (please, read the note below)}$$

and at last, thanks to the last equality, the (1.5) becomes:

$$\delta_{E_T} = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} = \frac{q^2 a^2}{24\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} [J/m^3] \text{ and after asking for joules, that is energy}$$

$$E, \text{ then we have: } E_T = \delta_{E_T} \cdot V = \frac{q^2 a^2}{24\pi^2 \varepsilon_0 c^4 R^2} 4\pi R^2 c \tau = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \quad (1.7)$$

$$\text{and we repeat it: } E_T = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi \varepsilon_0 c^3} [J] \quad (1.8)$$

First of all, we notice that R has disappeared, so we are dealing with a pack of energy which, when propagating with speed c , does not increase with the distance, so it is a photon.

And we also see that we have a^2 and not just a , that is we have the same effect whether the acceleration is positive or negative (decelerations). For what the power in watt is concerned:

$$P = \frac{E_T}{\tau} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} [J/s] = [W] \quad (1.9)$$

Let's transform a bit the (1.9):

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = (qa)^2 \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2} = (qa)^2 \frac{1}{6\pi\epsilon_0 (1/\epsilon_0 \mu_0)} = (qa)^2 \frac{\mu_0}{6\pi c} = \langle P \rangle, \text{ that is:}$$

$$\langle P \rangle = (qa)^2 \frac{\mu_0}{6\pi c} \text{ which is exactly the Larmor Formula .} \quad (1.10)$$

(*): conversely, if we want a more convincing explanation that $\sin^2 \theta = \frac{2}{3}$, we just recall that, in spherical coordinates, an infinitesimal surface dS is given by the surface of the small rectangle whose height is $Rd\theta$ and whose base is that swept by the horizontal radius $R\sin\theta$ along φ , that is: $R\sin\theta d\varphi$, so: $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$; on the contrary, regarding the infinitesimal volume dV , we have $dV = dS dR$, that is: $dV = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR$, so, after getting back to the (1.5), we have:

$$\begin{aligned} \delta_{E_T} &= \epsilon_0 E_\theta^2 = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4 R^2} [J/m^3], \text{ so, as } E_T: E_T = \int_0^V \delta_{E_T} dV = \int_0^V \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4 R^2} dV = \\ &= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4} \int_0^{R, \theta, \varphi} \frac{1}{R^2} \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R dR = \frac{q^2 a^2 R}{8\pi \epsilon_0 c^4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

and now being: $R/c = \tau$, it follows that: $E_T = \frac{q^2 a^2 R}{8\pi \epsilon_0 c^4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{q^2 a^2 \tau}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta =$

$$= \frac{q^2 a^2 \tau}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi = \frac{q^2 a^2 \tau}{8\pi \epsilon_0 c^3} \frac{4}{3} = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi \epsilon_0 c^3}, \text{ that is again the (1.7); now, regarding the}$$

power: $P = \frac{E_T}{\tau} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$, that is again the (1.9).

In the end, we have obtained an $\vec{E}_\theta$ and a $\vec{B}_\varphi$, therefore, we also have a Poynting Vector $\vec{Y}$:

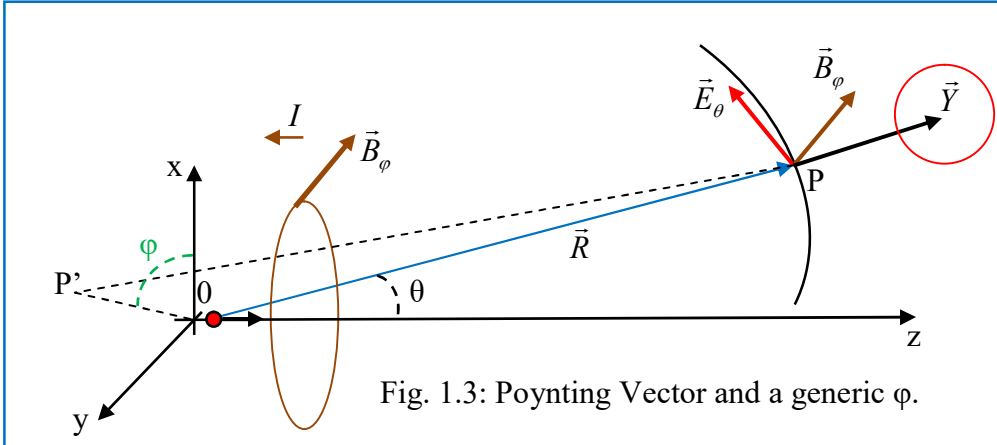


Fig. 1.3: Poynting Vector and a generic φ .

In other words, it's like if a test particle in P undergoes an electric field $\vec{E}_\theta$ and because of it, it moves along $\hat{\theta}$ indeed, but so doing the field $\vec{B}_\varphi$, through the Lorentz Force, moves it forward along $\hat{R}$, so giving the EM wave the impulse a hitting photon must have.

And, of course, now we remind the structure of a photon: electric field and magnetic field (orthogonal).

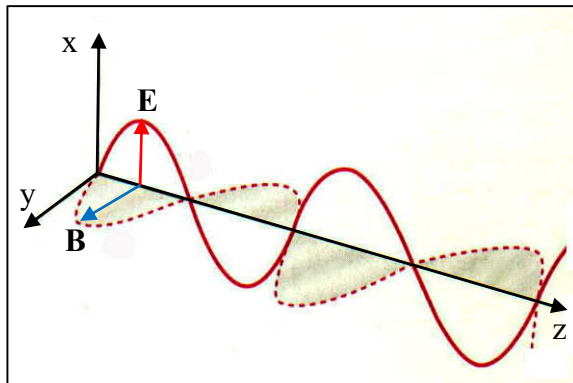


Fig. 1.4: Structure of a photon.

-ON THE PHOTON WITHOUT TIME:

We saw the space where a photon takes place is that gray crown propagating outwards. Well, we also understood it represents the border between those who already know the events and those who don't know them yet; in other words, such a crown is the line between the "already known" and the "still to be known", that is, in the end, the border between past and future; for this reason the photon isn't either past or future, but rather it is into its own eternal present, where time doesn't flow, as in the time's opinion, to flow means to proceed towards the future, but the photon is not doing that, while it rather stays on the line of its eternal present, which is drawn by itself; so it itself is the the border between past and future, without being either the former or the latter.

But now we ask ourselves in which way an electron provides an information. Well, its capability to produce an electric field is a way to communicate. Electric field means force. An electron and a positron can appear from "nothing" provided that, under the Uncertainty Principle, they promise, so to say, to reannihilate as soon as possible. Their mutual attraction force is nothing but their intention to reannihilate; but the reannihilating has got a statistic root; not primarily a physical root. The reannihilation reestablish a statistical balance, as although there's a probability that an electron-positron pair shows up, there will be also a (necessary) probability that they reannihilate (through an electric mutual reattraction). So, we have nothing which is pretty physical, but it's rather statistical/probabilistic/mathematical.

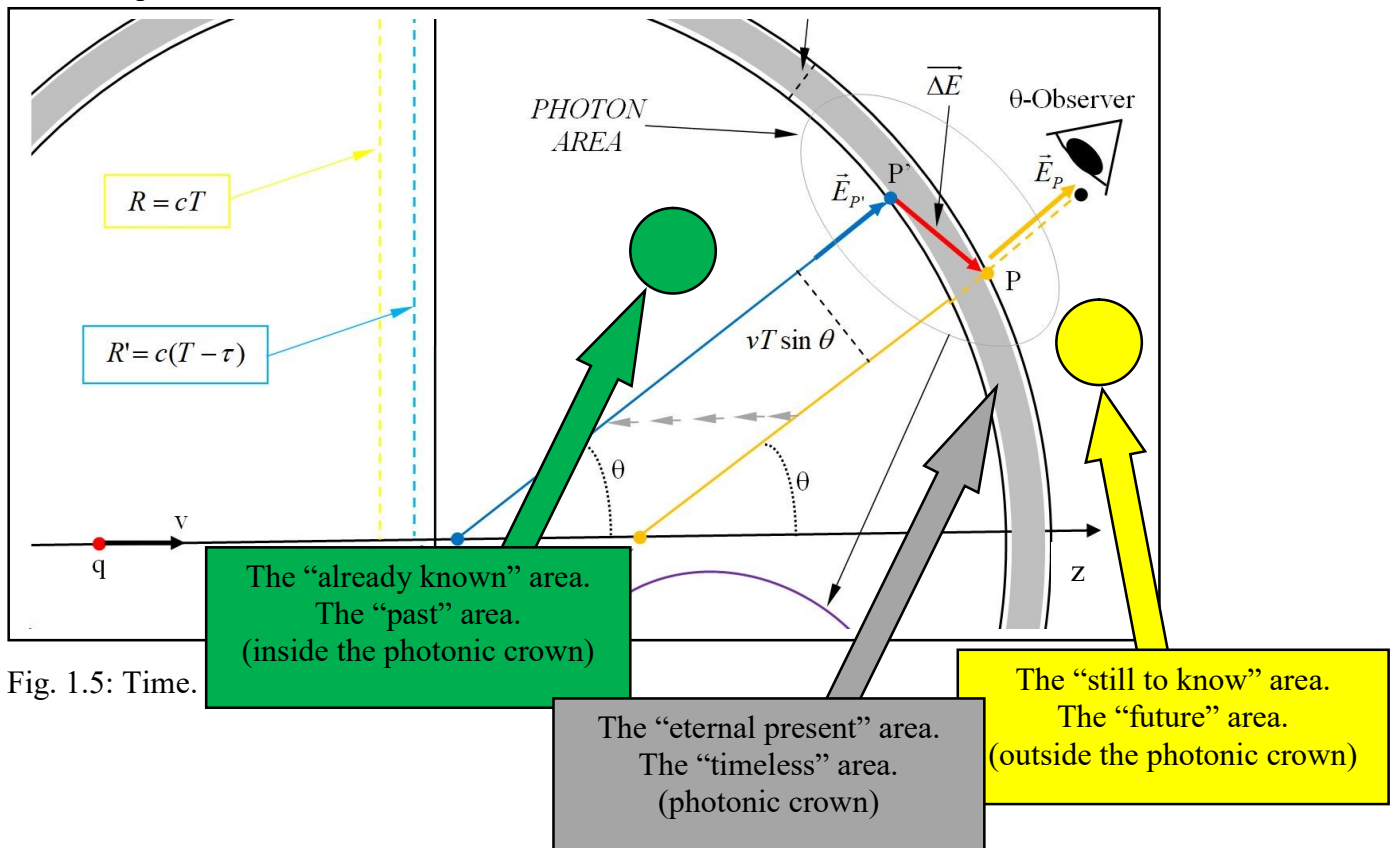


Fig. 1.5: Time.

But if the electron and the positron, when they show up, part by an infinite speed and, even worse, join instantaneously, so by an infinite speed, then their life duration would be zero, that is like if they never appeared and the universe, when seen as a quantum foam, wouldn't exist.

Therefore, because of the very existence of the universe, that speed must have a limit we call c . Moreover, it's not just a coincidence that c can be held as a peculiar speed of the universe, because, as chance would have it, the inverse of the Hubble Constant H_0 is actually the age of the universe and $H_0 = c/R_u$ where R_u is the radius of the Hubble's Sphere. The motion of the universe, if expanding as well as if contracting, is the clock of the universe itself.

To sum up things, to exist means a limited speed (c); to exist means the showing up of pairs $+/-$, so with a non instantaneous reannihilation (c again). Inclination to reannihilation means reattraction, so, symbolically, an electric reattraction force $\rightarrow$ an electric field. An electric field with a limited propagation speed (at " c ") means what has been shown in this post, that is the generation of photons, in order to grant the communication of the information. At last, the magnetic field is a sort of surrogate of the electric field, as well as we are taught by the relativity, as according to relativity, we can see a magnetic field as an electric field which has got relativistic peculiarities.

-THE THOMSON CROSS SECTION OF AN ELECTRON

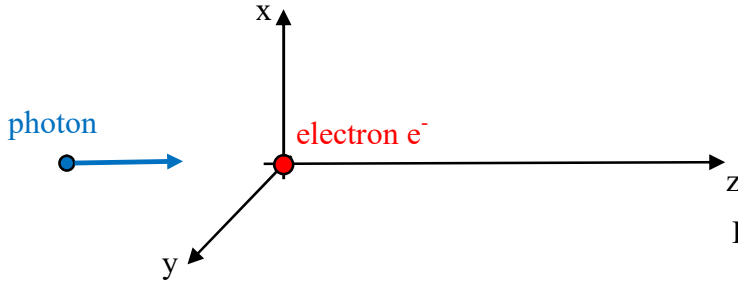


Fig. 1.6: Electron struck by a photon.

Someone set a relationship between the energy corresponding to the mass of an electron ($E_0 = m_e c^2$) and the classical electric potential energy E_p of it (of the electron, at speed c), when the electron radius is (classically speaking) the classical radius r_e . Does all this make any sense?

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} \quad , \quad E_0 = m_e c^2 \quad , \quad E_p = E_0 \quad \rightarrow \quad r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e \cdot c^2} \cong 2,8179 \cdot 10^{-15} m$$

And, besides, we know from the quantum mechanics that: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2$

(Heisenberg's Uncertainty Principle taken with the equality sign (=), out of simplicity), and:

$\hbar / 2 = h / 4\pi = 0,527 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ and if we give the linear momentum delta the value $\Delta p = m_e c$, we get: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2 = m_e c \cdot |\Delta x| = 0,527 \cdot 10^{-34}$, that is: $m_e c \cdot |\Delta x| = 0,527 \cdot 10^{-34}$; well, now, if we consider $|\Delta x|$ as a pure number, so neglecting the units, we have that the identity

$$m_e c \cdot |\Delta x| = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ holds sharply if: } |\Delta x| = \frac{G\epsilon_0}{\pi} \left(\frac{cm_e}{e}\right)^2 \frac{1}{r_e} !$$

Does all this make any sense? Can an electron, in a classical sense, have a size of the same order of r_e ? Can an electron be held (in a classical sense) as a little sphere whose radius is r_e ?

On this purpose, with reference to Fig. 1.6, we have an electron in the origin of axes and it's struck by a photon; due to the electric field $\vec{E}$, the electron will oscillate along x and so it will reirradiate by a power given by the Larmor Formula (1.10):

$$\langle P \rangle = (ea)^2 \frac{\mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 \text{ [W]} \quad , \text{ but } a = \frac{F}{m_e} = \frac{Ee}{m_e} \quad , \text{ from which:}$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \left(\frac{Ee}{m_e}\right)^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{Ee^2}{m_e}\right)^2 \text{ [W]} \quad , \text{ but the following holds: } \delta_{E_r} = \epsilon_0 E^2 \text{ [J/m}^3\text{]} \text{ (see the}$$

(1.5) and the previous ones), from which we have a W: $W = \delta_{E_r} c = c \epsilon_0 E^2 \text{ [J/s} \cdot \text{m}^2\text{]} ;$ in fact, $[c] = [\text{m/s}]$ and $[\epsilon_0 E^2] = [\text{J/m}^3]$. Therefore, the ratio $\langle P \rangle / W$ will be a surface σ :

$$\sigma = \frac{\langle P \rangle}{W} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{Ee^2}{m_e} \right)^2 \frac{1}{c\epsilon_0 E^2} = \frac{\mu_0 e^4}{6\pi c^2 \epsilon_0 m_e^2} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2}; \text{ now, we multiply and divide simultaneously } \sigma$$

$$\text{by } r_e^2: \sigma = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} r_e^2 \frac{1}{r_e^2} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} 16\pi^2 \epsilon_0^2 \frac{m_e^2 c^4}{e^4} r_e^2 = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \text{ [m}^2/\text{electron]}, \text{ that is: } \sigma = \frac{8}{3} \pi r_e^2,$$

which is the Thomson Cross Section.

As, classically speaking, an electron which is seen frontally as a section, is seen like a surface equal to that of its equatorial circle, that is: $S = \pi r_e^2$, then $\sigma = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = \frac{8}{3} S$, that is, σ is roughly the same size of S , then the value of r_e as a (classical) radius of an electron is in fact plausible!

APPENDIX: EVALUATION OF THE POYNTING VECTOR:

$$\vec{Y} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad [W/m^2]. \text{ In fact, taking a coil as an example, we have } v = L \frac{di}{dt}, \text{ but we also}$$

have, ignoring signs, that $v \propto \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(NSB) = NS \frac{dB}{dt}$, as we know that:

$$B = \frac{d\Phi}{dS} \rightarrow \Phi = BS \rightarrow \Phi = NBS, \text{ as in the coil we have the effect of } N \text{ turns. And we also consider}$$

that in a coil $B = \mu \frac{NI}{l} = \mu n I$, where $\frac{N}{l} = n$ is the number of turns per metre. So, for the energy E , which is power $P=VI$ by time t , we have:

$$dE = VI dt = (NS \frac{dB}{dt}) I dt = NSI \cdot dB = n l S I \cdot dB = n(Vol) I \cdot dB, \text{ from which, for the volume density}$$

$$\text{of energy, that is } dU [J/m^3], \text{ we have: } dU = n I \cdot dB = \frac{1}{\mu} B dB, \text{ that is: } U = \frac{1}{\mu} \int B dB = \frac{1}{2\mu} B^2.$$

Because of the Lorentz Force, $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, we have that: $\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})$, so: $E = Bv$ and

more specifically, as we are on a basis of a pure electromagnetic wave, $E = Bc$. Going back to the equation $U = \frac{1}{2\mu} B^2$ just proved, we have: $U = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \frac{E^2}{2\mu c^2} = \frac{E^2}{2\mu} \epsilon \mu = \frac{1}{2} \epsilon E^2$, so, as a composition of both electric and magnetic components of the energy volume density, we have:

$$U_{TOT} = U_E + U_B = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{B^2}{2} + \mu \epsilon \frac{E^2}{2} \right) \text{ and, as } E=Bc \text{ and } B=E/c, \text{ we have:}$$

$$U = U[J/m^3] = \frac{Y[W/m^2]}{c[m/s]} = \frac{Y}{c} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{BE}{2c} + \mu \epsilon \frac{EBc}{2} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{BE}{2c} + \frac{1}{c^2} \frac{EBc}{2} \right) = \frac{EB}{c\mu}, \text{ from which:}$$

$$\frac{Y}{c} = \frac{EB}{c\mu}, \text{ or: } Y = \frac{1}{\mu} EB \text{ and considering that } E \text{ and } B \text{ are orthogonal}$$

$$(EB = E \times B = |E||B| \sin \frac{\pi}{2} = EB), \text{ we have: } Y = \frac{1}{\mu} (E \times B) \text{ qed. And regarding } U_{TOT}:$$

$$U_{TOT} = U_E + U_B = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{E^2}{(1/\epsilon\mu)} = \epsilon E^2 \quad (A.1)$$

FRIEDMANN INTO NEWTON

FRIEDMANN'S EQUATIONS:

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{r^2} \quad (2)$$

Friedmann's Equations can be derived from the Einstein's General Theory of Relativity, but they can be derived, as well, also from the Newton's classic gravitation; in fact, after simplifying all a bit, we know from physics that:

$$U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4}{3}\pi r^2 \rho Gm, \text{ from which, after some algebraic passages, we}$$

get: $\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{r^2}$, which is really the (2), after naming $k = -2U / mc^2$.

On the contrary, for what the (1) is concerned, first of all we see that, according to the First Principle of Thermodynamics, we have: $dU + pdV = dQ$ (internal energy + work done = exchanged heat) and in considering the Universe, dQ going out is 0, of course, so: $dU + pdV = 0$,

$$\text{that is: } \frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0. \quad (3)$$

Now, we know that: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ and $U = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho c^2$, from which, according to the (3):

$$4\pi r^2 \rho c^2 \dot{r} + \frac{4}{3}\pi r^3 c^2 \dot{\rho} + p4\pi r^2 \dot{r} = 0, \text{ from which:}$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{r}}{r}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (\text{fluid equation}) \quad (4)$$

By differentiating again, with respect to time, the (2) already proved, we get:

$$2\frac{\dot{r}}{r}\frac{(r\ddot{r} - \dot{r}^2)}{r^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + \frac{2kc^2\dot{r}}{r^3}; \text{ if now we use the (4) in this equation, we get:}$$

$$\frac{\ddot{r}}{r} - \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{r^2} \text{ and using again the (2) in the last one, we finally have:}$$

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \text{ which is the (1) indeed, qed.}$$

COULOMB INTO HOOKE

In polar coordinates, for an electron orbiting around a proton, there is a balancing between the electrostatic attraction and the centrifugal force:

$$F_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + m_e \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + m_e \omega^2 r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + m_e \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + \frac{L^2}{m_e r^3}, \quad (1)$$

where $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ and $L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m_e v r = m_e \omega r r = m_e \omega r^2$. Do not forget that, in general, $\omega = \omega(r)$ and $v = v(r)$, so we will carry out the integral (the (2)) of the equation (1), but specifically only of the last part into the blue frame, as we know that there L is conserved, so it can be kept out of the

integral. It's conserved because the moment $\vec{m} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} +$

$+\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, as for a central force, F and r are parallel, so $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow L = \text{const.}$ Let's figure

out the corresponding energy by integrating such a force over the space:

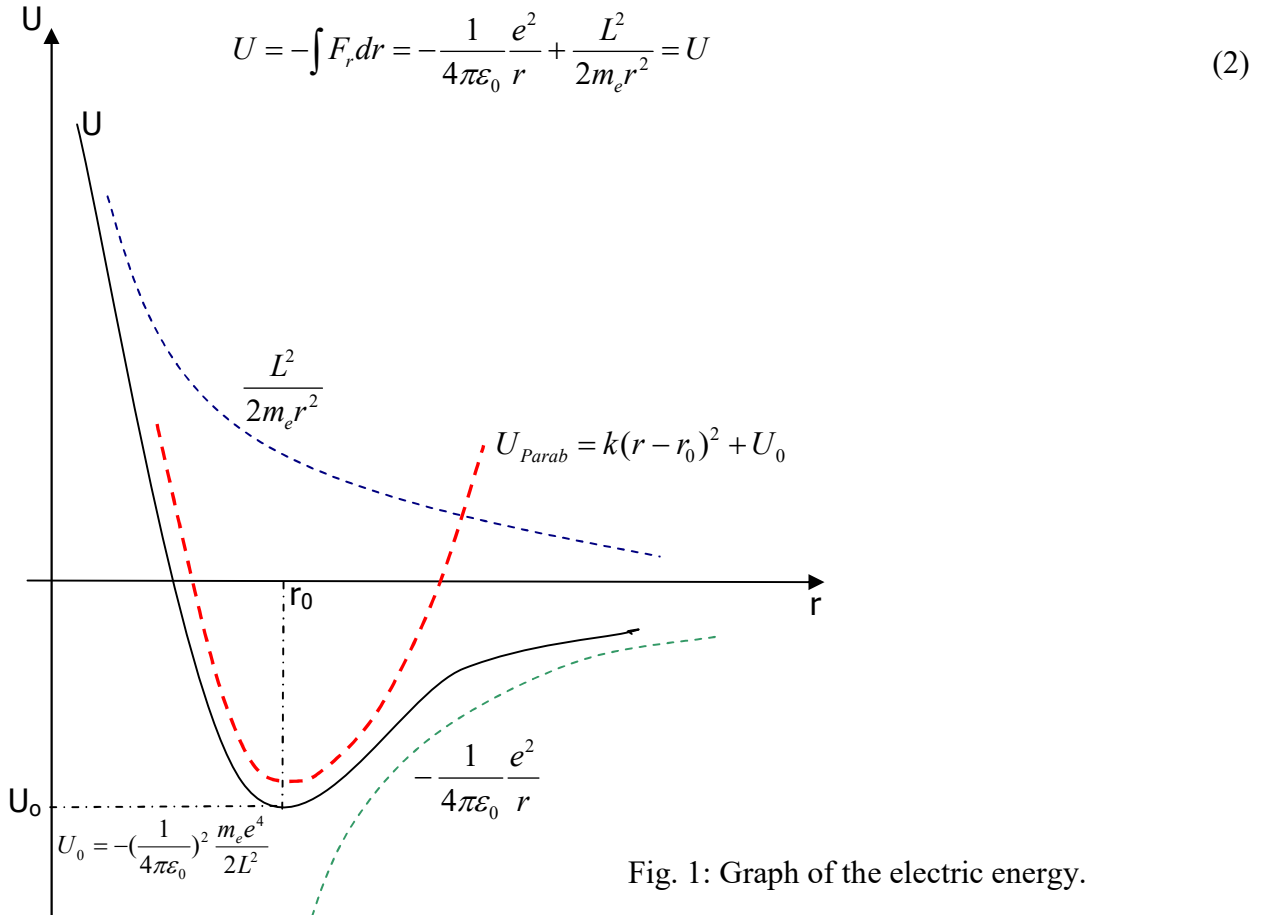


Fig. 1: Graph of the electric energy.

The point of minimum in (r_0, U_0) is a balance and stability point ($F_r = 0$) and can be calculated by zeroing the first derivative of (2) (i.e. setting $F_r = 0$ indeed). Moreover, around r_0 , the curve for U is visibly replaceable by a parabola U_{Parab} , so, in that neighbourhood, we can write:

$$U_{Parab} = k(r - r_0)^2 + U_0, \text{ and the relevant force is: } F_r = -\partial U_{Parab} / \partial r = -2k(r - r_0) \quad (3)$$

which is, as chance would have it, an elastic force ($F = -kx$ - Hooke's Law).



SCHRODINGER INTO D'ALEMBERT INTO KLEIN-GORDON INTO DIRAC

We know from the relativity that the total energy E is:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (1.1)$$

This is the most general formula we have for the energy and is suitable for a relativistic particle indeed.

Now, for a photon (a particle whose rest mass is equal to zero), we have: $E^2 = p^2 c^2$, and:

$$E = pc \quad (1.2)$$

For a non relativistic particle, we know its kinetic energy is: $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$, but this is hidden in (1.1), which is more general, indeed. In fact, (1.1) can be rewritten in this way:

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2} \quad (1.3)$$

and for the developments of Taylor, we have:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \text{ from this, for the (1.3):}$$

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m_0^2 c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} \text{ and, for the kinetic energy, we}$$

have:

$$E_k = E - m_0 c^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2} m_0 v^2 \text{ qed.}$$

Now, let's take the general expression for a wave:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \cdot \vec{x} - \frac{2\pi}{T} vt\right)}, \quad (1.4)$$

$$\text{as: } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda}.$$

Such a wave simultaneously propagates in space (x) and oscillates in time t; in fact, if we fix t=0, we see we have an oscillation along x ($\Psi = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})}$) and if we fix x=0 we have an oscillation in time ($\Psi = A \cdot e^{-i(\omega t)}$).

We also know that:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar \omega \quad (1.5)$$

and being (1.2) standing, we have:

$$pc = \hbar \omega, \text{ from which :}$$

$$p = \hbar \frac{\omega}{c} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k = p \quad (1.6)$$

and (1.4) becomes:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{E}{\hbar} t)} \quad (1.7)$$

By simply putting such a Ψ in the following equations:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\Psi = E\Psi = (\hbar\omega)\Psi \quad (1.8)$$

$$(\frac{\hbar}{i} \nabla)\Psi = \vec{p}\Psi = (\hbar\vec{k})\Psi ; \quad (1.9)$$

we have that they give identities, so they are correct.

$$\text{In one dimension: } (\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x})\Psi = p\Psi = (\hbar k)\Psi ; \quad (\nabla \text{ gradient})$$

So, we can deduce the following operatorial identities:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.10)$$

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (1.11)$$

As (1.2) stands: $E^2 = p^2 c^2$, we have:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 \Psi = c^2 (\frac{\hbar}{i} \nabla)^2 \Psi, \quad (1.12)$$

that is:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{or also } (\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ laplacian, divergence of a gradient}): \Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

which is the **d'Alembert's Wave Equation**.

Please notice such an equation, derived in a "relativistic" environment (photon, i.e. a particle propagating by speed c and with a zero rest mass) is invariant under a Lorentz's Transformation.

If now we consider non relativistic particles (atoms are like that, ordinarily), we will get a non relativistic "wave" equation, which is the Schrodinger's Equation. In fact, if in (1.7) we no longer

consider $E = pc$, but $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$ (a non relativistic equation, indeed), we get:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{E_k}{\hbar} t)} = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{p^2}{2m_0 \hbar} t)} \quad (1.14)$$

and as well as we got (1.12), by a direct use of (1.14) in the following equation:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2)\Psi \quad (1.15)$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi, \text{ in one dimension } \quad)$$

we get an identity. Therefore, (1.15) is true. Please notice that in (1.14) we have no longer used a total E, but just an E_k , and we are going to take that into account.

The left side of (1.15) is $(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) \Psi = E_k \Psi$, but we know that $E_k = H - V$, so, still in force of the (1.15):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi = (H - V) \Psi, \text{ that is:}$$

$$\Delta \Psi + \frac{2m_0}{\hbar^2} (H - V) \Psi = 0 \quad (1.16)$$

which is the **Schrodinger's Equation**.

Let's get into a more general situation, where we have a relativistic particle with a rest mass not equal to zero.

As well as we did before, as for (1.1) we have: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$, then, by using such an E

still in (1.7) $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{E}{\hbar} t)}$, we will have:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{\hbar} t)} \quad (1.17)$$

and, as usual, still by introduction of an equation into another, we see that such a Ψ is a solution for the following:

$$\left(\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (1.18)$$

which is nothing but the **Klein-Gordon's Equation** and it is similar to that of d'Alembert, but has an item more.

Let's really carry out the introduction of (1.17) in (1.18), to see that all this really stands. We have:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= (i)^2 \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi \text{ and} \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{c^2} (-i)^2 \frac{E^2}{\hbar^2} \Psi = \frac{1}{c^2 \hbar^2} (p^2 c^2 + m_0^2 c^4) \Psi \text{ and so:} \\ -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi &+ \frac{1}{c^2 \hbar^2} (p^2 c^2 + m_0^2 c^4) \Psi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0, \text{ that is } 0=0. \end{aligned}$$

Let's set $l = \frac{m_0 c}{\hbar}$; such an l is dimensionally like the wave vector k. By such an l, we have that

(1.17) and (1.18) can be rewritten as follows:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \sqrt{k^2 + l^2} ct)} = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - l^2 \Psi = 0 \quad (1.20)$$

where $\omega' = \sqrt{(k^2 + l^2)}c$.

Let's rewrite the Klein-Gordon's Equation (1.20) in the following way:

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \Psi - l^2 c^2 \Psi = 0 \quad (1.21)$$

and after taking into account that $i^2 = -1$ and $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, we have that such an equation can be rewritten like this:

$$\{[i \frac{\partial}{\partial t} - (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0)][i \frac{\partial}{\partial t} + (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0)]\} \Psi = 0, \quad (1.22)$$

or also:

$$\begin{cases} [i \frac{\partial}{\partial t} - (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0)] \Psi = 0 \\ [i \frac{\partial}{\partial t} + (i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0)] \Psi = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

and (1.22) can be developed as:

$$[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\alpha \cdot \nabla)^2 + im_0 \beta (\alpha \cdot \nabla) + im_0 (\alpha \cdot \nabla) \beta - \beta^2 m_0^2] \Psi = 0 \quad (1.24)$$

This equation is equal to the (1.21) if: $\beta^2 = \frac{c^4}{\hbar^2}$, $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$, $\alpha_i \alpha_j = c^2$ if $i=j$ and $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0$ if $i \neq j$

The last two conditions on alphas make us have only ∇^2 and not mixed terms in ∇ . (1.23), here reported:

$$(i \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \cdot \nabla - \beta m_0) \Psi = 0 \quad (1.25)$$

can be considered as the **Dirac Equation**, which is usually provided in the following form, in natural units ($\hbar = c = 1 \rightarrow \beta = 1$):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \Psi = 0, \quad (1.26)$$

where $i\gamma^\mu \partial_\mu = i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, which contains a summation under the Einstein convention, gives, under the values of μ , the derivative under the time $\frac{\partial}{\partial t}$ and under x, y and z of $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \cdot \nabla$$

Further developments of the Dirac Equation will not be carried out, here.

COULOMB INTO NEWTON

In “Heisenberg into Coulomb” we first show that Heisenberg is into Coulomb. Now, here we show that Coulomb is into Newton, so, finally, because of the transitive property, Heisenberg will be also into Newton.

-COULOMB INTO NEWTON

A PROPOSAL OF A UNIVERSE WHICH SHOWS THAT COULOMB IS INTO NEWTON, INDEED.

Here is such a universe:

$$\begin{aligned} M_{Univ} &= 1,59486 \cdot 10^{55} \text{ kg} \\ R_{Univ} &= 1,17908 \cdot 10^{28} \text{ m} \\ T_{Univ} &= \frac{2\pi R_{Univ}}{c} = 2,47118 \cdot 10^{20} \text{ s} \end{aligned}$$

In such a universe we have that the mass is more than that visible (as well as stated nowadays) and the density is the observed one:

$$\rho = M_{Univ} / \left(\frac{4}{3} \pi \cdot R_{Univ}^3 \right) = 2,32273 \cdot 10^{-30} \text{ kg} / \text{m}^3$$

The composition of all the small electric interactions in the universe builds up the universe itself; in fact, as chance would have it:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}} \quad (\text{UNIFICATION GRAVITATION - ELECTROMAGNETISM})$$

so Newton is into Coulomb.

Moreover, still by chance:

$$m_e c^2 = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}}, \quad G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} = a_{Univ} = G \frac{m_e}{r_e^2} = g_{EL} = 7,62 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2, \quad h = \frac{2m_e c^2}{T_{Univ}} \text{ (just numerically)}$$

$$R_{Univ} = \sqrt{N} r_e \quad (\text{being } N = M_{Univ} / m_e = 1,74 \cdot 10^{85}), \quad T_{Univ} \frac{G m_e^2}{h r_e} = \frac{1}{137} = \alpha,$$

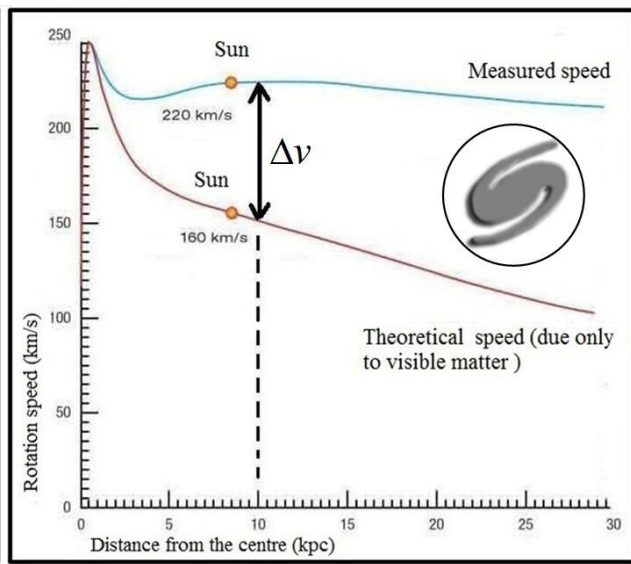
$$T_{CMBR} = \left(\frac{h}{2m_e \sigma} \frac{M_{Univ}}{4\pi R_{Univ}^2} \right)^{1/4} \cong 2,7 \text{ K}$$

(where $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} / \text{m}^2 \text{ K}^4$ is the Stefan-Boltzmann's Constant). Moreover:

$$T_{CMBR} = \left(\frac{3c^3}{80\pi\sigma} \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^3} \right)^{1/4} = \left(\frac{72Gc^{11}h^3\epsilon_0^4 m_e^6}{\pi^2 e^8 k^4} \right)^{1/4} = 2,72846(02218319896) \text{ K} \cong 2,72846 \text{ K}$$

-Then, being, according to Heisenberg: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2$ (with the equality sign, out of simplicity, and $\hbar / 2 = h / 4\pi = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), we can say that:

$$\Delta p \cdot \Delta x = m_e c \cdot \Delta x = m_e c \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^2} G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} \right] = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ (numerically).}$$



-In our galaxy (the Milky Way) the Sun is at a distance of 8,5kpc from the centre and should have a rotation velocity of 160 km/s, if it was due just to the baryonic matter, that is that coming from all the stars and all the visible matter. But we know that the velocity of the Sun is 220 km/s. So there is a discrepancy Δv of 60 km/s: ($\Delta v = 220 - 160 = 60$ km/s).

(1kpc=1000pc ; 1pc=1 Parsec= $3,26 \cdot 10^6$ l.y. = $3,08 \cdot 10^{16}$ m ; 1 light year l.y.= $9,46 \cdot 10^{15}$ m)

($R_{Gal-Sun} = 8,5 \text{ kpc} = 27,71 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 3,26 \cdot 10^6 \text{ l.y.} = 2,62 \cdot 10^{20} \text{ m}$ is the distance from the Sun of the centre of the Milky Way). If the Sun was at a distance R_{GAL} of 30 kpc, it would have had the same velocity of 220 km/s, but the discrepancy Δv would have been larger. In general, we know from the rotation

curves that: $\Delta v = k \sqrt{R_{Gal-Sun}}$, where $k = \text{constant}$; now, by chance: $\rightarrow k = \sqrt{2G \frac{m_e}{r_e^2}} = \sqrt{\frac{2GM_{Univ}}{R_{Univ}^2}}$

SHANNON INTO BOLTZMANN -THE ENTROPY OF INFORMATION-

HOW WE MEASURE THE INFORMATION

if we are waiting for an information “x”, then we are in a state of uncertainty and such an uncertainty ceases no sooner we receive the information itself; therefore, the measure “I” of the information is the uncertainty it removes when it’s received. Moreover, the uncertainty (removed by x) reminds the meaning of probability $p(x)$.

Not all the information received will remove the same uncertainty; as an example, in the Italian language, but also in the English one, if we have just received, as an information, the letter Q, then the next information is almost certainly a U (such as in QUADRO, or in QUASI), so such a U does not remove a so big uncertainty, when we receive it, as it is very likely. Or, if the information we are waiting for is a number (in figures) such as 47599513,6301457 , or 29,012 , well, then if the first figure we receive (as an information) is 0 , then the next information we expect is a **comma** (or a point), such as in the following example:

0,678

In general, if we have a set of symbols $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ and each with a probability $p(x_i)$ to be sent, then the information $I(p)$ carried by one of these symbols or by a whole message (in general made of many symbols) will decrease with p and becomes zero for $p=1$ (the highest p).

Then, if a message M is made of, as an example, x_1 and x_2 (which have probabilities p_1 and p_2), the (compound) probability of the message is $p_1 p_2$ and the carried information $I(M)$ will be $I(p_1 p_2)$, but it’s also true that the total information $I(M)=I(p_1 p_2)$ is given by the summation of all the single information $I(p_1)$ and $I(p_2)$, from which: $I(p_1 p_2) = I(p_1) + I(p_2)$ and such an equation is represented by the logarithm function:

$\log(p_1 p_2) = \log(p_1) + \log(p_2) \rightarrow I(p) \equiv \log(p)$; more specifically, we choose:

$$I(p) = -\log_2(p) , \quad (1)$$

as the $-$ sign assures the decrease (previously predicted) of I with respect to p over $]0,1]$, with the falling to zero for $p=1$ and then $I(p) > 0$, as a negative information wouldn’t make any sense. At last, in case $p=0$ (an impossible message), we force to $I(0)=0$.

The base two (2) of the logarithm recalls the binary situation (0 and 1); in fact, considering, as an example, the situation where we expect the information on the result of a coin tossing (head H or tail T, that are two probability values $p_1=p_2=1/2$), we have, because of the (1):

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = 1bit , \quad (2)$$

so we have a bit as a measure unit for the information.

Now, considering a source S of information: $S = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, \dots, x_n \\ p_1, & p_2, \dots, p_n \end{pmatrix}$, where, of course, because of

the definition itself of probability, we have: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$; therefore, we have that the mean

information I_m the source S generates during the sending of messages is obviously the average of all the information I_i given by the (1) and obviously each weighed according to its own probability p_i :

$$I_m = \sum_{i=1}^n p_i I_i = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = H(S) \quad (3)$$

and such an average information of S is called **entropy of the source S** , that is: $H(S)$ (Shannon's entropy).

Then, as we saw that, through the (2), the information is measured in bits, it follows that $H(S)$ is the mean number of bits per symbol; therefore, in order to transmit the symbols of a source S whose entropy is H , it takes words whose mean length is H bits.

Now, going back to the case of the coin tossing (head $H=x_1$ or tail $T=x_2$, that is two values of probability $p_1=p=p_2=q=(1-p)=1/2$), we have:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p & (1-p) \end{pmatrix} \text{ and}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^2 p_i \log_2 p_i = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \quad (4)$$

and the (4) yields a maximum value equal to 1 bit when, like in the case of Head or Tail with a fair coin indeed, ($p=q=1/2$) and the value decreases for any other couple of values of p and q , such as $p=0$ and $q=1$ (unfair coin which always gives head or vice versa), so $H(S)=0$; in fact, in such cases, the addressee of the information already knows in advance what information is going to arrive (just head or just tail) so not getting any benefit from it.

Therefore: equiprobability of symbols $\rightarrow$ maximum H .

For n equiprobable symbols ($p_i=1/n$, $\forall i$): $H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = -n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n$; in fact, in

the binary field, through just one bit ($H=1$) it's possible to transmit two situations (0 and 1) and through n bits 2^n situations ($H=3 \rightarrow 2^3=8 \rightarrow 000,001,010,011,100,101,110,111$).

H has the meaning of a bound value, as it takes at least H bits, so:

$$H \leq \log_2 n = \ell \quad (5)$$

with ℓ as the length of the word, and the equal sign is only when all the probabilities p_i are the same.

The ASCII code, with $H=7$ bits and $n=128$ characters ($7=\log_2 128$) formally tells us that it takes 7 bits/character, but, as an example, in the Italian language, we have $H=4,65(<7)$; this stands because in a language, characters are not equiprobable.

There exists at least a code for which: $H(S) \leq \ell \leq H(S) + 1$.

In telecommunications we try to carry out compressions of data in order to have the shortest words ($\ell = H$), to either transmit less bytes (for the same message), or have a larger storage capacity in electronic memories.

As an example, it's used the **Huffman's code**, and here we give an example:

we have a so shaped source S , with symbols and relevant probabilities:

$$S = \begin{pmatrix} x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H \\ p_A, p_B, p_C, p_D, p_E, p_F, p_G, p_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H \\ 8^{-1}, 4^{-1}, 16^{-1}, 32^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 8^{-1}, 32^{-1} \end{pmatrix} \text{ and}$$

$H(S) = -\sum_{i=A}^H p_i \log_2 p_i = 2,6875 \text{ bit / symbol}$. We preliminarily notice that obviously:

$8^{-1} + 4^{-1} + 16^{-1} + 32^{-1} + 8^{-1} + 4^{-1} + 8^{-1} + 32^{-1} = 1$; now, as we have 8 symbols, we could choose a three figure binary number to express the 8 values, such as: ($x_A=000$, $x_B=001$, $x_C=010$, $x_D=011$, $x_E=100$, $x_F=101$, $x_G=110$, $x_H=111$); in such a way, we would have 8 symbols with three figures each, so, for what the average length of the words is concerned:

$$\ell = 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 3 + 16^{-1} \cdot 3 + 32^{-1} \cdot 3 + 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 3 + 8^{-1} \cdot 3 + 32^{-1} \cdot 3 = 3 \geq H(S) = 2,6875 \text{ bit / symbol} .$$

Therefore, we are pushed to find a new code which lowers ℓ , so making it approach as much as possible the ideal minimum value H. According to Hoffman, we proceed in the following way:

-we order the symbols according to ascending probabilities:

$$S = \begin{pmatrix} x_D, x_H, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_D, p_H, p_C, p_A, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D, x_H, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 32^{-1}, 32^{-1}, 16^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} ; \quad (6)$$

then we sum up the two lowest probabilities p_D and p_H , that are the first two in the row, so getting: $p_\alpha = p_D + p_H = 32^{-1} + 32^{-1} = 16^{-1}$ and in the (6) we delete the first two positions D and H (just involved) and we insert, in place of those ones, the result of the summation:

$$S = \begin{pmatrix} x_\alpha, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_\alpha, p_C, p_A, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\alpha, x_C, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 16^{-1}, 16^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} , \quad (7)$$

so getting a new S with an element less than before, that is with 7 elements. At this point, we repeat this procedure, still on the two lowest probabilities, which are now p_α and p_C , so getting:

$p_\beta = p_\alpha + p_C = 16^{-1} + 16^{-1} = 8^{-1}$ and in the (7) we delete the first two positions α and C (just involved) and insert in place of those ones, the result of the summation:

$$S = \begin{pmatrix} x_\beta, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_\beta, p_A, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\beta, x_A, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} ; \text{ we proceed further:}$$

($p_\gamma = p_\beta + p_A = 8^{-1} + 8^{-1} = 4^{-1}$), so getting:

$$S = \begin{pmatrix} x_\gamma, x_E, x_G, x_B, x_F \\ p_\gamma, p_E, p_G, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\gamma, x_E, x_G, x_B, x_F \\ 4^{-1}, 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} ; \text{ we order the symbols again, according to}$$

ascending probabilities, as now we need it again:

$$S = \begin{pmatrix} x_E, x_G, x_\gamma, x_B, x_F \\ p_E, p_G, p_\gamma, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E, x_G, x_\gamma, x_B, x_F \\ 8^{-1}, 8^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} \text{ and we proceed further:}$$

($p_\delta = p_E + p_G = 8^{-1} + 8^{-1} = 4^{-1}$)

$$S = \begin{pmatrix} x_\delta, x_\gamma, x_B, x_F \\ p_\delta, p_\gamma, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\delta, x_\gamma, x_B, x_F \\ 4^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} ; \text{ we proceed further again:}$$

($p_\epsilon = p_\delta + p_\gamma = 4^{-1} + 4^{-1} = 2^{-1}$)

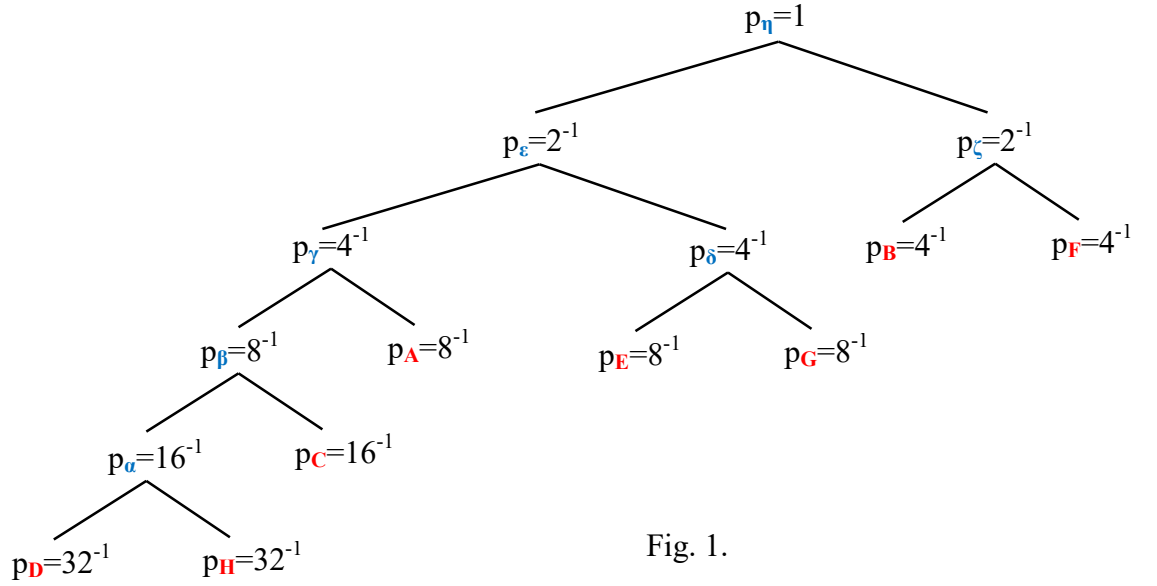
$$S = \begin{pmatrix} x_\epsilon, x_B, x_F \\ p_\epsilon, p_B, p_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\epsilon, x_B, x_F \\ 2^{-1}, 4^{-1}, 4^{-1} \end{pmatrix} ; \text{ we order the symbols again, according to ascending}$$

probabilities, as now we need it again:

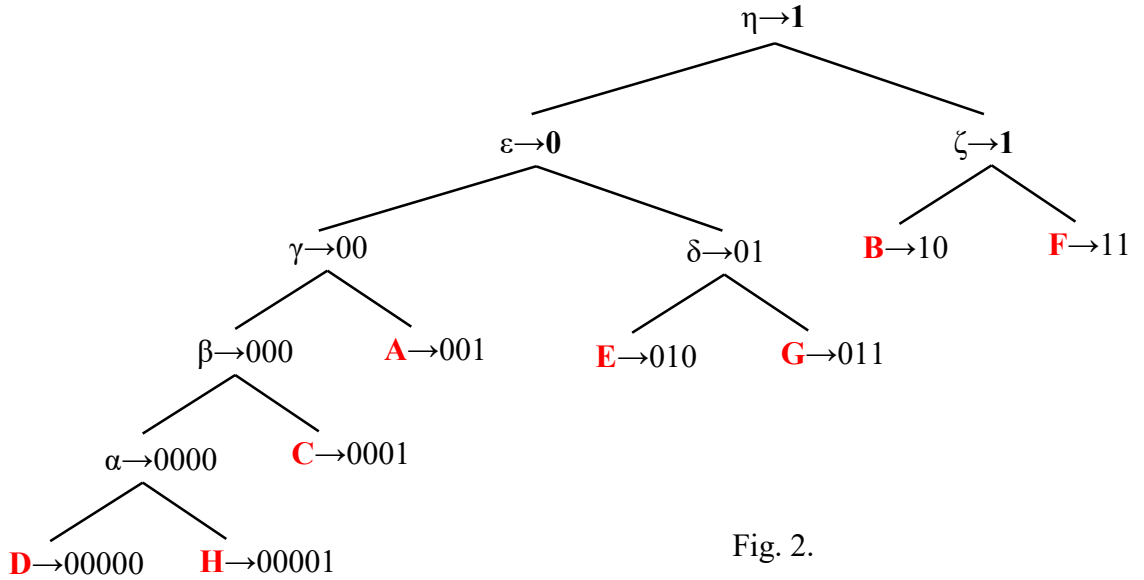
$$S = \begin{pmatrix} x_B, x_F, x_\epsilon \\ p_B, p_F, p_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B, x_F, x_\epsilon \\ 4^{-1}, 4^{-1}, 2^{-1} \end{pmatrix} ; \text{ we proceed further again: } (p_\varsigma = p_B + p_F = 4^{-1} + 4^{-1} = 2^{-1})$$

$$S = \begin{pmatrix} x_\varsigma, x_\epsilon \\ p_\varsigma, p_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\varsigma, x_\epsilon \\ 2^{-1}, 2^{-1} \end{pmatrix} \text{ and at last: } (p_\eta = p_\varsigma + p_\epsilon = 2^{-1} + 2^{-1} = 1^{-1} = 1) \rightarrow S = \begin{pmatrix} x_\eta \\ p_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\eta \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Now we draw a ramification with all what has done so far, starting from the bottom left and going upwards, also starting a new ramification, to the right, every time we face a combination of two main data (that are **A,B,C,D,E,F,G,H** so without the Greek letters **$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$**):



Once all this has been carried out, starting from the top, so from $p_\eta=1$, every time that we go down and to the left, we add a zero (0) while we add a one (1) when we go down and to the right, so getting:



We have just obtained the new code: ($x_A=001$, $x_B=10$, $x_C=0001$, $x_D=00000$, $x_E=010$, $x_F=11$, $x_G=011$, $x_H=00001$) and regarding the new mean length of the words:

$\ell = 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 2 + 16^{-1} \cdot 4 + 32^{-1} \cdot 5 + 8^{-1} \cdot 3 + 4^{-1} \cdot 2 + 8^{-1} \cdot 3 + 32^{-1} \cdot 5 = 2,6875 \text{ bit/symbol} = H(S)$; so we have shortened the mean length of words, bringing it to the minimum value H .

At last, with reference to the Appendix which follows, it's a bit like if, in thermodynamics, in the evaluation of the size of the entropy, we come to receive a numerical data which is an information, indeed, and which has got a lower limit in its length and this length can eventually just increase. Then, on occasion of the presentation of the equation (5), we saw that the length of the message is at its lowest value (that is, of the lowest entropy) when all the probabilities of all the symbols are identical; the corresponding situation, in the thermodynamics, could be that the entropy is at its lowest value when the energy is equidistributed (at its best), so in the situation of the lowest chaos (at the absolute zero).

APPENDIX: THE ENTROPY IN THERMODYNAMICS:

ENTROPY AND DISORDER

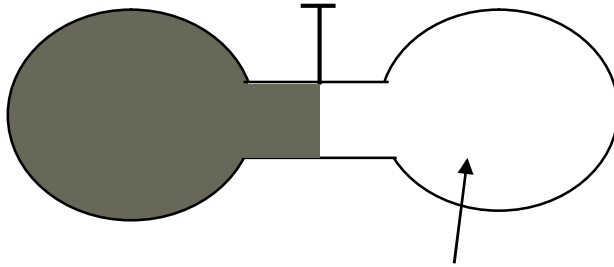


Fig. A1: Entropy and disorder.

There is just one way to have all the gas in just one container (for instance, that on the left in Fig. A1), and it consists in taking all molecules N and put them in that container, while in order to locate the molecules half on the left and half on the right there are W ways: we have N ways to choose the first molecule (among the $N/2$ which have to be taken) among the N available; then, $(N-1)$ ways for the second molecule (as $(N-1)$ particles are left), $(N-2)$ for the third and $(N-N/2)=N/2$ for the $N/2$ -th. Finally, we have: $W'=N(N-1)(N-2)(N-N/2)=N!/(N/2)!$. Then, the $N/2$ molecules are indistinguishable and so permutable (exchanged) in $(N/2)!$ ways and finally:
 $W=N!/[(N/2)!(N/2)!]$.

We are able to prove that systems are headed towards the state of maximum entropy. Moreover, systems evolve towards the most probable state (that is the most disordered); therefore, there must be a relation between S and W ; let's find it: a system A , made of two subsystems A_1 and A_2 , has an entropy S_1+S_2 (additivity of the entropy); the probability W , that is the n. of microscopic configurations in which that macroscopic state can be made, is W_1W_2 (the probability is multiplicative, that is the probability of two events which happen simultaneously is given by the product of the probabilities); so: $S(W) = S(W_1W_2) = S(W_1) + S(W_2) (= S_1 + S_2)$; such a condition must hold $\forall W_1$ and W_2 ; in fact, as $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, we immediately notice that a relation like $f(x)=C\ln x + \text{const}$ holds. Apart from a constant, we have a relation like:

$$S = C \cdot \ln W . \quad (\text{A1})$$

In order to calculate C , let's consider the free expansion of an ideal gas which doubles its volume ($V_f/V_i=2$) in a -Joule's Experience-:

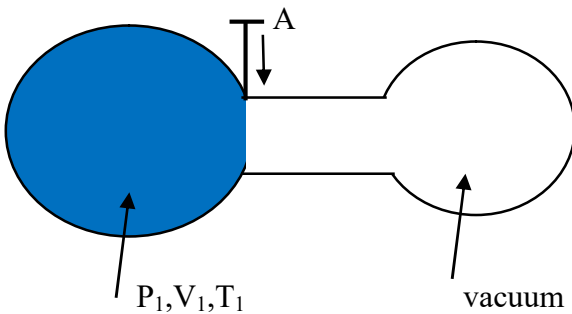


Fig. A2: Joule's Experience.

Once the tap A is open, the gas expands into the vacuum, so $dL = 0$; moreover, as it's about an isolated system: $\delta Q = 0$ and so, according to the Ist Law of Thermodynamics: $\delta Q - dL = dU = 0$, that is $dU = 0$ and due to the fact that the temperature T doesn't change, we understand that $U=f(T)$.

So: initial state: p_i, V_i, T and final state $p_f=p_i/2$ (for Boyle), $V_f=2V_i, T$; and about the entropy:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f \delta Q = \frac{1}{T} \int_i^f (dU + p dV) = \frac{1}{T} \int_i^f p dV = \frac{1}{T} \int_i^f \frac{nRT}{V} dV = nR \int_i^f \frac{1}{V} dV = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) =$$

$= nR \ln 2 > 0$, that is: $\Delta S = nR \ln 2 = nN_A k \ln 2 = Nk \ln 2$, but for the (A1) we have:

$$\Delta S = C \ln \frac{W_f}{W_i} \quad (A2)$$

and $W_f = N! / [(N/2)!(N/2)!]$, and also $W_i = 1$, from which: $\Delta S = C \ln \frac{N!}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!}$ and for the Stirling's

Formula(*) for large N, we have: $\ln N! \cong N \ln N$ and so:

$$\Delta S = C \left(N \ln N - \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} \right) = C \left(N \ln N - N \ln \frac{N}{2} \right) = CN \left(\ln N - \ln \frac{N}{2} \right) = CN \ln 2 \quad \text{and if we}$$

compare this with the (A1), we get: $C=k$, so:

$$S = k \ln W \quad (\text{Boltzmann's Theorem} - k = \text{Boltzmann's Constant}) \quad (A3)$$

As all systems evolve towards $W_f \gg W_i$, for the (A2) we see that they also evolve towards $\Delta S > 0$.

(*): let's take the expression $\ln x!$; if x is an integer, we can write that:

$$\ln x! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(x-1) + \ln x = \sum_1^x \ln x = \sum_1^x \ln x \cdot (\Delta x), \quad \text{where } (\Delta x) = 1, \text{ as it's about an integer, so}$$

we have steps of a unit. Now, with a large x, $(\Delta x) = 1$ will be small if compared to x itself, so (Δx) will become a dx

and the summation will get an integral: $\ln x! = \int_1^x \ln x \cdot dx = x \ln x - x + 1$, that is: $\ln x! = x \ln x - x + 1$.

TAYLOR INTO EULER INTO GAUSS

Introduction:

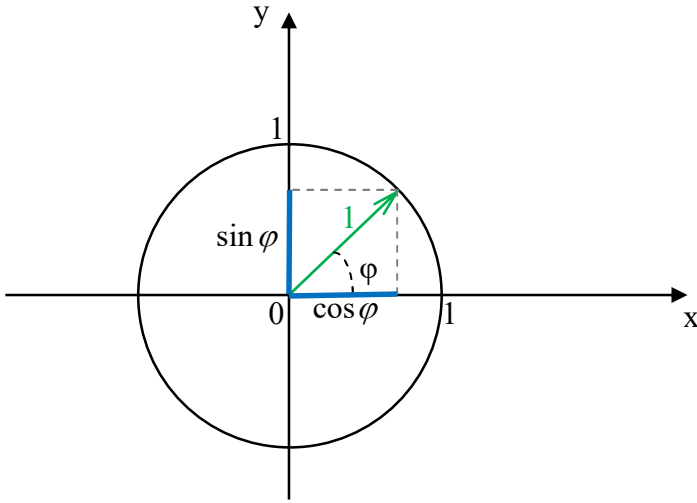


Fig. 1: The unit circle.

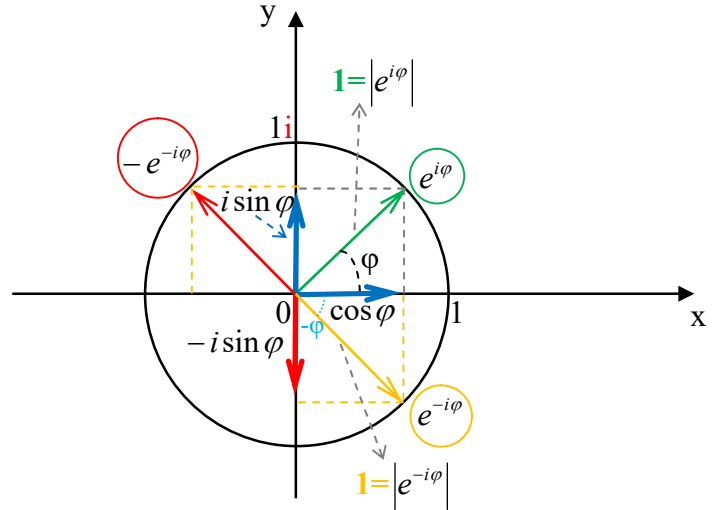


Fig. 2: The Gauss Plane.

We preliminarily remind the Euler's Formulas; by the way, they are proved below:
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ and $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$; now, by considering such two equations as vector equations, then the former (for example) would look like that: $\vec{v} = \vec{v}_x + i\vec{v}_y$ (where $\vec{v}_x = (\cos \varphi)\hat{x}$ and $\vec{v}_y = (\sin \varphi)\hat{y}$), so:

$$\vec{v} = (\cos \varphi)\hat{x} + i(\sin \varphi)\hat{y}, \quad \text{where } |\vec{v}| = 1 = |e^{i\varphi}|, \quad \text{as its components are } \cos \varphi \text{ and } \sin \varphi.$$

Regarding the latter: $\vec{v} = \vec{v}_x - i\vec{v}_y$ (where $\vec{v}_x = (\cos \varphi)\hat{x}$ and $\vec{v}_y = (\sin \varphi)\hat{y}$), so:

$$\vec{v} = (\cos \varphi)\hat{x} - i(\sin \varphi)\hat{y}, \quad \text{where } |\vec{v}| = 1 = |e^{-i\varphi}|, \quad \text{as its components are } \cos \varphi \text{ and } \sin \varphi$$

$$[\sin(-\varphi) = -\sin \varphi].$$

Not only, but the two vectors, the green and the orange ones $e^{i\varphi}$ and $e^{-i\varphi}$ (in Fig. 2) give

$2\cos \varphi$ on the horizontal axis ($e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos \varphi$), so we get the: $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ of Euler, still proved below.

Finally, the two vectors, the green and the red ones $e^{i\varphi}$ and $-e^{-i\varphi}$ give $i2\sin \varphi$ on the vertical

axis ($e^{i\varphi} + [-e^{-i\varphi}] = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = i2\sin \varphi$), so we get the: $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ of Euler, still proved below.

So: **EULER INTO GAUSS**.

APPENDIX - TAYLOR INTO EULER:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

We have an $f(x)$ and we suppose it equals, in a certain neighbourhood of x_0 , a generic series:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ; \text{ now, if we also suppose that } x_0 \text{ is the origin: } (x_0=0), \rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Now, as: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, it follows that:

$$f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 0^n = a_0 \text{ and then also: } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ and:}$$

$$f'(0) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1 + 0 = a_1 \text{ and:}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2(2-1) a_2 x^{2-2} + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

so: $f''(0) = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n 0^{n-2} = 2a_2 + 0 = 2a_2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$ and so on, so getting:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \text{ and finally: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n, \text{ which is the Taylor Series Expansion}$$

(a MacLaurin's one, in this case). Now, by using it on the function $f(x) = e^x$, we have:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n .$$

By considering the following three Taylor series expansions:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot x^n = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

if in the first one we put ix in place of x , we'll have:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) \cdot (ix)^n = 1 + ix + i^2 \frac{1}{2} x^2 + i^3 \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n = 1 + ix - \frac{1}{2} x^2 + i i^2 \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n =$$

$$= 1 + ix - \frac{1}{2} x^2 - i \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n, \text{ while from the third expansion we have:}$$

$$i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} f^n(0) \cdot x^n = ix - i \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{i(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \text{ so we understand that about } e^{ix} :$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2} x^2 - i \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n x^n = \cos x + i \sin x ; \text{ similarly: } e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \text{ so, by using}$$

both of them, we get the following Euler's Formulas:

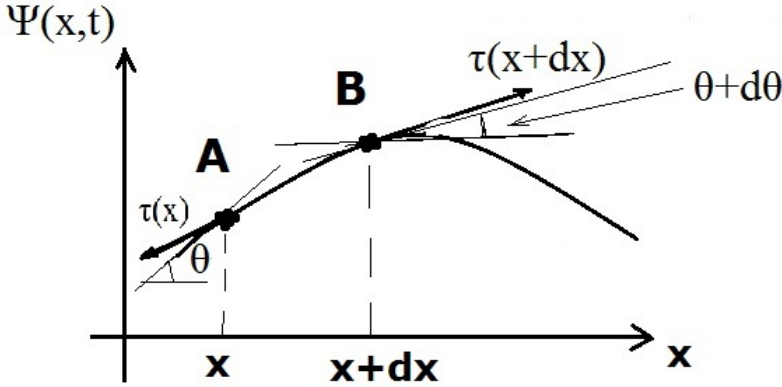
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \text{ If in the } e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ we put } x=\pi, \text{ we get: } e^{i\pi} + 1 = 0 .$$

D'ALEMBERT INTO EINSTEIN

(GRAVITATIONAL WAVES)

Introduction on the d'Alembert's Equation:

Naturally, also the case of a vibrating string brings us to the d'Alembert's Wave Equation:



τ is the tension of the string, dm is the infinitesimal element of mass and μ is the linear density of the string. On the y axis, we have: $\tau \sin(\theta + d\theta) - \tau \sin \theta = dm \cdot a = \mu dx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$; now, for small

angles, both sine and tangent are approximated by the angle: $\tau(\theta + d\theta) - \tau\theta = \tau d\theta = \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} dx$ and

also $\theta \approx \tan \theta = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ and $d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx$, from which: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu}{\tau}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$, where: $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$.

Gravitational waves (of d'Alembert) from the Einstein's Equations.

In a Weak Field Approximation, we express the metric tensor $g_{\mu\nu}$ as the summation of the Minkowski tensor $\eta_{\mu\nu}$ (of a non curved space) and of a perturbation $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (1)$$

Then, we also recall the Ricci Tensor and the Christoffel symbols:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \quad (2)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) ; \quad (3)$$

so we have: ($\eta \rightarrow \text{const}$)

$$R_{\mu\nu} \cong \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + O(h^2) \quad (4)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) + O(h^2) \quad (5)$$

($\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu} = h_{\nu}^{\lambda}$, $\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}$) and by combining those two:

$$R_{\mu\nu} \cong R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda}) \quad (6)$$

(d'Alembertian Operator $\Box^2 = \nabla^2(*) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2}$) ; in fact, for the (4), we have:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\lambda}) + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\mu\lambda}) \right] - \\
&- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu}) + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\rho} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} h_{\mu}^{\lambda} - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} h_{\mu}^{\rho} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} h_{\mu}^{\lambda} + \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[(\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[(\eta^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + \eta^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + \eta^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + \eta^{00} \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [(+1) \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + (-1) \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu}] - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} h_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\square^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right) \quad , \text{ that is the (6), indeed.}
\end{aligned}$$

And according to the Einstein's Equations:

$$[R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}) = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}]$$

$$\square^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (7)$$

If now we get into a harmonic coordinate system:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 ; \quad (8)$$

In fact, in treating the geodesic equation, we meet the following identity which states the affine

connection: $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$. In fact, a free falling parachutist does not have any floor over

which his body can rest; therefore, he does not detect any gravitational acceleration and he feels as if floating in the vacuum. He realizes he is falling only if he looks at the moving objects around. Therefore, for a free falling particle, there is a reference system in which $\vec{a} = 0$, that is:

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{free falling in Euclidean coordinates}) \quad (9)$$

with $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$.

But we can see (9) in the following way:

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$

If we multiply both sides by $\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$ and consider that: $\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} = \delta_{\mu}^{\lambda}$, we'll have:

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (\text{free falling in curvilinear coordinates}) \quad (10)$$

(equation of the geodesic, where geodesic, on the Earth, is the shortest path between two places)

with $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$ indeed.

Now we go on with the reasoning and in order to find the equation of the transformation of the affine connection, we write again the equation of the affine connection in a different reference

frame: $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$, from which:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right] = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} ; \text{ now, we differentiate } \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\lambda} : \\ \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} &= - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} , \text{ from which:} \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} , \end{aligned} \quad (11)$$

which is the equation of the transformation of the affine connection, indeed.

If now we contract the last equation by $g^{\mu\nu}$ and then put it to zero, we get:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho} - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} = 0 , \text{ which is the (8), indeed, and we can always get into}$$

such a situation by calculating a new reference frame x^{λ} , through the previous equation:

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho} - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} = 0 .$$

The (8) and the (5) yield: $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) + O(h^2)$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[\left(\frac{\partial h_{\rho}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial h_{\rho}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = 0 \rightarrow 2 \frac{\partial h_{\rho}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h_{\rho}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} h_{\mu}^{\mu} \text{ and after renaming } \rho \text{ by } \nu: \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\mu} \quad (12)$$

$$\text{which, if inserted into the (7) yields: } \square^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (13)$$

The solution, which can be checked through a direct substitution, is the delayed potential:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d^3 \vec{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (14)$$

Anyway, in order to simplify a bit things, for radiations coming from infinite: ($T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} = 0$)

$$\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (15)$$

$$\text{that is: } 0 = \nabla^2 h_{\mu\nu} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} \quad (\text{Wave Equation}) , \quad (16)$$

whose well known solution is a wave, indeed:

$$\boxed{h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} + e_{\mu\nu}^* e^{-ik_{\lambda} x^{\lambda}}} ; \quad (17)$$

$e_{\mu\nu}$ is the polarization tensor.

SNELL INTO EINSTEIN

(THE THEORY OF RELATIVITY TESTED WITH THE SNELL'S LAW)
(THE DEFLECTION OF LIGHT BY THE SUN)

THE DEFLECTION OF LIGHT BY THE SUN

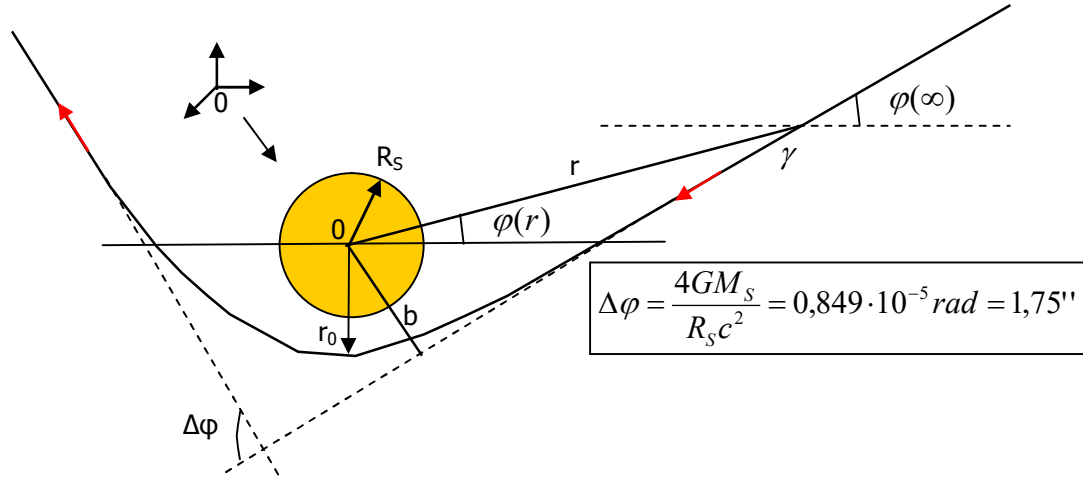


Fig. 1: The traditional deflection of light by the Sun.

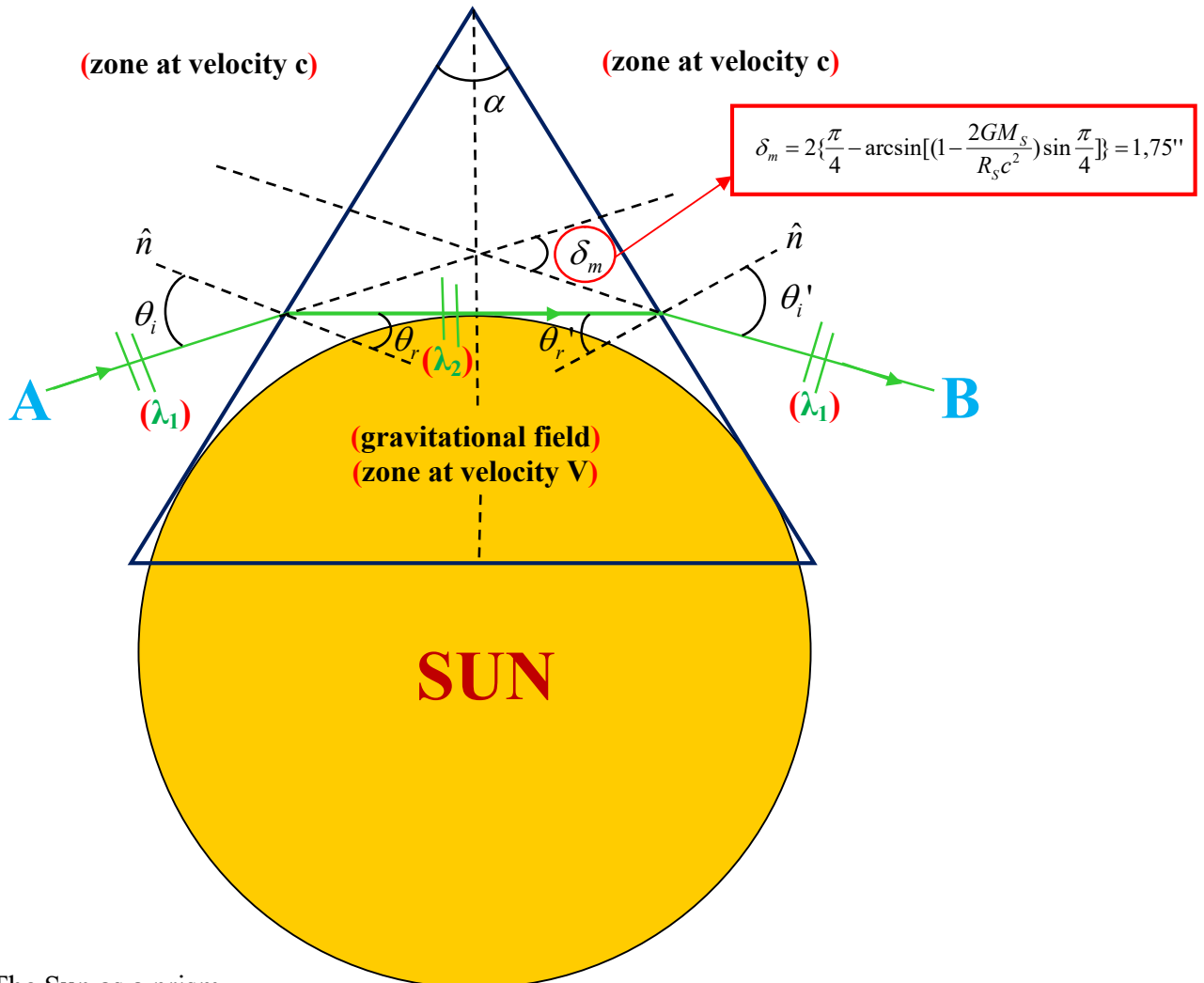


Fig. 2: The Sun as a prism.

Of course, in the above Fig. 2, the prism can be lowered, in order to have the horizontal stretch of the ray of light (λ_2) short enough. And such a prism can also be rotated around the centre of the star and repositioned, out of symmetry reasons.

As well as in the light refraction situation, a ray bends while entering the water (SNELL-Rif. Fig. A1.1 in Appendix A1), the same happens to the light entering the gravitational field of a star: a deflection. Moreover, as well as air and water have got different light velocities, also with the Sun we will talk about a far c and a close V .

The traditional computation method for the light deflection by the Sun yields the value:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM_S}{R_S c^2} = 0,849 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75'' , \quad (1)$$

such a value was obtained, as an example, in Brazil during the 1919 eclipse.

($R_S = 6,95475 \cdot 10^8 \text{ m}$, $M_S = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ and $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$)

Now, we are going to use the change of the velocity of light when it approaches a mass.

With reference to the above Fig. 2, we remind (first of all) the (A1.6) in Appendix A1, which is rather intuitive anyway, although it is proved there:

$$\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r) = \Delta\varphi \quad (2)$$

δ_m is (of course) the deflection angle the light ray undergoes when coming from **A**, then finally leaving the (refractive) prism system and so heading for **B** ; moreover, there we prove that $\delta = \delta_m$ is the lowest when θ_i makes the ray into the prism be parallel to the base and in such a case we also have that $\theta_i = \theta_i'$ and $\theta_r = \theta_r'$, and also have the (2) (that is the A1.6), indeed.

Then, we remind the definition of redshift:

$$z = \frac{\lambda_{\text{observed}} - \lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{emitted}}} \quad (3)$$

Moreover, it follows that: $1 + z = \frac{\lambda_{\text{observed}}}{\lambda_{\text{emitted}}}$. $z > 0$ is redshift; $z < 0$ is blueshift. From the (3) we get:

$$z = \frac{\lambda_{\text{observed}} - \lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{emitted}}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{V/f - c/f}{c/f} = \frac{-\Delta v}{c} = \frac{V}{c} - 1 \quad (4)$$

(of course, on the left of the prism, where λ_1 is in the **A** zone (source) and λ_2 is observed from the prism) and then, by comparing the last one (the (4), indeed) to the (A2.8) in Appendix A2 (which comes out of the Schwarzschild Solution), that is the: $V \cong c[1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$ ($\rightarrow \frac{V}{c} \cong [1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$), then

$$\text{we get: } z = -\frac{2GM_S}{R_S c^2} = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} \quad (5)$$

So, for the Snell's Law (A1.3), we have: $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{c}{V} = n$, but from the (4) we also have that:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{V}{c} - 1 , \text{ so: } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V}{c} \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c}{V} \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ and so:}$$

$$\sin \theta_r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \theta_i = \frac{(\lambda_1 - \Delta\lambda)}{\lambda_1} \sin \theta_i = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i \text{ and due to the (5), we have, then:}$$

$$\sin \theta_r = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i = (1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \theta_i \text{ and finally:}$$

$$\theta_r = \arcsin[(1 - \frac{2GM_s}{R_sc^2}) \sin \theta_i] \quad (6)$$

and the (6) into the (2) yields:

$$\delta_m = 2\{\theta_i - \arcsin[(1 - \frac{2GM_s}{R_sc^2}) \sin \theta_i]\} \quad (7)$$

At last, by inspecting Fig. 3 below, we notice that the angle θ_i can span between 0° (so with the ray of light perfectly perpendicular to the left side of the prism) and 90° (so when, as a limit, the ray of light gets parallel to the left side of the prism), and so we will use, as θ_i , its mean value, that is:

$$\bar{\theta}_i = \frac{0^\circ + 90^\circ}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} rad, \text{ from which, thanks to the (7):}$$

$$\delta_m = 2\{\frac{\pi}{4} - \arcsin[(1 - \frac{2GM_s}{R_sc^2}) \sin \frac{\pi}{4}]\} = 0,849 \cdot 10^{-5} rad = 1,75'' \quad (8)$$

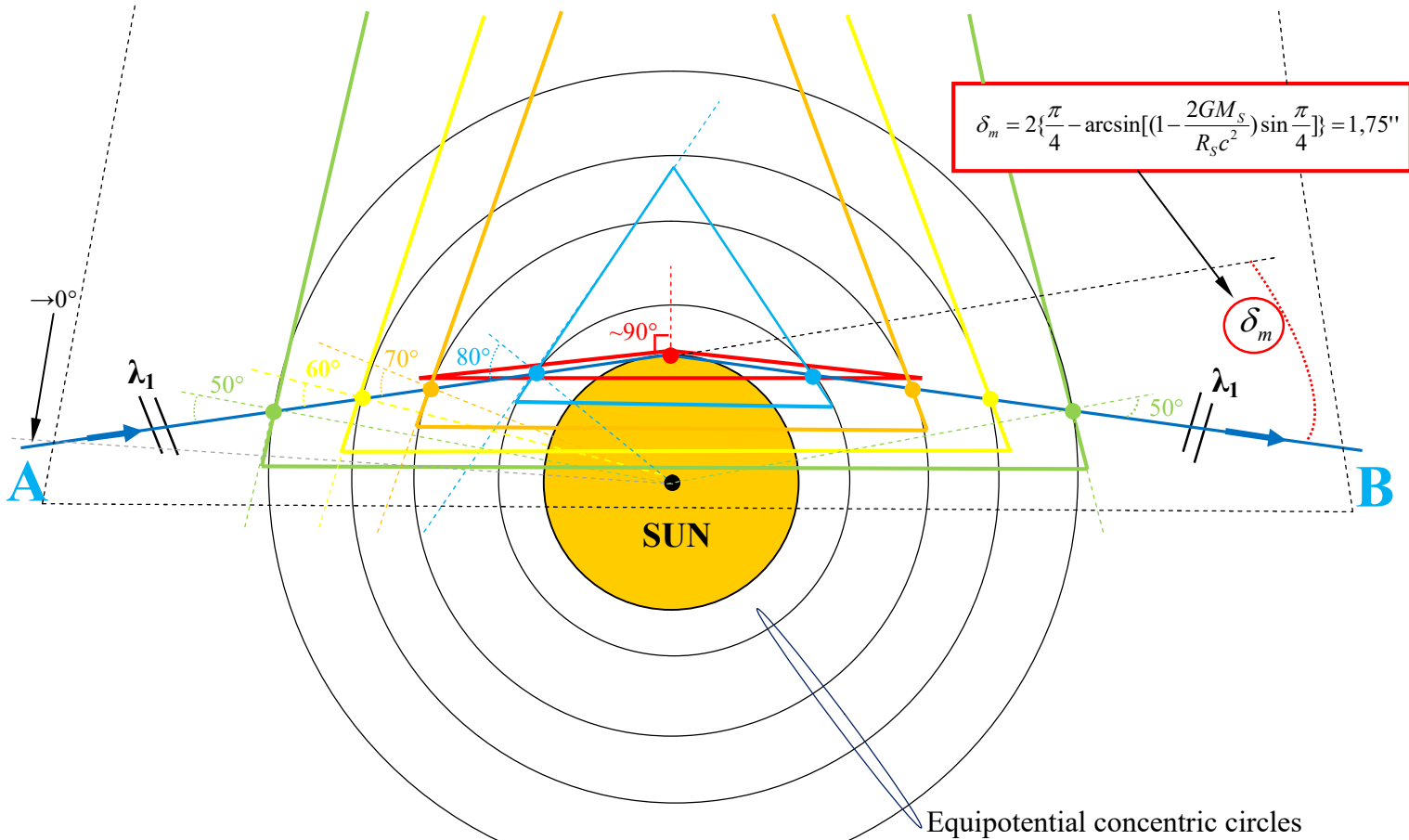


Fig. 3: The Sun as many prisms.

APPENDIX 1: REFRACTION AND SNELL'S LAW

Refraction

The Lifeguard

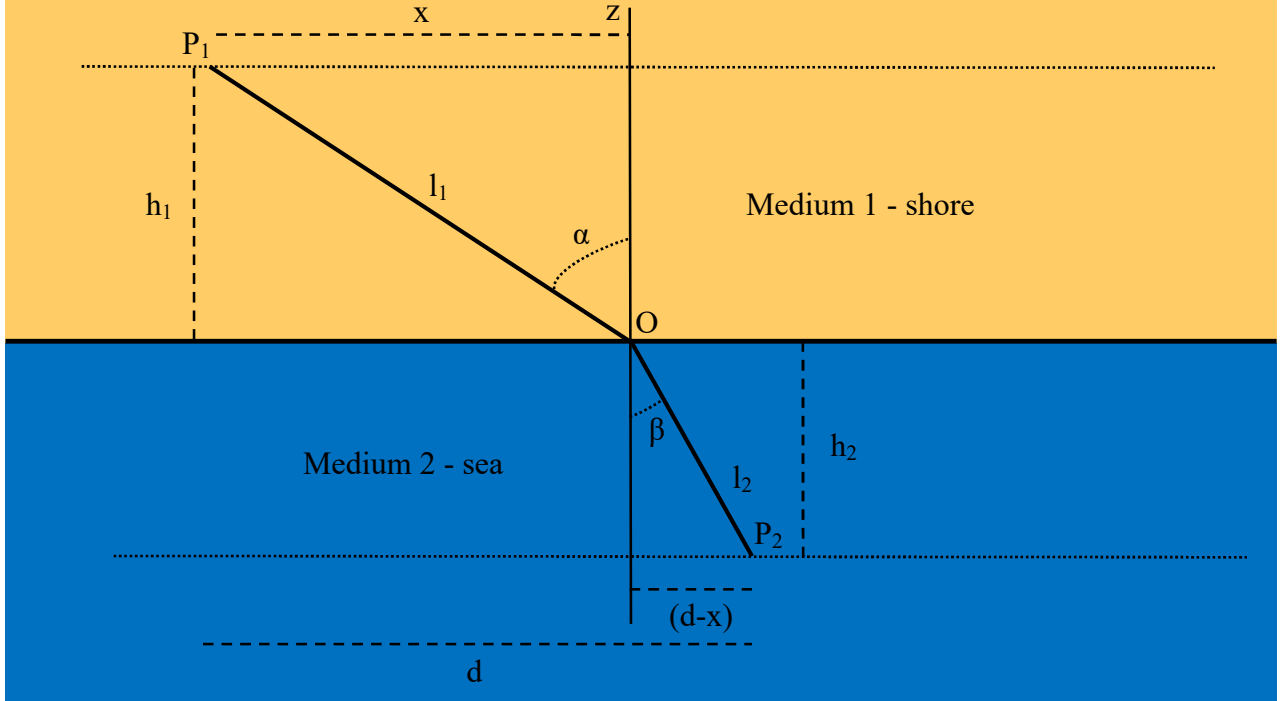


Fig. A1.1: The Lifeguard in P_1 sees the bather in trouble in P_2 .

The Lifeguard in P_1 has to reach and help the bather in P_2 ; but he also knows that the speed v_1 of running on the shore is higher than the swimming speed v_2 in the water, so the geometrically shortest path given by the segment P_1 - P_2 is not the fastest, as it forces the Lifeguard to stay too long in the water, where he is slower.

We evaluate the travelling time of the Lifeguard:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Now, in order to evaluate the minimum value t_B , we calculate the derivative and we put it to zero:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0, \text{ but we have:}$$

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{and} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta, \text{ so: } \frac{dt_B}{dx} = \frac{2 \sin \alpha}{v_1} - \frac{2 \sin \beta}{v_2} = 0, \text{ that is:}$$

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} = k, \tag{A1.1}$$

therefore, in both media (medium 1 and medium 2), the ratio between the sine of the angle made with the vertical line and the speed is constant.

Snell's Law

If paths l_1 and l_2 were light rays and media 1 and 2 were, for instance, air and water, then, after considering that for the refraction indexes n_1 and n_2 we have, by definition:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{and} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}, \quad (\text{A1.2})$$

we get the Snell's Law:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1/c}{v_2/c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n, \quad (\text{A1.3})$$

which is the reason why a ladder into a pool looks bent. n_{21} is the relative refraction index of mean 2 with respect to mean 1. As $v_1 \neq v_2$, that is: $v_i \neq v_r$ ("i" stands for incident radiation, while "r" represents the refracted one) and $v_i = \lambda_i f_i$, $v_r = \lambda_r f_r \rightarrow \lambda_i = \frac{v_i}{f_i} = \frac{c/n_1}{\omega_i/2\pi} = \frac{c}{n_1} \frac{2\pi}{\omega_i}$ and

$$\lambda_r = \frac{v_r}{f_r} = \frac{c/n_2}{\omega_r/2\pi} = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega_r}; \text{ if, as we will see, we are in the situation of } f_1=f_2, \text{ then } \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_1=\omega_2=\omega=(2\pi)f \rightarrow \lambda_r = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{n_2} \frac{\lambda_i n_1}{c} = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i, \text{ so:}$$

$$\lambda_r = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i \quad (\text{A1.4})$$

As the Snell's Law has come out as a calculation of the minimum travelling time, then Fermat's Principle is here confirmed, according to which a light ray follows the shortest path (in duration).

Now, as we are dealing with electromagnetic waves (E and B), then we have that:

($\vec{k}$ is the wave vector)

(incident wave)

$$\vec{E}_i = E_{oi} \cdot e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} = E_{oi} \cdot e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \vec{k}_i \cdot \vec{r} - 2\pi f_i t)} \quad \text{and} \quad \vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{k}_i \times \vec{E}_i$$

(refracted wave, such out of phase about φ_r)

$$\vec{E}_r = E_{or} \cdot e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \quad \text{and} \quad \vec{B}_r = \frac{n_2}{c} \vec{k}_r \times \vec{E}_r$$

Then, being $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (where j is the current density and σ is the conductivity), we have that if we are between insulators or between vacuum and vacuum+gravitational field, then $\sigma=0$ and $\rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} = 0$ (and this counts first of all along the border between the two means) and the Maxwell's equations will be those for the vacuum and they will lead to the Wave Equation in both "i" and "r", and the relevant solutions are the above reported ones, for both "i" and "r", (in both zones we claim $a \propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$) and so, while going from "i" to "r", the arguments must stay unchanged: $(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r) \rightarrow \varphi_r = 0$, ($\omega_i = \omega_r \rightarrow f_i = f_r$ same frequencies) and $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}$; in particular, we have: $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \rightarrow k_{i-x}x + k_{i-y}y + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z$ and by considering the y axis as that coming out of the sheet, then we have that $k_{i-y}=0$ (when considering the incident ray as contained into the x-z plane of the sheet), so: $k_{i-x}x + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z$ and also considering the crossing point of the border ($z=0$, with z as the vertical axis – rif. Fig. A1.1), then we have: $k_{i-x}x = k_{r-x}x + k_{r-y}y \rightarrow k_{r-y} = 0$ e $k_{i-x} = k_{r-x} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \beta$ or also: $\frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \theta_r \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, that is again a confirmation of the Snell's Law.

The Prism

We have a prism made of a transparent material, like in Fig. A1.2:

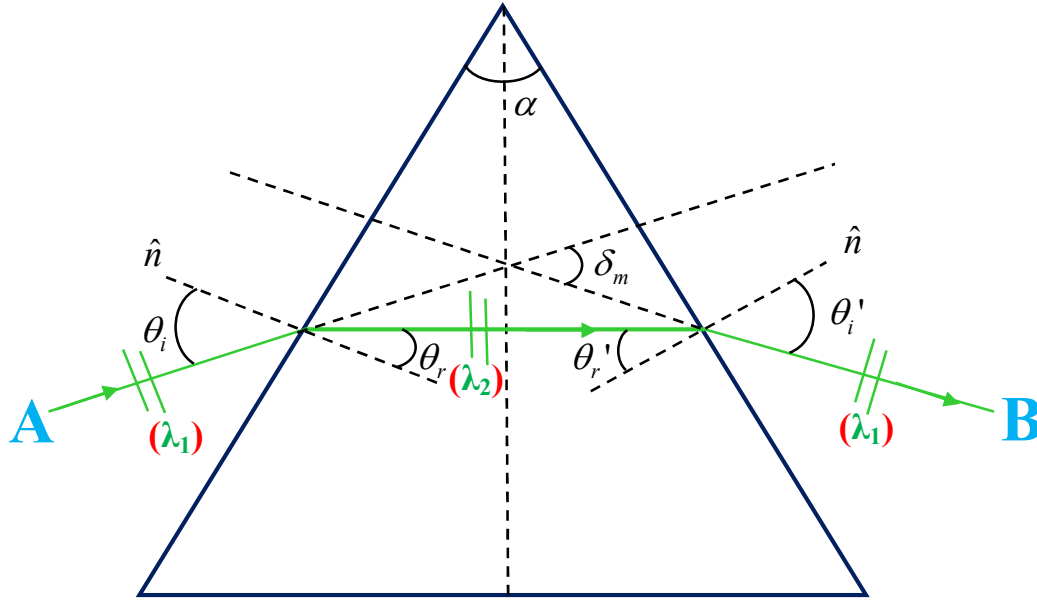


Fig. A1.2: The prism.

δ_m is the deflection angle the light ray undergoes when coming from **A**, then finally leaving the (refractive) prism system and so heading for **B**; moreover, $\delta = \delta_m$ is the lowest when θ_i makes the ray into the prism be parallel to the base and in such a case we also have that $\theta_i = \theta'_i$ and $\theta_r = \theta'_r$. Now we also show that:

$$\theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \quad \text{and} \quad \theta_r = \frac{\alpha}{2}, \quad (\text{A1.5})$$

$$\text{so: } n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\sin(\frac{\delta_m + \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}; \text{ proof:}$$

$$\text{besides, from both the (A1.5), we get: } \theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} = \frac{\delta_m + 2\theta_r}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r)} \quad (\text{A1.6})$$

Going back to the proof, with reference to Fig. A1.3 below, from the triangle DEB we have:

$$(\pi - \delta) + (\theta_i - \theta_r) + (\theta'_i - \theta'_r) = \pi, \text{ so:}$$

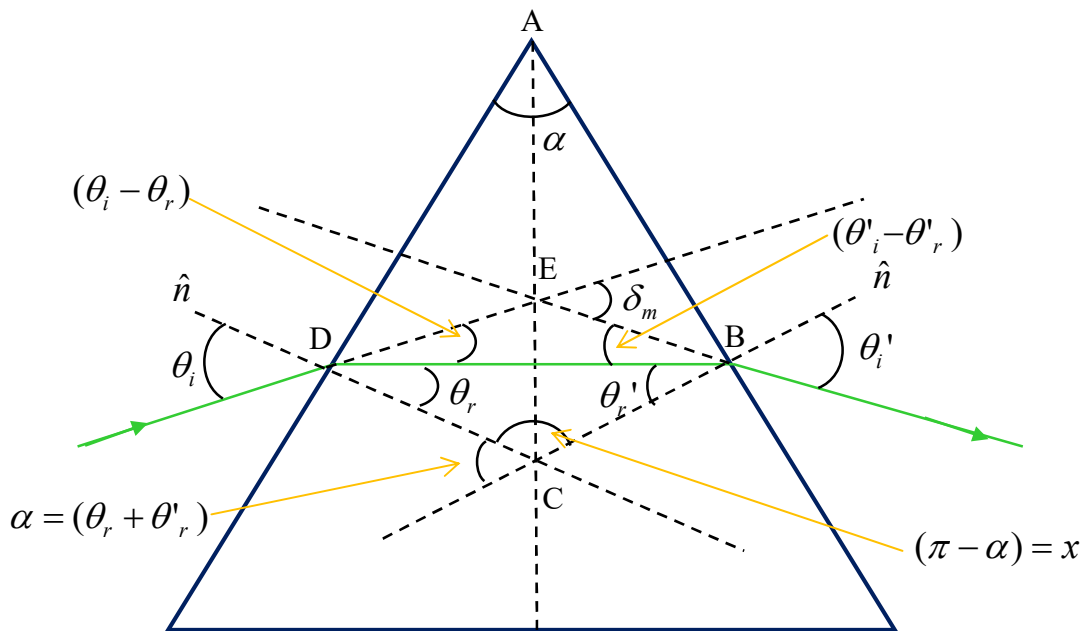
$$\delta = (\theta_i + \theta'_i) - (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A1.7})$$

$$\text{From the triangle ABD we have: } \alpha + (\frac{\pi}{2} - \theta_r) + (\frac{\pi}{2} - \theta'_r) = \pi, \text{ so:}$$

$$\alpha = (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A1.8})$$

<

<



APPENDIX 2:

GRAVITY SLOWS DOWN THE TIME AND THE SCHWARZSCHILD SOLUTION

-GRAVITY SLOWS DOWN THE TIME

Also gravity slows down the time! On a mountain time elapses faster than down in the valley. Of course, on the Earth, the difference is imperceptible, but on a neutron star or in a black hole, that effect is very strong.

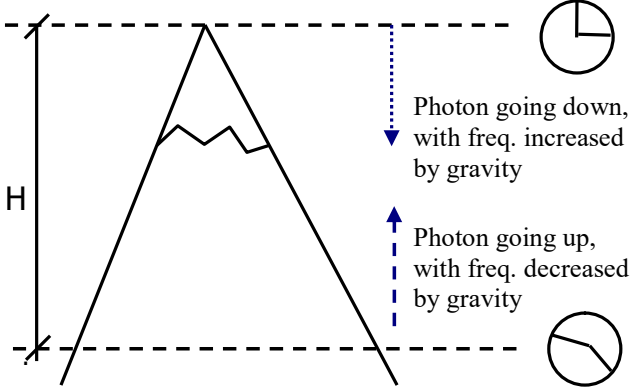


Fig. A2.1: Mountain, gravity and time.

$\Delta E = m_0 g H$ (delta energy from the level difference); $\Delta E = h \Delta \nu$ (delta energy due to the freq. decrease of the photon). From them: $\Delta \nu = m_0 g H / h$. For a photon, $E = h \nu$, but in relativity: $E = m_0 c^2$, from which, for a photon: $m_0 = h \nu / c^2$ and so, for $\Delta \nu$: $\Delta \nu = \nu g H / c^2$ and as time is the reciprocal of the frequency, we have: $\Delta \nu / \nu = \Delta t / t$ and so:

$$\Delta t = \frac{gH}{c^2} t . \quad (\text{A2.1})$$

Therefore, over a time t , we have a slow down Δt due to gravity! We know that the escape velocity of a celestial body whose mass is M and radius R is: $V = \sqrt{2GM/R}$. If on that body an object is cast vertically with the escape velocity, it will quit the gravitational field of that celestial body and will go towards the infinite, without falling down anymore.

A black hole is a body so compressed (big M and small R) that the escape velocity on its surface reaches the speed of light and so not even the light can escape, from which the name of black hole; moreover, for what above said, we can say that in a black hole time is approximately stopped!

Now, jumping back to the time slowing, for the (A2.1): $\Delta t = \frac{gH}{c^2} t$, which can be seen as:

$dt = \frac{gdr}{c^2} t$ and considering that $|g| = \frac{GM}{r^2}$, it follows that: $dt = t \frac{GM}{c^2 r^2} dr$, that is:

$$\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow \int \frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \int \frac{dr}{r^2} \rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2 r} + k \rightarrow$$

$$t = k \cdot e^{-\frac{GM}{c^2 r}} \rightarrow (e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = k(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow (t = t_0 \gg r = \infty) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow$$

$$(\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x) \rightarrow t = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} . \quad (\text{A2.2})$$

On the other hand, we know that the formula for the Lorentz's contraction has the same look of that for the time dilation, but with the root at the denominator, so:

$$r = r_0 / \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} . \quad (\text{A2.3})$$

THE SCHWARZSCHILD SOLUTION

We know that, in general: $d\tau^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ (four-dimension invariant) and as, for a photon, $(d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2$, then we have: $d\tau^2 = 0$ (for a photon, indeed).

Still starting from the metric tensor: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ we jump to the more simple spherical coordinates:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (\text{A2.4})$$

but because of the (A2.2) and (A2.3):

$$dt = dt_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow dt^2 = dt_0^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dt_0^2 \underline{B(r)} \text{ and:}$$

$$dr^2 = dr_0^2 / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \cong dr_0^2 \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dr_0^2 \underline{A(r)} , \text{ as, according to Taylor: } 1/(1-x) \cong (1+x) .$$

Moreover, we have no Lorentz contraction on transversal directions (y and z, or also θ and φ , as an example), so, for the (A2.4):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{Schwarzschild Solution}) \quad (\text{A2.5})$$

(and after having renamed r and t) Now, if we use it on a photon, we get:

$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$; moreover, if we consider light radially travelling towards the Sun, we can get rid of the components in $d\theta$ and $d\varphi$:

$$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 ; \quad (\text{A2.6})$$

the speed of light is $c = dr/dt$ far from the mass of the Sun, while, close to it, the (A2.6) holds, from which we get:

$$V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c ; \quad (\text{A2.7})$$

so, being: $B(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]$ and $A(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]^{-1} \cong [1 + \frac{2GM}{rc^2}]$, then from the developments on

the variable $\frac{2GM}{rc^2}$ used on the (A2.7), we easily have that:

$$V/c = ([1 - \frac{2GM}{rc^2}])^{1/2} / [1 + \frac{2GM}{rc^2}]^{1/2} \cong [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] \cong [1 - \frac{2GM}{rc^2}] , \text{ that is:}$$

$$V \cong c[1 - \frac{2GM}{rc^2}] \quad (\text{A2.8})$$

MENDELEEV INTO EINSTEIN

(THE THEORY OF RELATIVITY HIDDEN INTO THE PERIODIC TABLE OF ELEMENTS)
(ON THE CONSTANCY OF THE VELOCITY OF LIGHT IN CHEMISTRY)

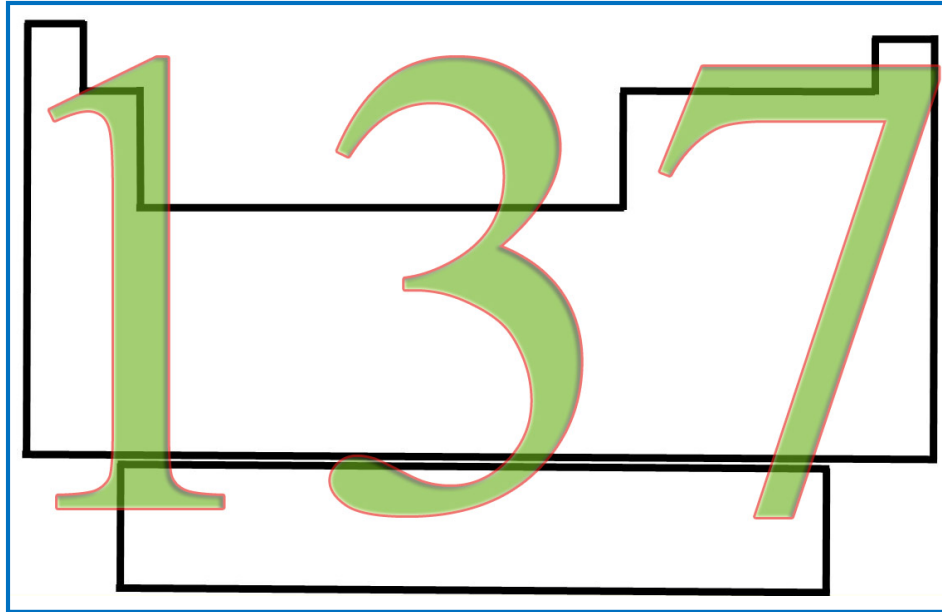


Fig. 1: The Periodic Table of Elements (Mendeleev-1869).

We know that the Einstein's Theory of Relativity is formally founded on two principles:

-Principle of Relativity: *laws of physics have the same form in all inertial systems* (i.e. at relative movement with a constant speed); as it doesn't make any sense an absolute movement with respect to a standing ether which does not exist, all reference systems are equal laboratories to verify in all laws of physics; so there aren't any privileged reference systems.

-Principle of Constancy of the Speed of Light: *the speed of light in vacuum has always the same value $c=300.000$ km/s*. Therefore, no matter if you chase it at 299.000 km/s or if you run away from it still with that speed; light in vacuum will run away or chase you still at 300.000 km/s! ($c=299.792,458$ km/s) So, it's a velocity limit.

Regarding the revolution velocity of the electron around the nucleus (the proton) in an atom of hydrogen H, we have, for the (A4) in the Appendix: $v = \frac{Ze^2}{2nh\epsilon_0} \rightarrow (Z=1, \text{ so just one proton in H}$

and $n=1$, so the first and only orbital) $\rightarrow v_{el_in_H} = \frac{e^2}{2h\epsilon_0} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s} \cong \frac{c}{137}$. Besides, $\alpha \cong \frac{1}{137}$

is the Fine Structure Constant. Conversely, if we force the electron to have the velocity of light c and still when it stays on its first orbital ($n=1$), then we have to state that:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\epsilon_0} = \frac{Ze^2}{2h\epsilon_0} = c = Z \frac{e^2}{2h\epsilon_0} = Zv_{el_in_H} = Z \frac{c}{137} \rightarrow \boxed{Z=137}.$$

On the Periodic Table of Elements, regarding the atomic number Z , nowadays we deal with values around 118, whose size is definitely similar to the number 137, so it seems that 137 represents a sort of upper limit and the number 118 is already critically close to it. Therefore, Mendeleev's Periodic Table of Elements leads us, somehow, towards the Relativistic Principle of Constancy of the Velocity of Light (velocity limit).

APPENDIX - The Bohr's atomic model

We know that: $E = h\nu$, $E = mc^2$. Afterwards, the balance between electric force and centrifugal one, in the nucleus-electron system, yields:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}; \quad (A1)$$

(Z is the atomic number, that is the number of protons (+) in the nucleus) then, obviously:

$$mc^2 = h\nu = mcc \gg \gg h = mc \frac{c}{\nu} = mc\lambda, \text{ from which } \lambda = \frac{h}{mc}. \text{ Now, for a particle whose rest mass}$$

is not zero, we have, on the contrary: $\lambda = \frac{h}{mv}$ (De Broglie wavelength, 1923).

The matter, too, has wave properties, as a shifty particle cannot be reduced to a point with no dimensions, but it is rather a little cloud in which the probability to find it is higher; mathematically speaking: a wave. If now we suppose that the circumference of the orbital run by the electron is n times λ , then: $mv\lambda = h = mv \frac{2\pi r}{n}$, from which:

$$v = \frac{nh}{2\pi mr} \quad (A2)$$

and here "n" is the principal quantum number.

(by the way, the equation $mv \cdot \lambda = h \rightarrow \Delta p \cdot \Delta x = h$ is here intended as a first sketch of the

Heisenberg Uncertainty Principle). Now, starting from (1): $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m}{r} \left(\frac{nh}{2\pi mr}\right)^2$ from which:

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2}, \quad (A3)$$

or $r = k \frac{n^2}{Z}$. Now, if we put the (A3) into the (A2), we get:

$$\boxed{v = \frac{Ze^2}{2nh\epsilon_0}} \quad (A4)$$

For the 1st orbital of the hydrogen (n=1 and Z=1), we have the Bohr's radius ($r = 0,529 \cdot 10^{-10} m = 0,529 A$).

Considering now $v=0$ at an infinite distance from the nucleus, it follows that the work necessary to bring the electron from r to infinite is:

$$V(r) = (-U) = \int_{R=r}^{R=\infty} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R=r}^{R=\infty} \frac{Ze^2}{R^2} dR = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \text{ As a total energy:}$$

$$E = E_k + U = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}, \text{ but according to the (A1) we have: } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}, \text{ from}$$

which:

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8n^2 \epsilon_0^2 h^2}. \quad (A5)$$

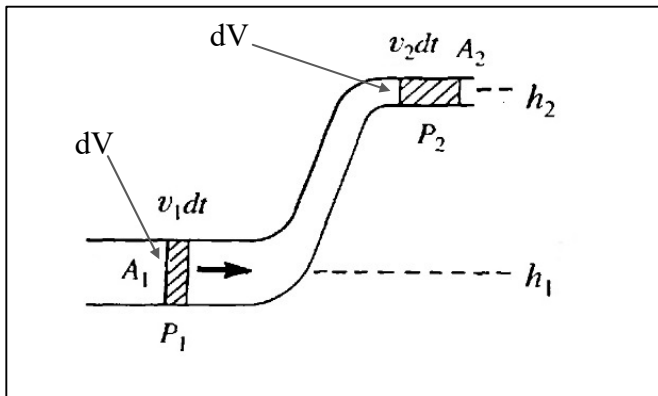
Hence, by jumping from b to a, we have:

$$E_b - E_a = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8n_b^2 \epsilon_0^2 h^2} + \frac{Z^2 e^4 m_e}{8n_a^2 \epsilon_0^2 h^2} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2}\right) = KZ^2 \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2}\right) = h\nu \quad (A6)$$

Now, as $\frac{1}{\lambda} = \frac{h\nu}{hc} = \frac{\Delta E}{hc}$, it follows: $\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8h^3 \epsilon_0^2 c} \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2}\right).$

NAVIER-STOKES INTO BERNOULLI

- PREAMBLE: BERNOULLI'S EQUATION



$$\rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{const}, \text{ which is the Bernoulli's Equation.}$$

Kinetic energy: $\frac{1}{2} (dm) v^2 = \frac{1}{2} (\rho dV) v^2$

Potential energy: $(dm)gh = (\rho dV)gh$

Energy related to the pressure:

$$F \cdot ds = (pS) \cdot ds = p(Sds) = p dV.$$

In order to have the energy conservation:

$$p_1 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 + \rho dV g h_1 =$$

$$= p_2 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 + \rho dV g h_2 = \text{const} \rightarrow$$

- The Navier-Stokes Equation:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \phi + \frac{\eta}{\rho} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

$\frac{\vec{F}}{M} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial} \dots$ General acceleration
 Pressure forces
 Gravity forces
 Viscous forces

Now, if we are in a stationary situation, where $\vec{v} \neq f(t) \gg \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, and with $\rho = \text{const}$, and also where there aren't any viscous forces, then the Navier-Stokes Equation reduces to the Euler's one:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{g} \quad (\text{in fact, the following vector identity holds, as it's possible to prove it directly: } (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2); \text{ rather, as we said that } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \text{ we have:}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{g}. \text{ If now we consider the divergence and the gradient in terms of directional derivatives, on direction } d\vec{l}, \text{ specifically, then we have } \frac{dv}{dl} \text{ instead of } \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \text{ and } \frac{dp}{dl} \text{ instead of } \vec{\nabla} p$$

$$\text{and then the gravitational acceleration } \vec{g} \text{ (which exerts along } z, \text{ downwards) must be projected along } d\vec{l} \text{ (} \frac{dz}{dl} \text{ is the relevant direction cosine), so: } v \frac{dv}{dl} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} - g \frac{dz}{dl}, \text{ from which:}$$

$$v dv + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0 \text{ and by integrating it: } \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + g z = 0, \text{ and by multiplying by the density } \rho,$$

$$\text{we get: } \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = 0, \text{ that is the Bernoulli's Equation.}$$

ZWICKY INTO THOMSON

There is a strange relationship between:

- the galaxies (including their clusters) (**ZWICKY**) and
- the electron (**THOMSON**).

THE PROBLEM OF THE DARK MATTER

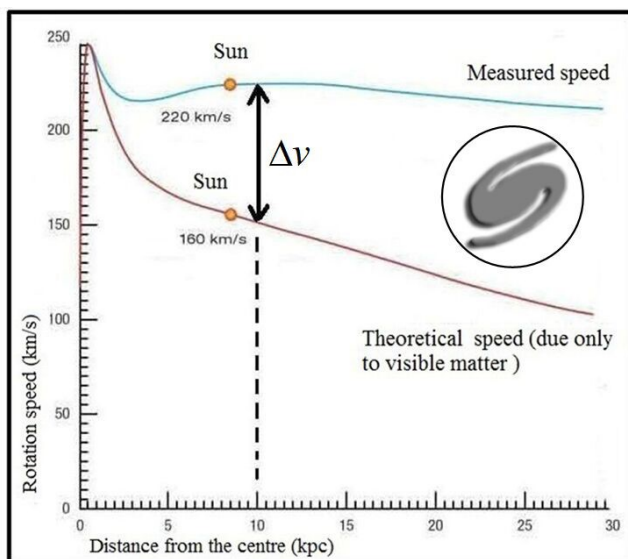
- The problem with the Milky Way
- The problem with the Virgo Galaxy Cluster
- The problem with the Coma Berenices Galaxy Cluster
- An alternative for the missing mass

The problem with the Milky Way: gas and stars orbit the centre of the galaxy and gas and stars that are farther away from the centre of the galaxy, with respect to the Sun, should orbit with a lower velocity, while, on the contrary, what happens is that the velocity does not decrease with the increase of the distance from the galactic centre. According to calculations, the baryonic mass inside the Sun's galactic orbit is, on the average, about 10^{11} stars ($M \approx M_{MW} = 10^{11} M_S$) like the Sun. On the contrary, the above mentioned anomalous behaviour and also that of the satellite star groups, very far (10^6 l.y.), orbiting around the Milky Way, make us think the total mass of the galaxy is at least 10 times the baryonic one from the directly identifiable matter, like a dark halo all around the visible galaxy. The spheroidal dwarf galaxy Leo I orbits the Milky Way at a distance $r = 230 \text{ kpc} \approx 7 \times 10^{21} \text{ m}$, with a velocity about: $v = 177 \text{ km/s} = 1,77 \times 10^5 \text{ m/s}$.

Moreover, we know from physics that:

$$M_{LeoI} \frac{v^2}{r} = \frac{GM_{MW}M_{LeoI}}{r^2} \rightarrow M_{MW} = \frac{rv^2}{G} = 3,34 \cdot 10^{42} \text{ kg} = 1,6 \cdot 10^{12} M_S$$
, that is something like twenty times the baryonic mass of the Milky Way.

Rotation Curve:



Rotation Curve of the Milky Way.

$M_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ is the mass of the Sun; $M_{BG} \cong 10^{11} M_S \cong 2 \cdot 10^{41} \text{ kg}$ is the baryonic mass of the Milky Way. In our galaxy (the Milky Way) the Sun is at a distance of 8,5kpc from the centre and should have a rotation velocity of 160 km/s, if it was due just to the baryonic matter, that is that coming from all the stars and all the visible matter. But we know that the velocity of the Sun is 220 km/s. So there is a discrepancy Δv of 60 km/s: ($\Delta v = 220 - 160 = 60 \text{ km/s}$).

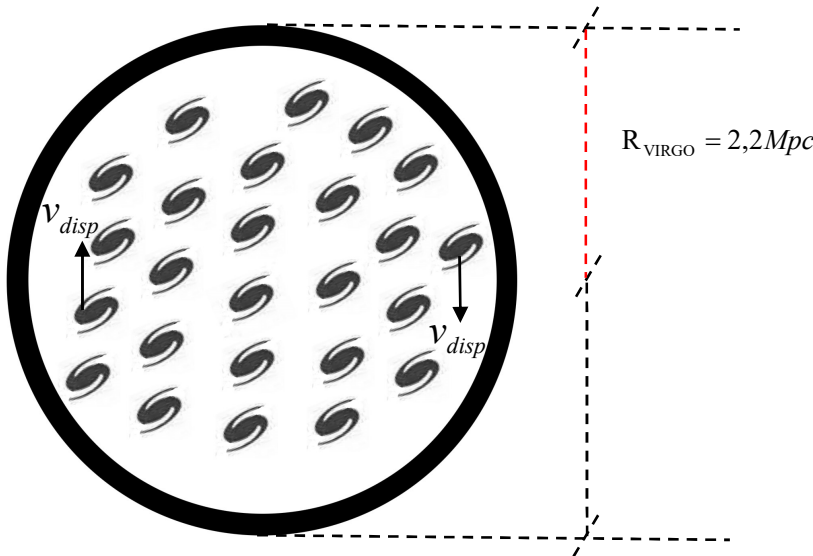
(1kpc=1000pc ; 1pc=1 Parsec=3,26 _l.y.= $3,08 \cdot 10^{16} \text{ m}$; 1 light year l.y.= $9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$)

($R_{Gal-Sun} = 8,5 \text{ kpc} = 27,71 \cdot 10^3 \text{ _l.y.} = 2,62 \cdot 10^{20} \text{ m}$ is the distance from the Sun of the centre of the Milky Way). If the Sun was at a distance R_{GAL} of 30 kpc, it would have had the same velocity of 220 km/s, but the discrepancy Δv would have been larger. In general, we know from the rotation curves that (see the above image):

$$\Delta v = k \sqrt{R_{Gal-Sun}}, \text{ where } k = \text{constant} ; \rightarrow k = \frac{\Delta v}{\sqrt{R_{Gal-Sun}}} = \frac{60 \cdot 10^3}{\sqrt{2,62 \cdot 10^{20}}} \cong 3,7 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s} \quad (1.1)$$

At last, we remind you that the mass to luminosity ratio detected for the Milky Way, with respect to the same ratio calculated for the Sun, is: $\frac{M_{MW}}{L_{MW}} \approx 100 \frac{M_{Sun}}{L_{Sun}}$; all that would mean that most of the mass of the galaxy is not visible.

The problem with the Virgo Galaxy Cluster



The Virgo Cluster of galaxies.

$1 \text{ pc} \cong 3,26 \text{ l.y.} \cong 3,08 \cdot 10^{16} \text{ m}$ is the parsec, $v_{disp} \cong 1530 \text{ km/s} = 1,53 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ (is the velocity in the cluster).

$R_{VIRGO} = 2,2 \text{ Mpc} \cong 2,2 \cdot 10^6 \cdot 3,08 \cdot 10^{16} \text{ m} = 6,776 \cdot 10^{22} \text{ m}$ (is the radius of the cluster).

$N_{GAL} \cong 1350$ (N of galaxies in the cluster); by considering, as well as done for the Milky Way, 10^{11} stars like the Sun per galaxy, we have:

$M_{VIRGO-baryonic} \cong 1350 \cdot 10^{11} M_S = 1350 \cdot 10^{11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} = 2,68 \cdot 10^{44} \text{ kg}$ and being the speed of galaxies linked to mass and radius of the cluster, we have:

$$M_{Gal} \frac{v_{disp}^2}{R_{VIRGO}} = \frac{GM_{VIRGO} M_{Gal}}{R_{VIRGO}^2} \rightarrow v_{disp} = \sqrt{\frac{GM_{VIRGO}}{R_{VIRGO}}} \text{ and}$$

$$\rightarrow M_{VIRGO} = \frac{v_{disp}^2 R_{VIRGO}}{G} = \frac{1,53^2 \cdot 10^{12} \cdot 6,776 \cdot 10^{22}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 2,38 \cdot 10^{45} \text{ kg} = 1,19 \cdot 10^{15} M_S > M_{VIRGO\text{-baryonic}}. \text{ So, in}$$

order to justify the observed v_{disp} , we need a mass which is larger than the baryonic one we observe, from which we have a dark mass or any other invisible force to explain a so high velocity of 1530 km/s. If the mass of the cluster was just the baryonic one from the galaxies, then we would have a velocity v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{GM_{VIRGO\text{-baryonic}}}{R_{VIRGO}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,68 \cdot 10^{44}}{6,776 \cdot 10^{22}}} = 0,514 \cdot 10^6 \text{ m/s}; \text{ so we have a } \Delta v :$$

$\Delta v = v_{disp} - v_B = (1,53 - 0,514)10^6 = 1,016 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Now, let us evaluate the following constant k :

$$k = \frac{\Delta v}{\sqrt{R_{VIRGO}}} = \frac{1,016 \cdot 10^6}{\sqrt{6,776 \cdot 10^{22}}} \cong 3,91 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s}. \quad (1.2)$$

A confirmation for the huge rotation speed comes also from the evaluation of the thermal speed of the atoms of hydrogen among galaxies; in fact, the whole cluster is a powerful X-ray source and X-rays have been detected also from the intergalactic hydrogen. From the Wien's Law we know that such a gas is at a temperature around $3 \times 10^7 \text{ K}$: $T = 0,2897 \cdot 10^{-2} / \lambda_X = 3 \cdot 10^7 \text{ K}$ (Wien's Law); obviously, they have measured an X-wavelength $\lambda_X = 9,66 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Now, we know from the thermodynamics that about that ionized gas: $E_K = \frac{1}{2} m_H v^2 = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{3}{2} kT$, so:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_p}} = 0,862 \cdot 10^6 \text{ m/s}, \text{ that is approximately the } v_{disp} \text{ measured on the galaxies of the cluster.}$$

The problem with the Coma Berenices Galaxy Cluster:

$v_{disp} \cong 1000 \text{ km/s} = 10^6 \text{ m/s}$ (is the velocity in the cluster). Distance from us: $r = 99 \text{ Mpc} = 321 \text{ M l.y.} = 3,05 \times 10^{24} \text{ m}$. Redshift $z = 0,0231$, from which, for the recession velocity away from us, we have: $v_{Rec} = zc = 6,925 \times 10^6 \text{ m/s}$. The cluster appears to us under the angle θ of $100' = 0,029 \text{ rad}$, so:

$$R_{COMA} = \frac{1}{2} r \theta = 1,35 \text{ Mpc} \cong 4,16 \cdot 10^{22} \text{ m} \text{ (which is the radius of the cluster).}$$

$N_{GAL} \cong 800$ (N of galaxies in the cluster); after considering, as well as we did for the Milky Way, 10^{11} stars like the Sun per galaxy, we have:

$M_{COMA\text{-baryonic}} \cong 800 \cdot 10^{11} M_S = 800 \cdot 10^{11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} = 1,6 \cdot 10^{44} \text{ kg}$ and being the velocity and the mass of galaxies linked to mass and radius of the cluster, we have:

$$M_{Gal} \frac{v_{disp}^2}{R_{COMA}} = \frac{GM_{COMA} M_{Gal}}{R_{COMA}^2} \rightarrow v_{disp} = \sqrt{\frac{GM_{COMA}}{R_{COMA}}} \text{ and}$$

$$\rightarrow M_{COMA} = \frac{v_{disp}^2 R_{COMA}}{G} = \frac{10^{12} \cdot 4,16 \cdot 10^{22}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,24 \cdot 10^{44} \text{ kg} = 3,12 \cdot 10^{14} M_S > M_{COMA\text{-baryonic}}.$$

So, in order to justify the observed v_{disp} , we need a mass which is larger than the baryonic one we observe, from which we have a dark mass or any other invisible force to explain a so high velocity of 1000 km/s. If the mass of the cluster was just the baryonic one from the galaxies, then we would have a velocity v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{GM_{COMA\text{-baryonic}}}{R_{COMA}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,6 \cdot 10^{44}}{4,16 \cdot 10^{22}}} = 0,506 \cdot 10^6 \text{ m/s}; \text{ so we have a } \Delta v :$$

$$\Delta v = v_{disp} - v_B = (1 - 0,506)10^6 = 0,494 \cdot 10^6 m/s.$$

A confirmation for the huge rotation speed comes also from the evaluation of the thermal speed of the atoms of hydrogen among galaxies; in fact, the whole cluster is a powerful X-ray source and X-rays have been detected also from the intergalactic hydrogen. From the Wien's Law we know that such a gas is at a temperature around $4 \times 10^7 K$: $T = 0,2897 \cdot 10^{-2} / \lambda_x = 4 \cdot 10^7 K$ (Wien's Law); obviously, they have measured an X-wavelength of $\lambda_x = 7,2 \cdot 10^{-11} m$. Now, we know from the thermodynamics that about that ionized gas: $E_K = \frac{1}{2} m_H v^2 = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{3}{2} kT$, so:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_p}} = 0,966 \cdot 10^6 m/s, \text{ that is approximately the } v_{disp} \text{ measured on the galaxies of the cluster.}$$

A curiosity on the Coma Cluster: we know from physics that $x = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} (at)t = \frac{1}{2} vt$, so: $t = \frac{2x}{v}$ and if we use it into the definition of acceleration a , we get: $a = \frac{v}{t} = \frac{v}{\frac{2x}{v}} = \frac{v^2}{2x}$; now, let's consider

the parameter k : $k = \sqrt{2a} = \frac{v}{\sqrt{x}}$ and if $v = v_{Rec}$ and x is the distance r between the cluster and us,

$$\text{then: } k = \sqrt{2a} = \frac{v_{Rec}}{\sqrt{r}} = \frac{6,925 \cdot 10^6}{\sqrt{3,05 \cdot 10^{24}}} = 3,96 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s} \quad (1.3)$$

An alternative for the missing mass:

An alternative to the supposition on the existence of the dark matter could be that on the existence of a tidal dragging acceleration g_{EL} , caused by the motion of all the universe, which is, in the end, the same acceleration a_{UNIV} of the universe, indeed.

With reference to the equations (1.1), (1.2) and (1.3), we realize that, by chance:

$$k = \sqrt{2G \frac{m_e}{r_e^2}} = 3,91 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m}}{s}, \text{ where: } m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg \text{ is the mass of the electron and:}$$

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e \cdot c^2} \cong 2,8179 \cdot 10^{-15} m \text{ is the classical radius of the electron.}$$

In such a universe we have that the mass is more than that visible (as well as stated nowadays) and the density is the observed one:

$$\rho = M_{Univ} / \left(\frac{4}{3} \pi \cdot R_{Univ}^3 \right) = 2,32273 \cdot 10^{-30} kg / m^3$$

$$\begin{aligned} M_{Univ} &= 1,59486 \cdot 10^{55} kg \\ R_{Univ} &= 1,17908 \cdot 10^{28} m \\ T_{Univ} &= \frac{2\pi R_{Univ}}{c} = 2,47118 \cdot 10^{20} s \end{aligned}$$

The composition of all the small electric interactions in the universe builds up the universe itself; in fact, as chance would have it:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}} \quad (\text{UNIFICATION GRAVITATION - ELECTROMAGNETISM})$$

Moreover, still by chance:

$$m_e c^2 = G \frac{m_e M_{Univ}}{R_{Univ}} , \quad G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} = a_{Univ} = G \frac{m_e}{r_e^2} = g_{EL} = 7,62 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2 , \quad h = \frac{2m_e c^2}{T_{Univ}} \text{ (just numerically)}$$

$$R_{Univ} = \sqrt{N} r_e \quad (\text{being } N = M_{Univ} / m_e = 1,74 \cdot 10^{85}), \quad T_{Univ} \frac{G m_e^2}{h r_e} = \frac{1}{137} = \alpha$$

$$T_{CMBR} = \left(\frac{h}{2m_e \sigma} \frac{M_{Univ}}{4\pi R_{Univ}^2} \right)^{1/4} \cong 2,7 K \quad (\text{where } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4 \text{ is the Stefan-Boltzmann's Constant})$$

$$T_{CMBR} = \left(\frac{3c^3}{80\pi\sigma} \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^3} \right)^{1/4} = \left(\frac{72Gc^{11}h^3\varepsilon_0^4 m_e^6}{\pi^2 e^8 k^4} \right)^{1/4} = 2,72846(02218319896) K \cong 2,72846 K$$

-Then, being, according to Heisenberg: $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar / 2$ (with the equality sign, out of simplicity,

and $\hbar / 2 = h / 4\pi = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), we can say that:

$$\Delta p \cdot \Delta x = m_e c \cdot \Delta x = m_e c \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^2} G \frac{M_{Univ}}{R_{Univ}^2} \right] = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ (numerically)}.$$

Finally, we see that:
$$k = \sqrt{2G \frac{m_e}{r_e^2}} = \sqrt{\frac{2GM_{Univ}}{R_{Univ}^2}}.$$

EINSTEIN INTO FIZEAU

The Fizeau experiment.

In 1849, a long time before the formulation of the Special Theory of Relativity by Einstein (1905), the French physicist A.H.L. Fizeau carried out studies on the speed of light in water and in moving fluids.

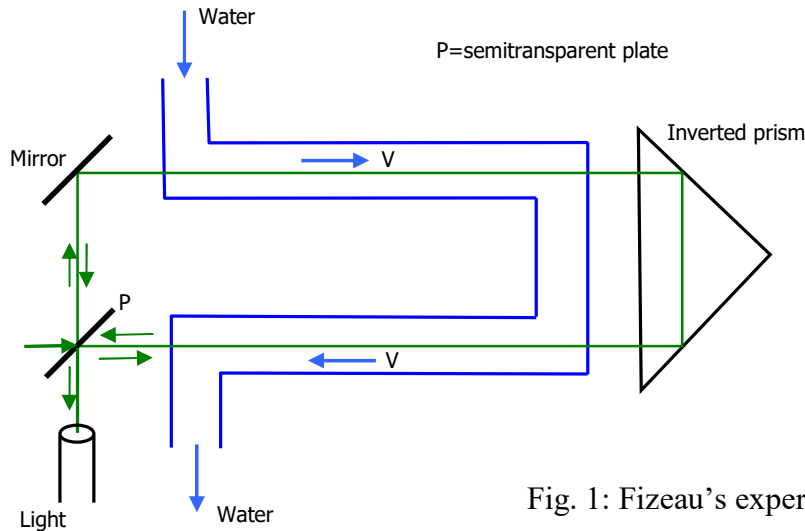


Fig. 1: Fizeau's experiment.

In water at rest, light has velocity $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,33} \cong 225.000 \text{ km/s}$, where $n=1,33$ is the refractive index of water. If now water, or the fluid, in which we are going to measure the speed of light, flows with speed V , then, according to Fizeau's results, the total velocity of light in the flowing fluid is:

$$v = \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (1)$$

in total disagreement with classic physics, according to which we should more simply have:

$v = \frac{c}{n} + V$. Years later, STR has given a theoretical explanation of (1). In fact, for the Theorem of

Addition of Velocities, we can write that:

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{Vc}{nc^2}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{V}{nc}\right)}; \text{ now, we multiply numerator and denominator by } \left(1 - \frac{V}{nc}\right), \text{ and we have:}$$

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{V}{nc}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{nc}\right)}{1 - \left(\frac{V}{nc}\right)^2} = \frac{\frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{V^2}{nc}}}{1 - \cancel{\left(\frac{V}{nc}\right)^2}}, \text{ but quantities } \frac{V^2}{nc} \text{ on the numerator and}$$

$\left(\frac{V}{nc}\right)^2$ on the denominator are both negligible ($\ll 1$) with respect to the other terms and can be

neglected, indeed, from which the assertion: $v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

SNELL INTO GALILEI

Galileo Galilei noticed that a body rolling down an arc of circle arrives at the bottom level before a body rolling down the relevant chord, even though the chord is much shorter than the arc. Despite that, the curve which assures the lowest rolling time is not exactly the arc of a circle, but rather the cycloid, which is much similar to the arc of circle, but not exactly matching it.

1-The Lifeguard

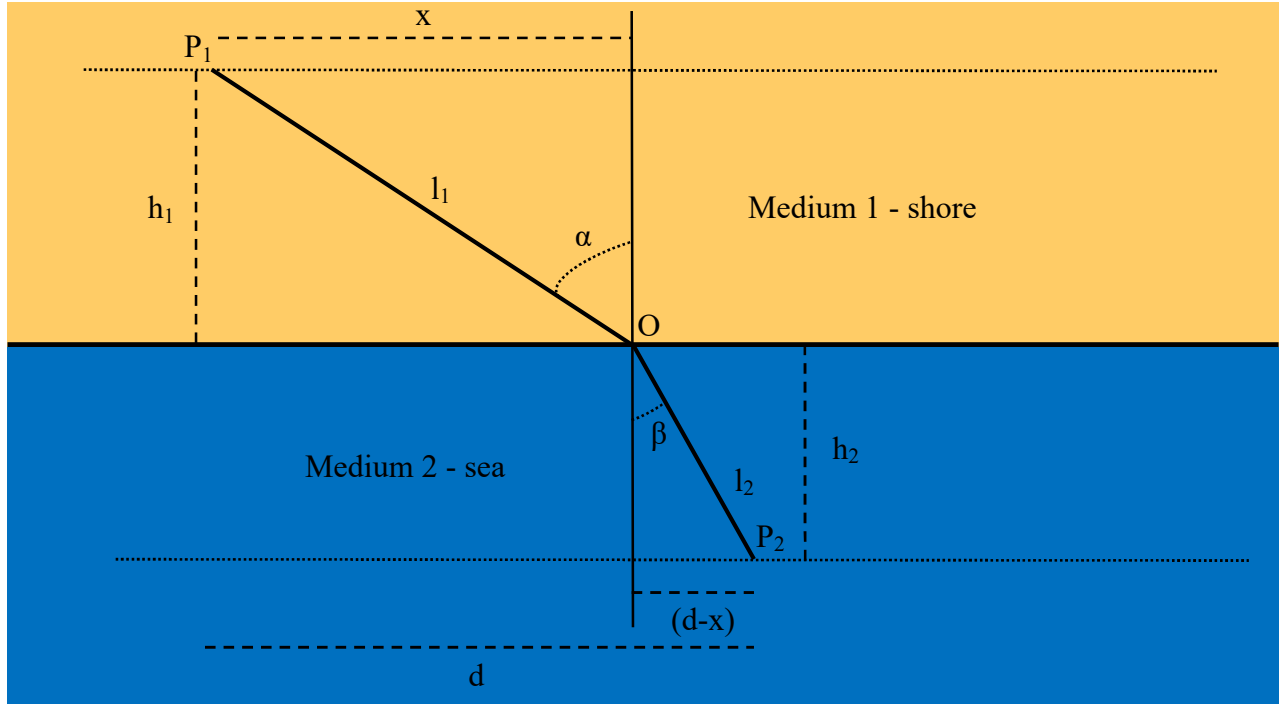


Fig. 1: The Lifeguard in P_1 sees the bather in trouble in P_2 .

The Lifeguard in P_1 has to reach and help the bather in P_2 ; but he also knows that the speed v_1 of running on the shore is higher than the swimming speed v_2 in the water, so the geometrically shortest path given by the segment P_1 - P_2 is not the fastest, as it forces the Lifeguard to stay too long in the water, where he is slower.

We evaluate the travelling time of the Lifeguard:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Now, in order to evaluate the minimum value t_B , we calculate the derivative and we put it to zero:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0, \text{ but we have:}$$

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{and} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta, \text{ so: } \frac{dt_B}{dx} = \frac{2 \sin \alpha}{v_1} - \frac{2 \sin \beta}{v_2} = 0, \text{ that is:}$$

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} = k, \tag{1.1}$$

therefore, in both media (medium 1 and medium 2), the ratio between the sine of the angle made with the vertical line and the speed is constant.

2-Snell's Law

If paths l_1 and l_2 were light rays and media 1 and 2 were, for instance, air and water, then, after considering that for the refraction indexes n_1 and n_2 we have, by definition: $n_1 = \frac{c}{v_1}$ and

$n_2 = \frac{c}{v_2}$, we get the Snell's Law: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 / c}{v_2 / c} = \frac{c / v_2}{c / v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, which is the reason why a ladder into a pool looks bent.

3-Fermat's Principle

As the Snell's Law has come out as a calculation of the minimum travelling time, then Fermat's Principle is here confirmed, according to which a light ray follows the shortest path (in duration).

4-Brachistochrone

Even a body which falls or slides under the effect of the gravitational pull, as well as a light ray in case of refraction (from air to water) or also a Lifeguard from shore to water, goes from points with a certain speed (lower, in this case) to points with another speed (higher, in this case). So, we can think that a body which slides downwards under the gravitational pull, will cross an infinite number of thin layers, each of them with a different speed.

With reference to Fig. 2, also here one is led to ask oneself which is the fastest path.

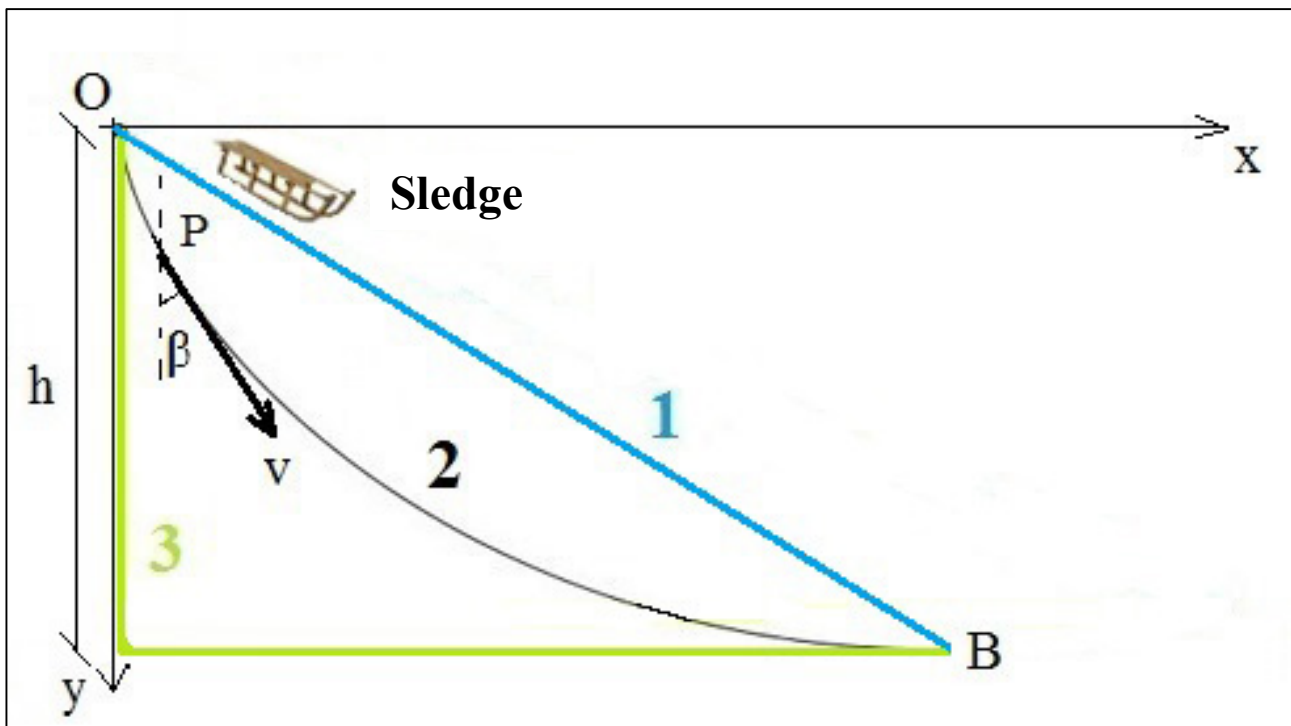


Fig. 2: Sledge sliding without friction along the inclined plane (1) or along the brachistochrone (2) or along the path (3) of vertical falling + sliding up to the final destination.

For sure the fastest is not the inclined plane (1); on the contrary, the fastest is the brachistochrone (2). Intuitively, it smartly starts very vertically, as chance would have it, at the top, where the speed is the lowest.

Let's consider the generic (for the time being) curve (2), with the sliding speed vector v in the generic point P, which makes an angle β with the vertical line.

Moreover, at the starting point O the speed is zero and so does the height, while at the arrival point B the speed will be a so known speed v and the height will be h and we know from physics that in case of no friction:

$$\frac{1}{2}mv_{fin}^2 = mgh, \text{ from which: } v_{fin} = \sqrt{2gh} \text{ and generically, at a height } y:$$

$$v = \sqrt{2gy} \quad (4.1)$$

In fact, we are in a conservative field and the potential energy changes just with the height (r) and not with the path followed to go from a height to another one:

$$(U = -G \frac{Mm}{r}).$$

As we said, every point P can be a border point between an imaginary layer and the next one, so, as well as in Fig. 1 and according to eq. (1.1), we can state that:

$$\frac{v}{\sin \beta} = k \rightarrow \frac{v^2}{\sin^2 \beta} = k^2 \text{ and for the (4.1): } \frac{2gy}{\sin^2 \beta} = k^2 \rightarrow y = \frac{k^2}{2g} \sin^2 \beta \text{ and so the maximum value for } y \text{ will be } h, \text{ where, as a matter of fact, } \sin^2 \beta \text{ is at its maximum, that is where } \sin \beta \text{ is at its maximum (=1), so: } y_{\max} = \frac{k^2}{2g} = h, \text{ and therefore:}$$

$$y = h \sin^2 \beta \quad (4.2)$$

Now, if we calculate the derivative of the (4.2) with respect to β :

$$\frac{dy}{d\beta} = 2h \sin \beta \cos \beta = h \sin 2\beta \quad (4.3)$$

(as, according to the trigonometry, $2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta$); moreover, from Fig. 2 it comes out that

$$\frac{dx}{dy} = \tan \beta \text{ and so we also have that: } \frac{dx}{d\beta} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{d\beta} = 2h \sin \beta \cos \beta \tan \beta =$$

$$= 2h \sin^2 \beta = h(1 - \cos 2\beta) \quad (4.4)$$

(as, still according to the trigonometry, $\sin^2 \beta = \frac{(1 - \cos 2\beta)}{2}$). So, by gathering the (4.3) and the (4.4), we get:

$$\frac{dx}{d\beta} = h(1 - \cos 2\beta)$$

$$\frac{dy}{d\beta} = h \sin 2\beta$$

(4.5)

and by integrating the (4.5), we get:

$$x = h(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta) + C_1$$

$$y = -\frac{h}{2} \cos 2\beta + C_2$$

(4.6)

Now, as in the origin O we have β , x and y that are zero, we can calculate the constants C_1 and C_2 (respectively equal to 0 and $h/2$) and both the (4.6) become:

$$\begin{aligned} x &= \frac{h}{2}(2\beta - \sin 2\beta) \\ y &= \frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta) \end{aligned} \quad \text{Brachistochrone} \quad (4.7)$$

and the latter is obviously the same as the (4.2) from which we started.

The (4.7) are the equations describing the Brachistochrone and they also describe the Cycloid (Fig. 3)

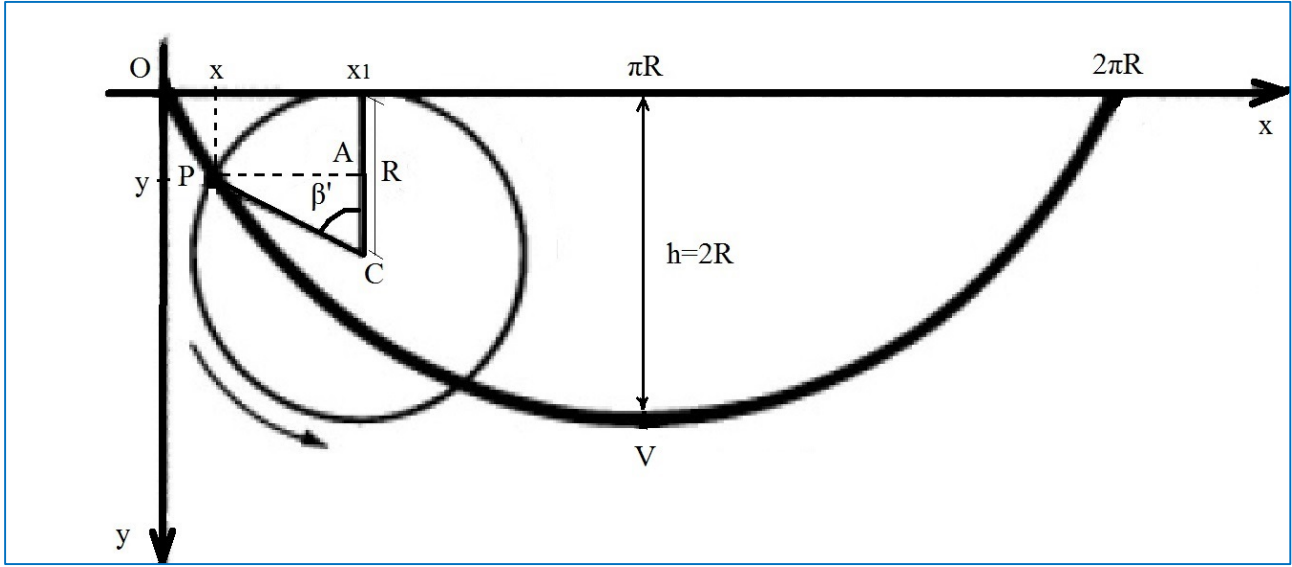


Fig. 3: The Cycloid. The circle, by rolling over the x axis, draws the Cycloid by the point P.

In fact, $x = \overline{Ox_1} - \overline{xx_1}$, but $\overline{Ox_1} = \text{arc}(x_1P) = R\beta'$; moreover, $\overline{xx_1} = PA = R\sin\beta'$, so:

$$x = \overline{Ox_1} - \overline{xx_1} = R\beta' - R\sin\beta' = R(\beta' - \sin\beta') = x \quad (4.8)$$

On the contrary, about y , we simply have:

$$y = \overline{x_1C} - \overline{AC} = R - R\cos\beta' = R(1 - \cos\beta') \quad (4.9)$$

and so the (4.8) and (4.9), gathered together, yield the (4.10):

$$\begin{aligned} x &= R(\beta' - \sin \beta') \\ y &= R(1 - \cos \beta') \end{aligned} \quad \text{Cycloid} \quad (4.10)$$

and they are exactly the (4.7) with $h/2=R$ and $2\beta=\beta'$.

-The descent time to the bottom (from O to V, in Fig. 3):

From the (4.5) we get:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = h(1 - \cos 2\beta)\dot{\beta}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = h(\sin 2\beta)\dot{\beta}$$

and, as a falling speed v , we obviously have:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = h^2 \dot{\beta}^2 (1 + \cos^2 2\beta - 2 \cos 2\beta + \sin^2 2\beta) = h^2 \dot{\beta}^2 (2 - 2 \cos 2\beta) = 2h^2 \dot{\beta}^2 (1 - \cos 2\beta) = 4h^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta, \text{ from which: } \dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{4h^2 \sin^2 \beta} \text{ and according to the (4.2), we have:}$$

$$\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{4h^2 (y/h)} = \frac{v^2}{4hy} \text{ and as } v = \sqrt{2gy}, \text{ it follows that: } \dot{\beta}^2 = \frac{g}{2h}, \text{ so: } \dot{\beta} = \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{d\beta}{dt} \text{ and:}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot t \quad (4.11)$$

By inserting the (4.11) into all the (4.7):

$$x = \frac{h}{2} \left(\sqrt{\frac{2g}{h}} t - \sin \sqrt{\frac{2g}{h}} t \right)$$

$$y = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{2g}{h}} t \right)$$

Now, with reference to Fig. 2, at the bottom point B (which also is point V in Fig. 3) we have a $\beta = \pi/2$ and by naming as T_B the time of Brachistochrone needed for the arrival at that point, then, according to the (4.11) we have:

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{g}{2h}} T_B, \text{ from which:}$$

$$T_B = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}} \quad (4.12)$$

If we carry out a comparison with an inclined plane which goes from O to V (rif. Fig. 3), it would have a length $l = \sqrt{h^2 + \frac{\pi^2 h^2}{4}} = \frac{h}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$ and after naming as φ the angle of inclination of the inclined plane itself, we have: $\sin \varphi = \frac{h}{\frac{h}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$ and the acceleration “a” by which we

have the downwards sliding through the inclined plane is: $a = g \sin \varphi = \frac{2g}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$ and as

$l = \frac{1}{2} a T_{i.p.}^2 = \frac{g}{\sqrt{\pi^2 + 4}} T_{i.p.}^2$ (where $T_{i.p.}$ as the sliding time along the inclined plane), then:

$$T_{i.p.} = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{h(\pi^2 + 4)}{2g}} > T_B = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

- Tautochrone Brachistochrone curve:

With reference to Fig. 3, if a sledge starts sliding downwards (to V), no more starting necessarily from the origin O, but rather from a generic point $P_0(x_0, y_0)$ lower than O (and still starting from a still situation), then the time taken to reach V is still the same. It looks somewhat weird that if it starts from a point which is closer to the final destination, then the time taken is still the same, but starting from a farther point (still talking about a Brachistochrone) gives it a longer run and, in the end, it arrives in (V) still in the same time. Proof:

if the start is at height y_0 not necessarily equal to zero, then the speed reached in y will be:

$v = \frac{dl}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}$, with $(y - y_0)$ as the travelled gap and $dl (= \sqrt{(dx^2 + dy^2)})$ which is equal to the infinitesimal length of curve travelled in the time dt . We have:

$$dt = \frac{dl}{v} = \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2)}{2g(y - y_0)}} \quad (4.13)$$

Now, let's recall all the (4.5) in the following form:

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= h(1 - \cos 2\beta)d\beta \\ dy &= h \sin 2\beta d\beta \end{aligned}} \quad (4.14)$$

Now, by inserting the (4.14) and the latter of the (4.7) into the (4.13):

$$dt = \sqrt{\frac{[h(1 - \cos 2\beta)d\beta]^2 + [h \sin 2\beta d\beta]^2}{2g[\frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta) - \frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta_0)]}} = \sqrt{\frac{h(1 - \cos 2\beta)^2 + h \sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta)}} d\beta \quad \text{and so, as in V the}$$

angle β is $\pi/2$:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{h(1 - \cos 2\beta)^2 + h \sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta)}} d\beta = \sqrt{\frac{h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta + \sin^2 2\beta}{\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta}} d\beta = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta}} d\beta = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{2\sin^2 \beta}{2\cos^2 \beta_0 - 1 - 2\cos^2 \beta + 1}} d\beta = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta_0 - \cos^2 \beta}} d\beta = T \end{aligned} \quad (4.15)$$

(as, for the trigonometry, $\sin^2 \beta = \frac{(1 - \cos 2\beta)}{2}$ and $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1$)

Now, in the (4.15) we carry out the following change of variable:

$u = \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0}$, from which: $du = -\frac{\sin \beta}{\cos \beta_0} d\beta$, and so the (4.15) becomes (for $\beta = \beta_0 \rightarrow u=1$ and for $\beta = \pi/2 \rightarrow u=0$):

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_1^0 \frac{-\sin \beta}{\cos \beta_0 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta_0}}} \frac{\cos \beta_0}{\sin \beta} du = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left| \arcsin u \right|_0^1 = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}, \text{ that is:}$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}} \quad (T \text{ does not depend on } \beta_0, \text{ that is it doesn't depend on the starting point !!!!)$$

DOPPLER INTO EINSTEIN

Relativistic Doppler Effect (longitudinal).

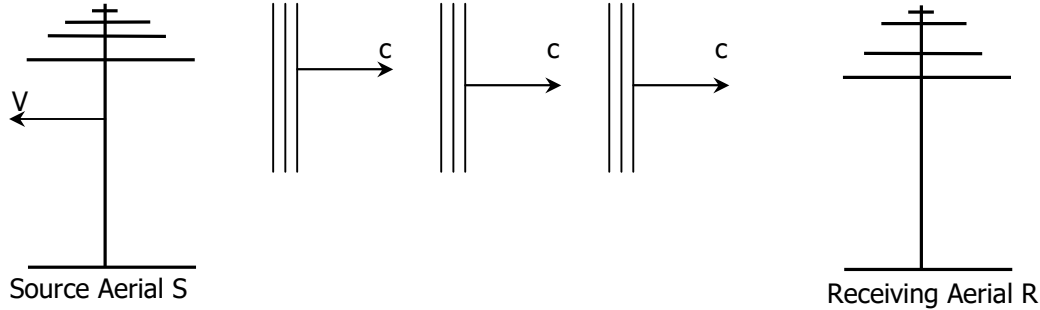


Fig. 1: Longitudinal Doppler Effect (example of a source S getting farther from R with speed V (β)).

The source aerial sends electromagnetic signals to the receiving one, and the periods is T_S ; because of the time dilation, the receiving aerial will receive them with a period T'_S , so that:

$$T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ moreover, the fact that S is getting farther will cause a } \Delta T'_S \text{ among phase fronts,}$$

$$\text{which is: } \Delta T'_S = \frac{VT'_S}{c} = \frac{V}{c} \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ so, we'll totally have } T_R:$$

$$T_R = T'_S + \Delta T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} + \beta \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 + \beta) = \frac{T_S}{\sqrt{(1-\beta)\sqrt{1+\beta}}} (1 + \beta) =$$

$$= \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta}} \sqrt{1+\beta} = T_S \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} = T_R$$

$$\text{and we rewrite it here: } T_R = T_S \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}; \text{ (S and R getting farther)} \quad (1)$$

The same holds if the receiver is the one who gets farther. If, then, S and R are getting closer, through the same reasonings which led us so far, the following holds:

$$T_R = T_S \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \text{ (S and R getting closer).} \quad (2)$$

The Twin Paradox explained by the Relativistic Doppler Effect!

Say a twin leaves for a space flight with a velocity equal to $3/5 c = 180.000 \text{ km/s}$, getting far away from the Earth for 25 min (measured on the Earth) and then he comes back towards the Earth with the same velocity, so taking another 25 min. Out of simplicity, we neglect the acceleration and deceleration phases.

Now, in order to prove that the time dilation acts also on the cardiac (heart) rhythm of the travelling twin (but still in the opinion of the twin at rest on the Earth, and when the twins meet on the Earth, at the end of the flight), say, out of simplicity, both twins have one heartbeat per second and say the twin on the Earth transmits a radio pulse (whose speed is c) every second, i.e. every heartbeat, towards the space ship, in order to inform his travelling twin brother on his own cardiac rhythm. Now, remember that in the opinion of the “older” twin at rest on the Earth, the flight lasts, by supposition, $25+25=50 \text{ min}$ (3000 heartbeats), while, if the time dilation is true, for the “younger” travelling twin it lasts ($V=3/5 c$, that is: $\beta=3/5$):

$$T_{young} = T_{old} \sqrt{(1 - \beta^2)} = T_{old} \sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})} = 50 \text{ min} \sqrt{(1 - \frac{9c^2}{25c^2})} = 40 \text{ min} (=2400 \text{ heartbeats})$$

Moreover, under a Doppler analysis of the phenomenon, we can say that for equation (1), the twin on the Earth (old) transmits his heartbeats every second, but the flying twin will receive them, during the first “to” step of the flight, every two seconds; in fact:

$$T_{young}(to) = T_{old}(to) \frac{\sqrt{(1 + \beta)}}{\sqrt{(1 - \beta)}} = 1s \frac{\sqrt{1 + (3/5)}}{\sqrt{1 - (3/5)}} = 2s, \text{ so, in the “to” step, the flying twin, whose “to”}$$

flight time is 20 min=1200s=1200 heartbeats, has received one heartbeat every 2s from his brother on the Earth, that is just 600 heartbeats.

Therefore, the flying twin, during his 20 min(=1200s) “to” flight, has counted on himself 1200 heartbeats, but has received only 600 from his brother on the Earth.

After 20 min of the flying twin, the direction of the flight is inverted and the return to the Earth starts, for another 20 min (still according to the time measured by the flying twin). During those further 20 min’s return flight (“from”), on the contrary, the twin on the Earth still transmits every second, but the flying one now receives every half a second; in fact, for equation (2):

$$T_{young}(from) = T_{old}(from) \frac{\sqrt{(1 - \beta)}}{\sqrt{(1 + \beta)}} = 1s \frac{\sqrt{1 - (3/5)}}{\sqrt{1 + (3/5)}} = 0,5s, \text{ so, during those further flyer’s 20}$$

min=1200s=1200 heartbeats counted on himself, the flyer receives 2400 heartbeats from his brother on the Earth.

Therefore, the flying twin, during his further 20 min(=1200s) return flight, has obviously counted on himself another 1200 heartbeats and has received 2400 (!) from his brother from the Earth.

Sum up of the counts:

Totally, during the whole space flight, of 20+20=40 min, the flying twin has obviously counted 1200+1200=2400 heartbeats on himself and (a piece of!) 600+2400=3000 heartbeats from his twin brother on the Earth. He must feel younger!!!

KEPLER INTO NEWTON

The orbits of planets are ellipses.

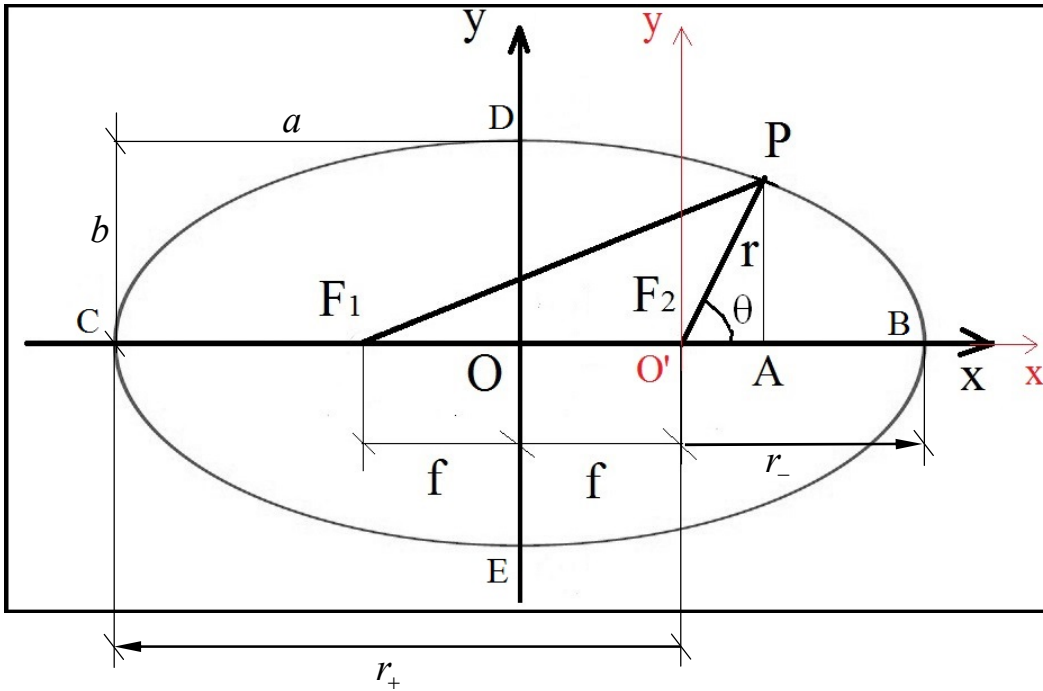


Fig. 1: Ellipse on a Cartesian plane Oxy and on a polar plane $O'xy$, where O' ($=F_2$) is, out of simplicity, no more in the centre, but in one of the foci, where the Sun stays.

$OB=OC$ is the semimajor axis and we call it “a”.

$OD=OE$ is the semiminor axis and we call it “b”.

On a Cartesian basis, we define the ellipse as the place where the following identity is respected:

$F_1P + F_2P = k = \text{const}$, that is the sum of the distances from the generic point P (of the ellipse) from the two foci is constant. As, when P arrives in B (as an example) we have:

$F_1P = a + OF_1 = a + f$ and $F_2P = a - OF_2 = a - OF_1 = a - f$ (because of the symmetry of both foci with respect to the origin O) and so: $k = F_1P + F_2P = a + f + a - f = 2a$, that is:

$$F_1P + F_2P = 2a \quad (1)$$

If now we consider the point $P(x,y)$ in Fig. 1, the (1) can be read like this:

$$F_1P + F_2P = 2a = \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \quad \text{from which:}$$

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2} ; \text{ now, after squaring both sides, we get:}$$

$$(x^2 + f^2 - 2fx + y^2) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + (x^2 + f^2 + 2fx + y^2), \text{ from which:}$$

$$-2fx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + 2fx, \text{ so: } a^2 + fx = a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}. \text{ After squaring again both sides and also after bringing all terms to the left side, we get:}$$

$$(a^2 - f^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - f^2) = 0 \quad (2)$$

Of course, even visually we realize that: $a \geq f \rightarrow (a^2 - f^2) \geq 0$ and after temporary naming:

$$\sqrt{a^2 - f^2} = w, \text{ the (2) becomes: } w^2x^2 + a^2y^2 - a^2w^2 = 0, \text{ that is:}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{w^2} = 1 \quad (3)$$

Now, when $x=0$, from the (3) we have that $y=w$, but $x=0$ means we are, as an example, in point D, so $y=OD=w$, but OD was already named “b”, that is the semiminor axis, from which, according to the (3), we have:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

which is the Cartesian equation for an ellipse.

Now, let's define the eccentricity “e” as:

$$e=f/a \quad (5)$$

As f and a are positive and f is never greater than a, then $0 \leq e \leq 1$. When $e=0$, we have $f=0$ and so, as before we said that:

$$\sqrt{a^2 - f^2} (= w) = b, \quad (6)$$

then $a=b$ and the (4) becomes: $x^2 + y^2 = a^2$, that is a circle. Therefore, a circle is an ellipse with a zero eccentricity.

If $e=1$, then it's about a degenerate case, as according to the definition itself of the eccentricity, $f=a$ and so the (1) tells us that $F_1P + F_2P=2f$, but this is possible only if the geometric curve we are dealing with is the line from F_1 to F_2 ; would we be in a case of collision course?

According to the (5) and the (6) we have:

$$b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1 - e^2} \quad (7)$$

Moreover: $r_{\pm} = (1 \pm e)a$, as by looking at Fig. 1, we have: $r_+ = a + f = a + ea = (1 + e)a$ and

$r_- = a - f = a - ea = (1 - e)a$ and after defining L as the straight semiside ($\frac{1}{L} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})$), we

get, after introducing in the last equation the formulas just provided for r_+ and r_- : $L = (1 - e^2)a$.

In polar coordinates, with reference to Fig. 1, we consider the origin in one of the focuses (F_2); so, according to the Pythagorean Theorem, we have:

$$(F_1P)^2 = (PA)^2 + (F_1F_2 + F_2A)^2 = (2f + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \quad (8)$$

but the (1) says that $F_1P + F_2P=2a$, (and $F_2P=r$), so the (8) becomes:

$\sqrt{(2f + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} + r = 2a$, from which: $\sqrt{4f^2 + 4rf \cos \theta + r^2} = 2a - r$, and so, after squaring and simplifying: $r(a + f \cos \theta) = a^2 - f^2$ which, according to the (5) and the (6), yields:

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \theta)} \quad (9)$$

which is the equation of an ellipse in polar coordinates. From the (9) we have: $r(a + ea \cos \theta) = b^2$, and because of the (5):

$r(a + f \cos \theta) = b^2$, and also, because of the (6), according to which: $\sqrt{a^2 - b^2} = f$, we finally have:

$$r(a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta) = b^2 \quad (10)$$

-Gravitation:

Starting from the definition of work carried out to move from A to B along a generic path s:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}; \quad (11)$$

we have that:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot d\vec{v} = \int_A^B m\vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A, \quad (12)$$

($E_k = \frac{1}{2}mv^2$), but we also have that, in a gravitational field, so conservative, L_{AB} depends just on A and B and not on the path followed to go from A to B; in fact, we have that, according to **Newton**:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (13)$$

and so:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = +GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = V_B - V_A = U_A - U_B \quad (14)$$

($U(r) = -G \frac{Mm}{r}$) So, by joining the (12) and the (14), we get: $K_B - K_A = U_A - U_B$, from which, for the total energy E_T : $E_T = K_B + U_B = K_A + U_A = K + U = \text{const}$.

$$\text{Then, we can write that: } E_T = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} \quad (15)$$

Besides, by equaling the gravitational pull with the centrifugal one, in case of a simple circular orbit (ellipse with a zero eccentricity), we have: $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$, from which: $\frac{1}{2}mv^2 = G \frac{Mm}{2r}$ and the (15)

$$\text{becomes: } E_T = K + U = G \frac{Mm}{2r} - G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{2r} < 0, \text{ that is, } E_T \text{ is negative: } E_T = -|E_T| \quad (16)$$

Now, in polar coordinates, v has components along r and θ : $v_r = \frac{dr}{dt}$ and $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r$, where,

$$\text{then: } v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}; \quad (17)$$

in fact, for the angular momentum L we have (with α as a generic angle between $\vec{r}$ and $\vec{v}$, rif. Fig.

$$2): \quad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mrv \sin \alpha \hat{L} = mr(v \sin \alpha) \hat{L} = mrv_\theta \hat{L} = mrr \frac{d\theta}{dt} \hat{L} = m\omega r^2 \hat{L} \quad (18)$$

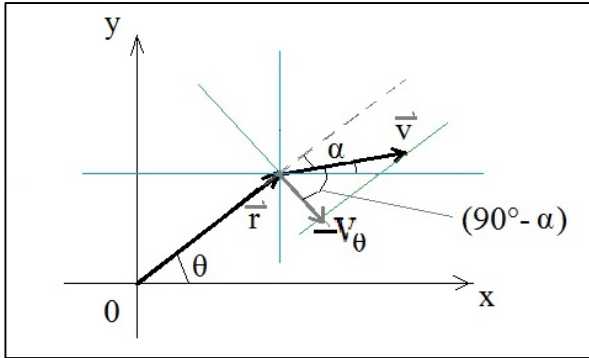


Fig. 2: $|v_\theta| = |v| \cos(90^\circ - \alpha) = |v| \sin \alpha = \left| \frac{rd\theta}{dt} \right|$

We also notice that L is conserved, as the moment m is zero, as in a central field, F and r are parallel:

$$\vec{m} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = 0, \text{ so:}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow L = \text{const.} \quad (18b)$$

By inserting the (17) into the (15), we get:

$$E_T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{\text{eff}}, \quad (19)$$

where we name $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$. (19b)

Moreover, according to the (18), we have:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} , \quad (20)$$

while, according to the (19) we have:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left\{ 2 \frac{[E_T - V_{eff}(r)]}{m} \right\}^{1/2} \quad (21)$$

Now, after dividing side to side the (21) and the (20), we get:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{mr^2}{L} \left\{ \frac{2}{m} [E_T - V_{eff}(r)] \right\}^{1/2} \quad (22)$$

From the (22) we have:

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{L}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2E_T}{m} - \frac{2V_{eff}(r)}{m} \right]}} = \frac{L}{mr^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{2E_T}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)}} , \text{ that is:}$$

$$d\theta = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm \frac{L}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2E_T}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)}} \quad \text{and according to the (16) } (E_T = -|E_T|):$$

$$d\theta = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm \frac{L}{m}}{\sqrt{\left(\frac{-2|E_T|}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)}} = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm \sqrt{\frac{L^2}{2m|E_T|}}}{\sqrt{\left(-1 + \frac{GMm}{|E_T|r} - \frac{L^2}{2m|E_T|r^2} \right)}} \quad (23)$$

Now, we name: $b = \sqrt{\frac{L^2}{2m|E_T|}}$ and $a = \frac{GMm}{2|E_T|}$ and the (23) becomes: $d\theta = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm b}{\sqrt{\left(-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)}}$,

from which, by integration: $\theta = \arccos \frac{(b^2 - ar)}{r\sqrt{a^2 - b^2}}$, that is: $\cos \theta = \frac{(b^2 - ar)}{r\sqrt{a^2 - b^2}}$, and so:

$r(a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta) = b^2$, which is nothing but the (10), **an ellipse!!!**

Now, let's consider again the (9): $r = \frac{b^2}{a} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)}$ and we write it again in a more generic way,

so breaking the link to a and b:

$$r = \frac{k}{(1 + e \cos \theta)} \quad (24)$$

Well, we said that if $0 < e < 1$, we are dealing with an ellipse, while if $e=0$, then it would be about a circle; in case $e=1$, the (24) becomes:

$$r = \frac{k}{(1 + \cos \theta)} , \text{ that is: } r + r \cos \theta = k \quad (25)$$

Now, as when we jump from Cartesian coordinates to polar ones, we obviously have that:

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ and $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, then, inserting these ones into the (25), we have:

$\sqrt{x^2 + y^2} + x = k$, or: $\sqrt{x^2 + y^2} = k - x$; now, after squaring and simplifying, we get:

$y^2 = k^2 - 2kx$, or: $x = -\frac{y^2}{2k} + \frac{k}{2}$, which is nothing but a parabola.

If, on the contrary, $e > 1$, after plotting the graph of the (24), we get a hyperbola.

Therefore: line (collision), circle, ellipse, parabola and hyperbola are all possible orbits.

Now, from the (7) we have: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ (26)

and after using the definitions for a and b made for the (23):

$b = \sqrt{\frac{L^2}{2m|E_T|}}$, $a = \frac{GMm}{2|E_T|}$, ($E_T = -|E_T|$) , so: $b = \sqrt{\frac{-L^2}{2mE_T}}$, $a = \frac{-GMm}{2E_T}$, and according to

the (26): $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E_T}{G^2 M^2 m^3}}$ (27)

and for the (27) we have that “e” is never negative and it’s 1 ($e=1$) if $E_T=0$ (parabola), then $e > 1$

(hyperbola) if $E_T > 0$; moreover, it’s $e=0$ (circle) if $E_T = \frac{-G^2 M^2 m^3}{2L^2} = E_0$; finally, it’s $e < 1$ (ellipse,

$0 < e < 1$) if $(E_0) < E_T < 0$. Here is a summarizing table:

Eccentricity “e”	Energy E_T	Orbit
$0 < e < 1$	$(E_0) < E_T < 0$	ellipse
$e=0$	$E_T = E_0$	circle
$e=1$	$E_T = 0$	parabola
$e > 1$	$E_T > 0$	hyperbola

PROOF OF THE THREE **KEPLER**’S LAWS:

I-The orbit of a planet is an ellipse with the Sun at one of the two focuses.

The solution above obtained for the (23) is the proof.

II-A line segment joining a planet and the Sun sweeps out equal areas during equal intervals of time. The proof:

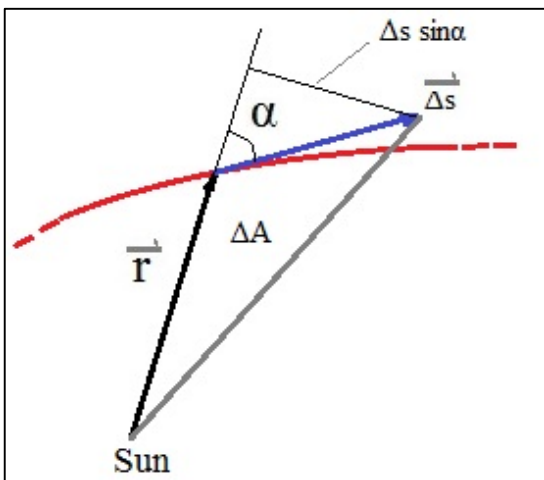


Fig. 3: On the areolar velocity.

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot \Delta s \sin \alpha = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta \vec{s}|$$

$$A' = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{L}}{m} \right| = \text{const}$$

as, according to the (18b), L is constant.

III-The square of a planet's orbital period T is proportional to the cube of the length of the semimajor axis a of its orbit.

The proof: by equaling the gravitational pull to the centrifugal one in the simple case of a circular orbit (ellipse with a zero eccentricity), we have: $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = m \frac{(\omega r)^2}{r} = m \omega^2 r$, from which: $GM = \omega^2 r^3$, so, as we also know that $\omega = \frac{2\pi}{T}$: $GM = (\frac{2\pi}{T})^2 r^3$ and finally: $\frac{GM}{(2\pi)^2} = \frac{r^3}{T^2} = \text{const}$.

EINSTEIN INTO NEWTON

When I push from the back a car, by my hands, a mechanical contact between my hands and the trunk of the car is just apparent, as between the matter of my hand and that of the trunk there is an electromagnetic field; one pushes the other by photons. Electrons do not push one another directly.

Let's start from the definition of energy:

$$dE = dL = Fds ,$$

but $ds = vdt$ and $F = ma = m \frac{dv}{dt}$, so:

$$dE = dL = Fds = m \frac{dv}{dt} vdt = mv dv \quad (1)$$

Even if this is not going to be our case, we know that in case the mass is constant, it can get out of the integral and then we have the well known expression for the classic kinetic energy:

$$(((\quad E = \int dE = \int mv dv = m \int v dv = \frac{1}{2} mv^2 \quad)))$$

Moreover, we know that from the definition of force above given, $dq = fdt = mdv$, but out of generalization, we can also write: $dq = fdt = mdv = d(mv)$, where $d(mv) = mdv$ and nothing more if the mass is constant and so if it can get out of the derivative. Therefore, we can write: $dq = d(mv) = mdv + vdm$ (now we no more exclude the variation of the mass) and $q = mv$. So, still out of generalization, from the less general (1), that is $dE = mv dv = mdv \cdot v$, we jump to the following:

$$dE = (mdv + dm \cdot v) \cdot v \quad (2)$$

The small photon is carrying a small energy dE : $dE = hf$, but we can believe it also have a small mass dm , somehow, due to its corpuscular properties and not only like a wave, and dm is a dynamic mass (and let's take into account the (2)):

$$dE = hf = (dm \cdot c + m \cdot dc)c = (dm \cdot c + 0)c = dm \cdot c^2 = dE .$$

The photon cannot be accelerated or decelerated, as it is, in the universe, like an insect that can be caught by a net (absorbed by matter), but in the net it can go on flying with its speed c (photon orbiting around an electron, as an example). In fact, a non moving body can absorb (incorporate) a photon and later it can emit it back with speed c . As the photon cannot be caught in an absolute sense, it keeps the speed it has since its birth, due to the universe, that is c . And, as a consequence, $dc=0$. As a further example, also a propagating wave, if it interferes with its reflection, can hide into a "standing" wave. But after that, if we mathematically subtract the reflected wave, the original wave is back what it was at the beginning and takes up propagating again as before.

Now, let's imagine a simple and naive situation of a photon whose mass is dm and it bumps against the above car, whose mass is M_0 , initially not moving. Let's evaluate the energy before and after the meeting.

Before (due to the (2)):

$$dE_{\text{photon}} + dE_{\text{car}} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = [(dm \cdot c + 0)c] + [0] = dm \cdot c^2 = dE_{\text{photon}}$$

as $dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$ (car still not moving, with a constant mass and speed).

After the meeting between the photon and the car, M_0 will become M , as it will catch dm inside and v_0 will be a certain v ; in other words, just a body will exist: the car with the photon on board:

$dE_{car+photon} = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Now, we notice that $dM = dm$, as the change of mass of the car is due to having taken on board the dm of the photon and then both energies, before and after, must be the same, for the conservation of the energy:

$dE_{photon} + dE_{car} = dE_{car+photon}$, that is:

$dm \cdot c^2 = dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Let's write it again:

$$dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v \quad (3)$$

Now, if we integrate this differential equation:

$$dM(c^2 - v^2) = Mvdv, \text{ that is: } \frac{dM}{M} = \frac{1}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} vdv.$$

Now, let's integrate indeed between M_0 and M and between 0 and v :

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = \int_0^v \frac{1}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} vdv \rightarrow \ln \frac{M}{M_0} = -\frac{1}{2} \ln(1 - \frac{v^2}{c^2}), \text{ that is:}$$

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4)$$

which is the well known relativistic equation for the dynamic mass!

((We had to write the conservation of the energy in a differential form, like in (3) and not like a sum of terms like $\frac{1}{2}mv^2$, like in the theory of collision, as expressions like $\frac{1}{2}mv^2$ presuppose the integral has been already carried out and that the mass m was constant, so getting out of the integral and giving energies like $\frac{1}{2}mv^2$, indeed.))

In terms of energy, from (4) we can write that:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} M_0 c^2 = \gamma \cdot M_0 c^2$$

and it holds in particle accelerators, where the operators give energy to the particles.

Now, you get the kinetic energy by removing the rest energy from the total one:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} M_0 c^2 - M_0 c^2 = M_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = M_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (5)$$

NEWTON INTO EINSTEIN

The metric

In relativity we learnt to carry out reasonings in terms of four dimensions; therefore, we do not treat just the length in three dimensions ($d\vec{x}$), but we rather consider the four dimension quantity ($d\tau$); the corresponding invariant (square length in four dimensions, coming somehow from an extension of the Pythagorean Theorem to four dimensions, indeed) is: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{V}^2 dt^2$. (1)

In a more compact way, we can say that: $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + d(ct)^2$;

in fact, as we are dealing (for the time being) with Euclidean spaces (not curved), we have indeed the Minkowski's tensor η_{ik} (it's 1 for $i=k=1,2,3$ and it's -1 for $i=k=4$; it's 0 when i is different from k), so without combined terms, that is, if i,k are not the same, then $\rightarrow \eta_{ik}=0$.

Now, when passing to curvilinear systems ($d\xi^i \gg \gg dx^i$), we have:

$$d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -\eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \text{ with} \quad (2)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\nu} \quad (\text{metric tensor } g_{ik}) \quad (3)$$

which is the link equation from one system to another.

So we keep for the indexes the letters of the common alphabete (i,j,k etc) in case of Euclidean spaces (η_{ik}) and those of the Greek alphabete (μ, ν etc) for curvilinear spaces $g_{\mu\nu}$, with strong gravity.

The equation of the geodesic

A free falling parachutist does not have any floor over which his body can rest; therefore, he does not detect any gravitational acceleration and he feels as if floating in the vacuum. He realizes he is falling only if he looks at the moving objects around. Therefore, for a free falling particle, there is a reference system in which $\vec{a} = 0$, that is:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{free falling in Euclidean coordinates}) \quad (4)$$

with $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$. But we can see the (4) in the following way:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}.$$

If now we multiply both sides by $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ and consider that: $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda$, we'll have:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{free falling in curvilinear coordinates}) \quad (5)$$

(equation of the geodesic, where geodesic, on the Earth, is the shortest path between two places) with $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$.

The relation between $g_{\mu\nu}$ and $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

We already know that: $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$; now we apply $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ to it:

$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$; if we now remember that $\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}$, we have:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \quad (6)$$

Similarly, we also calculate $\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}$ and $\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}$, from which:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{k\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^k; \text{ now, by defining a reciprocal matrix (or tensor) } g^{\nu\sigma} \text{ so that:}$$

$g^{\nu\sigma} g_{k\nu} = \delta_k^\sigma$, we'll have, therefore:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (7)$$

The Newtonian limit.

By starting back from the (1), we know that in the Newtonian limit ($V \ll c$):

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{V}^2 dt^2 \cong c^2 dt^2$$

This is to say that $V^i = dx^i / dt \ll dx^0 / d\tau \ll dx^0 / dt = d(ct) / dt = c$, that is, indeed: $dx^i / d\tau \ll dx^0 / d\tau$.

So, the (5) becomes: $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$ (here and for the time being, and with the useful convention $c=1$); moreover, as, in this limit, the field is stationary, $g_{\mu\nu}$ tends to $\eta_{\mu\nu}$ (const) and so the time derivatives of $g_{\mu\nu}$ are zero, and so, according to the (7):

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \text{ e } g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \text{ with } |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \text{ and so: } \Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \text{ and:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} = 0 \text{ from which:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} = 0 \text{ and} \quad (8)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \text{ from which: } \frac{dt}{d\tau} = C.$$

Now, we know from **Newton's** gravitation that: $m\vec{a} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$, from which: $\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$,

but: $\frac{GM}{r^2} \hat{r} = \nabla \left(-\frac{GM}{r} \right) = \nabla \phi$ (con $\phi = -\frac{GM}{r}$) and so: $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi$ and from both this one

and (2.41), we have: $h_{00} = -2\phi + \text{const}$; as at infinite: $h_{00} = \phi = 0$, then $\text{const}=0$ and:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi = -(1 + 2\phi) \quad (9)$$

The Poisson's equation:

Now, we define, with simplicity, the flux of the acceleration vector $\vec{a}$: $\Phi(\vec{a})$; we have:

$$d\Phi(\vec{a}) = \vec{a} \cdot d\vec{S} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{u} dS = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta dS = -GM \frac{dS_n}{r^2} = -GM d\Omega, \text{ from which:}$$

$$\Phi(\vec{a}) = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = -GM \int d\Omega = -4\pi GM, \text{ but: } M = \int_V \rho(x, y, z) dV, \text{ from which:}$$

$$\Phi(\vec{a}) = -4\pi G \int_V \rho(x, y, z) dV = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \text{for Theorem of Div.} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV, \text{ that is:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = -4\pi G \rho(x, y, z). \text{ Now, as we know from mathematics that } \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}, \text{ then: } \nabla \phi = -\vec{a}$$

$$\text{and so: } \Delta \phi = \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{Poisson's Equation}) \quad (10)$$

The ten Einstein's Equations of the Gravitational Field.

They are 16 equations, actually, as they contain rank 2 tensors, that is, with two indexes each, and everyone of them can have 4 values, and so $4 \times 4 = 16$, but such equations are not all linearly independent among them, that is, there are doubles, and the independent ones are ten, indeed.

We know from the (9) that $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ (contact point between the **Einstein's** theory and the **Newton's** one, and starting base), while we know that (*), for non relativistic matter: $T_{00} = \rho c^2 = \rho$ (with normalization $c=1$); we also have that:

$$\Delta g_{00} = \nabla^2 g_{00} = \nabla^2 [-(1 + 2\phi)] = -2\nabla^2 \phi = -8\pi G \rho = -8\pi G T_{00}, \text{ that is:}$$

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}; \text{ so we can suppose, out of extension, that the following equality holds:}$$

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta} \text{ and for gravitational fields of any intensity:}$$

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \text{ (with } T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_\mu U_\nu \text{ ; (*))}$$

Let's deduce, now, five peculiarities $G_{\mu\nu}$ must have:

A) by definition, $G_{\mu\nu}$ is a tensor, as the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ is

B) $G_{\mu\nu}$ is consisting of terms with second derivatives of the metric tensor (just look at $\nabla^2 g_{00}$)

C) $G_{\mu\nu}$ is symmetric, as well as $T_{\mu\nu}$

D) as $T_{\mu\nu}$ is conserved ($T_{\mu\nu;\mu} = 0$), then $G_{\mu\nu}$ and similars are, as well ($G_{\nu;\mu}^\mu = 0$)

E) for weak stationary fields, non relativistic ones, we have $G_{\mu\nu} = \nabla^2 g_{00}$

A and B say that $G_{\mu\nu}$ is proportional to the curvature tensor (*):

$$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] + g_{\eta\sigma} [\Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu k}^\sigma - \Gamma_{k\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma]$$

clearly made of second derivatives of the metric tensor.

Moreover, the symmetry of indexes wants that the curvature tensor is represented by the Ricci tensor (*) $R_{\mu k} = R_{k\mu}$:

$$(R_{\mu k} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k}, R_{\mu k} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda, R_{\mu k} = -g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\nu k} = -g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu k\nu} = +g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda k\nu})$$

$$\text{and by the symmetric, as well, } R = R^\mu_\mu: G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (11)$$

but we know that by contracting the curvature tensor, we get the following (*):

$(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R)_{;\mu} = 0$, from which: $R^\mu_{\nu;\mu} = \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R_{;\mu} = \frac{1}{2}R_{;\nu}$; now, multiply the (11) by $g^{\mu\mu}$:

$$G^\mu_\nu = C_1 R^\mu_\nu + C_2 R g^\mu_\nu \text{ and } G^\mu_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu_{\nu;\mu} + C_2 R_{;\nu} = \frac{C_1}{2} R_{;\nu} + C_2 R_{;\nu} = (\frac{C_1}{2} + C_2) R_{;\nu} .$$

For the peculiarity D, $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ or $R_{;\nu} = 0$; the second one must be rejected, as:

$G^\mu_\mu = (C_1 + g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} C_2) R = (C_1 + 4C_2) R = -8\pi G T^\mu_\mu$, and so, if $R_{;\nu} = \partial R / \partial x^\nu$ becomes zero, the same must happen to $\partial T^\mu_\mu / \partial x^\nu$, but now we aren't yet in the case of non relativistic matter. Therefore: $G_{\mu\nu} = C_1 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R)$. (12)

Now, because of the peculiarity E, we figure out C_1 : for non relativistic systems, we always have: $|T_{ij}| \ll T_{00}$, that is: $|G_{ij}| \ll G_{00}$, from which, for the above (12): $R_{ij} \cong \frac{1}{2} g_{ij} R$;

moreover, $g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta}$ (Minkowski's tensor) and so: $R_{kk} \cong \frac{3}{2} R$ and $R_{00} \cong \frac{R}{2}$.

The (12) with $\mu = \nu = 0$ ($g_{00} \cong \eta_{00}$) yields:

$G_{00} = C_1 (R_{00} - \frac{1}{2} (-1) 2 R_{00}) = 2 C_1 R_{00}$; moreover, in case of weak fields (curvature tensor $R_{\lambda\mu\nu k}$ with obviously all the $\Gamma^c_{ab} = 0$):

$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} [\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}]$ and $R_{\mu k} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k}$; being the field static, the time derivatives are zero:

$$R_{00} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda 0 \nu 0} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}) = \frac{1}{2} \eta^{ij} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}) - \frac{1}{2} \eta^{00} 0 = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} , \text{ from which:}$$

$$G_{00} = 2 C_1 \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} = C_1 \nabla^2 g_{00} , \text{ from which } (C_1 = 1) \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \text{ and so:}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (13)$$

which are the **Einstein's equations of the gravitational field**, and we rewrite them completely, now without the normalization $c=1$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

which tell us that the curvature ($\propto R_{\mu\nu}, R$) of the space-time is equal to the presence of matter-energy ($\propto T_{\mu\nu}$) in it!!!

Now, by contracting with $g^{\mu\nu}$, we have: $R - 2R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\mu$, that is: $R = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\mu$ and so:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda) \text{ (another form for the Einstein's equations).}$$

In the vacuum, $f(T)=0$ and so $R_{\mu\nu} = 0$.

(*) : see my pdf on the General Relativity.

EINSTEIN INTO MAXWELL.2 - ADVANCED

(THE MAGNETIC FIELD DOES NOT EXIST)

Magnetic force is simply a Coulomb's electric force(!)

Concerning this, let's examine the following situation, where we have a wire, of course made of positive nuclei and electrons, and also a cathode ray (of electrons) flowing parallel to the wire:

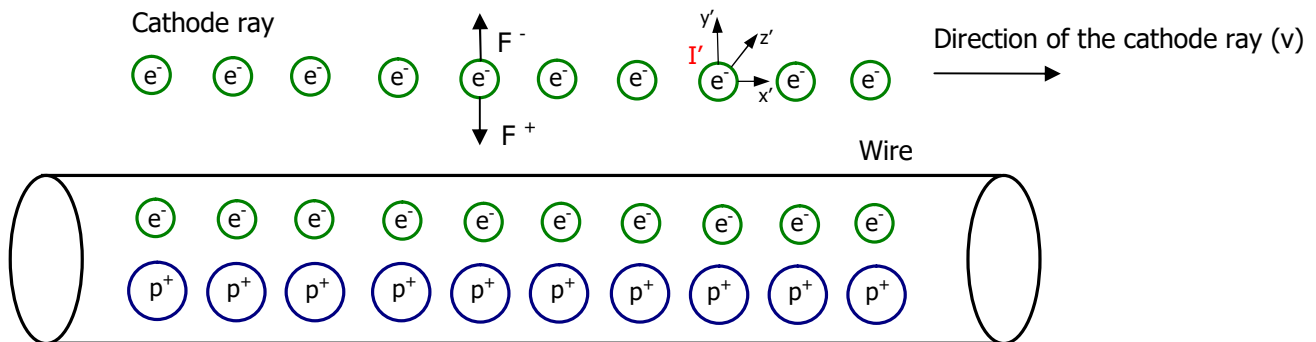


Fig. 1: Wire not carrying any current, seen from the cathode ray steady ref. system I' (x' , y' , z').

We know from magnetism that the cathode ray will not be bent towards the wire, as there isn't any current in it. This is the interpretation of the phenomenon on a magnetic basis; on an electric basis, we can say that every single electron in the ray is rejected away from the electrons in the wire, through a force F^- identical to that F^+ through which it's attracted from positive nuclei in the wire.

Now, let's examine the situation in which we have a current in the wire (e^- with speed u)

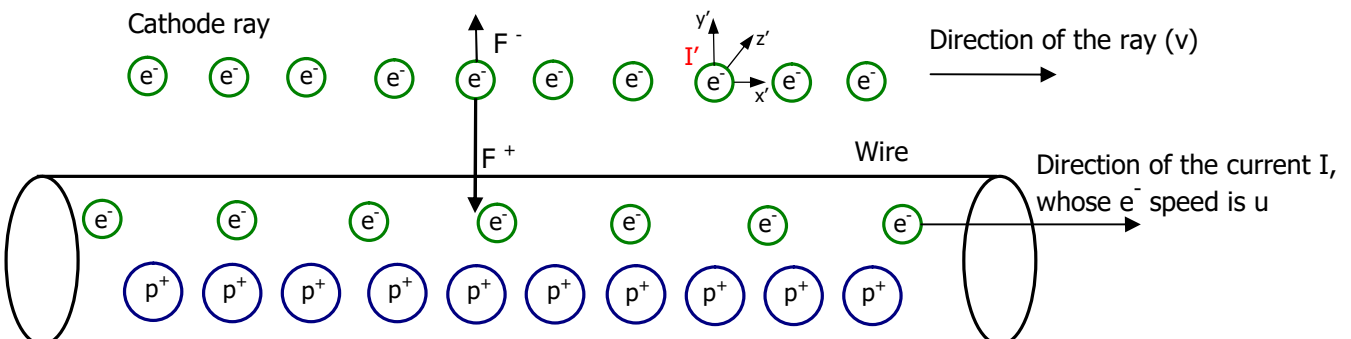


Fig. 2: Wire carrying a current (with e^- speed= u), seen from the cathode ray steady ref. system I' (x' , y' , z').

In this case we know from magnetism that the cathode ray must bend towards the wire, as we are in the well known case of parallel currents in the same direction, which must attract each other.

This is the interpretation of this phenomenon on a magnetic basis; on an electric basis, we can say that as the electrons in the wire follow those in the ray, they will have a speed lower than that of the positive nuclei, in the system I' , as such nuclei are still in the wire. As a consequence of that, spaces among the electrons in the wire will undergo a lighter relativistic Lorentz contraction, if compared to that of the nuclei's, so there will be a lower negative charge density, if compared to the positive one, so electrons in the ray will be electrically attracted by the wire.

This is the interpretation of the magnetic field on an electric basis. Now, although the speed of electrons in an electric current is very low (mm/s or even less), if compared to the relativistic speed of light, we must also acknowledge that the electrons are billions and billions..., so a small Lorentz contraction on so many spaces among charges, makes a substantial magnetic force to appear.

But now let's see if mathematics can prove we're quantitatively right on what asserted so far, by showing that the magnetic force is an electric one itself, but seen on a relativistic basis.

On the basis of that, let's consider a simplified situation in which an electron e^- , whose charge is q , moves with speed v and parallel to a nuclei current whose charge is Q^+ each (and speed u):

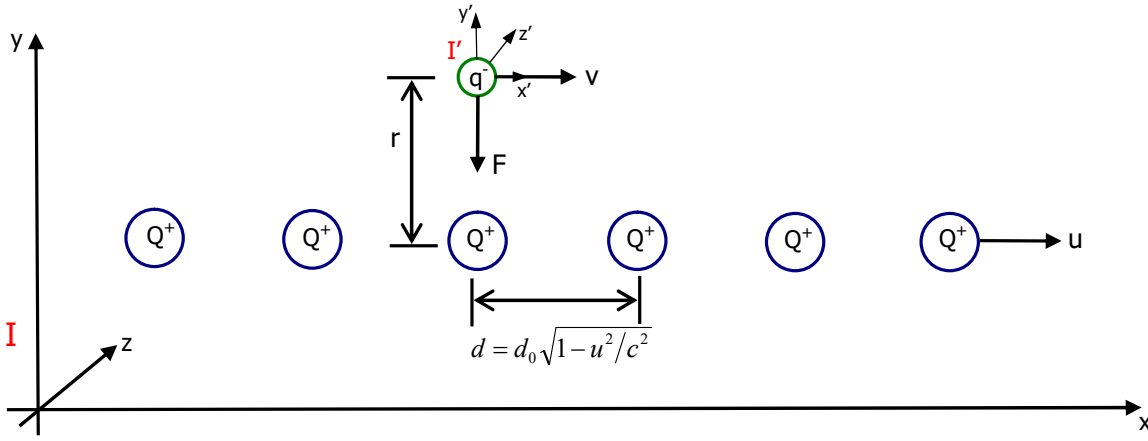


Fig. 3: Current of positive charges (speed u) and an electron whose speed is v , in the reader's steady system I .

a) Evaluation of F on an electromagnetic basis, in the system I :

First of all, we remind ourselves of the fact that if we have N charges Q in line and d spaced (as per Fig. 3), then the linear charge density λ will be:

$$\lambda = N \cdot Q / N \cdot d = Q/d \quad .$$

Now, still with reference to Fig. 3, in the system I , for the electromagnetics the electron will undergo the Lorentz force $F_l = q(E + v \times B)$ which is made of an originally electrical component and of a magnetic one:

$$F_{el} = E \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi r} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} \right) q \quad \text{due to the electric attraction from a linear distribution of charges } Q \text{ (see$$

$$\text{the (7))}, \text{ and: } B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/t}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/(d/u)}{2\pi r} = \mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \quad (\text{Biot and Savart}).$$

$$\text{So: } F_l = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v \mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad , \quad (1)$$

where the negative sign tells us the magnetic force is repulsive, in that case, because of the real directions of those currents, and where the steady distance d_0 is contracted to d , according to Lorentz, in the system I where charges Q have got speed u ($d = d_0 \sqrt{1-u^2/c^2}$).

b) Evaluation of F on an electric base, in the steady system I' of q :

in the system I' the charge q is still and so it doesn't represent any electric current, and so there will be only a Coulomb electric force towards charges Q :

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r'} \right) \frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \quad , \quad (2)$$

where u' is the speed of the charge distribution Q in the system I' , which is due to u and v by means of the well known relativistic theorem of composition of speeds:

$$u' = (u - v) / (1 - uv/c^2) \quad , \quad (3)$$

and d_0 , this time, is contracted indeed according to u' : $d' = d_0 \sqrt{1-u'^2/c^2}$.

We now note that, through some algebraic calculations, the following equality holds (see the (3)):

$$1 - u'^2/c^2 = \frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - uv/c^2)^2} \quad , \text{ which, if replacing the radicand in (2), yields:}$$

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r'} \right) \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

We now want to compare the (1) with the (4), but we still cannot, as one is about I and the other is about I' ; so, let's scale F'_{el} in (4), to I , too, and in order to do that, we see that, by definition of the force itself, in I' :

$$F'_{el}(in_I') = \frac{\Delta p_{I'}}{\Delta t_{I'}} = \frac{\Delta p_I}{\Delta t_I \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F_{el}(in_I)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \text{ where } \Delta p_{I'} = \Delta p_I, \text{ as } \Delta p \text{ extends along } y, \text{ and not}$$

along the direction of the relative motion, so, according to the Lorentz transformations, it doesn't change, while Δt , of course, does. So:

$$\begin{aligned} F_{el}(in_I) &= F'_{el}(in_I') \sqrt{1-v^2/c^2} = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}} \sqrt{1-v^2/c^2} = \\ &= q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = F_{el}(in_I) \end{aligned} \quad (5)$$

Now we can compare the (1) with the (5), as now both are related to the I system. Let's write them one over another:

$$\begin{aligned} F_I(in_I) &= q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v\mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ F_{el}(in_I) &= q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{uv}{\epsilon_0 c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}$$

Therefore we can state that these two equations are identical if the following identity holds: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, and this identity is known since 1856. As these two equations are identical, the magnetic force has been traced back to the Coulomb's electric force, so the unification of electric and magnetic fields has been accomplished!!

Or, more simply:

Magnetic field – a relativistic illusion:

One day, Coulomb (1785) taught us two charges (for instance, with opposite signs) attract each other with a certain force:

$$\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

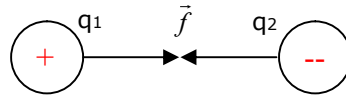


Fig. 4.

Moreover, if those two charges are a big one Q and a small one q (a test one), we define the electric field E generated by Q. As we have:

$$\vec{f} = \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}, \text{ then: } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Electric field generated by an infinite wire:

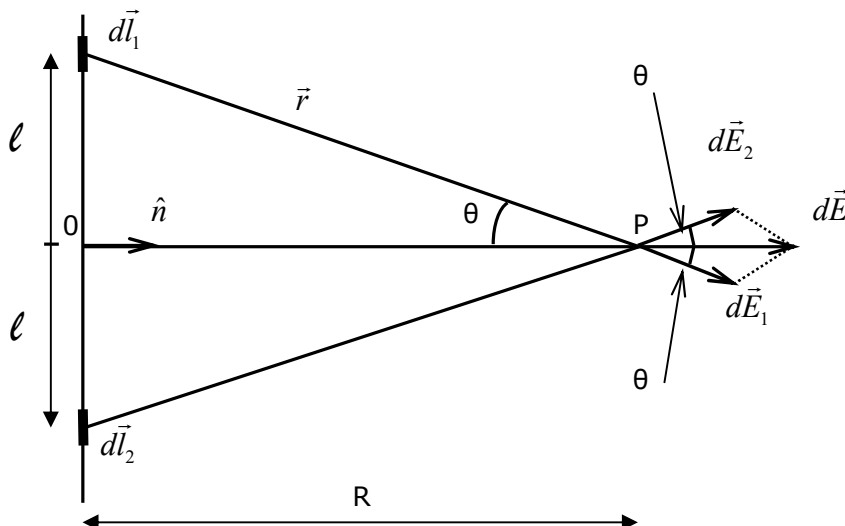


Fig. 5.

We consider two elements of wire dl_1 and dl_2 and we figure out the electric field generated in P:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = (|dE_1| + |dE_2|) \cos \theta \cdot \hat{n} = \frac{2 \cos \theta \cdot \hat{n} \lambda dl}{4\pi\epsilon r^2} \quad (6)$$

Moreover: $r = R / \cos \theta$ and $l = R \cdot \tan \theta$; by differentiating: $dl = R \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$. If now we put this in the (6) and consider that $\lambda = \text{cost}$ (linear density of charge):

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\hat{n}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta \lambda \frac{R d\theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta R^2} = \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{n}} \quad (7)$$

The relativistic illusion:

what's the symbol equation of the "Theory" of Relativity? For sure, almost everybody will answer $E=mc^2$. But this equation looks like that of the kinetic energy of Newton ($(1/2)mv^2$); it's not so new. On the contrary, the most representative equation, which says we are really dealing with relativity, is the following:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ or, better, just the root } \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \text{ or, more simply:}$$

$$\boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

This expression was already hidden into XVIII and XIX century's electromagnetism.

After simplifying a bit all reasonings which follows, we have a linear distribution of positive charges n (n charges per metre) and a single charge q at distance d , as shown in figure 6.

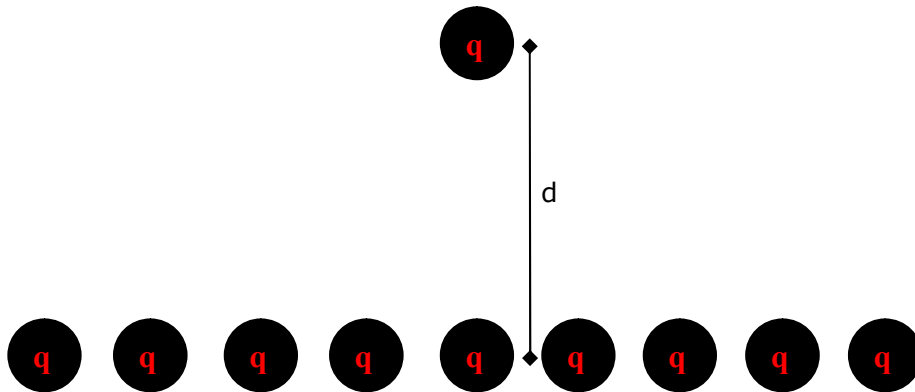
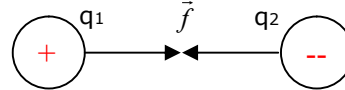


Fig. 6.

If the linear density of charge is λ [C/m], then, from the Law of Coulomb of 1785, that is:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{r} \quad (\text{Coulomb-1785})$$



we can get the electric field E generated by such a charge distribution and the relevant repulsion force F on the single charge q is:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} \quad (\text{for Coulomb-1785}), \text{ where } \lambda = nq.$$

And in such a situation, all charges initially look still.

Now, if I (the observer) suppose I travel with speed v to the right, then I will see charges moving backwards, to the left, so I see electric currents, and we know from the XIX century magnetism that currents with the same directions attract each other (two electric wires carrying electric currents with the same directions attract each other; it's what's happening in all electric motors, every day). Therefore, not only we see the charge repulsed, but also magnetically attracted, towards the charge distribution.

According to the total Force of Lorentz, we'll have ($\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{t}$, for Biot-Savart-1820):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv\hat{n} \quad , \text{ but, by the definition of an electric current:}$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(n\Delta x)}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv = \lambda v \quad (\Delta x = v\Delta t \text{ is the space travelled}), \text{ then:}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv\hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q\lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} \quad . \text{ Now, we remind the well known equation for the velocity of}$$

$$\text{the electromagnetic waves c in vacuum: } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 m/s \quad (1856)$$

and so: $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$, and we'll have, for the force on the single charge:

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q\lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{v^2}{c^2} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} \quad , \text{ that is:}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} \quad ; \text{ here is, again, the symbol expression of the Relativity!}$$

Notice that $\vec{F} \neq \vec{F}$, which means the observers (still one and moving one) are seeing two different situations...something's wrong. In order to tidy up calculations, all distances among charges must appear different to the observers, which means the distance must be a relative quantity to the observer and the same must be for time. The

relativistic expression $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ will appear in the equation for the new λ and also another relativistic one

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ for the evaluation of involved times and both of them will cancel with the new expression $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ just

appeared. You can notice the most recent equation we used in all this reasoning is about 1856, when Albert Einstein wasn't yet born! What's the truth? Are space and time to become relative to balance the appearing of a magnetic force effect, or, on the contrary, the magnetic force, not existing as a new force in itself, does not exist, but it's rather a delta of electric force due to the fact that space and time are relative? The right understanding is the latter, even though, formally, or mathematically, it doesn't make any difference.

POSSIBLE INCONSISTENCIES INTO THE ELECTROMAGNETISM

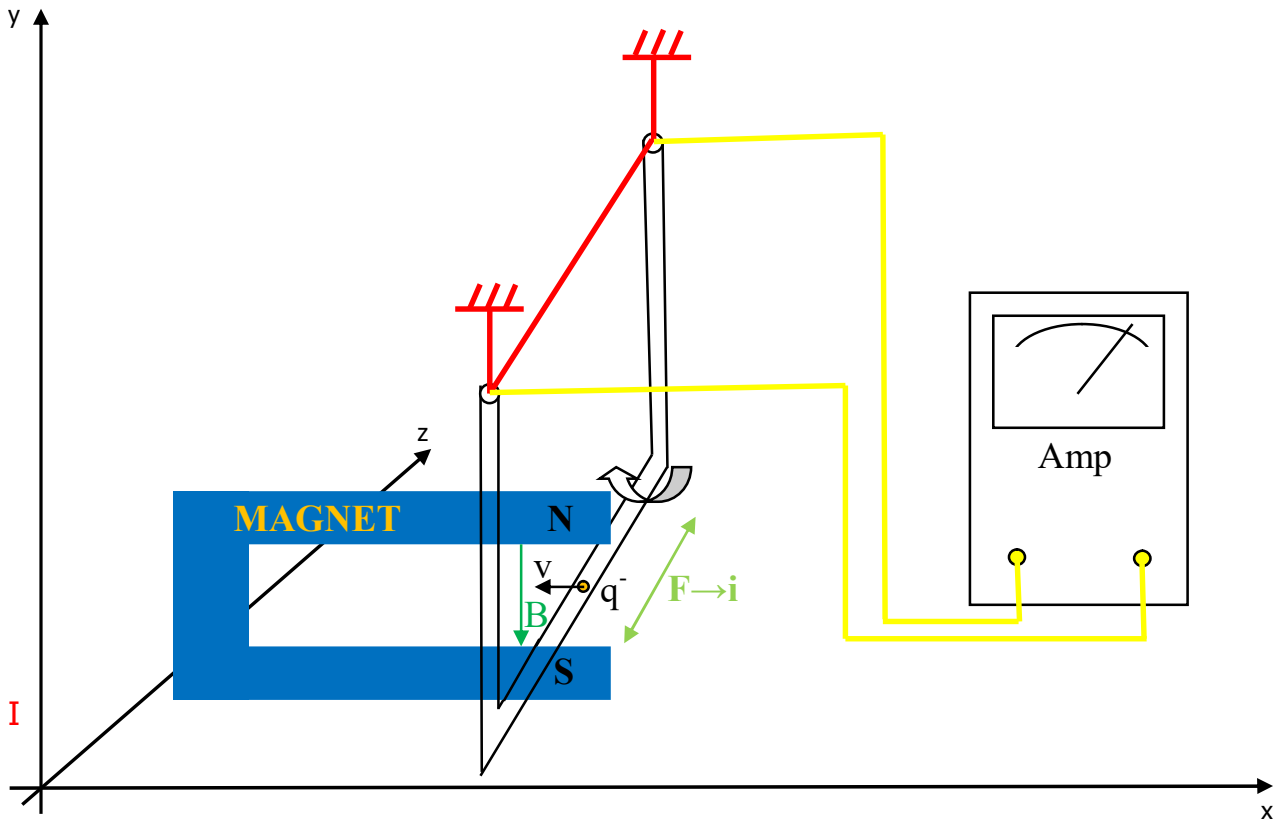


Fig. A: Swing, connected to an ammeter, oscillating into a permanent magnet, in a laboratory reference frame I.

With reference to the Fig. A and also after knowing that moving electrical charges (having speed v) in a magnetic field undergo the Lorentz Force, because of the oscillating motion (v) of the swing (which is a conductor with “free” electrons into itself, available for the electrical conduction), we will see a reaction on the ammeter.

The Lorentz force is:

$$F_L = q(E + v \times B) \quad , \quad (1890)$$

but this is the general one, where we also take into account any other possible forces due to the presence of electric fields (qE), otherwise, in agreement with other authors, for the study of moving charges into a magnetic field, as well as in the following case, we will use the following equation:

$$F_L = q(v \times B) \quad .$$

And let's not neglect the fact that the free electrons of the swing shaped conductor have a negative charge ($q < 0$), so (at a merely vectorial level, about motion) an electron which oscillates towards the left with speed v is just like an inverted positive charge, like if it oscillates towards the right side. Anyway, apart from that, as the flux lines of the magnetic field of the permanent magnet are vertical, from N to S (along y) and the oscillation is due, for instance, to a hand pushing (for instance, initially to the left, so along x) of the swing which is orthogonal to the magnetic field B , then we will have a force over the free electrons which will extend along z , like a current flowing through the swing indeed, towards the ammeter (in agreement with the rule of the right hand, according to which all those three items are mutually orthogonal, so justifying the vector product ($v \times B$)). If the swing is not oscillating, it follows that $v=0$ and $F=0$, so the current $i=0$. Lorentz was awarded the Nobel prize in 1902.

PROBLEMS/INCONSISTENCIES/PERPLEXITIES (IF ANY):

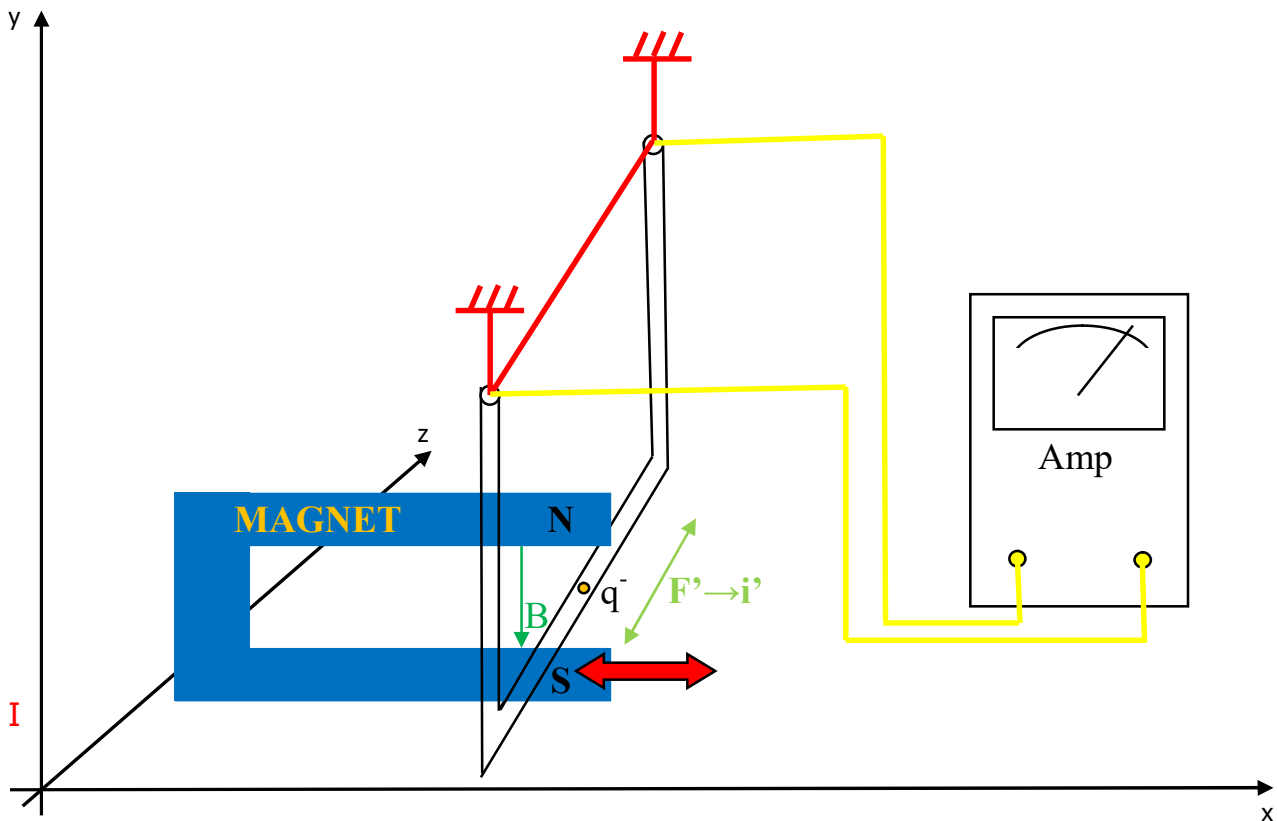


Fig. B: Swing, connected to an ammeter, but held still ($v'=0$); now the magnet oscillates along x, still in the frame I.

Still staying in the reference frame I, now we hold still the swing and move the permanent magnet in an oscillatory way, along x (Fig. B); in this case, as the swing is still, the new v' of the free electrons in it is zero ($v'=0$), but despite that, the ammeter still reacts, so showing a current i' and so also a force F'_L which affects anyway the electrons involved in such a current:

$$F'_L \neq 0 = q(v' \times B) = q(0 \times B) = 0 \neq 0 . \ ?$$

The magnetic field, which now is changing, under our point of view is like turning into an electric field (Maxwell) which creates and justifies the i' .

GAUSS INTO STUDENT

Contents:

1-ON THE NORMAL DISTRIBUTION (GAUSSIAN)

2-ESTIMATION OF THE MEAN VALUE OVER THE WHOLE POPULATION N_p , BUT BASED ON A SMALL SAMPLE N – THE **STUDENT'S t** DISTRIBUTION

3-PROOF OF THE STUDENT'S t DISTRIBUTION

1-On the Normal Distribution (Gaussian).

As we know, over a sample with a high N , the Normal Distribution is in force:

$$P_k = f(k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - \hat{k}}{\sigma_k} \right)^2} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\sigma_k} \right)^2} \quad (\text{Normal Distribution or Gaussian}) \quad (1.1)$$

As the mean value is $\hat{k} = np$ and the deviation $s = |k - \hat{k}| = |k - np|$ and as we know that for the mean square value of k we have: $\sigma(k) = \sqrt{\sigma^2(k)} = \sigma_k = \sqrt{npq}$, then we have:

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}} \quad (1.2)$$

Let's define now the function $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2}$, where $z = \frac{(k - np)}{\sqrt{npq}}$ is the Normal Std. Variate Value (Confidence Coefficient); we have that $\varphi(z)$ is indeed the “normal law of probability” or “Gauss’ curve of errors”.

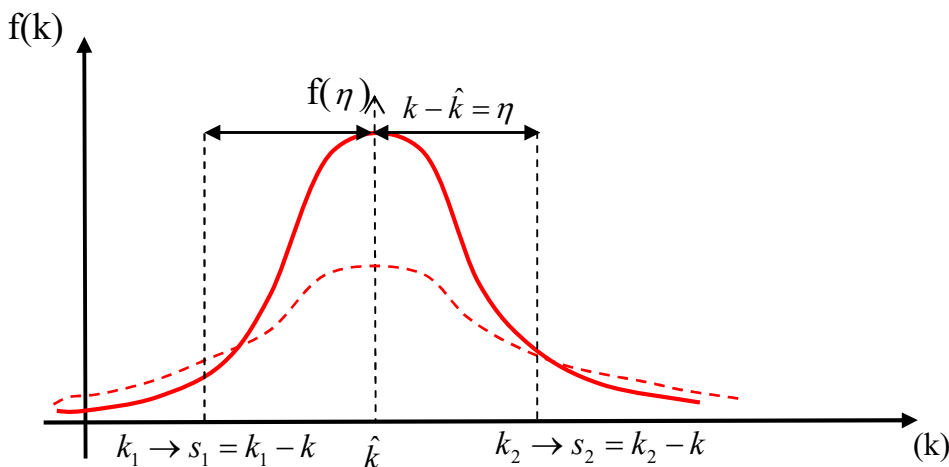


Fig. 1.1: Gaussian.

Let's calculate now the probability that an event happens a number of times between k_α and k_β :

$$P_{k_\alpha, k_\beta} = \int_{k_\alpha}^{k_\beta} P_k dk = \int_{k_\alpha}^{k_\beta} \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}} dk ; \text{ by jumping to the new integration variable } z:$$

$$P_{k_\alpha, k_\beta} = \int_{z_\alpha}^{z_\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{z_\alpha}^{z_\beta} \phi(z) dz . \text{ Let's analyze now the function:}$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^t \phi(z) dz ; \text{ we have: } P_{k_\alpha, k_\beta} = \phi(t_\beta) - \phi(t_\alpha) = \phi\left(\frac{k_\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{k_\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right) .$$

There exist tables of values for the function $\phi(t)$.

-The 3 σ rule

Let's start now from the (1.1):

$$P_k = f(k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\bar{k}}{\sigma_k}\right)^2} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma_k}\right)^2} = P(s)$$

now, in a differential form, the probability dp that the deviation s is between the infinitesimal ds is:

$$dp = P(s)ds = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma_k}\right)^2} ds \text{ and so the probability that the deviation } s \text{ is between } s_1 \text{ and } s_2 \text{ is } P:$$

$$P_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} dp = \int_{s_1}^{s_2} P(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma_k}\right)^2} ds \quad (1.3)$$

$P_{1,2}$ is the surface covered by the Gaussian curve between s_1 and s_2 ; it's easy to calculate through the integral of (1.3), that:

$$\begin{aligned} -0,68\sigma < s < 0,68\sigma & \rightarrow P=50\% \\ -\sigma < s < \sigma & \rightarrow P=68,3\% \\ -1,64\sigma < s < 1,64\sigma & \rightarrow P=90\% \\ -2\sigma < s < 2\sigma & \rightarrow P=95,9\% \\ -2,58\sigma < s < 2,58\sigma & \rightarrow P=99\% \\ -3\sigma < s < 3\sigma & \rightarrow P=99,7\% \end{aligned}$$

Then, the probability that the deviation of the mean value of a measurement is between -3σ and $+3\sigma$ is of 99,7%, that is a rather acceptable value, from which the usual adoption of the three sigma rule, indeed.

In this case, the confidence coefficient z is 3 ($z_{0,997} = 3$). From the z function, that is: $z = \frac{(x - \bar{x})}{\sigma}$, we get: $x = \bar{x} \pm z\sigma$. (1.4)

If now we refer no more to the normal σ , but to the $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ of the mean value (see appendix),

we have: $x = \bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}}$, where N is the number of elements of the sample. If the sample is not taken from an infinite population ($N_p = \infty$), but rather from a finite population with N_p elements, then we

$$\text{have: } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} \quad (\text{see the proof below}) \quad (1.5)$$

so: $x = \bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}}$; for an infinite population we obviously have:

$$\sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} = \sqrt{\frac{(1 - \frac{N}{N_p})}{(1 - \frac{1}{N_p})}} = 1 \quad \text{and: } x = \bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Proof of the (1.5):

we have a set of 5 values $\{3,4,5,6,7\}$ (whose mean value, of course, is $\mu=5$) and we extract a small sample of two values ($N_p=5$, $N=2$); all the possible small samples are:

$(3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), (6,7)$.

The relevant mean values of all those 10 possible small samples are: $3,5|4|4,5|5|4,5|5|5,5|5,5|6|6,5$

and their mean value is: $\mu_{\bar{x}} = \frac{3,5 + 4 + 4,5 + 5 + 4,5 + 5 + 5,5 + 5,5 + 6 + 6,5}{10} = 5$ and the relevant

standard deviation of the mean value is: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(3,5-5)^2 + (4-5)^2 + \dots + (6,5-5)^2}{10}} = \pm 0,866$, while

the standard deviation σ referred to the whole population would be:

$\sigma = \sqrt{\frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + \dots + (7-5)^2}{5}} = \pm 1,414$; so we notice that the (1.5) is respected:

$\sigma_{\bar{x}} = \pm 0,866 = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}} = \frac{\pm 1,414}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(5-2)}{(5-1)}}$. And we also notice that: $\mu_{\bar{x}} = \mu$. qed

2-Estimation of the mean value over the whole population N_p , but based over a small sample N – The Student's t Distribution.

A sample starts being no more small if $N \geq 30$. In fact, when $N \geq 30$, the normal distribution (gaussian) is well respected. The same cannot be stated when $N < 30$, indeed.

Therefore, when a sample is small, the statistics is no more the normal one (1.1), that is that of the

confidence coefficient $z = \frac{(x - \bar{x})}{\sigma}$, and in place of it we use a similar equation, but whose

parameter is t, based on the Student's t Distribution (of W.S. Gosset) which is, as we said, no more the Normal one, being the sample small:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} \quad (2.1)$$

where $\bar{x}$ is the mean value of the small sample with N elements, μ is the mean value of the whole population N_p , σ_N is the standard deviation of the small sample (N). On the base of all that, in place

of the (1.4), that is the $x = \bar{x} \pm z\sigma$, we have: $x = \bar{x} \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}}$ (2.2)

of course, as the purpose here is that of estimating the mean value μ of the whole population and in the (2.2) x plays the role of μ in the (2.1), indeed.

This time we will refer to a new table of values of t_p ; for instance, $t_{0,95}$ refers to a confidentiality level of 95%.

In the table (of Student) all the t_p are supplied as a function of the parameter ν (nu) which is the number of degrees of freedom, that is, in this typical case, for the (2.1) we have:

$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{\nu}$, as σ_N and $\bar{x}$ are calculated through the values of the N

elements of the small sample, while the unknown value is just one, that is μ , that is the mean value of the whole population, so $\nu = N - n$. of unknown values = $N - 1$.

Therefore, in general, $\nu \cong N$, and so in the table of the t values they supply the values t_p for all the ν values, from 1 to 30, because as well as we already said, such statistics is for $N < 30$, while over the 30 just the t values for the ν 40, 60, 120 and ∞ are supplied, as for high ν values, the statistics is back the normal one (gaussian).

3-Proof of the Student's t Distribution.

Preamble:

We start from the way we evaluate, through a weighed average computation, the mean values $\langle x \rangle$ and $\langle y \rangle$ and also the variances $\sigma^2(x)$ and $\sigma^2(y)$, with a probability distribution $f(x,y)$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy ; \quad \langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dx dy$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x,y) dx dy ; \quad \sigma^2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \langle y \rangle)^2 f(x,y) dx dy$$

If now we carry out a change of coordinates, $x,y \rightarrow u,v$, where: $u=u(x,y)$ and $v=v(x,y)$ (and $x=x(u,v)$ and $y=y(u,v)$), then, as we know:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v) f[x(u,v), y(u,v)] |J| du dv \quad (3.1)$$

where $|J|$ is the determinant of the Jacobian (of the classical change of coordinates in a multiple integral):

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \text{ being: } \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d\bar{x} = (\frac{\partial x}{\partial u}) d\bar{u} + (\frac{\partial x}{\partial v}) d\bar{v} \\ d\bar{y} = (\frac{\partial y}{\partial u}) d\bar{u} + (\frac{\partial y}{\partial v}) d\bar{v} \end{cases} ; \text{ in fact, in } (x,y) \text{ the small surface is}$$

$dx dy$, while in (u,v) it is the surface of the parallelogram $d\bar{x} \times d\bar{y}$:

$$d\bar{x} \times d\bar{y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = |J| du dv.$$

Sometimes one has to integrate/average in advance over one of the two variables (such as y) and so the (3.1) is left with an integrand function on just x , such as:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx ; \text{ here, too, through a change of variables like } (x,y) \rightarrow (x,z/x) \quad (\text{that is: } y=z/x$$

and $z=xy$), we have: $F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \frac{z}{x}) |J| dx$, where:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = x(x,z) \\ y = y(x,z) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} d\bar{x} = (\frac{\partial x}{\partial x}) d\bar{x} + (\frac{\partial x}{\partial z}) d\bar{z} \\ d\bar{y} = [\frac{\partial(z/x)}{\partial x}] d\bar{x} + [\frac{\partial(z/x)}{\partial z}] d\bar{z} \end{cases} \rightarrow ; \\ &\rightarrow \begin{cases} d\bar{x} = 1d\bar{x} + 0d\bar{z} \\ d\bar{y} = -\frac{z}{x^2} d\bar{x} + \frac{1}{x} d\bar{z} \end{cases} \rightarrow |J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \rightarrow F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \frac{z}{x}) \frac{1}{|x|} dx \end{aligned}$$

and if x and y are

independent variables, whose distribution densities are f_1 and f_2 , then: $F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(\frac{z}{x}) \frac{1}{|x|} dx$.

Similarly, if the change of coordinates is: $(x,y) \rightarrow (zy,y)$ (that is: $z=x/y$), then:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial(yz)}{\partial y} & \frac{\partial(yz)}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -y \rightarrow F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(yz, y) |y| dy \text{ and}$$

$$\boxed{F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(yz) f_2(y) |y| dy} \quad (3.2)$$

Gamma Distribution:

Through the change from the variable x to the variable x^2 we go from the Normal Distribution to the Gamma one ($x \rightarrow y = x^2$). From this, it comes out that $x = \pm\sqrt{y}$ (two values) and this means two things, that is: it can be only $y > 0$, but in such a change we have to multiply by 2.

Now, the Normal Distribution with $\bar{x} = 0$ is:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.3)$$

As the total probability must be the same with both the distributions, it must be:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty g(y)dy \rightarrow f(x)dx = g(y)dy \rightarrow f(x) = g(y)\frac{dy}{dx} \quad \text{and} \quad g(y) = f(x)\frac{dx}{dy} \quad \text{and:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = 2\sqrt{y} \quad (\rightarrow y > 0), \text{ from which (plus the coefficient } x \text{ 2 as above said...):}$$

$$g(y) = 2f(x)\frac{dx}{dy} = 2f[x(y)]\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\right) \frac{y^{\frac{-1}{2}}}{2} = \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{\frac{-1}{2}} = g(y)} \quad (3.4)$$

Such a $g(y)$ is normalized; in fact, let's carry out a further change of variable $z = y/2\sigma^2$; we get:

$$\left(\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sigma^2} \quad \text{and} \quad dy = (2\sigma^2)dz\right)$$

$$g(z)dz = g(y)dy \rightarrow g(z) = g(y)\frac{dy}{dz} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{\frac{-1}{2}}\right)(2\sigma^2) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z2\sigma^2}{2\sigma^2}} z^{\frac{-1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{-1}{2}}\right](2\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z} z^{\frac{-1}{2}} = g(z) \quad ; \text{ at last, as we said, we notice that such a } g(z) \text{ is already normalized, that is it}$$

has preserved the normalization, so justifying also the added coefficient 2; in fact:

$$\int_0^\infty g(z)dz = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z} z^{\frac{-1}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{-1}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-z} z^{t-1} dz\right)_{t=1/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1$$

($\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-z} z^{t-1} dz$ is the Gamma Function of Euler); obviously, $\Gamma(1) = 1$; then, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$;

in fact, after an integration by parts: $\Gamma(t) = e^{-z} \frac{z^t}{t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-z} z^t dz = 0 + \frac{1}{t} \Gamma(t+1)$ and by iterating

the $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, we get: $\Gamma(n+1) = n!$.

After generalizing the (3.4) ($g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{\frac{-1}{2}}$), we have:

$$\boxed{g(p, \sigma, y) = \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} y^{p-1}} \quad , (y > 0) \quad (3.5)$$

and the (3.4) is a particular case ($p=1/2$).

Student's t:

we saw that through the passage from x to x^2 , the distribution becomes a Gamma one; now, being:

$$\sigma_N = \frac{\sqrt{\sum (x_i)^2}}{\sqrt{N}} = \frac{S}{\sqrt{N}} \quad (3.6)$$

and also being S a quadratic form, it is distributed like Gamma, so like the $g(p, \sigma, y)$ of the (3.5).

Now, we like to understand the distribution $h(\sigma_N)$ of $\sigma_N = \frac{S}{\sqrt{N}}$; then, let's carry out a change of

variable in the (3.5), from y to $N\sigma_N^2$, that is: $y = N\sigma_N^2$, from which:

$$dy = 2N\sigma_N d\sigma_N \text{ and } h(\sigma_N)d\sigma_N = g(p, \sigma, y)dy \rightarrow$$

$$\boxed{h(\sigma_N) = g(p, \sigma, y) \frac{dy}{d\sigma_N} = g(p, \sigma, N\sigma_N^2) 2N\sigma_N} \quad (3.7)$$

Moreover, let's evaluate the distribution $r(Y)$ of $Y\sqrt{N}$, where: $Y = (\frac{1}{N} \sum_j x_j) - \mu = \bar{x} - \mu$; it is the normal distribution (that followed by all the x_j), whose variance is (of the mean value-see Appendix) σ^2/n and let's go on staying centered over a zero mean value:

$$(\mu=0 \rightarrow Y = (\frac{1}{N} \sum_j x_j)) \quad (3.8)$$

$$\boxed{r(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-NY^2}{2\sigma^2}}} \text{ which is the (3.3) in x. Let's go on further, in order to evaluate now the}$$

statistics of $\frac{Y\sqrt{N}}{\sigma_N}$; we are interested in that, as from the (2.2) we have $\mu = \bar{x} \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}}$, from

which: $\bar{x} - \mu = Y = \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}} \cong \frac{t\sigma_N}{\sqrt{N}}$, so **the quantity** $\boxed{\frac{Y\sqrt{N}}{\sigma_N}}$ **is really the t** introduced through

the (2.2), indeed. And let's also recall that the (2.2) is interesting for its similarities with the (1.4). ($Y \propto \sigma_N \cdot t$)

So, let's use the (3.2) which joins together those two distributions in yz and in y, that is $f_1(x)=f_1(yz)$ and $f_2(y)$, and in this current case, the ratio $z=x/y$ of the (3.2) corresponds to the ratio $\frac{Y\sqrt{N}}{\sigma_N}$,

indeed, where the statistics of f_1 (of $x=yz$) would be that of $Y\sqrt{N}$, that is the $r(Y)$

$$(r(Y) = r(\sigma_N \cdot t) \rightarrow f_1(yz)),$$

while the $f_2(y)$ is the statistics of what corresponds to y, indeed, that is σ_N ($y \rightarrow \sigma_N$)

$$(f_2(y) \rightarrow h(\sigma_N)); \text{ so, let's use the (3.2): } f(t) = \int_0^\infty r(\sigma_N \cdot t) \cdot h(\sigma_N) \big|_{\sigma_N} d\sigma_N, \text{ so:}$$

$$(Y \cong \frac{t\sigma_N}{\sqrt{N}}, p=N/2 \text{ and } y = N\sigma_N^2)$$

$$f_p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\frac{-NY^2}{2\sigma^2}} g(p, \sigma, N\sigma_N^2) 2N\sigma_N^2 d\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} g(\frac{N}{2}, \sigma, N\sigma_N^2) 2N\sigma_N^2 d\sigma_N =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-y}{2\sigma^2}} y^{p-1} 2N\sigma_N^2 d\sigma_N =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-y}{2\sigma^2}} y^{\frac{N}{2}-1} 2N\sigma_N^2 d\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2 t^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-N\sigma_N^2}{2\sigma^2}} (N\sigma_N^2)^{\frac{N}{2}-1} 2N\sigma_N^2 d\sigma_N = \boxed{\frac{2}{\sqrt{N\pi}\sigma^{N+1}\Gamma(\frac{N}{2})} (\frac{N}{2})^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{\frac{-\sigma_N^2(t^2+N)}{2\sigma^2}} \sigma_N^N d\sigma_N = f_N(t)} \quad (3.9)$$

and about the last integral, let's carry out a change of variable in it: $z = \frac{\sigma_N^2(t^2 + N)}{2\sigma^2}$:

$$\begin{aligned} (((\rightarrow dz = \frac{2(t^2 + N)}{2\sigma^2} \sigma_N d\sigma_N, \quad d\sigma_N = \frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N) \sigma_N} dz, \quad \sigma_N^2 = \frac{2\sigma^2}{(t^2 + N)} z \quad \text{and} \\ \sigma_N^N d\sigma_N = \sigma_N^N \left[\frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N) \sigma_N} dz \right] = \{\sigma_N^{N-1}\} \left[\frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N)} dz \right] = \left\{ \left(\frac{2\sigma^2}{(t^2 + N)} z \right)^{\frac{N-1}{2}} \right\} \left[\frac{2\sigma^2}{2(t^2 + N)} dz \right] = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma^2}{t^2 + N} \right)^{(N+1)/2} z^{(N-1)/2} dz)))) \\ \int_0^\infty e^{-\frac{\sigma_N^2(t^2 + N)}{2\sigma^2}} \sigma_N^N d\sigma_N = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma^2}{t^2 + N} \right)^{(N+1)/2} \int_0^\infty z^{(N-1)/2} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma^2}{t^2 + N} \right)^{(N+1)/2} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right), \quad \text{so the (3.9)} \end{aligned}$$

becomes:

$$f_N(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi N} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} (t^2 / N + 1)^{-(N+1)/2} \quad (\text{which is therefore the Student's } t \text{ distribution}). \quad (3.10)$$

So, let's use the (2.2) to get an evaluation of the mean value μ of the whole population, with a confidence level given by $f_N(t)$ (eq. (3.10)).

$N = N_{\text{sample}} - 1 = v$ is the n. of degrees of freedom.

The (3.10) has a distribution integral as well as the normal distribution (page 2), and it is:

$$\phi_N(t) = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi N} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_{-\infty}^t (\theta^2 / N + 1)^{-(N+1)/2} d\theta.$$

The probability that a given value t^* of Student is between $-t$ and $+t$, that is: $-t \leq t^* \leq +t$ is:

$$W_N(t) = \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta = 2\phi_N(t) - 1 \quad (3.11)$$

In fact, $W_N(t)$ values are gathered into tables. There is a table which gives all the t values as a function of W_N (at v , or N) and another table which gives all the W_N values as a function of t (t and v , or N).

$f_N(t)$ is an even function, that is: $f_N(\theta) = f_N(-\theta)$; moreover, from the (3.11), we have:

$$\begin{aligned} W_N(t) &= \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta = 2\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - 1 = 2\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \left(\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta \right) - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] = \\ &= \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \left(\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta + \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta + \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right) \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta - \left(\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta + 2\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right) \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta - 2\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] = \\ &= \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta - 2\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[(-2\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta) + \int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[(-\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta) + \int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta \right] = \int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta + \left[-\int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta \right] = \\ &= \left[\int_{-\infty}^t f_N(\theta) d\theta \right] - \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \left[\int_{-\infty}^{-t} f_N(\theta) d\theta + \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta \right] - \int_t^{\infty} f_N(\theta) d\theta = \int_{-t}^t f_N(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

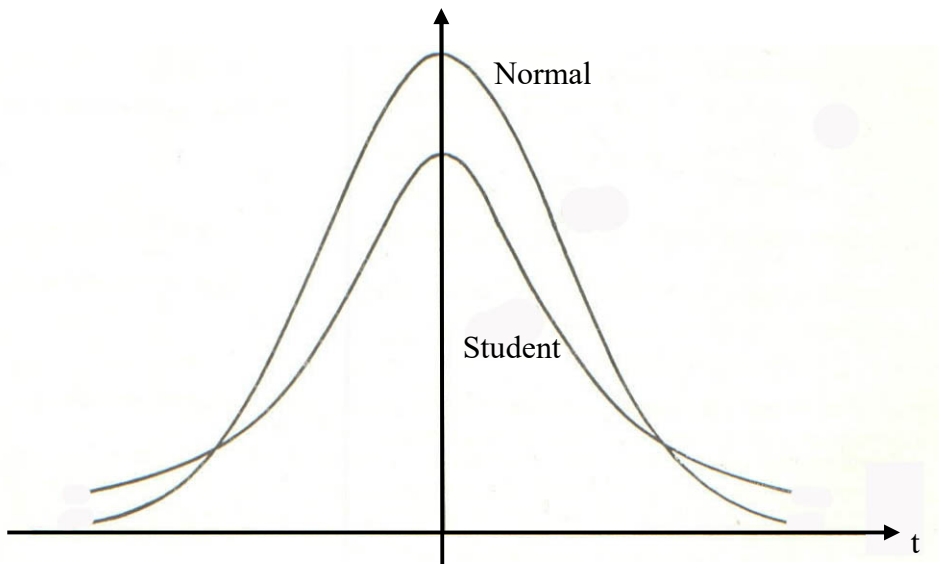


Fig. 3.1-Comparison between Normal and Student's t Distributions.

As we can see in Fig. 3.1, the Student's t Distribution is lower and larger; lower at the origin of axes as handled data are less probable, as N is low, and it's larger at sides (that is when we get far from statistically less wrong/more probable values) as larger errors are typically acknowledged more probability, still because of the low N ($N < 30$). As N is increased, those two distributions start matching (already with $N=40$).

At last, the probability that the (2.2) holds:

$$\mu \rightarrow x = \bar{x} \pm \frac{t\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}}$$

with a certain t is $W_N(t)$ of the (3.11), indeed.

If, on the contrary, we fix the probability (W_N), then from the tables of W_N we can find out the t value under which that is true and from there, through the (2.2), we have an estimate of the mean value μ of the population (but under that W_N probability value) and then one can decide if accepting and going on (for instance, with production processes), or, on the contrary, if refusing and take actions (for instance, by a check of the production machines).

Besides, we have the Type I Error when we (by mistake) refuse instead of accepting, and we have the Type II Error when (by mistake) we accept instead of refusing.

As well as the case of the Normal Distribution, based over the z parameter, also with the case of the Student t parameter, with a sample of N elements, which is, of course, much lower than the population N_p (if it is known) ($N < 30$), we can use the following formula:

$$\mu = \bar{x} + \frac{|t|\sigma_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}}. \text{ When mean value and standard deviation of the whole population are}$$

not known, here is the formula that can be used as a link between the standard deviation σ_N of the

$$\text{sample and that of the whole population } \sigma: \sigma_N = \sigma \sqrt{\frac{N-1}{N}}, \quad (3.12)$$

with the factor $\frac{N-1}{N}$ which is known as the Bessel's Correction Factor.

Proof (of the (3.12)):

let $\bar{x}$ be the mean value of the small sample and μ that of the population; we have:

$$x_j - \bar{x} = (x_j - \mu) - (\bar{x} - \mu) \text{ so: } (x_j - \bar{x})^2 = (x_j - \mu)^2 - 2(x_j - \mu)(\bar{x} - \mu) + (\bar{x} - \mu)^2 \text{ and:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 = \sum (x_j - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) \sum (x_j - \mu) + \sum (\bar{x} - \mu)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) [\sum x_j - N\mu] + N(\bar{x} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) [N\bar{x} - N\mu] + N(\bar{x} - \mu)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - 2N(\bar{x} - \mu)^2 + N(\bar{x} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 - N(\bar{x} - \mu)^2 \rightarrow \end{aligned}$$

(Calculated with the μ of the population, so it's the σ of the population)

$$\rightarrow \left\langle \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 \right\rangle - N \left\langle (\bar{x} - \mu)^2 \right\rangle = N\sigma^2 - N \left(\frac{\sigma^2}{N} \right) =$$

(The σ_x^2 of the mean value, which is known to be $\frac{\sigma^2}{N}$)

then, going on with calculations: $= (N-1)\sigma^2 = N\sigma_N^2$, so: $\sigma_N^2 = \frac{(N-1)}{N}\sigma^2$, qed.

Therefore, an estimation of σ yields: $\sigma = \sigma_N \sqrt{\frac{N}{N-1}}$ and with $N \sim 30 \rightarrow \sigma = \sigma_N$ (3.13)

But such a (3.13) cannot be used with small samples, of course (Student) and the σ given by the (3.12) will be used. Moreover, $\mu = \bar{x} + \frac{|t|\sigma_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}}$ and for non infinite populations, we have:

$$\mu = \bar{x} + \frac{|t|\sigma_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{\frac{(N_p - N)}{(N_p - 1)}}.$$

Comparison between two experimental mean values:

1° sample, n items, mean $\bar{x}$, dev.std. σ_x

2° sample, m items, mean $\bar{y}$, dev.std. σ_y

Question: is the difference $\bar{x} - \bar{y}$ real and with significance or, on the contrary, it's simply due to chance? In other words, in that case, are μ_x and μ_y , or $\bar{x}$ and $\bar{y}$, really different or their difference is due just to chance?

As σ_m (mean) we consider, of course:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{(n-1)\sigma_x^2 + (m-1)\sigma_y^2}{(n-1) + (m-1)}} \quad \text{and} \quad \sigma_m^2 = \sigma_m^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right).$$

At this point, we fix the statistical security threshold W and from the tables we find out for which t^* value this holds. As an example, we choose a $W=0,05 \rightarrow 5\%$ and we look up in the table that W of 0,05 corresponding to a $v=n+m-2$. Once we get a t^* , according to what we already know on the Student's t Distribution statistics, we have: $\mu = \bar{x} + |t|\sigma_m$ generically and, on our specific case:

$$|\mu_x - \mu_y| = |\bar{x} - \bar{y}| + |t|\sigma_m; \quad (3.14)$$

As the supposition $\mu_x = \mu_y$ in the (3.14) causes: $|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_m}$, then the supposition $\mu_x = \mu_y$ is accepted

if $\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_m} < t^*$, while it's refused and $\mu_x \neq \mu_y$ if $\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_m} \geq t^*$.

Conversely, in case we know the standard deviations of the population, then we consider:

$\sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$, and in this case we refer no more to t, but to z, as the z parameter follows the normal distribution and not the Student's one, as we have the σ values of the population; therefore, in such a case: $z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_D} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$ and once $W(z)$ is fixed, we get the z and

$z > \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_D}$ allows the acceptance of the supposition $\mu_x = \mu_y$ (just like the previous case), while the

refusal is represented by the situation: $z \leq \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_D}$.

EXAMPLE 1 of use of the Student's t Distribution:

A machine has produced washers with a mean thickness of 0,05cm ($\mu=0,05\text{cm}$). In order to understand if the machine is working properly, we sample $N=10$ washers, then we measure their thickness and figure out the mean value, which results to be, say, $\bar{x} = 0,053\text{cm}$; we also figure out the standard deviation of such a sample, which is:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{x})^2}{(N-1)}} \text{ and we get, say, } \sigma_N = 0,003\text{cm}.$$

Then, we evaluate the reliability of the machine, at the beginning under a significance level of 5% (0,05) and then of 1% (0,01).

A)0,05: $N < 30$, so we do not use the normal distribution, but rather the Student's t one:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} = \frac{(0,053 - 0,05)}{0,003} \sqrt{10-1} = 3,00.$$

Now, if we want to stay within the 5% (0,05), and being that the diameter deviates either upwards or downwards, then we have a +2,5% and a -2,5% of samples out, so bringing the acceptance range to 97,5% $(-(100\% - 2,5\%) \text{ and } +(100\% - 2,5\%))$, that is between -0,975 and +0,975; then, we look up in the Student's table the $t_{0,975}$ corresponding to a $v=N-1=9$ and we find the value $t_{0,975}=2,26$; as our t is 3, it is out of the range $(-2,26 \div +2,26)$, so we refuse and have the machine checked.

B)0,01: conversely, if we keep over the 1%, then we can go over upwards and downwards about 0,5%, so we have an acceptance range of good samples at 99,5% $(-(100\% - 0,5\%) \text{ and } +(100\% - 0,5\%))$ that is between -0,995 and +0,995 and so we look up in the Student's table the $t_{0,995}$ corresponding to a $v=N-1=9$ and find $t_{0,995}=3,25$; finally, as our $t=3$ stays within the range $(-3,25 \div +3,25)$, then we accept the status of the machine (at 1%) and:

$$\bar{x} - t_{0,995} \frac{\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}} < \mu < \bar{x} + t_{0,995} \frac{\sigma_N}{\sqrt{(N-1)}}.$$

EXAMPLE 2 of use of the Student's t Distribution:

Steel cables are produced; we sample $N=6$ cables and the mean value of the breaking load of such 6 cables is $\bar{x} = 7750\text{kg}$ (but we claim a value of 8000kg), and with a standard deviation σ_N of 145kg.

$$(\sigma_N = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_6 - \bar{x})^2}{(N-1)}} = 145\text{kg})$$

Can we, on the basis of the results coming from the 6 cable sample, reassure the producer at a significance level of A)0,05 (5%) and B)0,01 (1%) ?

In this case, the producer is not satisfied only when $x < 8000\text{kg}$, as if $x > 8000\text{kg}$, so much the better; so, we can not to go just downwards (-):

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_N} \sqrt{(N-1)} = \frac{(7750 - 8000)}{145} \sqrt{6-1} = -3,86.$$

A)5% (0,05) Then, we look up in the Student's table the $t_{0,95}$ corresponding to a $v=6-1=5$ and find $t_{0,95}=+2,01$; $(-t_{0,95}=-2,01)$; as $t=-3,86 < -t_{0,95}=-2,01$, then we refuse and DO NOT reassure the producer.

B)1% (0,01) $t_{0,99(v=5)}=+3,36 \rightarrow (-t_{0,99}=-3,36)$; as our $t=-3,86 < -t_{0,99}=-3,36$, we refuse.

EINSTEIN INTO HUBBLE

In relativity time t is held as the fourth dimension; but the time meant as a length (as it is a dimension): $x_4 = c \cdot t$.

Time is just the name which has been assigned to a mathematical ratio relation between two different spaces; when I say that in order to go from home to my job place it takes half an hour, I just say that the space from home to my job place corresponds to the space of half a clock circumference run by the hand of minutes. Therefore, only the three-dimensional space gives us the sense of proportion and the physical sense of things. Even electromagnetic quantities are somewhat space dependent and take meaning from the space: I can conclude two electrons repel as long as the space between them increases.

Moreover, human beings have always measured time by referring to natural events ("space" ones), such as the motion of the Earth around the Sun (year), the spinning of the Earth around itself (day) etcetera.

Therefore, in order to go deeper into that, we know from the cosmology that the Hubble's Constant

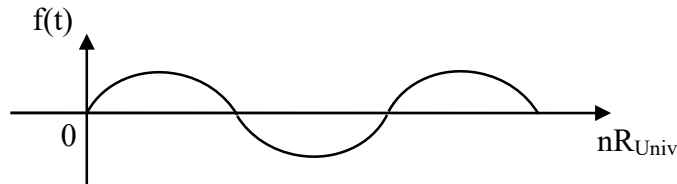
H is: $H \cong 72 \text{ km}/(s \cdot \text{Mpc}) \cong 2,338 \cdot 10^{-18} [(\frac{m}{s})/m]$ and in our universe the Hubble's Law stands:

$H \cong c/R$, so: $R = \frac{1}{H}c = t_{\text{Univ}}c$, that is the inverse of the Hubble's Constant is the age of the

universe. Then, time is the radius R of the universe (meant as the Hubble's Sphere) through a constant c . The universe is "THE EVENT"; it's the event of all events, so we must refer to it, as if it was the clock of a CPU (microprocessor).

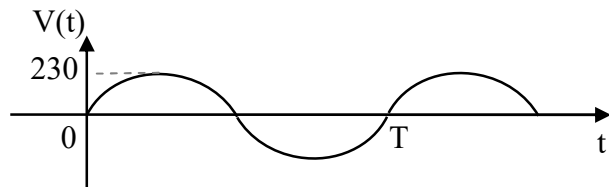
A second is long or short (and we know it's short) according to the length of the day, from the sunrise to the sunset and/or the length of a year (a complete revolution around the Sun).

Therefore, in every graph, on every Cartesian plane, where there is the time t on the axis of the abscisses, we can replace t by nR_{Univ} .



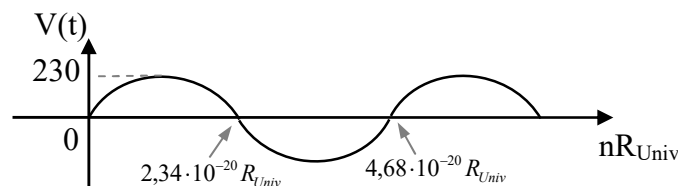
As a specific case, we use the voltage $V(t)$ we have at home, at 230V ac, 50Hz,

$V(t) = 230 \cdot \sin(2\pi 50t)$: (we put, out of simplicity, $V_{\text{Max}} \approx V_{\text{rms}} = 230\text{V}$)



$$T = 1/f = 1/50 = 20 \times 10^{-3} \text{ s} = 20 \text{ ms.} \quad R_{\text{Univ}} = \frac{c}{H} = \frac{2,99792458 \cdot 10^8}{2,338 \cdot 10^{-18}} = 1,28 \cdot 10^{26} \text{ m}$$

$$R_T = cT = (H \cdot R_{\text{Univ}})T = 2,99792458 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 5,99 \cdot 10^6 \text{ m} = (H \cdot T)R_{\text{Univ}} = 4,68 \cdot 10^{-20} R_{\text{Univ}}$$



MICHELSON-MORLEY INTO EINSTEIN

Why $E=mc^2$ and not $E=(1/2)mc^2$?

In order to answer the question in the title, a hint can be received by the Virial Theorem, which tells us, after simplifying things a bit, that:

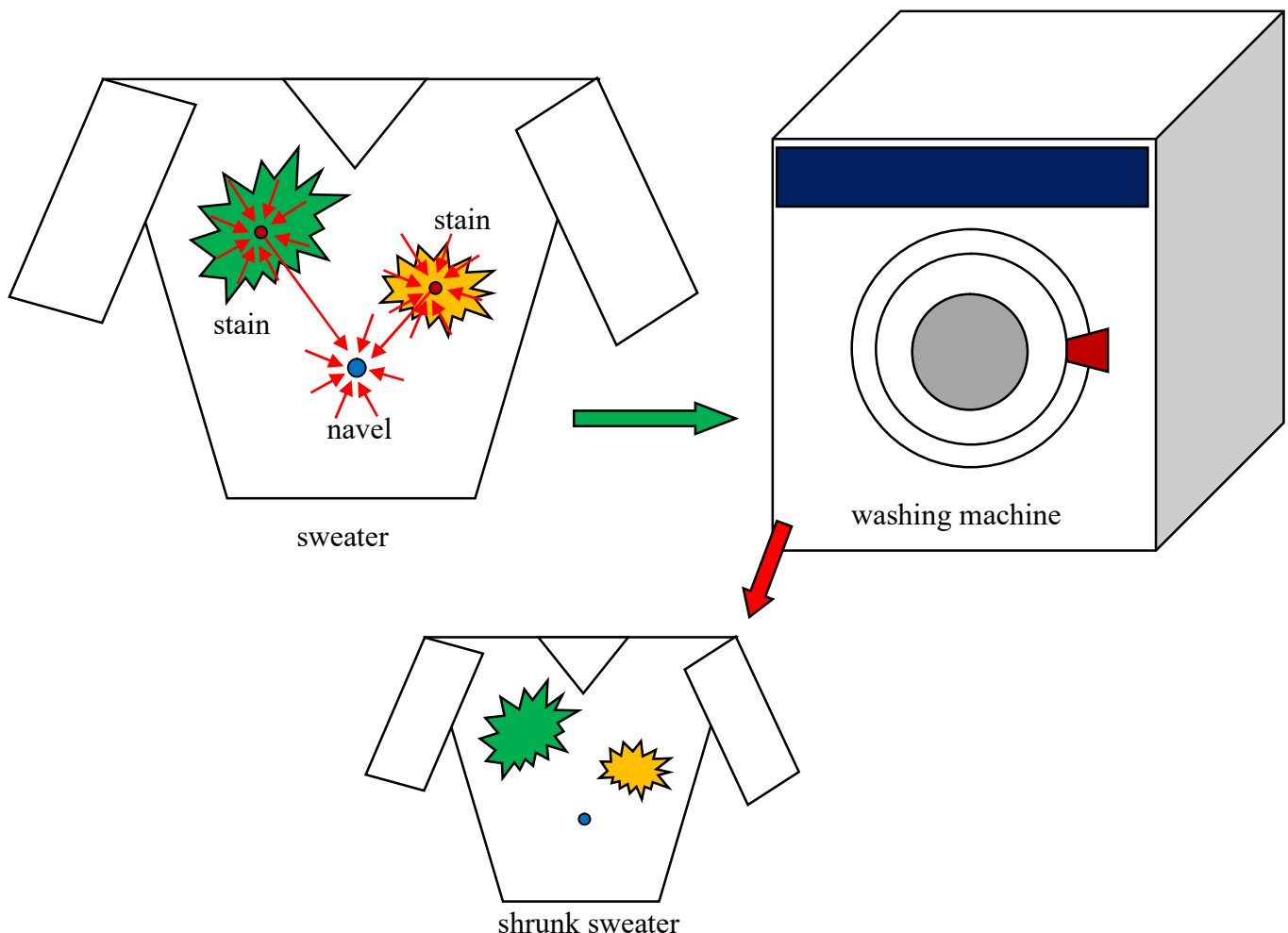
$|E_P| = |2E_K|$; in fact, regarding the kinetic energy, we have: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ and if we require the

balance between gravitational and centrifugal forces, we get: $F = \frac{GMm}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$, so:

$E_P = \vec{F} \cdot \vec{R} = F \cdot R = \frac{GMm}{R} = mv^2 = 2E_K$, so, by identifying the rest energy E_0 owned by a mass m_0

with a potential energy E_P , we have, indeed: $E_0 = E_P = 2E_K = 2 \frac{1}{2} m_0 c^2 = m_0 c^2$.

And we (theoretically) know, not just by chance, from the Hubble's Law, that whatever the direction we observe is, we see objects getting farther, so, during the free falling of everything at the universal speed c , into the universe, then every direction is the centre, that is a supposed "centre of mass" of the universe (in a clearly non Euclidean geometry) for those who support the accelerated collapsing towards "the centre", or it conversely represents "the outer space" towards which the universe is expanding, for all those who support the expansion (that is the majority of the scientific community), which, unfortunately, should be decelerated and not accelerated, like it actually is.



It's about something like what is represented in the above figure, where a stained sweater is washed in a washing machine and later it comes out all shrunk, but the shrinking centre is not only the general one of the entire sweater, which is represented by the navel point, but rather also the centres of each stain are shrinking centres as well, towards which all the points of each stain converge, indeed. In the end, every point is a centre/the centre!

Therefore, by summing it up a bit, a mass m_0 which is into its universe, whose mass is M_{Univ} , will have a potential energy $E_p = \frac{GM_{Univ}m_0}{R_{Univ}} = m_0v_{Univ}^2 = m_0c^2$. Now, if such a free falling mass m_0 into

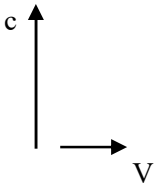
the universe, with speed c , but still with respect to us (as we are free falling with it, as well) is given a velocity V , what will happen is that the new free fall velocity v_{Tr} of m_0 will be a composition of c and V ; more exactly:

$$v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2}, \quad (1)$$

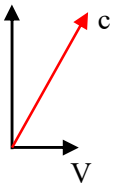
from which:

$$V = \sqrt{c^2 - v_{Tr}^2}. \quad (2)$$

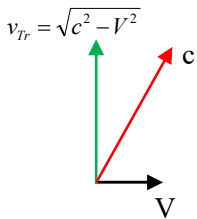
In order to justify all that, we consider, over the two dimensions of a drawing which represents such an experiment, the ordinary free fall velocity c vertically, from bottom to top and the V given by us to the object m_0 as transversal, with respect to c , and from left to right, that is what is represented right below:



now, the composition of such two velocities will be that vectorially represented by the red vector below:

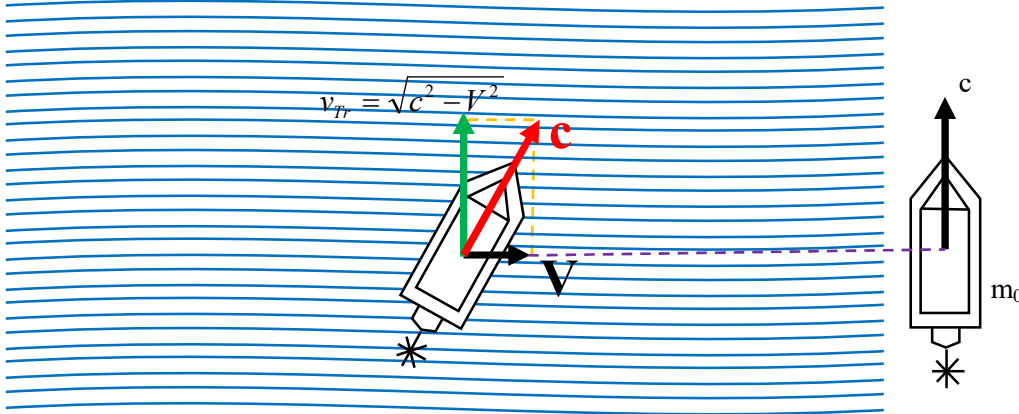


but with the red vector, which is representing the ordinary fall of m_0 in the universe, that has the same value c , while we, as observers who are free falling with m_0 , will see m_0 itself as having just (the horizontal) V and so we will conclude that the new free fall (that we cannot see) of m_0 in the universe will be the v_{Tr} of the green vector below, by using the Pythagorean Theorem, which is lower than c :

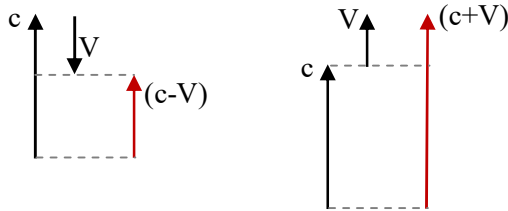


For a better clarity, we suppose that the mass m_0 is a dinghy whose engine is capable of pushing the boat to a speed c and we also suppose that in the river (which acts as the universe) there is a transversal water current, from left to right, at speed V ; then, under the same landing point request, the new inclined path of the boat in the river will be at speed c anyway, as this is what its engine is

capable to do (in water), and also when the path is inclined, indeed, but the new velocity the dinghy will have vertically will be $v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2}$:



At last, we remind that a velocity like the $v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2}$ comes out also in case of velocities V given as parallel to the direction of movement, that are $(c+V)$ or $(c-V)$:



in fact, the geometric mean between the two velocities $(c+V)$ and $(c-V)$ is:

$$v_{Tr} = \sqrt{(c+V)(c-V)} = \sqrt{c^2 - V^2} .$$

Moreover, the (1) comes out also from the Michelson-Morley experiment reported below; in fact, there the equation (A1.1) is underlined and it tells us that when the light (c) moves transversally (v_{Tr}), with respect to the motion (V) of the source (that is the Earth) through the ether, then it's like if the target S_2 (the arrival point of the light) slips away transversally, so forcing the light to travel through a longer way (a hypotenuse) which would then be the same as travelling along the same shorter way (a cathetus), but with a speed which is reduced by the Pythagorean Theorem, that is:

$$v_{Tr} = \sqrt{c^2 - V^2} .$$

Now, after repeating that the intrinsic energy E_0 (which stands also without any movement) a mass m_0 has, is a potential energy (that is $E_0 = m_0 c^2$) conferred to it exactly by the universe, and also recalling the free falling motion, at speed c , in the universe, and after repeating also that when, as previously supposed, such a falling energy became $E_{Tr} = E_0 + E_K$ when we obviously supplied a kinetic energy E_K (that which corresponds to V) to the mass m_0 indeed (which is still and has an energy E_0), then the law of the inverse proportionality claims:

$$[v_{Tr}] \cdot [E_0 + E_K] = [c] \cdot [E_0] , \text{ that is: } \frac{v_{Tr}}{c} = \frac{E_0}{E_0 + E_K} = \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K} , \text{ so:}$$

$$v_{Tr} = c \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K} \quad (3)$$

as we have a falling at c , indeed, with E_0 , and a falling at v_{Tr} with an increased energy $(E_0 + E_K)$.

Now, by inserting the (3) into the (2), we get:

$$V = \sqrt{c^2 - v_{Tr}^2} = \sqrt{c^2 - \left(c \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K}\right)^2} \quad (4)$$

and by cropping E_K out of it, we finally get:




$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

(5)

which is exactly the expression for the Einstein's kinetic energy E_K and with a total energy $E_T = \gamma m_0 c^2$ and with all this which confirms the initial supposition, that is: $E_0 = m_0 c^2$!!

And if $E_K \ll m_0 c^2$ and considering that from Taylor, when $x \ll 1$, we have: $(1-x)^2 = 1-2x$ and $1/(1+x) = 1-x$, then, still because of the (4), it follows that:

$$V = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_K} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{E_K}{m_0 c^2}} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{E_K}{m_0 c^2} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2E_K}{m_0 c^2} \right)} = c \sqrt{\frac{2E_K}{m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{2E_K}{m_0}}$$

da cui: $E_K = \frac{1}{2} m_0 V^2$ (Newton!!).

Moreover, it's not just by chance that, according to the (1), the new free falling speed v_{Tr} is no longer c , but it tends to zero as long as the speed V conferred to a body gets close to c , and a zero free falling speed would correspond, as chance would have it, to a steady universe, that is to a still time, not flowing, just like it is required by the Einstein's theory for all those bodies which approach c .

At last, we give a hint on what happens when, on the contrary, the observer (the human being) is not the one who gives an additional speed (and so also an additional energy) to a body, but rather it is the universe that, on itself, through its cycle (for instance, by a deceleration) makes a body lose energy (E_{Lost}), by irradiating it; but in this case the human being has no power; it is the universe the one which decides what, through its timing; therefore, in this case, an equation similar to the (3) would tell us that, regarding such a loss of free falling energy, we have:

$$v_{Tr} = c \frac{m_0 c^2 - E_{Lost}}{m_0 c^2} \quad (6)$$

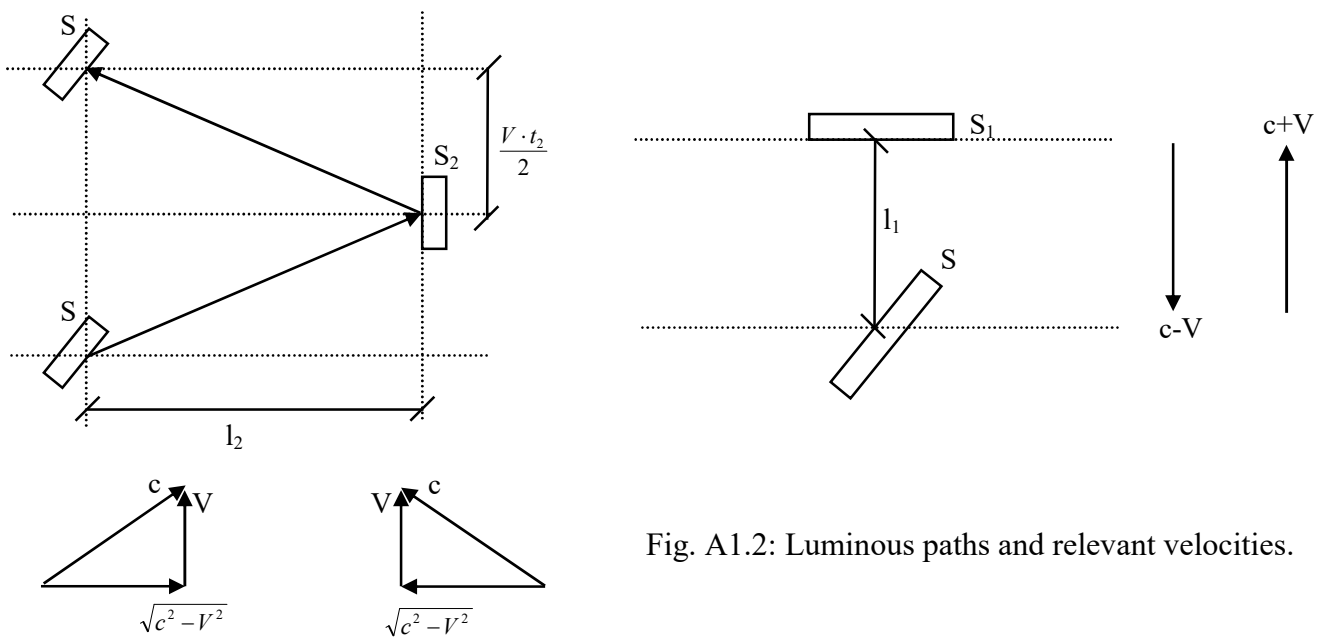
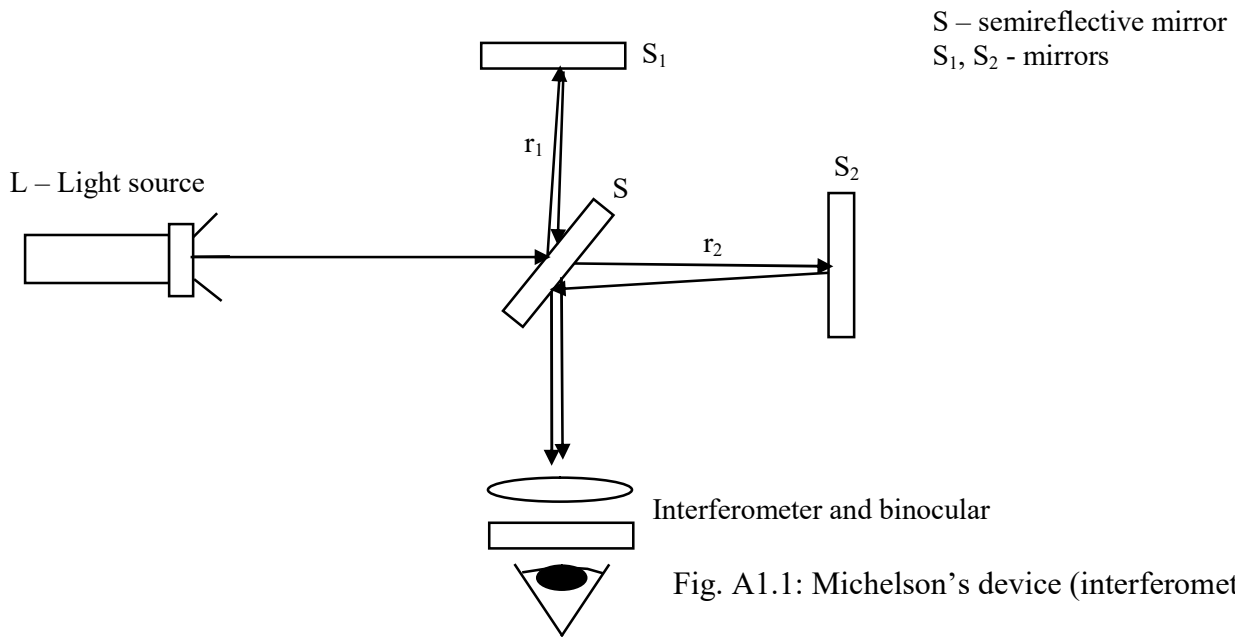
which, once again, if inserted into the (2), yields:

$$V = \sqrt{c^2 - v_{Tr}^2} = \sqrt{c^2 - \left(c \frac{m_0 c^2 - E_{Lost}}{m_0 c^2} \right)^2} \quad (7)$$

and by cropping E_{Lost} out of it, we will get:

$E_{Lost} = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) = m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)$, and only the energy $E_R = \frac{1}{\gamma} m_0 c^2$ will be left, and such an equation is completely unknown in the official relativity.

The Michelson-Morley experiment



Before Einstein, they thought that electromagnetic waves, and so the light, had to propagate in a mean, as well as for sounds in the air. They supposed that the space was filled with an invisible and very light gas, the ether. The Earth rotates around the Sun with a speed V around 30 km/s, so it should move through the ether with such a speed and light emitted by a light source which is on the Earth itself should have, in general, a speed different from c ($c \pm V$ along the direction of rotation of the Earth and $\sqrt{c^2 - V^2}$ transversally).

In 1886 they started to prepare the experiment which should have proved the movement of the Earth through the ether. In Cleveland they stopped the street traffic during the experiment in order not to have vibrations; the device was put on a floating stone slab in a well of mercury, to easily rotate it of 90° without vibrations.

Now, if you put l_1 along the direction of rotation of the Earth, about the - to and fro - light path, we have:

$$t_1 = \frac{l_1}{c+V} + \frac{l_1}{c-V} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{(1-V^2/c^2)} \text{ and for the transversal path along } l_2:$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} \quad (\text{A1.1})$$

If you make both rays enter an interferometer to make them interfere, indeed, they should arrive with a Δt :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_1}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_2(1+V^2/2c^2) - l_1(1+V^2/c^2)]$$

as we have $V/c \cong 10^{-4}$, $V^2/c^2 \cong 10^{-8}$ and $(1+x)^k \cong 1+kx$.

The wavelength of the used light was $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} m$ and we know that λ corresponds to the full angle 2π ; therefore, we can write the following proportion, which involves the phase difference δ between the two rays and the path difference $c\Delta t$:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c\Delta t}{\delta}, \text{ from which: } \delta = \frac{2\pi c\Delta t}{\lambda}.$$

By fixing the one arm length and adjust the other arm one by a micrometric screw, you can make $c\Delta t$ of the same size of λ , so making the desired interference phenomenon.

Now, without bringing any change to the geometry of the device, rotate it of 90° ; the roles of l_1 and l_2 are so swapped and we'll have:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_2}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_1(1+V^2/2c^2) - l_2(1+V^2/c^2)]$$

and we should also have: $\frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{\delta - \delta'}{2\pi} = \frac{c\Delta t - c\Delta t'}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \frac{V^2}{c^2} = \frac{22m}{5,5 \cdot 10^{-7}m} 10^{-8} \cong 0,4$, that is,

through the rotation of the interferometer, you should see a shift of the fringes of interference of 0,4 times the distance λ between two subsequent maxima.

In reality, none of all that was observed, despite the accuracy of the devices was as good as to detect a $\frac{\Delta\delta}{2\pi} = 0,01$!

Michelson declared himself to be disappointed by that experiment, as he couldn't prove the movement of the Earth through the ether.

The question was solved in 1905 by an employee of the Patent Office of Berne, Albert Einstein, who suggested to cease searching for a proof of the movement of the Earth through the ether, for the simple reason that the ether is not existing!