

Fundamental 3D- Quantum-Gravity on a Planck-Lattice with time on geodesics and the Quantum-Blob-Dynamics (QBD)

Abstract:

A quantum spacetime model is presented in which a rigid Planck lattice is generated between the geodesics, which transitions smoothly onto the geodesics and in which time is defined only on the geodesics, not on the lattice. The Planck lattice consists of squares of Planck length surfaces or multiples thereof. The resulting spacetime dynamics is discussed in the form of a "quantum blob structure." Possible measurability is explored, using the analogy of spacetime Brown motion on matter masses. These blobs exhibit analogies to Wheeler's geons in the Wheeler-de-Witt equation and to geometrons but are only excited quasi-particles in spacetime. Local Inertia as a spacetime phenomenon is defined via quantum coupling of the blob structure.

Key-words: quantum-grid; quantum lattice, discrete Planck-gravity; emergent gravity; discrete metric; time on geodesics; hybrid-model; space quantization; classical time; quantum blob dynamics, blob-caused inertia.

Holger A.W. Döring
Technische Universität Berlin
Germany
DPG Departement: matter and cosmos
Section: GRT and gravity
Physikalische Gesellschaft zu Berlin
Oxford-Berlin University-Alliance,
Research Partnership
ORCID: 0000-0003-1369-1720
e-mail: holger.doering@alumni.tu-berlin.de
h.doering.physics.tu-berlin@t-online.de

I. Introduction:

A discrete, Planck-like structure of spacetime is combined with a smooth, classical spacetime description using geodesics in the sense of the world lines of ground relativity, on which time is also defined. Timelike structures thus exist only along the geodesics, not across the entire spacetime volume. Between these geodesics lies a rigid Planck grid whose side lengths form a square of Planck lengths or a multiple thereof. There are no topological breaks or jumps between the grid and the transition to the geodesics; that is, the grid is intended to connect seamlessly to the geodesics, and there is therefore a continuous transition between the discrete and smooth structures. This grid acts as a discrete approximation of the spacetime metric, which becomes classically smooth on large scales in the sense of ground relativity. The focus here is on a two-dimensional grid, i.e., a surface structure that serves only as an example for spacetime. The model should be as consistent as possible in its description and is similar to the Regge calculus or causal dynamic triangulation (CDT) [1.]. Gravitation is assumed to emerge from a quantized structure.

This results in a hybrid geometry where a set of geodesics γ_i is defined on a smooth time coordinate t_i . Furthermore, there is a discrete set of connecting surfaces $S_{i,j}$ between the geodesics γ_i and γ_j ,

consisting of squares of the Planck length L_{PL} . A continuous transition condition ensures that the grid consistently conforms to the geodesics, i.e., $\exists \lim_{x \rightarrow \gamma_i} g_{ij}(x) = g_{geo}(\gamma_i)$. This yields a discrete network calculus like a spin network or Regge grid, with the restriction that time is defined only on the worldlines of the geodesics, not in the grid or around the entire complex. Time thus emerges as a quantity; it is not everywhere, but only where there are worldlines that carry it.

One dimension thus corresponds to "space," e.g., the distance between geodesics, but "time" itself is defined only on the geodesics, i.e., not spatially, but only on individual lines. The surface therefore represents the overall structure, but the local "time axes" (and thus light cones) exist only along the curves of the geodesics γ_i . A local time coordinate is defined along each geodesic γ_i . This time is initially intrinsic: it belongs only to that geodesic and therefore cannot yet be readily compared with another geodesic. There is thus no direct temporal relationship between two geodesics, only a spatial proximity described by the grid. This idea is similar to relational spacetimes and emergent time in quantum cosmologies [2.],[3.].

Therefore, it follows that:

Time exists only as a relationship between world lines, not as a global dimension.

II. Methods/Calculation:

II.1 The Planck-lattice:

Between the geodesics, a rigid Planck lattice exists, consisting of squares of Planck length surfaces. This lattice forms the discrete structure of space, a kind of fundamental quantum space structure. Zwischen den Geodäten sei ein starres Planck-Gitter vorhanden, bestehend aus Quadraten von Plancklängenflächen. Dieses Gitter bildet die diskrete Struktur des Raumes, eine Art Quantenraumgrundstruktur.

Formally:

$$L = \{ (x_i, x_j) \mid |x_i - x_j| = n \cdot L_{PL} \}; n \in \mathbb{N}. \quad (1a.)$$

Thus, the squares are elementary surfaces, analogous to the surface quanta in loop gravity.

For a continuous mapping between this discrete lattice and the smooth geodesics, the following holds:

There exists a mapping:

$$\Phi: L \rightarrow M, \quad (1b.)$$

where the discrete grid is L , M is the smooth manifold of geodesics and Φ transitions continuously to geodesics in a topological sense at the grid boundaries.

So formally:

$$\lim_{x \rightarrow \gamma_i} \Phi(x) = \gamma_i(t_i) \quad (1c.)$$

This means that the grid points lying on a geodesic seamlessly transition into the smooth time curve of that geodesic. This continuity requirement prevents a jump at the boundary between the quantized grid surface and the smooth worldline. This results in a hybrid spacetime model in which space has a discrete structure on the Planck grid, on the Planck scale. Time exists only locally and relationally along the geodesics. Gravity or metrics can emerge if the local structure changes, such

as the curvature or density of the grid. On large scales, this granular structure smooths out and merges into the description of classical ground relativity.

Philosophically, but also physically, this strongly suggests that space emerges first, quantizes, and time emerges only between ordered states along the geodesics.

II.2 Formaler Aufbau des 2D-Quantenraumzeit-Modells:

Definiert werden zwei Ebenen als Grundelemente für diskrete und glatte Bereiche:

II.2.1. Das Planck-Gitter:

eine diskrete Menge von Punkten die durch Plancklängen L_{PL} voneinander getrennt sind. Dieses Gitter heiße:

$$L = (V, E), \quad (1d.)$$

wobei V die Gitterpunkte (Vertices) und E die Kanten (Edges) des Gitters sind.
Es handelt sich um ein 2D-Quadratgitter:

$$V = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}; E = \{(i, j), ((i+1), j); (i, j), (i, (j+1))\} \quad (1e.)$$

Jeder Knoten liegt im Abstand L_{PL} von seinen Nachbarn.

II.2.2. Die Geodätenmenge:

eine endliche oder abzählbare Menge von glatten Kurven:

$$\Gamma = \{\gamma_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}\} \quad (1f.)$$

Auf jeder Geodäte γ_k ist eine Zeitkoordinate t_k definiert;

$$\gamma_k(t_k) = (x_k(t_k), y_k(t_k)) \quad (1g.)$$

Diese Kurven verlaufen durch das Gitter aber nicht notwendigerweise entlang der Gitterlinien.
Die Raumzeit-Aufteilung sieht also wie folgt aus:

1. der diskrete Bereich des Gitters L , das den Raum repräsentiert,
2. der glatte Bereich der Geodäten Γ , auf denen Zeit existiert.

Daher sei der Gesamttraum definiert als:

$$M_{Hybrid} = L \cup \Gamma \quad (1h.)$$

mit der Bedingung:

$$\Gamma \cap L \neq \emptyset \quad (1i.)$$

Die Geodäten durchqueren also das Gitter.

II.2.3. Abbildung zwischen Gitter und Geodäten:

Weil die Forderung ist, dass das Gitter stetig auf die Geodäten übergeht, muss der Prozess formalisiert werden durch eine stetige Abbildung:

$$\Phi: L \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (1k.)$$

so dass gilt:

1. auf den Gitterpunkten selbst ist $\Phi(i, j)$ einfach die Einbettung in den euklidischen Raum, also die Position des Gitterpunktes.
2. Für Punkte, die an eine Geodäte grenzen, z.b. $(i, j) \approx \gamma_k(t_k)$, gilt die Garantie der Stetigkeit im Übergang mit:

$$\lim_{(i, j) \rightarrow \gamma_k(t_k)} \Phi(i, j) = \gamma_k(t_k) \quad (1l.)$$

Eine Annäherung auf dem Gitter an eine Kurve erzeugt also eine Verschmelzung des diskreten Gitters mit der glatten Kurve der Geodäte. Zwei Punkte auf dem Gitter heißen benachbart, wenn gilt: $P(i, j)/B/P(i', j')$.

II.2.4. Diskrete Metrik auf dem Gitter:

Die Definition dafür lautet:

$$g_{(i, j), (i', j')} = \begin{cases} L^2_{LP}, & \text{if } P(i, j)/B/P(i', j') \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2a.)$$

Das ist eine diskrete Version des metrischen Tensors, die nur die Abstände zwischen Nachbarpunkten berücksichtigt. Als Graphikmetrikschema:

$$d_L((i, j), (i', j')) = n \cdot L_{PL}, \quad (2b.)$$

wenn die Punkte durch n Gitterkanten verbunden sind.

II.2.5. Lokale Krümmung, Energiezustände:

Analog zum Regge-Kalkül lässt sich Krümmung in der diskreten Struktur über Defizitwinkel oder Verbindungsabweichungen definieren:

$$R(i, j) = 2\pi - \sum_{\text{surrounding square-areas}} \theta(i, j) \quad (3a.)$$

Diese Krümmung kann definiert werden als lokale Energie-oder Gravitationseigenschaft der Fläche an diesem Punkt. Die Summe der umgebenden Quadrate über dem Winkel $\theta(i, j)$ wird als „region“, also als $reg \theta(i, j)$ bezeichnet. Es gilt also:

$$R(i, j) = 2\pi - reg \theta(i, j) \quad (3b.)$$

Unter der Annahme, dass die Gravitation emergent wäre, gilt dann:

$$R(i, j) \propto \rho(i, j), \quad (3c.)$$

mit $\rho(i, j)$ als lokaler Energiedichte, z.B. Anzahl der Planckquanten im Quadrat.

II.2.6. Dynamik der Geodäten und Zeitentwicklung:

Da Zeit nur auf den Geodäten definiert ist, erhält jede Geodäte ihre eigene, intrinsische Zeitentwicklung:

$$\frac{d^2 \gamma_k^\mu}{dt_k^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(\gamma_k) \frac{d\gamma_k^\nu}{dt_k} \cdot \frac{d\gamma_k^\rho}{dt_k} = 0 \quad (4a.)$$

Die Verbindungsterme Γ (Christoffelsymbole) hängen hier nicht von einer kontinuierlichen Metrik ab sondern können aus den lokalen Gitterkrümmungen $R(i, j)$ approximiert werden. D.h. die Geodäten spüren sozusagen die Krümmung des Gitters und ändern dadurch ihre Form – so entstünde eine emergente Gravitation.

II.2.7. Notwendig verlangtes Glattheitslimit zum klassischen GRT-Fall:

Wenn man die Plancklänge $L_{PL} \rightarrow 0$ gehen lässt (kontinuierliches limit), wird die Mannigfaltigkeit klassisch $L \rightarrow M_{Cont}$ und die Metrik $g(i, j)$ wird ebenso zu einer glatten, klassischen Metrik $g(\mu, \nu)(x)$. Auch die Geodätengleichung wird klassisch:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0 \quad (4b.)$$

Damit ergibt sich im Grenzfall die klassische Raumzeit der GRT. Die notwendige, geforderte Anschlussbedingung ist also erfüllt.

Strukturübersicht als Tabelle 1:

Ebene	Strukturtyp	Definition	Phasikalische Bedeutung
L	Diskret (Graph)	Planck-Gitter	Raum (quantisiert)
Γ	Glatt (Kurvenschar)	Geodäten	Zeiträger
Φ	Abbildung	$L \rightarrow \Gamma$	Stetiger Übergang
$g(i, j)$	Diskrete Metrik	L^2_{PL} -Abstände	Diskrete Raumgeometrie
$R(i, j)$	Krümmung	Defizitwinkel	Lokale Gravitation
t_k	Zeitparameter	Auf γ_k	Lokale Zeit

Tabelle 1: Die wichtigsten Grundgrößen der Quantengitter-Gravitation im Überblick.

II.2.8. Konsistenzbedingungen:

Damit das Modell mathematisch konsistent ist, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Stetigkeitsbedingung an der Schnittstelle:

$$\Phi/\partial L = \gamma_k / \text{Schnitt} \quad (5a.)$$

2. Die Krümmungsverteilung muss endlich sein:

$$\sum_{i,j \in L} |R_{[i,j]}| < \infty \quad (5b.)$$

3. Die Gitter-zu-Geodäte-Kopplung darf keine Singularität enthalten:

$$\lim_{x \rightarrow \gamma_k} R_{[i,j]} = \exists \quad (5c.)$$

Bemerkung: Bleibt man beim Quadratgitter, muss man die Krümmung über die Abweichungen der Winkelsumme definieren. Ansonsten kann man eine Triangulierung verwenden anstatt eines Quadratgitters (Simplexe). Dann können Krümmungen über Defizitwinkel wie im Regge-Kalkül definiert werden.

4. Geodätenmenge:

Die Konsistenz der Geodätenmenge $\Gamma = \{\gamma_k\}$ muss gewährleistet sein. Jede Geodäte $\gamma_k: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine glatte Kurve und t_k ist lokal eine Zeitkoordinate. Es ist logisch konsistent, Zeit nur auf diesen Kurven zu definieren (lokale Zeit). Mathematisch entsteht dadurch eine Bündelstruktur $M_{\text{Hybrid}} = L \cup \Gamma$, wobei Γ eine eingebettete, eindimensionale Untermenge ist. Damit die Vereinigung topologisch sinnvoll ist, muss jede γ_k eine stetige Abbildung haben mit:

$$\gamma_k: I_k \rightarrow |L|,$$

also im Realraum denselben Zielraum wie das Gitter. Also gelte die Annahme, dass L im $\mathbb{R}^2$ eingebettet ist und die Geodäten ebenfalls. Dann ist:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^2; L \subset \mathbb{R}^2$ und die Schnittmenge ist wohldefiniert.

5. Stetige Abbildung $\Phi: L \rightarrow \mathbb{R}^2$:

Eine stetige Abbildung Φ , die das Gitter in den glatten Bereich überführt, ist mathematisch möglich, solange das Gitter in denselben topologischen Raum eingebettet ist.

Die Bedingung $\lim_{x \rightarrow \gamma_k(t_k)} \Phi(x) = \gamma_k(t_k)$ garantiert, dass das Gitter an der Kante keine Sprung zeigt, d.h. die Topologie bleibt erhalten. Um die Stetigkeit physikalisch interpretierbar zu machen, sollte Φ differenzierbar auf den Geodäten sein;

$\exists \partial_i \Phi(x)$ für $x \in \gamma_k$. Dadurch können Krümmungen oder Ableitungen an der Schnittstelle definiert sein.

6. Diskrete Metrik:

Die lokale Metrikdefinition $g((i,j), (i',j'))$ ist korrekt und entspricht dem Standardvorgehen in diskreter Geometrie. Dieses Struktur erfüllt die üblichen metrischen Axiome:

1. $d(x,y) \geq 0$, Positivität,

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x \equiv y \vee x = y)$, Identität, (6a.-d)
 3. $d(x, y) = d(y, x)$, abelsche Raumstruktur,
 4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, Dreiecksungleichung im euklidischen Raum.
 Es handelt sich also um einen echten, metrischen Raum.
 Für spätere Dynamik kann gelten:

$g(i, j) = g_{i,j} = f(i, j)$ sei ein Feld, das schwanken darf, z.B. durch Energieeintrag. Damit werden kleine, sehr lokale Variationen der Plancklänge virtuell erlaubt, etwa als Schwankungen im Gitter durch lokale Deformationen interpretierbar.

7. Krümmung :

Für die Krümmung $R(i, j)$ gilt folgende Konsistenz:

eine Definition wie im Regge-Kalkül über Defizitwinkel:

$R_P = 2\pi - \sum_{reg_P} \theta_p$, wobei θ_p die Innenwinkel der Polygone in der Region um den Punkt P sind.

Diese Größe ist der skalaren Krümmung analog und kann mit Energie verknüpft werden.

In einem flachen Quadratgitter ist $R_{i,j} = 0$. Eine nichtflache Krümmung lässt sich erzeugen, indem z.B. die Gitterzellen verzerrt oder Winkelabweichungen eingeführt werden als Diskretisierung einer Raumzeitkrümmung.

8. Zeitentwicklung der Geodäten bzw. auf den Geodäten:

Die Konsistenz der formal korrekten Geodätengleichung entsteht durch das Ersetzen der klassischen, kontinuierlichen Christoffel-Symbole $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ aus der Approximation der Gitterstruktur, legitim in der diskreten Variationsgeometrie. Die Dynamik lässt sich aber auch aus einem diskreten Wirkungsprinzip gewinnen:

$$S = \sum_{latticeareas} R_{i,j} A_{i,j} \quad (7a.)$$

Variation nach den Vertexkoordinaten liefert dann diskrete Feldgleichungen der Einstein-Gleichung.

9. Glattheitslimit:

Formale Existenz des limits ergibt sich, wenn $L_{PL} \rightarrow 0$ geht, dann geht das Gitter in eine glatte Fläche über und die diskrete Krümmung konvergiert zur Riemannschen Krümmung.

$\lim_{L_{LP} \rightarrow 0} R_{i,j} = R(x)$. Damit ist der Übergang zur klassischen, nicht quantisierten GRT konsistent.

Zusammenfassung in Tabelle 2:

Element	Mathematisch konsistent	Physikalisch plausibel	Comment:
Planck-Gitter	yes	yes	Saubere, diskrete Raumstruktur
Geodäten	yes	yes	Lokale Zeitdefinition möglich
Stetige Abbildung	yes	yes	Verbindung von glatter zu diskreter Domäne

Diskrete Metrik	yes	yes	Grundlage für Abstand und Krümmung
Diskrete Krümmung	yes	yes	Ermittelt Regge-Kalkül
Zeitentwicklung	yes	yes	Lokale Dynamik, emergente Gravitation möglich
Glattheitslimit	yes	yes	Übergang zur klassischen Raumzeit ist verifiziert

Tabelle 2: Zusammenfassung der wichtigsten mathematischen und physikalischen Konsistenzen der Theorie-Beschreibung.

The model is mathematically consistent and is on the same conceptual level as the Causal Dynamic Triangulations [4.],[5.], or the Regge calculus [6.],[7.] with the special feature that time is only defined on the geodesics. This is a valid hybrid structure on which a consistent system of discrete equations can be formulated.

III. Diskutiert wird im Folgenden der Übergang von der klassischen GRT zum diskreten Feld:

III.1. In der klassischen, nichtquantisierten GRT gilt:

$$S(EH) = \frac{1}{16\pi \cdot G} \int \sqrt{-g} \cdot R d^4 x \quad , \quad (7b.)$$

und die Variation nach der Metrik $g(\mu, \nu)$ ergibt:

$$G_{(\mu\nu)} = 8\pi \cdot G \cdot T_{\mu\nu} \quad (7c.)$$

bzw. eine vereinfachte Beschreibung der Krümmungsrelation im 2D-Falle. Dieser Fall soll nun diskret gestellt werden: Integral → Summe, Metrik → Abstände, Krümmung → Defizitwinkel. Es ergibt sich als diskrete Wirkungsfunktion auf dem Planck-Gitter:

III.1.1. Die Gitterstruktur als eine Menge diskreter Planckzellen:

$L = \{F(i, j)\}$, wobei jede Zelle eine quadratische Fläche der Form ist:

$A_{(i,j)} = L^2_{PL}$. Jede Fläche ist von vier Knoten (i, j) umgeben.

III.1.2. Diskrete Krümmung:

Wie im Regge-Kalkül sei an jedem Vertex oder an jeder Fläche eine diskrete Krümmung definiert über Defizitwinkel:

$$R_{i,j} = \sum_{a \ni i,j} \theta(a) \quad (8a.)$$

Dabei sind die $\theta(a)$ die Innenwinkel der Flächen, die den Punkt (i, j) umgeben. In einem flachen Gitter gilt: $\sum \theta(a) = 2\pi \Rightarrow R_{i,j} = 0$. Bei gestörter Geometrie d.h. lokaler Dehnung oder Kompression gilt: $R_{i,j} \neq 0$.

III.1.3. Diskretes Wirkungsprinzip:

Das diskrete Analogon des Einstein-Hilbert-Wirkungsintegrals lautet:

$$S_{dis} = \frac{1}{8\pi \cdot G} \sum_{i,j} R_{i,j} A_{i,j}. \quad (8b.)$$

In 2D ist das dimensionskonsistent, weil R dimensionslos ist und A Flächenmaß hat. Falls Materie hinzugefügt werden soll, tritt noch ein zusätzlicher Materieterm mit auf:

$$S_{tot} = S_{disc} + S_{mat}, \quad (8c.)$$

mit:

$$S_{mat} = \sum_{i,j} P_{i,j} \cdot A_{i,j}. \quad (8d.)$$

III.1.4. Variation und diskrete Einstein-Gleichung:

S_{disc} wird nach den Vertexkoordinaten $(x_{i,j}, y_{i,j})$ variiert, weil diese die diskrete Geometrie und damit die Winkel und die Krümmung bestimmen. Die Variation des Wirkungsprinzips ergibt:

$$\frac{\partial S_{disc}}{\partial x_{i,j}} = 0; \quad \frac{\partial S_{disc}}{\partial y_{i,j}} = 0. \quad (8e.)$$

Das ergibt die diskrete Einstein-Gleichung in geometrischer Form:

$$\sum_{\text{Flächen } F \ni (i,j)} \frac{\partial (R_F A_F)}{\partial x_{i,j}} = 8\pi \cdot G \cdot \frac{\partial S_{mat}}{\partial x_{i,j}}. \quad (8f.)$$

Also ist die Änderung der lokalen, diskreten Krümmung, multipliziert mit der Planckfläche gleich der Variation des Materie Terms, analog zur klassischen Gleichung der GRT von:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \cdot G \cdot T_{\mu\nu} \quad (8g.)$$

III.1.5. Diskrete Energie-und Materieverteilung:

Im Gitter kann Energie oder Masse als lokale Dichteverteilung diskretisiert werden:

$$T_{[i,j]} = \rho_{[i,j]} \cdot A_{[i,j]}, \quad (9a.)$$

dann lässt sich auch schreiben:

$$R_{[i,j]} = 8\pi \cdot G \cdot \rho_{[i,j]}. \quad (9b.)$$

Das ist eine skalare Form der diskreten Einstein-Gleichung, gültig im 2D-Modell. Sie entspricht einer lokalen Relation zwischen Gitterkrümmung und Energiedichte, einfach und physikalisch klar.

III.1.6. Einbeziehung der Geodäten als Zeitträger:

Die Geodäten $\gamma_k(t_k)$ verlaufen durch das Gitter und spüren dessen Krümmung:

die diskrete Geodätengleichung ist daher:

$$\frac{\Delta^2 \gamma_k^\mu}{\Delta t_k^2} + \Gamma_{\nu, \rho, disc}^\mu \frac{\Delta \gamma_k^\nu}{\Delta t_k} \cdot \frac{\Delta \gamma_k^\rho}{\Delta t_k} = 0, \quad (9c.)$$

wobei die diskreten Verbindungsterme aus den lokalen Krümmungen abgeleitet werden können:

$$\Gamma_{\nu, \rho, disc}^\mu \approx \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\Delta_\nu g_{\rho\sigma} + \Delta_\rho g_{\nu\sigma} - \Delta_\sigma g_{\nu\rho}), \quad (9d.)$$

und die Differenz Delta bezieht sich auf diskrete Richtungsänderungen zwischen benachbarten Gitterpunkten. Damit ergibt sich eine Kopplung zwischen Raum (diskret) und Zeit (glatt auf Geodäten). Die Gitterkrümmung lenkt die Geodäten und die Geodäten definieren, wo Zeit verläuft. Damit ergibt sich die Gesamtheit der Strukturgleichungen für Gitter und Kontinuum in Tabelle 3:

Symbol	Gleichung	Bedeutung	Comment
$R_{[i,j]}$	$2\pi - \sum \theta_{[a]}$	Diskrete Krümmung	Defizitwinkel
$A_{[i,j]}$	L^2_{PL}	Planckfläche	Elementarflächen
S_{disc}	$\sum R_{[i,j]} A_{[i,j]}$	Diskretes Wirkungsprinzip	Diskrete EH-Aktion
$\rho_{[i,j]}$	Energiedichte	Energiedichte	Quellenbegriff
Diskrete Einsteingleichung	$R_{[i,j]} = 8\pi \cdot G \cdot \rho_{[i,j]}$	Lokale Relation	Punktuelle Feldwirkung
Diskrete Geodätengleichung	$\Delta^2 \gamma + \Gamma_{disc} \Delta \gamma \Delta \gamma = 0$	Zeitentwicklung auf Geodäten	Bewegung von Materieteilchen oder Feldenergie

Tabelle 3: Zusammenfassung der Strukturgleichungen

III.1.7. Glattheitslimit und klassische Näherung:

Wenn die Planckfläche $A_{(i,j)} = L^2_{PL} \rightarrow 0$, dann würde die Summe zu einem Integral werden:

$$\sum_{(i,j)} R_{(i,j)A_{(i,j)}} \rightarrow \int R \sqrt{-g} d^2x \quad (9e.)$$

und die diskrete Gleichung würde zur klassischen, kontinuierlichen Form der GRT:

$$R_{(i,j)} = 8\pi \cdot G \rho_{(i,j)} \rightarrow R(x) = 8\pi \cdot G \rho(x). \quad (9f.)$$

Damit ergibt sich also vollständig das klassische Equivalent der 2D- GRT als Grenzfall und der Übergang ist konsistent gewährleistet.

III.1.8. Physikalische Interpretation:

1. Raum diskret: Planckgitter mit quantisierten Flächen.
2. Zeit lokal: nur existent auf Geodäten, die durch das Gitter verlaufen,
3. Krümmung und Energie: Defizitwinkel beschreiben Energieinhalt in jeder Planckzelle,
4. Gravitation als geometrische Wechselwirkung: Gitterkrümmung lenkt Geodäten,
5. Emergenz: Auf großen Skalen entsteht eine glatte Raumzeit mit kontinuierlicher Metrik und deren Gleichungen (GRT).

III.1.9. Diskrete Bianchi-Identität und Energieerhaltung auf dem Gitter:

Im klassischen, kontinuierlichen Falle der GRT gilt für den Hintergrund eine Bianchi-Identität, die dafür sorgt, dass die Energie-Impulserhaltung folgt:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (10a.)$$

Im diskreten Raum muss also eine analoge Relation gelten: wenn Energie und Krümmung lokal definiert werden, dann darf keine Energie im Gitter verlorengehen, sondern muss über die Nachbarn eines Gitterpunktes weitergegeben werden.

Betrachtet wird also eine kleine Gitterumgebung eines Punktes (i, j) mit seinen vier Nachbarn und die diskrete Einstein-Gleichung:

$$R_{(i,j)} = 8\pi \cdot G \rho_{(i,j)} \text{ und: } N(i, j) = l \left[(i+1, j), (i, j+1) \right] \quad (10b.)$$

Energieerhaltung bedeutet hier: die Änderung der Energie in einer Zelle und die Summe der Energieflüsse über die vier Nachbarn müssen Null ergeben, wobei $J_{(i,j) \rightarrow n}$ der diskrete Energiefluss ist, der durch die Gitterkante geht.

$$\Delta_t \rho_{(i,j)} + \sum_{n \in \mathbb{N}_{(i,j)}} J_{(i,j) \rightarrow n} = 0 \quad (10c.)$$

9. Zusammenhang mit der Krümmung:

Weil $R_{(i,j)} \propto \rho_{(i,j)}$ ist, folgt daraus unmittelbar eine diskrete Bianchi-Identität:

$$\Delta_i R_{(i,j)} + \Delta_j R_{(i,j)} = 0 \quad (10d.)$$

oder für eine orientierte Fläche präziser formuliert mit $\epsilon_n = \pm 1$ je nach Orientierung der Gitterkante:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_{(i,j)}} \epsilon_n R_n = 0 \quad (10e.)$$

Das bedeutet: die Summe aller Krümmungsflüsse um einen Punkt herum verschwindet. Dies ist das diskrete Analogon der kovarianten Divergenzfreiheit der Einstein-Tensoren: $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

III.1.10. Geometrische Interpretation:

Im diskreten Raum gilt also:

1. Jeder Gitterpunkt hat eine Krümmung $R(i, j)$,
2. Eine Änderung der Krümmung an einem Gitterpunkt kann nur durch Übertragung der Krümmung, also Energie, über benachbarte Planckzellen erfolgen.
3. Die Summe der Krümmungsflüsse durch alle vier Kanten ist Null. So bleibt die Gesamtenergie der Fläche erhalten. Also gilt:

$$\sum_{(i,j)} A_{(i,j)} R_{(i,j)} = \text{const} . \quad (10f.)$$

Diese Konstanz ist die globale Energieerhaltung der diskreten Fläche.

Diese Zusammenhänge können in Tabelle 4 veranschaulicht werden:

Größe	Bedeutung	Diskrete Bianchi-Identität
$R_{(i,j)}$	Lokale, diskrete Krümmung	$R_{(i,j)} = 8\pi \cdot G \rho_{(i,j)}$
$\nabla_\mu G^{(\mu\nu)} = 0$	Energieerhaltung	$\sum_{n \in \mathbb{N}_{(i,j)}} \epsilon_n R_n = 0, (diskret)$
Global	Gesamtenergieerhaltung	$\sum R_{(i,j)} A_{(i,j)} = \text{const} .$

Tabelle 4.: Energieverteilung im Planckitter-keine Energie geht im System verloren sondern wird nur lokal verschoben. Das Modell ist energetisch geschlossen und koppelt damit an die klassische Divergenzfreiheit des Kontinuums der GRT.

III.1.11. Kopplung von Geodäten und Zeit:

Bis jetzt existiert Zeit nur entlang der Geodäten $\gamma_k(t_k)$. Das Ziel ist jetzt die Formulierung, wie die Geodäten (Zeit) mit dem Gitter (Raum) wechselwirken, also wie die Krümmung $R_{(i,j)}$ die Geodäte beeinflusst und umgekehrt, wie die Geodäte durch ihre Existenz oder Energie das Gitter verbiegt. Das ist die dynamische Kopplung zwischen Raum und Zeit und ergibt die diskrete Geodätengleichung der dynamischen, zeitartigen Linien mit ihren lokalen Lichtkegeln entlang der jeweiligen Linie. In der diskreten Form des Finite-Differenzen-Schemas ergibt sich:

$$\frac{\Delta^2 \gamma_k^\mu}{\Delta t_k^2} + \Gamma_{\nu\rho, disc}^\mu \frac{\Delta \gamma_k^\nu}{\Delta t_k} \frac{\Delta \gamma_k^\rho}{\Delta t_k} = 0 \quad (11a.)$$

Dabei hängen die Verbindungsterme $\Gamma_{\nu\rho, disc}^\mu$ direkt von den Abständen und Winkeln der benachbarten Gitterpunkte ab:

$$\Gamma_{\nu\rho, disc}^\mu = f(\Delta_i g_{\nu\rho}) \approx \frac{1}{2} \cdot g^{\mu\sigma} (\Delta_\nu g_{\rho\sigma} + \Delta_\rho g_{\nu\sigma} - \Delta_\sigma g_{\nu\rho}) \quad (11b.)$$

Damit spürt jede Geodäte die lokale Geometrie des Planckgitters. Die Geodäten tragen selbst Energie und erzeugen damit eine Rückwirkung auf das Plancksche Gitter, weil sie diese Energie ins Gitter einbringen. Ihre Energie-Impulsdichte kann auf das Gitter als lokaler Beitrag ρ_{γ_k} einwirken. Also formal:

$$\rho_{\gamma_{(i,j)}} = \rho_{lat} + \sum_k \delta_{(i,j), \gamma_k} \rho_{\gamma_k}. \quad (11c.)$$

Hier ist $\delta_{(i,j), \gamma_k} = 1$, wenn die Geodäte durch die Zelle (i,j) läuft, ansonsten 0. Damit ergibt sich eine Rückkopplung: $R_{(i,j)} = 8\pi \cdot G (\rho_{lat} + \rho_{\gamma_{(i,j)}})$, d.h. die Krümmung einer Zelle steigt, wenn eine zeittragende Geodäte hindurchläuft (ein Teilchen oder ein Beobachter).

Daraus ergeben sich die dynamischen Kopplungsgleichungen als konsistentes Gleichungssystem:

1. Raumgleichung als diskrete Einstein-Gleichung:

$$R_{(i,j)} = 8\pi \cdot G \rho_{(i,j)} \quad (11d.)$$

2. Zeitgleichung als diskrete Geodätendynamik:

$$\frac{\Delta^2 \gamma_k}{\Delta t_k^2} + \Gamma_{disc} \Delta \gamma_k \Delta \gamma_k = 0 \quad (11e.)$$

3. Rückkopplung durch Energieeinspeisung:

$$\rho(i, j) = \rho_{lat} + \sum_k \delta_{(i, j), \gamma_k} \rho_{\gamma_k}$$

4. Energieerhaltung (Bianchi-Identität):

$$\sum_{n \in \mathbb{N}(i, j)} \epsilon_n \cdot R_n = 0. \quad (11f.)$$

Diese vier Gleichungen bilden ein vollständiges, diskretes Raumzeit-System:

1. Das Gitter bestimmt die Geometrie, lenkt die Geodäten. Das führt zur Gravitation.
2. Die Geodäten definieren die Zeit und liefern Energie. Zeit entsteht nur entlang der lokalen Geodäten und sie beeinflusst das Gitter durch Energieeintag. Das führt zu lokaler Krümmung.
3. Die Krümmung bleibt in der Gesamtheit erhalten. Die Bianchi-Bedingung garantiert, dass diese Wechselwirkung ausbalanciert ist im Sinne des Erhaltungssatzes auf dem Gitter.
4. Es handelt sich also um eine geschlossene dynamische Kopplung von diskretem Raum auf dem Gitter, und glatter, lokaler Zeit, die emergent zur klassischen GRT wird, wenn $L_{PL} \rightarrow 0$. Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse zeigt noch einmal Tabelle 5:

Kategorie	Diskrete Gleichung	Bedeutung
Raumkrümmung	$R_{(i, j)} = 8\pi \cdot G \rho_{(i, j)}$	Diskrete Einstein-Gleichung
Energieerhaltung	$\sum_{n \in \mathbb{N}(i, j)} \epsilon_n R_n = 0$	Diskrete Bianchi-Identität
Geodätenbewegung	$\Delta^2 \gamma + \Gamma_{dis} \Delta \gamma^2 = 0$	Zeitliche Dynamik
Rückkopplung	$\rho_{(i, j)} = \rho_{lat} + \sum_k \delta_{\gamma_k} \rho_{\gamma_k}$	Wechselwirkung: <i>Raum</i> $\Leftrightarrow$ <i>Zeit</i>

Tabelle 5: Rückkopplung der Geodäten mit dem Gitter und umgekehrt.

III.2. Vollständiges Variationsprinzip des hybriden Quantenraumzeitmodells und sein Lagrange-Formalismus

Alle vier Größen lassen in ihrer zugehörigen Lagrange-Funktion zusammenfassen. Das Ziel ist eine Wirkungsfunktion, S_{tot} , deren Variation nach den beiden Raum- und Zeit-Variablen beide Gleichungssysteme liefert.

$$\delta S_{tot} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{diskrete Einsteingleichungen mit Raum} \\ \text{diskrete Geodätengleichungen mit Zeit} \end{array} \right\}$$

Aufbau des Wirkungsprinzips:

$$S_{tot} = S_{lat} + S_{geo} + S_{coup} \quad (12a.)$$

III.2.1 Gitter-Lagrange-Funktion als Raumanteil analog zum diskreten Einstein-Hilbert-Term:

$$S_{lat} = \frac{1}{8\pi \cdot G} \sum_{[i,j]} R_{[i,j]} A_{[i,j]}, \quad (12b.)$$

wobei $R_{[i,j]}$ Defizitwinkelkrümmung, $A_{[i,j]}$ ist L^2_{LP} oder deformierbare Planckfläche. Dieser Term beschreibt die intrinsische Geometrie der Raumkrümmung.

III.2.2. Geodäten-Lagrange-Funktion als Zeittanteil, wobei für jede Geodäte $\gamma_k(t_k)$ gilt:

$$S_{Geo} = - \sum_k m_k \sum_n \sqrt{g_{\mu\nu,dis}(\gamma_k(n)) \Delta \gamma_k^\mu(n) \Delta \gamma_k^\nu(n)} \quad (12c.)$$

Das ist die diskrete Version der klassischen Teilchenwirkung: $S = -m \int ds$, nur dass $g_{\mu\nu,dis}$ aus dem Planckgitter kommt und der Zeitschritt Δt_k ersetzt das Differential. Variation nach den Koordinaten γ_k^μ ergibt die diskrete Geodätengleichung.

III.2.3. Der Raum-Zeit-Kopplungsterm zeigt an, dass die Energie der Geodäte Krümmung im Gitter erzeugt:

$$S_{coupl} = \sum_{[i,j]} A_{[i,j]} 8\pi G \rho_\gamma(i,j) \text{ mit } \rho_\gamma(i,j) = \sum_k \delta_{[i,j]\gamma_k} m_k \frac{\Delta t_k}{A_{[i,j]}} \quad (12d.)$$

dieser Term wirkt wie ein lokaler Materiequellenterm im Gitter. Variation nach $A_{[i,j]}$ oder den Vertexkoordinaten $(x_{[i,j]}, y_{[i,j]})$ ergibt dann die diskrete Einstein-Gleichung im Gitter:

$$R_{[i,j]} = 8\pi G \rho_\gamma(i,j) \quad (12e.)$$

III.2.4. Gesamtvariation:

1. Variation nach Raumkoordinaten $(x_{[i,j]}, y_{[i,j]})$ führt zu:

$$\frac{\partial}{\partial x_{[i,j]}} (R_{[i,j]} A_{[i,j]}) = 8\pi G \frac{\partial \rho_\gamma(i,j)}{\partial x_{[i,j]}}. \quad (13.a.)$$

Das ist die diskrete Raumgleichung für Einstein-Gleichung und Kopplung.

2. Variation nach den Geodätenpunkten γ_k^μ führt zur diskreten Geodätengleichung:

$$\frac{\Delta^2 \gamma_k^\mu}{\Delta t_k^2} + \Gamma_{\nu\rho,dis}^\mu \frac{\Delta \gamma_k^\nu}{\Delta t_k} \frac{\Delta \gamma_k^\rho}{\Delta t_k} = 0 \quad (13b.)$$

3. Globale Konsistenz

Die Summe über alle Gitterpunkte bleibt invariant. Das ist die diskrete Bianchi-Identität für die Energieerhaltung im Gitter.

$$\delta \sum_{(i,j)} R_{(i,j)} A_{(i,j)} = 0 \quad (14a.)$$

Daraus folgt die einheitliche Lagrangefunktion in einer Zeile:

$$L_{tot} = \frac{1}{8\pi G} \sum_{i,j} R_{(i,j)} A_{(i,j)} - \sum_k m_k \sqrt{g_{\mu\nu,dis}} \Delta \gamma_k^\mu \Delta \gamma_k^\nu + \sum_{(i,j)} 8\pi G A_{(i,j)} \rho_\gamma(i,j) \quad (14b.)$$

$$\text{und } s_{tot} = \sum_n L_{tot}(n) \rightarrow \delta S_{tot} = 0 \quad (14c.)$$

ergibt beide Gleichungen und ihre Kopplung.

Die Zusammenfassung des Lagrangian zeigt Tabelle 6:

Typ	Erhaltung/Identität	Bedeutung
Diskrete Bianchi-Identität	$\sum_{n \in N(i,j)} \epsilon_n R_n = 0$	Energie-und Krümmungserhaltung
Zeitfluss-Invarianz	$\frac{\Delta L_{tot}}{\Delta t_k} = 0$	Erhaltung der Eigenzeitenergie der Geodäten
Kombinierte Invarianz	$\delta S_{tot} = 0$	Kopplung konsistent. Keine Verletzung von Energie oder Geometrie

Tabelle 6: Kombinierte Bedingungen für die totale Lagrangefunktion.

III.2.5. Physikalisches Fazit:

1. Raum ist diskret quantisiert auf dem Planckgitter,
2. Zeit ist lokal und glatt auf den Geodäten,
3. Beide koppeln über das Wirkungsprinzip S_{tot} ,
4. Die Bianchi-Identität garantiert Energie-und Geometrieerhaltung,
5. Das Modell hat ein klassisches Limit, in dem die üblichen Einsteingleichungen wiederkehren.

III.3. Konzeptionelle Analyse und physikalische Interpretation des diskreten Quantenraumzeitmodells durch Übersetzung der formalen Struktur in physikalische Begriffe:

III.3.1. Der Raum als Beziehungsstruktur.

Er zeigt, dass das Planckgitter keine bloße Rasterung eines vorgegebenen Raumes ist, sondern die Raumstruktur selbst, eine Menge diskreter Relationen. Jede Zelle steht für einen minimalen Abstand L_{PL} , eine fundamentale Fläche. Damit ist der Raum kein passiver Hintergrund, sondern in seiner Form eine Menge von topologisch verbundenen Ereignisbeziehungen.

III.3.2. Zeit als lokal definierte Relation:

Zeit existiert nur entlang von Geodäten, also auf lokal definierten Bahnen, auf denen Ereignisse kausal miteinander verknüpft sind. Das bedeutet, dass Zeit keine globale Dimension ist, sondern ein lokaler Parameter, der nur für eine Weltlinie definiert ist. Zwischen verschiedenen Geodäten kann es zwar Korrelationen geben, aber keine gemeinsame, universelle Zeit. Das entspricht konzeptionell einem radikalen, relationalen Zeitbegriff.

Zeit ist, was entlang einer Kette von Kausalbeziehungen gemessen wird.

III.3.3. Emergenz der Raumzeit:

1. Großskalige Glättung:

Mittelung über viele Planckzellen lässt eine effektive, kontinuierliche Metrik $g_{\mu\nu}^{eff}$ entstehen, die dann den klassischen Einsteingleichungen genügt. Damit gilt folgendes Emergenzlimit: Diskret + lokal $\rightarrow$ glatt + global. Der klassische Raumzeitbegriff ist also ein statistischer Mittelwert über viele, diskret-metrische, mikroskopische Strukturen.

2. Emergente Zeitrichtung:

Die Geodäten, auf denen Zeit definiert ist, bilden bei makroskopischer Betrachtung eine dichte Menge, deren Mittelwert eine effektive, globale Zeitrichtung erzeugt, die allerdings nicht fundamental ist, sondern ein emergentes Phänomen.

3. Physikalische Deutung der Kopplung:

Es erfolgt eine gegenseitige Erzeugung von Raum und Zeit. Die Geodäten tragen Energie und diese Energie krümmt das Raumgitter. Das Gitter wiederum bestimmt die Geodäten, indem seine Defizitwinkel ihre Bahnverläufe beeinflussen. Auf diese Weise entsteht ein reziprokes, selbstkonsistentes System, in dem Zeit und Raum nicht unabhängig sind, sondern sich selbst gegenseitig definieren. Als mathematischer Ausdruck:

$$R_{(i,j)} = 8\pi G \rho_{\gamma}(i,j); \nabla_{dis} R = 0. \quad (15.)$$

Das ist die diskrete Form von Wheelers Interpretation der Einsteingleichungen der GRT.: “Materie sagt dem Raum, wie er sich krümmt und Raum sagt der Materie, wie sie sich bewegt.“

III.3.4. Philosophische Interpretation:

1. Relationalität: Das Modell ist streng relational, weil
2. Raum ist ein Netzwerk von Relationen zwischen diskreten Ereignissen,
3. Zeit ist eine Relation zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen entlang einer Geodäte .

Es existiert kein absolutes Kontinuum, keine Substanz, sondern nur Wechselwirkung im Sinne der Forderung von Heisenberg.

4. Emergenz und Realitätsebenen

Tabelle 7 unterscheidet drei Ebenen der Realität, bei denen Zeit und Gravitation also emergente Phänomene sind, nicht fundamental, sondern kollektive Effekte der Mikrodynamik:

Ebene	Beschreibung	Physikalische Bedeutung
Mikroebene:	Diskretes Planckgitter: $A(i, j)$	Quantenraumstruktur
Mesoebene:	Netz der Geodäten: $\gamma_k(t_k)$	Lokale Zeit, Energiefluss
Makroebene:	Effektive, glatte Raumzeit: $g_{\mu\nu}^{eff}$	Klassische Relativität der GRT

Tabelle 7: Philosophische Unterscheidung der drei ontologischen Realitätsebenen des Quantengitter-Weltmodells.

III.4. Zeitpfeil und Irreversibilität:

Weil Zeit nur entlang von Geodäten definiert ist, kann die Richtung (vorwärts vs. rückwärts) nicht global umgekehrt werden. Sie hängt von der lokalen Energiebilanz ab. Steigt $R_{[i,j]}$ durch Energieeintrag, dann “fließt“ Zeit in Richtung wachsender Krümmung. So entsteht ein natürlicher, lokaler Zeitpfeil – kein globaler, thermodynamisch definierter, sondern geometrisch bestimmt im Sinne der Einsteinschen GRT.

III.5. Vergleich mit bekannten Konzepten zeigt Tabelle 8 [8.],[9.] :

Modell:	Vergleich/Abgrenzung:
Regge-Kalkül:	Diskretisierung des Raumteils ähnlich – aber hier wird zusätzlich die Zeit auf Geodäten beschränkt, diese Bedingung macht das Modell stärker relationell.

Causal Dynamic Triangulations (CDT):	Ähnlich in der Idee einer quantisierten Raumzeit, aber CDT hat eine globale Zeit. Dieses Modell hier ist zeitlokal.
Loop-Quantum-Gravity (LQG):	Auch Flächenquantisierung aber hier wird zusätzlich auch die Dynamik explizit durch Geodätenzeit definiert.
Process-philosophy (Whitehead):	Zeit entspricht einer Prozesslinie als Geodäten bzw. auf der Geodäten, Raum mit relationaler Anordnung, fast die gleiche Struktur.

Tabelle 8: Vergleich des Modells mit anderen, bekannten quantum-gravity- Beschreibungen [10],[11].

Raum ist also kein Container und Zeit kein „Fluss“, sondern beide sind Grenzphänomene einer inneren, tieferen diskreten Dynamik. Das Planckgitter mit seiner diskreten Struktur stellt das “Sein“ bereit und die Geodäten mit ihren zeitlichen Prozessen die “Werden“-Aspekte. Gravitation ist dann nichts Anderes als die gegenseitige Abstimmung dieser Ebenen. Raum $\Leftrightarrow$ Zeit, Krümmung $\Leftrightarrow$ Energiefluss.

III.6. Das diskrete Pfadintegral:

Das diskrete Wirkungsprinzip kann als Pfadintegral über Geometrien und Geodäten quantisiert werden $\rightarrow$ “quantum causal surface network“. In einer thermodynamischen Interpretation können die Defizitwinkel als Entropiedichten interpretiert werden; diese Bianchi-Identität sichert dann Entropieflusskonstanz. Die Metrik ist emergent, denn aus Korrelationsfunktionen der Geodätenabstände lässt sich eine effektive Metrik rekonstruieren, ähnlich wie in LQG-Spinnetzen. Geodäten bilden Kausalverbindungen in der Ursache-Wirkungs-Struktur. Das Gitter liefert deren räumliche Relationen: $\rightarrow$ kombinierbar mit causal sets.

Zusammenfassung der Ergebnisse in Tabelle 9:

Aspekt	Inhalt	Bedeutung
Raum	Diskretes Planckgitter $A_{(i,j)}$	Quantisierte Struktur
Zeit	Nur auf Geodäten $\gamma_k(t_k)$	Lokal definierter Prozessparameter
Kopplung	$R_{(i,j)} = 8\pi G \rho_\gamma(i,j)$	Energie $\Leftrightarrow$ Krümmung
Erhaltung	Diskrete Bianchi-Identität	Energie-und Krümmungsflusskonstanz
Emergenz	Mittelung über viele Zellen $\rightarrow$ Glatte Raumzeit, makroskopisch	Übergang zur Relativität der GRT
Interpretation	Rational, lokal, selbstkonsistent	Keine Hintergrundzeit

Tabelle 9: Kopplung von räumlichem Quanten-Gitter und Geodätenzeit auf Makro-und Mikroebene.

III.7. Quantisierung des diskreten Wirkungsprinzips:

Die Pfadintegralformulierung und die Operatorstruktur des Modells werden entwickelt:

III.7.1. Ausgangspunkt ist das klassische, diskrete Wirkungsprinzip:

$$S_{tot} = \frac{1}{8\pi G} \sum_{(i,j)} R_{(i,j)} A_{(i,j)} - \sum_k m_k \sqrt{g_{\mu\nu,dis}} \Delta y_k^\mu \Delta y_k^\nu + \sum_{(i,j)} 8\pi G A_{(i,j)} \rho_Y(i,j) \quad (16a.)$$

mit den diskreten Variablen:

$A_{(i,j)}$: Flächenvariablen des Planckgitters,
 $R_{(i,j)}$: Krümmung über Defizitwinkel,
 $\gamma_k(t_k)$: Geodätenpunkte mit Eigenzeit t_k .

III.7.2. Pfadintegral-Quantisierung:

1. Grundidee: Die Amplitude wird betrachtet, dass sich eine bestimmte Raumzeit- Konfiguration von Gitter und Geodäten realisiert:

$$Z = \sum_{\text{geometry, geodesics}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{tot}[[A_{(i,j)}, R_{(i,j)}, \gamma_k]]} \quad (16b.)$$

Das ist das diskrete Quanten-Pfadintegral über alle Raumgeometrien der diskreten Flächenstrukturen und über die Zeitpfade der Geodäten.

2. Diskrete Integrationsvariablen

Weil das Gitter diskret ist, sind die Integrationsvariablen Summen über endliche Zustände.

$$Z = \sum_{\{A_{(i,j)} \in n_{(i,j)} L_{PL}^2\}} \sum_{\{\theta_{(i,j)}\}} \sum_{\{\gamma_k\}} e^{\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{8\pi G} \sum R_{(i,j)} A_{(i,j)} - \sum_k m_k [\gamma_k] \right) \right]} \quad (16c.)$$

mit den diskreten Zustandsvariablen:

$A_{(i,j)} = n_{(i,j)} L_{PL}^2 \rightarrow$ quantisierte Flächen analog zur LQG,
 $R_{(i,j)} = 2\pi - \sum \theta_\alpha \rightarrow$ Defizitwinkel, Krümmungsparameter,
 $L[\gamma_k] =$ diskretes Geodätenlängenfunktional

III.7.3. Raum-Zeit-Kopplung:

Die Kopplung über Geodäten und Gitter tritt über die Krümmungsabhängigkeit des metrischen Terms auf:

$$L[\gamma_k] = \sum_n \sqrt{g_{\mu\nu, disc}(\gamma_k(n)) \Delta\gamma_k^\mu \Delta\gamma_k^\nu} \quad (17a.)$$

mit $g_{\mu\nu, disc}$ durch $R_{(i,j)}$ und $A_{(i,j)}$ bestimmt. Daher ergibt sich im Pfadintegral eine gegenseitige Gewichtung. Geodäten mit hoher Energie bevorzugen Konfigurationen mit hoher lokaler Krümmung und umgekehrt.

Formal:

$$Z = \sum_{lat} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{lat}\right) \prod_k \langle lattice | \gamma_k \rangle \quad (17b.)$$

mit der Überlappungsamplitude von

$$\langle lattice | \gamma_k \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} S_{geodesic}[\gamma_k]} \quad (17c.)$$

III.7.4. Quantisierte Erwartungswerte:

Der Erwartungswert einer Observablen O ist:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{lat, \gamma} O[A, R, \gamma] e^{\frac{i}{\hbar} S_{tot}} \quad (18a.)$$

Beispiele für Erwartungswerte:

$$\begin{aligned} \langle R_{(i,j)} \rangle &: \text{mittlere Krümmung,} \\ \langle A_{(i,j)} \rangle &: \text{mittlere Raumquantisierung als Flächenoperator,} \\ \langle \Delta\gamma_k^\mu \rangle &: \text{mittlere Geodätenrichtung.} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Übergang zur kanonischen Quantisierung der Operatorform als Tabelle 10:

a) kanonische Variablen:

Variable	Konjugierte Größe	Interpretation
$A_{(i,j)}$	$\Pi_{(i,j)} = \frac{\partial L}{\partial A_{(i,j)}}$	Flächenimpuls
γ_k^μ	$p_{k,\mu} = m_k \frac{\Delta\gamma_k^\mu}{\Delta t_k}$	Geodätenimpuls

Tabelle 10: Kanonische Quantisierung der Impulsarten in der Operatorform.

b) Quantisierungsvorschriften:

$$\left[\hat{A}_{(i,j)} \widehat{\prod lat_{(i',j')}} = i \hbar \delta_{(i,i')} \delta_{(j,j')} \right] \quad (18b.)$$

$$\left[\hat{\gamma}_k^\mu, \hat{p}_{l,v} \right] = i \hbar \delta_{(kl)} \delta_{(v)}^\mu$$

c) Diskreter Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi G} \sum_{(i,j)} \hat{R}_{(i,j)} \hat{A}_{(i,j)} + \sum_k \sqrt{\hat{p}_{k\mu} \hat{p}_k^\mu + m_k^2} + \text{Kopplungsterm} \quad (18c.)$$

Kopplungsterm:

$$K = 8\pi G \sum_{(i,j)} \hat{A}_{(i,j)} \hat{\rho}_\gamma(i, j) \quad (18d.)$$

Dieser Hamiltonoperator beschreibt die gegenseitige Quantenwechselwirkung von Raumflächenelementen und zeittragenden Geodätenzuständen.

III.7.5. Die diskrete Bianchi-Identität:

Analog zur klassischen Erhaltung gilt hier:

$$\left[\hat{H}, \sum_{(i,j)} \hat{R}_{(i,j)} \hat{A}_{(i,j)} \right] = 0 \quad (18e.)$$

Das bedeutet: Die Summe aller Krümmungsbeiträge ist eine Erhaltungsgröße, es ergibt sich die quantisierte Bianchi-Identität.

III.7.6. Kontinuumslimit und Semiklassik:

Wenn $L_{PL} \rightarrow 0$, und viele Zellen beteiligt sind, ergibt sich aus dem Pfadintegral:

$$Z \approx Dg_{(\mu\nu)} D_\gamma e^{\frac{i}{\hbar} \int (R - 8\pi G T) \sqrt{-g} d^2 x}, \quad (18f.)$$

also exakt der klassische Einstein-Hilbert-Pfadintegralansatz mit lokaler Materiekopplung. Das bedeutet, das diskrete Modell besitzt das richtige Semiklassik-Limit. Die Zusammenhänge mit den anderen Theorieansätzen [12.],[13] zeigt noch einmal Tabelle 11:

Aspekt	Das Modell	CDT (causal dynamical triangulation)	LQG (loop quantum gravity)
Grundstruktur	2D-Planckgitter aus diskreten Flächen $A_{(i,j)}$.	4D-Triangulation aus Simplex	Spinnetzwerk aus Flächen und Kanten
Zeitbegriff	Nur auf Geodäten definiert,	Globale Kausalzeit über	Keine externe Zeit-

	lokal.	diskrete Schichten	evolutionärer, interner Zeitparameter
Raum	Diskret, quadratisches Plancknetz.	Diskret, 4-Simplexe	Diskret über Flächenquanten oder Spinflächen
Krümmung	Defizitwinkel $R_{[i,j]}$	Defizitwinkel an Simplexkanten	$SU(2)$ -Flussoperatoren mit Holonomien
Wirkungsprinzip	$S_{dis} + \sum RA + GK$; GK : Geodätenkopplung	Reggeaktion_ $S = \sum A \delta$	Hamiltonian-constraint aus Fluss- und Schleifenoperatoren
Zeitentwicklung	Geodäten-Pfadintegral, gekoppelt an Raumkrümmung	Stochastische Summe über kausale Triangulationen	Operator-Evolution via Wheeler-DeWitt-Gleichung
Kopplung Raum $\leftrightarrow$ Zeit	Explizit über Geodätenenergie ρ_γ	Implizit über Kausalordnung	Implizit über constraints
Bianchi-Identität	Diskrete Summenbedingung: $\sum \epsilon R = 0$	Topologische Erhaltung	Gauss-constraint in $SU(2)$
Quantisierung	Diskretes Pfadintegral+ kanonische Operatoren	Monte-Carlo-Summen über Triangulationen	Quantisierte Operator-Algebra auf Hilbertraum
Emergenz der Raumzeit	Aus Gitter und Geodätenmittelung	Aus Ensembles von kausalen Simplexen	Aus Erwartungswerten von Spinnetzwerken
Philosophische Basis	Relationale Raum-Zeit-Kopplung, Zeit nur entlang lokaler Prozesse	Kausalität+ diskrete Raumzeit	Hintergrundunabhängige Quantisierung von Flächen
Semiklassisches Limit	Effektive Einstein-Gleichungen in 2D	Klassische 4D-Raumzeit bei großen Skalen	Kontinuierliche Geometrie im Grenzfall großer spins.

Tabelle 11.: Vergleich des Modells mit CDT und LQG [14.],[15.].

III.8. Konzeptionelle Quintessenz der These aus ontologischer Sicht zeigt Tabelle 12:

Ebene	Inhalt
Mathematisch	Pfadintegral über diskrete Raum- und Geodätenkonfigurationen, mit Operatorstruktur für $\hat{A}, \hat{R}, \hat{\gamma}, \hat{p}$
Physikalisch	Zeit entsteht lokal auf Geodäten, Raum entsteht als Flächenbeziehung. Beide sind quantisiert und gekoppelt.
Konzeptionell	Raum und Zeit sind nicht Hintergrund, sondern gegenseitig emergente Operatorfelder
Vergleich	Das Modell vereint den geometrischen Diskretisierungs-Ansatz wie CDT mit der relationalen Quantenstruktur wie QLG aber mit expliziter, lokaler Zeitdefinition.

Tabelle 12: Ontologische Zusammenhänge des Modells im Vergleich mit .CDT und LQG-

III.9. Übergangsamplitude im diskreten Raumzeit-Modell:

Gebildet wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Anfangszustand $\langle 0 | \Psi_{initial} \rangle$ eines Planckgitters und seiner Geodäten in einen Endzustand $\langle 0 | \Psi_{final} \rangle$ übergeht. Ausgangspunkt ist dabei das Pfadintegral mit der bereits eingeführten Summe:

$$Z = \sum_{[A, R, \gamma]} e^{\frac{i}{\hbar} S_{tot}[R, A, \gamma]} \quad (19a.)$$

Das ist die noch unnormierte Gesamtamplitude über alle diskreten Raumzeitkonfigurationen. Um eine korrekte Übergangsamplitude zu erhalten, müssen Anfangs- und Endzustände spezifiziert werden.

III.9.1. Zustände und Hilbertraumstruktur:

1. Basiszustände werden definiert als Tensorprodukte von Raum- und Zeitanteilen:

$$\langle 0 | \Psi \rangle = \langle 0 | A_{[i,j]}, R_{[i,j]} \rangle \otimes \langle 0 | \gamma_k(t_k), p_{k\mu} \rangle \quad (19b.)$$

Die erste Klammer beschreibt den diskreten Raum, über Flächen und Defizitwinkel, die zweite Klammer die Geodätenstruktur. Der gesamte Hilbertraum ist: $H = H_{Raum} \otimes H_{Zeitlinien}$ mit Skalarprodukt:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \prod \delta(A_{1[i,j]} - A_{2[i,j]}) \delta(R_{1,[i,j]} - R_{2,[i,j]}) \prod \delta(\gamma_{(1,k)} - \gamma_{(2,k)}) \quad (19c.)$$

2. Anfangs- und Endzustände:

Gewählt wird:

$$\langle 0 | \Psi_{ini} \rangle = \langle 0 | A_{[i,j]}^1, R_{[i,j]}^1; \gamma_k^1 \rangle; \langle 0 | \Psi_{final} \rangle = \langle 0 | A_{[i,j]}^2, R_{[i,j]}^2; \gamma_k^2 \rangle \quad (19d.)$$

Diese Zustände definieren die diskreten Raumzustandskonfiguration am Anfang und am Ende eines geodätischen Zeitabschnittes. Es ergibt sich also für die Übergangsamplitude in Operatorform folgende Gleichung in allgemeiner Definition:

$$A[\Psi_{final} \leftarrow \Psi_{ini}] = \left\langle \Psi_{final} \left| e^{\frac{-i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} \right| \Psi_{ini} \right\rangle \quad (20a.)$$

mit dem diskreten Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi G} \sum_{[i,j]} \hat{A}_{[i,j]} \hat{R}_{[i,j]} + \sum_k \sqrt{\hat{p}_{\mu k} \hat{p}_k^\mu + m_k^2} + 8\pi G \sum_{[i,j]} \hat{A}_{[i,j]} \hat{p}_\gamma(i, j) \quad (20b.)$$

Δt_γ ist dabei die Geodätenzeit zwischen Anfangs- und Endzustand.

3. Matricelement-Entwicklung:

Im diskreten Formalismus ergibt sich nun:

$$A = \sum \prod \Delta A_{(i,j)} \Delta R_{(i,j)} \Delta \gamma_k \Psi_{final}^\square [R^{(2)}, A^{(2)}, \gamma^{(2)}] e^{\frac{i}{\hbar} S_{tot}[A, R, \gamma]} \Psi_{ini} [A^{(1)}, R^{(1)}, \gamma^{(1)}] \quad (20c.)$$

Das entspricht einem diskreten Feynman-Pfadintegral über Flächen- und Geodätenkonfigurationen. Eventuell ist der Übergang von der Summe zum Integral erlaubt und ebenso der Übergang der Differenz-Summationsvariable “Delta“ zum infinitesimalen Differential “d“.

III.9.2. Übergang zu Zwischenschritten einer zellenweisen Evolution:

Wenn das Gitter sich in diskreten Planckzeit-Schritten entwickelt, also pro Geodätenabschnitt Δt_{PL} , dann gilt die Kompositionsregel:

$$A_{tot} = \prod_{n=1}^N \left\langle \Psi_{n+1} \left| e^{\frac{-i}{\hbar} \hat{H} \Delta t_{PL}} \right| \Psi_n \right\rangle. \quad (20d.)$$

Zeitentwicklung erfolgt lokal und zellweise, ähnlich wie bei spin foam amplitudes in LQG.

1. Lokale Amplitudenstruktur:

Jede Zelle (i, j) trägt eine lokale Amplitude der Form:

$$A_{(i,j)} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{8\pi G} R_{(i,j)} A_{(i,j)} + 8\pi G A_{(i,j)} \rho_\gamma(i, j) \right) \right] \quad (20e.)$$

und jede Geodäte γ_k trägt

$$A_{\gamma_k} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} m_k L[\gamma_k] \right] \quad (20f.)$$

Die gesamte Übergangsamplitude ist das Produkt:

$$A = \prod A_{(i,j)} \times \prod A_{\gamma_k} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{tot} \right]. \quad (20g.)$$

Damit ist die Operatorform equivalent zum diskreten Pfadintegral aber sie zeigt klar, dass das System als lokales Netzwerk von Evolutionsoperatoren wirkt.

2. Semiklassisches Limit der stationären Phase:

Im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ oder für viele Zellen gilt das Prinzip der stationären Phase:

$\frac{\Delta S_{tot}}{\Delta A_{(i,j)}}=0; \frac{\delta S_{tot}}{\delta \gamma_k}=0 \rightarrow$ Diskrete Einsteingleichungen und Geodätengleichungen. Das zeigt, dass das Modell im Semiklassik-Limit die klassische, gekoppelte Raumzeit-Dynamik reproduziert.

III.9.3. Physikalische Interpretation:

1. Amplitude A gibt die Wahrscheinlichkeit für den Übergang zwischen zwei Raumzeit-Konfigurationen an,
2. Zeitentwicklung erfolgt nur entlang Geodäten, Δt_γ ist nicht global, sondern geodätisch lokal.
3. Raumgitter und Geodäten sind nicht getrennt quantisiert, sondern Teil eines einzigen Pfadintegrals mit Kopplung $A_{(i,j)} \rho_{\gamma(i,j)}$. Das führt zu einer selbstkonsistenten Quantenkopplung zwischen Raum und Zeit. Die Zusammenfassung dieser Korrelation zeigt die Tabelle 13:

Aspekt	Das Modell	LQG-Spinfoam
Zustände	Diskrete Flächen und Geodäten	Spinnetzwerke (Kanten+ Flächen)
Amplitude	$A=e^{\frac{i}{\hbar} S_{tot}}$	Produkt lokaler Vertexamplituden $A_v(j_f, i_e)$
Zeitparameter	Lokale Geodätenzeit Δt_γ	„intern“ über topologische Übergänge
Kopplung	Geodätenenergie ρ_γ direkt in S_{tot}	Implizit über Spinzustände
Semiklassik	Stationäre Phase = Diskrete Einsteingleichungen	Stationäre Phase=Regge-Einstein-action
Interpretation	Quantenprozesse entlang von Zeitlinien	Quantenräume ohne bevorzugte Zeitrichtung

Tabelle 13: Vergleich zwischen dem aktuellen 2D-Quantum-gravity model und der LQG-Struktur.

III.10. Zusammenfassung und Interpretation:

$$A[\Psi_2 \leftarrow \Psi_1] = \left\langle \Psi_2 \left| e^{\frac{-i}{\hbar} \hat{H} \Delta t_\gamma} \right| \Psi_1 \right\rangle = \sum_{[A,R,\gamma]} e^{\frac{i}{\hbar} S_{tot}[A,R,\gamma]} \quad (21.)$$

III.10.1. Interpretation:

1. Das ist das diskrete, quantisierte Raumzeit-Pfadintegral mit expliziter Zeitdefinition entlang von Geodäten,
2. Die Raumzellen $A_{(i,j)}$ und die Zeitpfade γ_k sind gleichberechtigte, quantenmechanische Variablen,
3. Im Semiklassik-Limit reproduziert das Modell die Einstein-Gleichungen und Geodätenbewegung,
4. Im Quantenregime entstehen Überlagerungen verschiedener Raumzeit-Geometrien, gewichtet durch $e^{\frac{i}{\hbar}S}$.

III.10.2. Diskrete Schrödinger-Gleichung für das Planckgitter-Modell:

1. Die Zustandsfunktion:

Die diskrete Zustandsfunktion wird definiert als:

$$\Psi\left[\left\{A_{(i,j)}\right\};\left\{\gamma_k\right\};\left\{t\right\}\right]\equiv\left\langle\left\{A_{(i,j)}\right\},\left\{\gamma_k\right\}\left|\Psi(t)\right\rangle\right. \quad (22a.)$$

mit:

1. $\left\{A_{(i,j)}\right\}$ --- Flächen der Planckzellen,
2. $\left\{\gamma_k\right\}$ --- diskrete Geodätenpunkte/Zeitpfade,
3. t --- Zeit entlang einer Geodäten γ , lokal definiert.
4. Der Hilbertraum ist: $H_{Raum} \otimes H_{geodesics}$.

2. Der Hamiltonoperator wirkt aus der Übergangsamplitude:

$$\hat{H}=\hat{H}_{space}+\hat{H}_{geodesics}+\hat{H}_{coup} \quad (22b.)$$

mit:

$$1. \hat{H}_{space}=\frac{1}{8 \pi g} \sum_{(i, j)} \hat{R}_{(i, j)} \hat{A}_{(i, j)}, \quad (22c.)$$

$$2. \hat{H}_{geodesics}=\sum_k \sqrt{\hat{p}_{\mu, k} \hat{p}_k^{\mu}+m^2_k}; \quad (22d.)$$

$$3. \hat{H}_{coup}=8 \pi G \sum_{(i, j)} \hat{A}_{(i, j)} \hat{\rho}_{\gamma}(i, j) \quad (22e.)$$

und

$$4. \hat{p}_{\mu,k} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \gamma_k^\mu}, \quad (23.)$$

wobei die

$\hat{A}_{(i,j)} \wedge \hat{R}_{(i,j)}$ multiplikativ wirken oder über Defizitwinkeloperatoren.

III.10.3. Die diskrete Zeitentwicklung:

Die diskrete Schrödinger-Gleichung entlang einer Geodätenzeit Δt_γ lautet:

$$i\hbar \frac{\Psi(t+\Delta t_\gamma) - \Psi(t)}{\Delta t_\gamma} = \hat{H} \Psi(t) \quad (24a.)$$

oder in kontinuierlicher Notation entlang Geodätenzeit:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \Psi[A_{(i,j)}; \gamma_k; t_\gamma] = \hat{H} \Psi[A_{(i,j)}; \gamma_k; t_\gamma] \quad (24b.)$$

Dann ist die explizite Form der Gleichung im Pfadintegral-Formalismus:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \Psi[A; \gamma; t_\gamma] = \left[\frac{1}{8\pi G} \sum_{(i,j)} R_{(i,j)} A_{(i,j)} + \sum_k \sqrt{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma_k^\mu \partial \gamma_k^\mu} + m_k^2} + 8\pi G \sum_{(i,j)} A_{(i,j)} \rho_\gamma(i,j) \right] \Psi \quad (25.)$$

mit

1. $\frac{\partial}{\partial \gamma_k^\mu}$ --- diskrete Ableitung entlang der Geodätenpunkte,

2. Die Operatoren $\hat{R}_{(i,j)}$ können z.B. über die Regge-Kalkül-Defizitwinkel quantisiert werden.

III.11. Interpretation:

III.11.1. Lokalität: Jeder Planckzellen-Hamiltonian wirkt lokal auf Flächen und über die Kopplung auf die Geodäte,

III.11.2. Geodätenzeit: Zeit ist nur entlang der Geodäten definiert; eine globale, "kosmische" Zeit gibt es nicht,

III.11.3. Semiklassischer Limes: Im limit $\hbar \rightarrow 0$ reproduziert die Gleichung die diskreten Einstein-Gleichungen und die Geodätenbewegung,

III.11.4. Numerische Umsetzung: Die Gleichung kann z.B. durch Trotter-splitting der lokalen Zell- und Geodätenoperatoren simuliert werden.

Daraus ergibt sich also als numerische Blaupause für ein Simulationsmodell die konkrete diskrete Schrödinger-Gleichung auf einem Planck-Gitter mit endlicher Planckzellenzahl, Zellenschreibweise der Schrödinger-Gleichung und Matrixschreibweise zu:

III.12. Diskrete Schrödinger-Gleichung auf einem endlichen Planck-Gitter:

III.12.1. Diskretes Gitter und Zustände:

Angenommen, es existiere ein Gitter aus $N_x \times N_y$ Planckzellen. Jede Zelle (i, j) hat ihre Fläche $A_{(i,j)}$ und ihren Defizitwinkel $R_{(i,j)}$. Der Zustandsvektor ist die diskrete Hilbertraumbasis:

$$\langle 0 | \Psi \rangle = \otimes_{(i,j)} \langle 0 | A_{(i,j)} R_{(i,j)} \rangle \otimes \otimes_{k=1}^{N_y} \langle 0 | \gamma_k \rangle \quad (26.)$$

Jede Geodäte γ_k ist durch n diskrete Zeitpunkte in $\gamma_k^{(n)}$ beschrieben.

III.12.2. Diskrete Ableitungen:

Ableitungen entlang Geodätenzeit γ_k werden durch endliche Differenzen approximiert

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_k} \Psi \rightarrow \frac{\Psi \gamma_k^{(n+1)} - \Psi \gamma_k^{(n)}}{\Delta t_\gamma} \quad (27a.)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma_k^2} \Psi = \frac{\Psi(\gamma_k^{(n+1)}) - 2\Psi(\gamma_k^{(n)}) + \Psi(\gamma_k^{(n-1)})}{(\Delta t_\gamma)^2} \quad (27b.)$$

III.12.3. Diskreter Hamiltonoperator als Matrix:

Es ist: $\hat{H} = \hat{H}_{cells} + \hat{H}_{geodesics} + \hat{H}_{coup}$. Dabei ist

1. der Raumanteil:

$$\hat{H}_{cells} = \frac{1}{8\pi G} \sum_{(i,j)} \hat{R}_{(i,j)} \hat{A}_{(i,j)} \quad (27c.)$$

$\hat{A}(i, j)$ wirkt diagonal: $\langle \hat{A}_{(i,j)} | A_{(i,j)} \rangle = \langle A_{(i,j)} | A_{(i,j)} \rangle$,

$\hat{R}_{(i,j)}$ kann als multiplikativer Defizitwinkeloperator oder über diskrete Nachbarschaften definiert werden.

2. Der Geodätenteil:

$$\hat{H}_{geodesics} = \sum_{n=1}^{N_y} \sqrt{-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial \gamma_k^2} + m_k^2} \quad (27d.)$$

Diskretisiert über Tridiagonalmatrix T_k :

$$T_k = \frac{-\hbar^2}{(\Delta \gamma_k)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (28.)$$

Dabei kann die Quadratwurzel $\sqrt{T_k^2 + m_k^2}$ über Numerik/Diagonalisierung umgesetzt werden.

3. Kopplung:

$$\hat{H}_{coup} = 8\pi g \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{A}_{\langle i,j \rangle} \hat{\rho}_\gamma(i,j), \quad (29.)$$

dabei ist:

$\hat{\rho}_\gamma(i,j)$ die diskrete Geodätenenergie in Zelle (i,j) . Die Matrix T_k ist diagonal in $\langle 0|A,R\rangle$ und wirkt als Gewichtung auf die Geodätenzustände.

4. Diskrete Zeitentwicklung:

Die Schrödingergleichung

$$\hat{H} \Psi(t) = i\hbar \frac{\Psi(t+\Delta t_\gamma) - \Psi(t)}{\Delta t_\gamma} \quad (30a.)$$

wird durch explizite Iteration gelöst:

$$\Psi(t+\Delta t_\gamma) = \frac{-i\Delta t_\gamma}{\hbar} \hat{H} \Psi(t) \quad (30b.)$$

oder über unitäre Entwicklung nach Exponentialschema:

$$\Psi(t+\Delta t_\gamma) = e^{\frac{-i}{\hbar} \hat{H} \Delta t_\gamma} \Psi(t). \quad (30c.)$$

Dabei ergeben sich für kleine Gitterdimensionen direkte Matrixexponentiationen, für größere Systeme ist Trotter-Splitting nach Zellen und Geodäten sinnvoll.

5. Algorithmische Umsetzung: siehe Anhang A.

III.12.4. Physikalische Interpretation:

1. Jede Planckzelle ist eine lokale dynamische Variable,

2. Die Geodätenzeit wirkt als eindeutige, lokale Uhr, entlang der sich das System entwickelt,
3. Kopplung sorgt für Emergenz von Geometrie-Quantenfluktuationen,
4. Im Semiklassiklimit wird klassische GRT-Geometrie und Geodätenbewegung reproduziert.

Iteration, s. Anhang B

IV. Nichtlineare Effekte und Quantenblob-Dynamik (QBD):

Werden Terme wie $A^2_{(i,j)}$ oder $R^2_{(i,j)}$ im Hamiltonian erzeugt, kann Selbstwechselwirkung generiert werden. Das Ziel ist, zu zeigen, dass dann Quantenfluktuationen lokale „Blobs“ von Krümmung erzeugen können. Als Ansatz für das Semiklassiklimit kann die mittlere Krümmung überprüft werden. Untersucht wird die Stabilität emergenter Strukturen im Planckgittermodell bei Beeinflussung der Geometrie durch kleine Quantenfluktuationen in Zellflächen oder Defizitwinkeln.

IV.1 Quantenfluktuationen (QF) im Modell:

Diese QF können folgendermaßen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} A_{(i,j)} &\rightarrow A_{(i,j)} + \epsilon_{(i,j)}; \epsilon_{(i,j)} \sim N(0, \sigma_A^2) \\ R_{(i,j)} &\rightarrow R_{(i,j)} + \eta_{(i,j)}; \eta_{(i,j)} \sim N(0, \sigma_R^2) \end{aligned} \quad (31.)$$

Der Term σ_A steuert die Stärke der Fluktuation, σ_R beeinflusst die lokale Krümmung. Kleine Werte bedeuten Übergang zum semiklassischen Limit, große Werte bedeuten starke Quantenfluktuationen und Übergang zu stark quantisierter Geometrie.

Wirkungen auf die emergente Struktur:

IV.1.1. Zellflächen:

1. Fluktuationen ändern lokale Zellflächen, das führt zu kleinen Variationen in der lokalen Krümmung,
2. Die Mittelwerte bleiben stabil, falls $\sigma_A \ll A_{(i,j)}$ ist,
3. Annahme ist, dass die Varianz der Zellflächen linear wächst mit σ_A^2 .

IV.1.2. Geometrie/Defizitwinkel/Krümmung:

1. Fluktuationen können lokale Geometrie aufblähen oder zusammenziehen,
2. Falls Kopplung zwischen Zellen stark ist, wird Fluktuation durch Nachbarn gedämpft, was Stabilität erzeugt,
3. Schwache Kopplung heißt, dass die Fluktuationen akkumulieren und die Geometrie wird diffus.

IV.1.3. Geodäten:

1. Diskrete Zeitpunkte erfahren lokale Längenänderungen, welche die Propagation von Zuständen beeinflussen,
2. Kleine Fluktuationen erzeugen im Mittel stabile Bahnen der Geodäten,
3. Große Fluktuationen bedeuten, dass die Interferenz zwischen den Pfaden zunimmt und die Transitions-Amplituden streuen.

IV.1.4. Stabilitätskriterien:

Betrachtet wird der Erwartungswert der Zellflächen:

$$\langle A_{i,j} \rangle_t = \langle \Psi(t) | \hat{A}_{i,j} | \Psi(t) \rangle, \quad (32a.)$$

$$1. \text{ Stabilität: } \text{var}(\langle A_{i,j} \rangle_t) \ll A_{i,j}^2, \quad (32b.)$$

2. Kritische Fluktuationsstärke σ_c definiert Übergang der Struktur von stabil $\rightarrow$ diffus,
3. Ähnliches gelte für die Krümmung $R_{i,j}$.

IV.1.5. Physikalische Interpretation:

1. $\sigma \ll \sigma_c$: semiklassische Geometrie mit emergenter stabiler Gravitation und konsistenter Zeit auf den Geodäten
2. $\sigma \gg \sigma_c$: Quantenschaumartige Strukturen mit stark korrelierter Gravitation- aber unvorhersehbar auf kurzen Skalen $\rightarrow$ statistische Aussagen über Wahrscheinlichkeitsamplituden oder deterministisches Chaos.
3. Beobachtung: Emergenz stabiler Strukturen erfordert starke Kopplung zwischen benachbarten Zellen, ähnlich wie in causal dynamical triangulations (CDT).
4. Simulation der Fluktuationen: s. Anhang C

IV.2. Nichtlinearer Hamiltonian:

Bisher wurde für die Zellfläche ein linearer Hamilton-Operator verwendet:

$$H_{cell} = \sum_{i,j} \frac{1}{8\pi G} R_{i,j} A_{i,j} \quad (33.a)$$

Um Selbstwechselwirkung zu berücksichtigen, werden nun quadratische oder höhere Potenzen hinzugefügt:

$$H_{cell}^{NL} = \sum_{(i,j)} \frac{1}{8\pi G} \left(R_{(i,j)} A_{(i,j)} + \lambda A_{(i,j)}^2 \right). \quad (33b.)$$

Dabei steuert $\lambda > 0$ die Stärke der Nichtlinearität. Physikalisch bedeutet das: große Zellflächen kosten mehr Energie. Das erzeugt energetische Kopplungen zwischen den Fluktuationen (optional können noch höhere Terme, etwa $\mu A_{(i,j)}^3$ für stärkere Selbstinteraktion gesetzt werden. Diese Nichtlinearität erzeugt folgende Wirkung auf die Quantenfluktuationen:

IV.2.1. Blobs von Krümmung:

Kleine Fluktuationen in $A_{(i,j)}$ werden durch quadratische Terme stabilisiert oder verstärkt, je nach der Stärke von λ . Dadurch können sich lokal kleine Konzentrationen von Krümmung bilden, die semiklassisch wie kleine “blobs“ aussehen.

IV.2.2. Semiklassik-Limit:

Betrachtet wird der Erwartungswert der mittleren Krümmung:

$$\langle R(t) \rangle = \frac{\sum_{i,j} \langle \Psi(t) | R_{i,j} | \Psi(t) \rangle}{N_{cells}} \quad (34.)$$

Die mittlere Krümmung bleibt stabil für kleinere Fluktuationen. Lokale Maxima zeigen, wo durch Selbstwechselwirkung gekrümmte blobs entstehen. Der quadratische Term erzeugt nichtlineare Selbstkopplung des Geometriegitterfeldes. Die Interpretation des Ganzen wird zusammengefasst in Tabelle 14:

Effekt	Beschreibung
Linearer Hamiltonian:	Fluktuationen propagieren unabhängig, mittlere Krümmung ist homogen
Quadratischer/nonlinearer Hamiltonian:	Fluktuationen koppeln an sich selbst → blobs entstehen
Semiklassik-Limit:	Mittlere Krümmung $\langle R \rangle$ bleibt stabil, lokale Variationen sichtbar

Tabelle 14: Die Wirkung des nonlinearen Hamiltonian auf die lokale und globale Geometrie.

IV.2.3. Physikalische Analogie:

Quantenfluktuationen erzeugen kleine Krümmungsregionen ähnlich wie lokale Gravitationsfelder in der Planck-Skala. *Emergenz: auch ohne Materie kann lokale Struktur in der Raum-Zeit entstehen.* Nichtlineare Selbstwechselwirkung im Hamiltonian führt also zur Entstehung von lokalen blobs von Krümmung, die durch Quantenfluktuationen erzeugt werden, während das Semiklassiklimit die mittlere Krümmung stabil hält. Damit existiert ein voll funktionsfähiges, konzeptionelles Modell, das zeigt, wie lokale Struktur emergent aus einer quantisierten Planckgitter-Geometrie entstehen kann. Als Nächstes wird die Kopplung zwischen mehreren Geodäten eingeführt, um komplexere, dynamische Effekte in diesem nonlinearen Szenario zu untersuchen:

Ausgangspunkt: Gegeben seien mehrere Geodäten, dann gelte:

1. Sei N_γ die Anzahl der Geodäten,
2. Jede Geodäte γ_k hat einen diskreten Zeitverlauf t_k ,
3. Flächen der Zellen $A_{i,j}$ beeinflussen jede Geodäte und umgekehrt.

Bisher gab es nur einfache, diagonale Kopplung. Jetzt soll nonlineare Kopplung über die Geodäten eingeführt werden:

$$H_{coup} = \sum_{(i,j)} \sum_{k < l} g_{kl} f(A_{(i,j)}) \hat{\rho}_{Y_k}^{(i,j)} \hat{\rho}_{Y_l}^{(i,j)}. \quad (33c.)$$

Dabei gelten folgende Zusammenhänge:

- a) g_{kl} --- Kopplungsstärke zwischen den Geodäten k und l,
- b) $f(A_{(i,j)})$ --- nonlineare Funktion der Zellflächen (z.B. A^2),
- c) $\hat{\rho}^{(i,j)}_{Y_k}$ --- Operator, der die Anwesenheit der Geodäte k in der Zelle (i,j) misst.

IV.2.4. Physikalische Interpretation:

1. Quantenfluktuationen der Zellflächen beeinflussen alle Geodäten gleichzeitig,
2. Nonlineare Kopplung zwischen den Geodäten erzeugt Interferenzmuster, lokale Konzentrationen von Krümmungen wie blobs und Emergenz zeitabhängiger Strukturen in der Geometrie.
3. Semiklassisches Limit: Mittlere Krümmung bleibt stabil aber einzelne Geodäten können lokal voneinander abweichen.

In mathematischer, diskreter Formulierung:

$$H_{tot} = \sum_{(i,j)} \frac{1}{8\pi G} (R_{(i,j)} A_{(i,j)}) + \lambda A^2_{(i,j)} + \sum_{k=1}^{N_Y} H_{geo}^k + \sum_{(i,j)} \sum_{k < l} g_{kl} f(A_{(i,j)}) \hat{\rho}_{Y_k}^{(i,j)} \hat{\rho}_{Y_l}^{(i,j)} \quad (34.)$$

Erläuterung:

- a) erste Summe: nichtlineare Zellflächen,
- b) zweite Summe: Geodäten-Hamiltonian,
- c) dritte und vierte Summe: nonlineare Kopplung zwischen Geodäten

IV.2.5. Eigenschaften und Dynamik:

1. Für kleine g_{KL} fast unabhängige Geodäten, mittlere Krümmung stabil,
2. Für große g_{kl} beeinflussen sich die Geodäten stark, lokale Krümmungsblobs können wandern oder miteinander verschmelzen,
3. Non-Linearität in A^2 verstärkt kleine Fluktuationen zu stabilen, lokalisierten Strukturen.
4. Mögliche Erweiterungen:

Unterschiedliche g_{kl} für benachbarte vs. entfernte Geodäten führen zum Vergleich zwischen lokaler und globaler Kopplung. Einführung stochastischer Fluktuationen in die g_{kl} modellieren zufällige Quanteneffekte in der Kopplung. Die Idee ist, dass Geodäten, die auf dem Gitter, also räumlich,

näher aneinander liegen, stärker miteinander gekoppelt sein sollten als weiter voneinander entfernte Geodäten. In mathematischer Beschreibung:

$$g_{kl} = \begin{cases} g_{\text{lokal}} : \text{Geodäten } k \text{ und } l \text{ benachbart : } k/l \text{ B/l} \\ g_{\text{lokal}} \ll g_{\text{global}} : \text{Geodäten } k \text{ und } l \text{ weit entfernt} \end{cases}$$

IV.3. Daraus ergeben sich die folgenden physikalischen Schlussfolgerungen:

IV.3.1. Lokale Blobs der Krümmung werden stabilisiert, weil nahe Geodäten sich gegenseitig unterstützen,

IV.3.2. Globale Fluktuationen werden abgeschwächt, dämpfen “chaotische“ Effekte,

IV.3.3. Ermöglicht wird dadurch die Emergenz von lokal kohärenten Strukturen, während das Gesamtsystem noch flexibel bleibt.

IV.3.4. Stochastische Fluktuationen in den g_{kl} :

Quanteneffekte wirken nicht deterministisch. Dies kann durch zufällige Schwankungen in der Kopplung modelliert werden:

$$g_{kl}(t) = g_{kl}^0 + \delta g_{kl}(t), \delta g_{kl}(t) \sim N(0, \sigma_g^2). \text{ Die Folgen daraus sind:}$$

Lokale Kopplungen atmen zufällig, d.h. die blobs können sich leicht um ihre Position bewegen, wachsen oder schrumpfen um Sinne evolutioneller Schwingungen. Die Quantenfluktuationen werden nicht nur in den Zellflächen sondern in der Interaktion selbst modelliert. Spontane Symmetriebrüche oder kurzzeitige Resonanzen können erzeugt werden.

IV.3.5. Resonanzeffekte durch bestimmte Geodätenkonfigurationen:

Die Analogie ist ein selbstresonantes System, in dem kleine Fluktuationen nicht zerfallen, sondern verstärkt werden. Mathematisch: wenn die nichtlineare Kopplung $g_{kl} f(A_{i,j}) \hat{p}_k \gamma_k \hat{p}_l \gamma_l$ phasenähnlich für mehrere Geodäten wirkt, summieren sich kleine Fluktuationen:

$$\sum_{k \neq l} g_{kl} (A_{i,j}^2) \langle \hat{p}_k \gamma_k \hat{p}_l \gamma_l \rangle \sim \text{lokaler Maximalwert}$$

IV.3.6. Die Folgen sind:

1. Lokale Krümmungsblobs bleiben stabil über mehrere Zeitschritte,
2. Dynamische Muster entstehen, z.B. Wanderung, Spaltung oder Verschmelzen von blobs,
3. Resonanz kann gezielt durch Anpassung von g_{kl} oder der initialen Geodätenkonfiguration kontrolliert werden.

Tabelle 15 zeigt die Kombination der Effekte:

Effekt	Mechanismus	Konsequenz für blobs
Lokale vs. globale Kopplung	$g_{\text{lokal}} > g_{\text{global}}$	Stabile, lokal kohärente blobs
Stochastische g_{kl}	$\delta(g_{kl})(t) \neq 0$	Fluktuierende blobs, spontane Bewegung/Verformung
Resonanzeffekte	Kohärente Geodätenkonfiguration	Verstärkte, langlebige blobs

Tabelle 15: Einfluss der Steuerparameter g_{kl} auf die blobs.

IV.4. Physikalische Interpretation:

Diese Erweiterungen erlauben es, lokale Strukturen in der quantisierten Raumzeit emergent und dynamisch zu modellieren, eine Mischung aus deterministischer Stabilität und quantenmechanischer Fluktuation.

Semiklassisches Szenario zur Kombination der drei Effekte aus Tabelle 14, das zeigt, wie blobs entstehen und dynamisch miteinander interagieren.

IV.4.1. Szenario-Aufbau:

1. Gitter mit 2×2 Zellen-Fkächenstruktur,
2. Geodäten: drei Geodäten mit diskreten Zeitpunkten $t_0, \dots, t_N$,
3. Zellflächen $A_{(i,j)}$ quantisiert, initiales $A_{(i,j)} = 1$,
4. Nichtlinearität: $\lambda A^2_{(i,j)}$,
5. Kopplungen: $\left\{ \begin{array}{l} g_{kl} \text{ lokal} \text{ --- benachbarte Geodäten} \\ g_{kl} \text{ global} \text{ --- weit entfernte Geodäten} \end{array} \right\}$,
6. Stochastische Fluktuationen:

$$\delta g_{kl} \sim N(0, \sigma_g^2),$$
7. Initiale Konfiguration der Geodäten läuft so, dass sie auf benachbarten Zellen liegen, was zur Verstärkung der lokalen blobs führt.

IV.4.2. Semiklassische Dynamik:

Es werden Erwartungswerte der Zellflächen $\langle A_{(i,j)}(t) \rangle$ betrachtet:

1. Lokale vs. globale Kopplung stabilisiert blobs in benachbarten Zellen,
2. Stochastische Fluktuationen lassen blobs leicht wandern, hin und her schwingen oder pulsieren,

3. Es gibt Resonanz, woraus folgt dass mehrere bestimmte Zellen verstärkte Krümmung zeigen, die mehrere Zeitschritte anhält,

Interpretation: Obere Zellen (0,0) und (0,1) bilden lokalen Krümmungsblob, dessen Resonanz den blob über mehrere Zeitschritte stabil hält. Die unteren Zellen fluktuieren stärker, bleiben aber im Mittel flach. Stochastische δg_{kl} erzeugen leichte Schwingung des blobs.

IV.4.3. Physikalische Interpretation:

1. Lokale Kopplung und Resonanz stabilisieren die lokale Struktur,
2. Globale Kopplung verhindert, dass das System völlig chaotisch wird,
3. Stochastische Fluktuationen ermöglichen Dynamik: Wanderung und Interaktion der blobs,
4. Wegen der Nichtlinearität in A^2 können kleine Fluktuationen lokal verstärkt werden und blobs entstehen emergent.

Weiterführung von Planckgitter-Quantenfluktuationen zu einem, emergenten, dynamischen Effekt, der möglicherweise Gravitation nachbilden kann. Geprüft wird, ob die Krümmungsblobs als Gravitonenwechselwirkung in der Gravitationskraft interpretiert werden könnten. Eventuell lässt sich ein solcher blob durch Resonanzeffekte zu einem Urknall entwickeln, falls die emergente Kopplung der Stabilisierung zu gering ist. Können Krümmungsblobs also als Gravitonen interpretiert werden, was zunächst nahe läge?

In klassischer, linearer Störungstheorie sind Gravitonen die Spin-2-Quanten kleiner, propagierender Wellen der Raumzeit-Krümmung als Lösungen der quantisierten, linearisierten, Einstein-Feldgleichung. Tabelle 16 zeigt den Vergleich:

blob-Eigenschaft	Blobs im Vergleich zu Gravitonen
Lokalisiert, nicht propagierend	Eher wie schwingende Quasiteilchen der Raumzeit, nicht unbedingt Wellen
Entsteht durch Nichtlinearität	Gravitonen sind lineare Störungen, blobs hingegen sind intrinsisch nonlinear
Kann sich durch Kopplung bewegen	blob-Bewegung kann ähnlich zu einer Welle interpretiert werden, aber ist stark lokal und diskret

Tabelle 15: Vergleich zwischen blobs und klassischen spin-2-Gravitonen der quantisierten, linearisierten Gravitationswellentheorie.

Es ergibt sich also, dass blobs nicht als klassische Gravitonen betrachtet werden können, weil sie keinen linearen, propagierenden Wellen zugeordnet sind. Die Analogie sieht so aus, dass blobs eher lokale Krümmungsanregungen sind, die sich gegenseitig beeinflussen also eher eine Art Quasigravitonen oder lokale gravitative Potentiale auf der Planck-Skala. *Wenn man allerdings die*

Kopplungen so anpasst, dass blobs über mehrere Zellen propagieren, ließe sich eine semiklassische, gravitonartige Dynamik modellieren.

IV.5. Das Risiko eines lokalen Urknalls bzw. einer lokalen Instabilität:

Angenommen, die stabilisierende Kopplung auf allen drei Ebenen (lokal+global+Resonanz) wäre zu schwach, dann könnten die blobs immer weiter wachsen, weil die nichtlineare Selbstwechselwirkung die Fluktuation verstärkt. Wenn mehrere blobs zusammenfallen oder resonant koppeln, kann die lokale Krümmung überproportional anwachsen.

IV.5.1. Mathematisch im Modell:

$$H_{tot}^{NL} = \sum_{(i,j)} \frac{1}{8\pi G} \left(R_{(i,j)} A_{(i,j)} + \lambda A_{(i,j)}^2 \right) + g_{coup} A^2 + \dots \quad (35.)$$

Wenn nun $\lambda A_{(i,j)}^2 \gg g_{coup} A^2$ ist, dann gibt es keine ausreichende Dämpfung und exponentielles Wachstum der lokalen Krümmung findet statt.

Interpretation: Semiklassisch könnte das wie ein lokaler Mini-Urknall wirken, eine kurzzeitige, extrem starke Krümmungssteigerung. Dies entspricht einem lokalen Energiepeak im Raumzeit-vacuum, der nur durch emergente Kopplung gedämpft werden kann.

Tabelle 16 fasst diese urknallartigen Bedingungen zusammen:

Parameter	Stabilität	Instabilität/lokaler Urknall
λ - non-linearity	Klein bis moderat	Sehr groß
g_{local}	Mittel bis hoch	Zu niedrig
g_{global}	Klein aber nicht Null	0 oder vernachlässigbar klein
Resonanzkonfiguration	Unterstützt lokale Struktur	Kann Wachstum verstärken, falls Kopplung zu schwach
Stochastische Fluktuationen	Klein, aber sorgt für dynamische Bewegung	Groß, kann Instabilität auslösen

Tabelle 16: Zustandsparametergrößen für das Auslösen eines Mini-Urknalles.

IV.5.2. Physikalische Interpretation:

1. Ein stabiler blob entspricht einem lokalen Quasi-Gravitonpotential,
2. Ein instabiler blob ist ein Analogon zu einem Urknall auf Planck-Skala,

3. Dieses Szenario zeigt, dass die emergente Gravitation in diesem Modell nicht automatisch stabil ist, sondern von Kopplungsparametern abhängt.

Zusammenfassung: Blobs werde lokal als nichtpropagierende Quasigravitonen durch nichtlineare Selbstwechselwirkung erzeugt. Resonanz und Kopplung stabilisieren die blobs; zu schwache Kopplung erzeugt exponentielles Wachstum, was zu lokalen Mini-Urknallen führen kann, da dieses Instabilitätsszenario als lokaler Planckskala-Krümmungsausbruch verstanden werden kann.

Kontrollierbare Parameter sind: λ ; g_{loc} ; g_{glob} ; die Resonanzstärke S_{res} und die Fluktuationsstärke σ_g .

IV.5.3. Zu den semiklassischen Instabilitätsbedingungen für blobs:

Ausgangspunkt sei der Hamiltonian für eine Zelle mit nichtlinearer Selbstwechselwirkung und Kopplung zu Nachbarzellen und/oder Geodäten:

$$H_{cell} = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{(i,j)} A_{(i,j)} + \lambda A_{(i,j)}^2 \right) + \sum_{k < l} g_{kl} A_{(i,j)}^2 \rho_{\gamma_k}^{(i,j)} \rho_{\gamma_l}^{(i,j)} \quad (36.)$$

Dabei ist:

$R_{(i,j)}$ --- lokale, diskrete Krümmung,

$\lambda A_{(i,j)}^2$ --- nichtlineare Selbstverstärkung,

g_{kl} --- Kopplung zwischen Geodäten.

Das zeitliche Wachstum der mittleren Krümmung wird betrachtet:

$$\frac{d}{dt} \langle A_{(i,j)} \rangle \sim \lambda \langle A_{(i,j)} \rangle^2 - \sum_{k < l} g_{kl} \langle A_{(i,j)} \rangle^2 \quad (37a.)$$

mit folgenden Definitionen:

$$\langle A_{(i,j)} \rangle \stackrel{def}{=} \bar{A}; G_{eff} \stackrel{def}{=} \sum_{kl} g_{kl} - \lambda. \quad (37b.)$$

Dann gelten folgende Bedingungen:

1. $G_{eff} > 0 \Rightarrow \bar{A}$ bleibt begrenzt,
2. Instabilität/Mini-Urknall: $G_{eff} < 0 \Rightarrow \bar{A}$ wächst exponentiell.

IV.5.4. Interpretation:

Die emergente Kopplung zwischen Geodäten muss stark genug sein, um die nichtlineare Selbstverstärkung λ zu dämpfen. Überschreitet p die effektive Kopplung, explodieren die Krümmungsblobs exponentiell.

IV.5.5. Semiklassischer Dynamikansatz:

Für kleine Zeitintervalle Δt lässt sich eine diskrete Dynamik formulieren:

$$\bar{A}(t + \Delta t) = \bar{A}(t) + \Delta t \left(\lambda - \sum g_{kl} \right) \bar{A}^2(t) + \xi(t) \quad (37c.)$$

1. $\xi(t)$ --- stochastische Fluktuation ,
2. Stabilität: $\lambda < \sum (g_{kl})$,
3. Instabilität: $\lambda > \sum g_{(kl)} \rightarrow$ exponentielles Wachstum.

IV.6. Interpretation als makroskopische Trägheit:

Betrachtet wird ein stabiler blob, der lokal eine Krümmung erzeugt. Der blob existiert als lokales Energiepaket und wirkt auf benachbarte Geodäten wie ein Potential. Die Bewegung des blobs erfordert Arbeit, da die Kopplung $\sum g_{kl}$ überwunden werden muss. Als Analogie lässt sich also annehmen, dass ein stabiler Krümmungsblob sich so verhält wie ein minimales Masse-Volumen im semiklassischen Limit. Es gibt einen Widerstand gegen Beschleunigung, was zu einer Trägheitsaussage bzw. Messung oder Beobachtung führt, wohingegen eine Interaktion mit Nachbarblobs zu einer Gravitations oder Kraftwirkung führt. Zu beachten ist dabei, dass diese Trägheit emergent ist. Sie entsteht nicht aus einer Masse im klassischen Sinn, sondern aus lokaler Stabilität der Quantenfluktuation. Die Stärke der Trägheit hängt ab von der Selbstwechselwirkung λ , von der Kopplung zur Nachbargeodäten g_{kl} und von der Fluktuationsstärke σ_g .

Eine Zusammenfassung zeigt Tabelle 18:

Parameter	Effekt
$\lambda < \sum g_{kl}$	Stabiler blob, kann als emergente Trägheit interpretiert werden
$\lambda > \sum g_{kl}$	Instabilität führt zu lokalem Mini-Urknall
$\sigma_g > 0$	Dynamik, Wanderung oder Pulsation der blobs
Resonanzkonfiguration S_{res}	Verstärkt lokale Krümmungsblobs, stabilisiert oder destabilisiert sie je nach dem Verhältnis λ/g_{kl}

Tabelle 18: Stabilität oder Instabilität der blobs und ihre Auswirkungen auf die Raum-Zeit

Als Fazit lässt sich herausarbeiten, dass blobs stabil sein können und daher wie lokalisierte Trägheits- oder Energieeinheiten wirken könnten, als Quasiteilchen der Raumzeit. Blobs können instabil sein, was zu schwacher Kopplung und starker Nicht-Linearität führt und damit zu einem Mini-Urknall-Effekt.

Stabilitätsdiagramm für blobs s. Anhang D.

IV.6.1. Blobs als Trägheitswiderstand für klassische Teilchen:

Diskutiert wird nun, ob Quanten-Raumzeit-Blobs als Ursache der Beschreibung von Trägheit für klassische Teilchen dienen können:

Ein klassisches Teilchen auf einer Geodäte γ_i wird betrachtet. Die Geodäte wird dabei durch lokale Krümmung der Raumzeit bestimmt. Ein stabiler blob erzeugt eine Erhöhung der lokalen Krümmung δR . Für ein Teilchen, das durch diesen blob läuft, gilt semiklassisch die Geodätengleichung:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (38.)$$

Dabei enthält der Term $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ Anteile der lokalen Krümmungsblobs. Der Effekt tritt auf, dass das Teilchen einen Widerstand gegen Beschleunigung spürt. Emergente Trägheit tritt auf. Blobs wirken also wie lokale Massenpunkte der Raumzeit, ohne dass klassische Masse existiert. Teilchen auf Geodäten müssen Arbeit gegen die lokale Krümmung leisten, was eine Trägheitswirkung erzeugt. Diese Eigenschaft ließe sich als semiklassische Ursache der Trägheit interpretieren, die aus quantisierten Raumzeitstrukturen hervorgeht.

Tabelle 19 fasst die Trägheitseigenschaften der blobs zusammen:

Parameter	Effekt auf Trägheit
$\lambda < g_{kl}$	Stabiler blob → konstante Trägheit
$\lambda > g_{kl}$	Instabilität → blob explodiert → temporäre, extreme Krümmung → lokaler Vacuumimpulsstoß
Resonanz S_{res}	Verstärkt blob → lokal größere Trägheit
σ_g	Fluktuationen → Trägheit wird leicht dynamisch → pulsierend

Tabelle 19: Einfluss der blobs auf die Trägheitseigenschaften bewegter Materie- oder Energieteilchen.

Diagramm: Einfluss von blobs auf Trägheit klassischer Teilchen auf Geodäten. S. Anhang E.

IV,6,2. Quantitative Semiklasikformel für die emergente Trägheit eines Teilchens, basierend auf stabilen Krümmungsblobs:

Der Ausgangspunkt sei ein Teilchen auf einer Geodäten γ , das die lokale Krümmung $R(x)$ durch blobs erfährt:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (39.)$$

Sei jetzt: $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\nu\rho,0}^\mu + \delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu$, wobei der Term $\delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die lokale Blob-Krümmung enthält. Nun wird die semiklassische Kraft F_{blob}^μ auf das Teilchen betrachtet:

$$F_{blob}^\mu = m \delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (40.)$$

Betrachtet wird nun ein Teilchen der Masse m entlang der x -Richtung eines orthogonalen, kartesischen Koordinatensystems und blobs bei x_i mit der Stärke A_i :

$$\delta \Gamma_{tt}^x \sim \sum_i g_{eff} A_{(i,j)} f(x - x_i) \quad (41a.)$$

mit: $f(x - x_i)$ --- Formfunktion des blobs, z.B. Gauss: $f(x) = \exp\left[-(x - x_i)^2 / \sigma^2\right]$. Die effektive Kraft auf das Teilchen ist dann:

$$F_{blob}(x) \sim m \sum_i g_{eff} A_i f(x - x_i). \quad (41b.)$$

In Analogie zur klassischen Newtonschen Trägheit $F = m a_{eff}$ ergibt sich hier eine emergente Trägheit von:

$$m_{eff} = m \left(1 + \frac{x_i}{v^2} \sum_i g_{eff} A_i f(x - x_i) \right), \quad (41c.)$$

$v = dx/d\tau$ --- Geschwindigkeit des Teilchens.

Als Interpretation ergibt sich, dass ein stabiler blob $A_i > 0$ die effektive Masse erhöht, das klassische Teilchen widersteht dadurch einer Beschleunigung und erhält so eine emergente Trägheit, wobei eine Summe über mehrere blobs einen additiven Effekt erzeugt und so auf diesem Wege makroskopisch spürbare Trägheit erzeugt.

Tabelle 20 zeigt den Einfluss der Parameter des blobs auf das klassische Teilchen:

Parameter	Wirkung auf m_{eff}
λ --- Nonlinearity des blobs	Größere $A_i \rightarrow$ stärkere Trägheit
g_{kl} --- Kopplung zwischen Geodäten	Stabilisiert blob $\rightarrow A_i \text{ constant} \rightarrow$ konstante Trägheit
σ_g --- stochastische Fluktuation	Dynamische Variation von $A_i \rightarrow$ pulsierende Trägheit
S_{res} --- Resonanz	Lokale Verstärkung der $A_i \rightarrow$ lokal stärkerer Widerstand

Tabelle 20: Einfluss der Kopplungsparameter des blobs auf die Bewegung klassischer Quantenteilchen zur Erzeugung emergenter Trägheit.

Als Fazit ergibt sich, dass stabile Krümmungsblobs lokale Widerstände erzeugen, die sich als emergente Trägheit interpretieren lassen. Die emergente Masse m_{eff} ist proportional zur blobstärke A_i und zur Kopplung g_{eff} . Mehrere blobs zusammen überlagern ihre Wirkungen durch additive Effekte und erzeugen auf diesem Wege makroskopische Trägheit.

Damit könnte die klassische Masse in einem quantisierten Raumzeit-Modell teilweise erklärbar sein.

IV.7. Schematische Darstellung der effektiven Trägheit entlang der Geodäte:

Gegeben sei eine Geodäte x mit mehreren stabilen blobs und gegebenenfalls einem instabilen blob bei x_i .

Stabile blobs haben feste Krümmung und erzeugen eine konstante Erhöhung der effektiven Masse m_{eff} . Instabile blobs vergehen hingegen in einer kurzen Explosion im Quantenvacuum, erzeugen daher eine kurzzeitige Spitze in $m_{eff}(x)$ und damit einen (virtuellen) Impulsstoß auf die Teilchenmasse.

Damit ergibt sich eine Gleichung für die effektive Masse entlang der Geodäte:

$$m_{eff}(x, t) = m \left[1 + \frac{x_i}{v^2} \sum_{i \in stable} g_{eff} A_i f(x - x_i) + \frac{x_j}{v^2} \sum_{j \in unstable} g_{eff} A_j(t) f(x - x_j) \right] \quad (42.)$$

Dabei ist A_j die zeitabhängige Blobstärke bei instabilen blobs und $f(x - x_i)$ die Formfunktion, z.B. Gauss. Außerdem soll gelten:

stable $\rightarrow A_i \approx const.$,

unstable $\rightarrow A_j(t)$ stark zeitabhängig.

Schematische Graphik s. Anhang F:

IV.7.1. Interpretation als gravitative Brownsche Bewegung:

Instabile blobs erzeugen eine schnelle, lokale Änderung der Krümmung, wodurch das klassische Teilchen durch seine Kopplung mit dem gravitativen Quantenvacuum eine kurzzeitige Beschleunigung oder Verzögerung erfährt. Daher ergibt sich folgende Analogie zur klassischen Brownschen Bewegung: das klassische Teilchen auf der Geodäte wird gestört durch Quantenfluktuationen der Raumzeit. Der Effekt ist stochastisch, zeitlich kurz und lokal, ähnlich einem zufälligen Impuls.

Für die Messbarkeit des Effektes gilt, dass die Amplitude A_j groß genug ist, um merkbare Geschwindigkeitsänderungen zu erzeugen und dass die Zeitdauer der Impulsstöße Δt lang genug ist, um außerhalb der Quantenskala zu liegen. Die Überlagerung vieler blobs erzeugt einen statistischen Effekt, der sich wie eine Mini-Brownbewegung in der Gravitation aufsummieren kann. Dieser Effekt könnte wahrscheinlich nur in hochpräzisen Experimenten nachgewiesen werden und ist eigentlich nur in der frühen, dichten Phase der Raumzeit relevant. Als Fazit ergibt sich, dass stabile blobs konstante emergente Trägheit erzeugen, die grundsätzlich klassisch messbar ist. Instabile blobs hingegen erzeugen kurzfristige Impulsstöße, die als gravitative Brown-Bewegung des Quanten-Vacuums der Raumzeit interpretiert werden kann. Die effektive Masse von klassischen Quantenteilchen im Limit ergibt sich aus semiklassischer Beschreibung. Das statistische

Mittel über viele Fluktuationen erzeugt einen makroskopischen Effekt, der prinzipiell messbar sein sollte.

Visualisierung der Geodäte: s. Anhang G.

Damit ergibt sich prinzipiell die Gravitations-Brownskraft eines klassischen Quantenteilchens zu:

$$F_{blob}(x, t) = m \frac{d^{2x}}{dt^2} \sim m_{eff}(x, t) a(x, t), \quad (43.)$$

mit

$a(x, t)$ – lokale Beschleunigung entlang der Geodäten. Ein Teilchen kann also entlang der Geodäte prinzipiell durch stabile blobs langsam abgebremst werden oder durch instabile blobs impulsartig beschleunigt werden als Folge der emergenten Trägheit bzw. der Gravo-Brown-Bewegung.

Damit ergibt sich als Abschluss:

Stabile und instabile blobs beeinflussen die Bewegung entlang einer Geodäte indem sie emergente Trägheit des Teilchens durch Kopplung mit dem gravitativen Quantenvacuum erzeugen.

V. Summary:

There can be formulated a twodimensional quantum gravity on a discrete lattice form, where time is only defined on classical geodesics. This formulation is similiar to LQG [16.],[17.] or to CTD [18.], [19]. In this description classical inertia can be emulated by a quantum blob structure, which functions as local excitation of spacetime. A discrete Planck lattice is assumed with $L=(V, E)$, where L_{PL} is a regular square lattice with lattice spacing, a well-defined two-dimensional cell complex structure. Each vertex has four neighbors, the distances of which are unique. A discrete metric over $d((i, j), (i', j')) = n \cdot L_{PL}$ is consistent and metric. This is a valid hybrid structure on which a consistent system of discrete equations can be formulated. A form of quantum buckles or bubbles can be defined on the lattice in a form of interchanging with the geodesics. These blobs can be interpreted as a form of quasi-particles in spacetime lattice, like an exciton in matter, which could be the reason for inertia, because the coupling of movement of classical quantum particles to the gravity lattice and its blobs generate a resistance against this movement along a geodesic wordline which can be interpreted as a form of classical observed inertia in SRT/GRT.

VI. Conclusion:

The formal framework for the model therefore includes: Discrete space as a Planck grid, geodesics as smooth time carriers, continuous transition from the grid to the continuum, emergently defined metric and curvature, transition to the limiting case of classical GRT at $L_{PL} \rightarrow 0$. If the spacetime dimensions can be interpreted as orthogonal quantumstates between the spacelike coordinates of the quantum-lattice, which are periodically constructed by the timelike potential, then a 3D-description of spacetime is sufficient because there would no true four-dimensional couplings. These would classically only appear as an averaged value of the quantum conditions and therefore were secondary and not the primal description of spacetime.

VII. Discussion:

There is the possibility, that the 3D-quantum-gravity is part of a system of orthogonal dimension quantum-states, which act like building a permanent discrete twodimensional spacelike lattice-manifold by permanent erasing one spacelike dimension (in the ontological sense of Averrhoes, that reality is built permanent and not only at Big Bang as a single singularity) and generates in a macroscopic level only an average of a fourdimensional manifold where the spin up/spin down-arrows in the following description symbolize a form of quantum ON/OFF generators, which couple the orthogonal quantum systemparts of dimensions with each other to the whole mean. The imagination is, that the spacelike planck-areas could be oriented and that two opposite areas would erase their common but oppositely oriented dimension edge over an orthogonal quantum operator like:

$$\begin{aligned} \langle t_1 | x, y \rangle &= \langle t_1 | x \uparrow y \downarrow \rangle \leftarrow \Psi \langle y \uparrow z \downarrow | t_2 \rangle \Rightarrow \langle t_2 | x, z \rangle = \langle t_2 | x \uparrow z \downarrow \rangle = - \langle t_2 | z \uparrow x \downarrow \rangle \leftarrow \\ &\Psi \langle x \uparrow y \downarrow | t_3 \rangle = \langle t_3 | z \uparrow y \downarrow \rangle = \langle t_3 | z, y \rangle = - \langle t_3 | y, z \rangle = \langle t_3 | y \uparrow z \downarrow \rangle \text{ etc.} \end{aligned}$$

(44.)

Appendix A:

Algorithmische Umsetzung der Gitter-Iteration für die diskrete Schrödinger-Gleichung:

Die Schritte sind:

1. Gitter initialisieren : $\langle 0 | A_{i,j}^{(0)} R_{i,j}^{(0)} \rangle$,
2. Geodäten initialisieren: $\langle 0 | \gamma_k^{(0)} \rangle$,
3. Hamiltonian $\hat{H}_{cells}, \hat{H}_{geodesics}, \hat{H}_{coup}$ als Matrix aufbauen,
4. Iterativ: $\Psi(t + \Delta t_y) = \exp^{-i\hat{H}\frac{\Delta t_y}{\hbar}} \Psi(t)$, (44.)
5. Messgrößen: Erwartungswerte $\langle A_{i,j} \rangle; \langle \gamma_k \rangle$, lokale Krümmung $R(i, j)$.

Appendix B:

Numerische Iteration mit konkreter Mini-Matrix von 2×2 Planckgitter und 2 Geodäten. Es ergibt sich folgendes Gitter mit seinen Zuständen:

Gitterzellen: $(1,1); (1,2); (2,1); (2,2)$,

Geodäten: $\gamma_1; \gamma_2$,

Jede Geodäte hat drei diskrete Zeitpunkte: $t \in (0; 1; 2)$. Der Zustandsvektor ist:

$\langle 0 | \Psi \rangle = \langle 0 | A_{1,1} A_{1,2} A_{2,1} A_{2,2} \rangle \otimes \langle 0 | \gamma^{(0,1,2)} \gamma^{(0,1,2)} \rangle$ Damit ergibt sich im vereinfachten Beispiel eine Dimension von 36: 4 Zellen $\times$ 3^2 Geodätenpunkten = 36 Zustände.

Hamiltonian-components for the cell-Hamiltonian:

$$\hat{H}_{cell} = \frac{1}{8\pi G} \sum_{i,j} R_{(i,j)} A_{(i,j)}. \quad (45.)$$

Für die Demonstration werden die Defizitwinkel $R_{(i,j)}$ als $R_{(i,j)} \sim 1$ angenommen. Die Matrix ist dann diagonal in der $\langle 0|A \rangle$ -Basis:

$$H_{cell} = \frac{1}{8\pi G} \text{diag}(R_{1,1} A_{1,1} + \dots + R_{2,2} A_{2,2}) \quad (46.)$$

und der Geodäten-Hamiltonian ergibt sich mit der diskreten zweiten Ableitung:

$$T_k = \frac{-\hbar^2}{(\Delta t_\gamma)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (47.)$$

für zwei Geodäten als: $\hat{H}_{Geodesics} = T_1 \otimes I_3 + I_3 \otimes T_2$ mit der Größe 9×9 , da es 3×3 Zeitpunkte gibt. Für die Kopplung gilt, dass die Energie der Geodäten in den Zellen beträgt:

$$\rho_\gamma(i,j) = \sum_k \sum_n \delta_{(i,j)}^{(k,n)}. \quad (48.)$$

Dann kann die Diagonalmatrix in Zell-und Geodätenbasis medelliert werden:

$$H_{coup} = 8\pi G \text{diag}(A_{1,1} \rho_{11}, \dots, A_{2,2} \rho_{22}) \quad (49.)$$

Als Gesamt-Hamiltonian ergibt sich dann:

$\hat{H} = H_{cell} \otimes I_9 + I_4 \otimes H_{geodesics} + H_{coup}$ mit der Dimension $N = 4 \times 9 = 36$ und jede Matrix kann direkt numerisch umgesetzt werden.

Als diskrete Zeitentwicklung ergibt sich über explizite Euler-Iteration:

$$\Psi(t + \Delta t_\gamma) = \Psi(t) - \frac{i \Delta t_\gamma}{\hbar} \hat{H} \Psi(t) \quad (50a.)$$

oder über stabilere, unitäre Iteration:

$$\Psi(\Delta t_\gamma) = \exp \frac{-i \hat{H} \Delta t_\gamma}{\hbar} \Psi(t). \quad (50b.)$$

Tabelle A zeigt die zusammengefassten Daten:

Parameter	Wert
$A_{[i,j]}$	1 Planckfläche
$R_{[i,j]}$	1
m_k	1 Planckmasse
Δt_γ	1 Planckzeit
$\hbar = 1$	Natürliche Einheiten

Tabelle A: die Interaktionsfestlegungen für die numerische Klein-Simulation.

Diese Mini-Simulation kann man direkt in *Python*, *Mathematica* oder *MATLAB* laufen lassen.

(In Python kann für die 36x36-Matrix “numpy.linalg.exp“ verwebdet werden).

Um mehr emergente Geometrie und dynamische Effekte zu untersuchen, lassen sich mehr Zellen und damit eine höhere Dimension verwenden: In einem 3x3 - oder 4x4-Gitter lassen sich mehr Freiheitsgrade einbringen und damit komplexere Kopplungen untersuchen. Der Vorteil wäre eine sichtbare Emergenz von Wellenfronten und Krümmungsmustern. Da die Matrixgrößen schnell wachsen, sollten *sparse*-Matrizen verwendet werden (scipy.sparse).

Angenommen, der Defizitwinkel $R(i, j)$ wird variiert. Anstatt einer konstanten 1 lässt sich die Dynamik abhängig machen von den Nachbarzellen.

$$R_{[i,j]} = f(A_{[i,j]}; A_{[i+1,j]}; A_{[i,j+1]}) \quad (50c.)$$

Das ermöglicht lokale Geometrieflexibilität und bessere Krümmungskopplung. Der Ansatz ist ähnlich dem Regge-Kalkül. Verbesserte dynamische Kopplung von Geodäten und Gitterzellen ergibt sich durch Ersetzen der einfachen, diagonalen Kopplung durch eine gewichtete Kopplung je nach Zellfläche:

$$H_{coup}^{i,j,k} = g(A_{[i,j]}) \hat{\rho}_\gamma^k(i, j). \quad (50d.)$$

So kann die Energie der Geodäte lokale Geometrie verändern und die Rückkopplung simuliert Gravitation. Erweiterte Zeitschritte bzw. variable Zeitintervalle sind verwendbar möglich. Die diskreten Zeitschritte Δt_γ könnten zellabhängig sein. Damit kann lokale Zeitdilatation modelliert werden, ähnlich wie in SRT/GRT.

Für nonlineare Effekte gilt, dass Terme wie $A_{[i,j]}^2$ oder $R_{[i,j]}^2$ im Hamiltonian eingeführt werden können. Das führt zu einer Selbstwechselwirkung mit dem Ziel, dass Quantenfluktuationen lokale Krümmungs-blobs erzeugen können. Der Ansatz für das Semiklassiklimit lässt sich mit der mittleren Krümmung überprüfen.

Appendix C:

Um die fluctuations einzubinden: Jede Zellfläche erhält eine kleine Zufallsschwankung der Form $\sigma=0.1$. Diese Zufallsschwankung kann beliebig skaliert werden, um die Stabilitätsgrenze zu

untersuchen. Für die Erwartungswerte gilt: $A_{expectation}[t,i]$ zeigt, wie stark die Fläche der i-ten Zelle über die Zeitschritte streut. Kleine Streuung erzeugt eine stabile, emergente Struktur. Große Streuung erzeugt Instabilität und damit diffuse Geometrieeffekte. Bei sehr kleinen Werten $\sigma \ll 1$ entsteht semiklassische Stabilität. Bei $\sigma \sim 1$ folgt, dass die Geometrie in stark fluktuierendes Quantengewirr zerfällt, womit die Quantenfluktuationsdomäne erreicht ist.

Appendix D:

Stabilitätsdiagramm für blobs:

Definiert wird: $G_{eff} = \sum g_{kl} - \lambda$. Dann erzeugt $G_{eff} > 0$ einen stabilen blob, und

$G_{eff} < 0$ einen instabilen blob, der zu einem Mini-Urknall führen kann. Qualitativ lässt sich dieser Sachverhalt in folgendem Diagramm zusammenfassen. Auf der Abszisse ist die nonlinearity λ aufgetragen, auf der Ordinate die effektive Kopplung $\sum g_{kl}$.

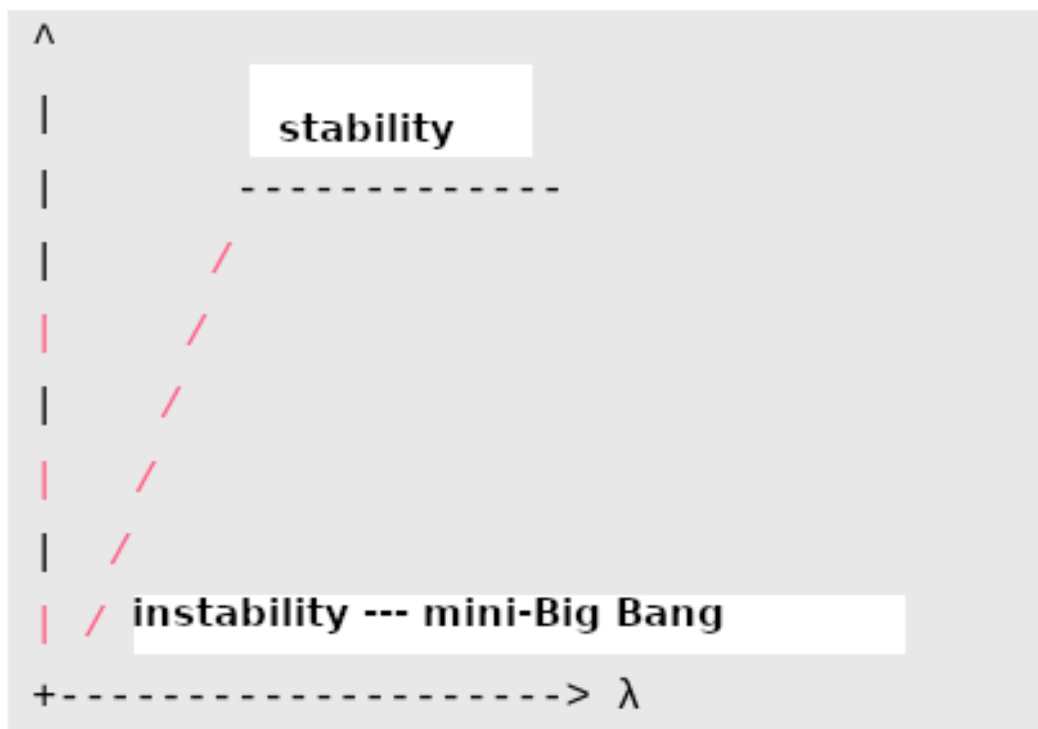


Diagram 1: stability-areas of quantum blobs

Dabei zeigt die Linie $\sum g_{kl} = \lambda$ die Grenze zwischen Stabilität und Instabilität des blobs. Das Gebiet oberhalb der waagerechten Linie erzeugt stabile blobs, das Gebiet unterhalb exponentielles Wachstum.

Appendix E:

Stabile blobs wirken wie Trägheitsquellen für klassische Quantenteilchen und instabile blobs können lokal extreme Effekte erzeugen, temporär wie ein Quanten-Urknall.

Diagramm 2 zeigt wie die blobs Teilchen auf Geodäten beeinflussen können als eine Art von Trägheitsfeld der emergenten Raumzeitblobs:

Aufbau des Diagramms mit Achsen und Elementen:

Abszisse: Geodäte γ mit Raumkoordinatex,

Ordinate: lokale Krümmung $R(x)$ als blob-Intensität,

Die blobs sind lokal begrenzte Erhöhungen der Krümmung, also eine Art Buckel. Der Teilchenpfad zeigt, wie sich ein klassisches Quantenteilchen durch die Krümmungslandschaft bewegt und von ihr beeinflusst wird.

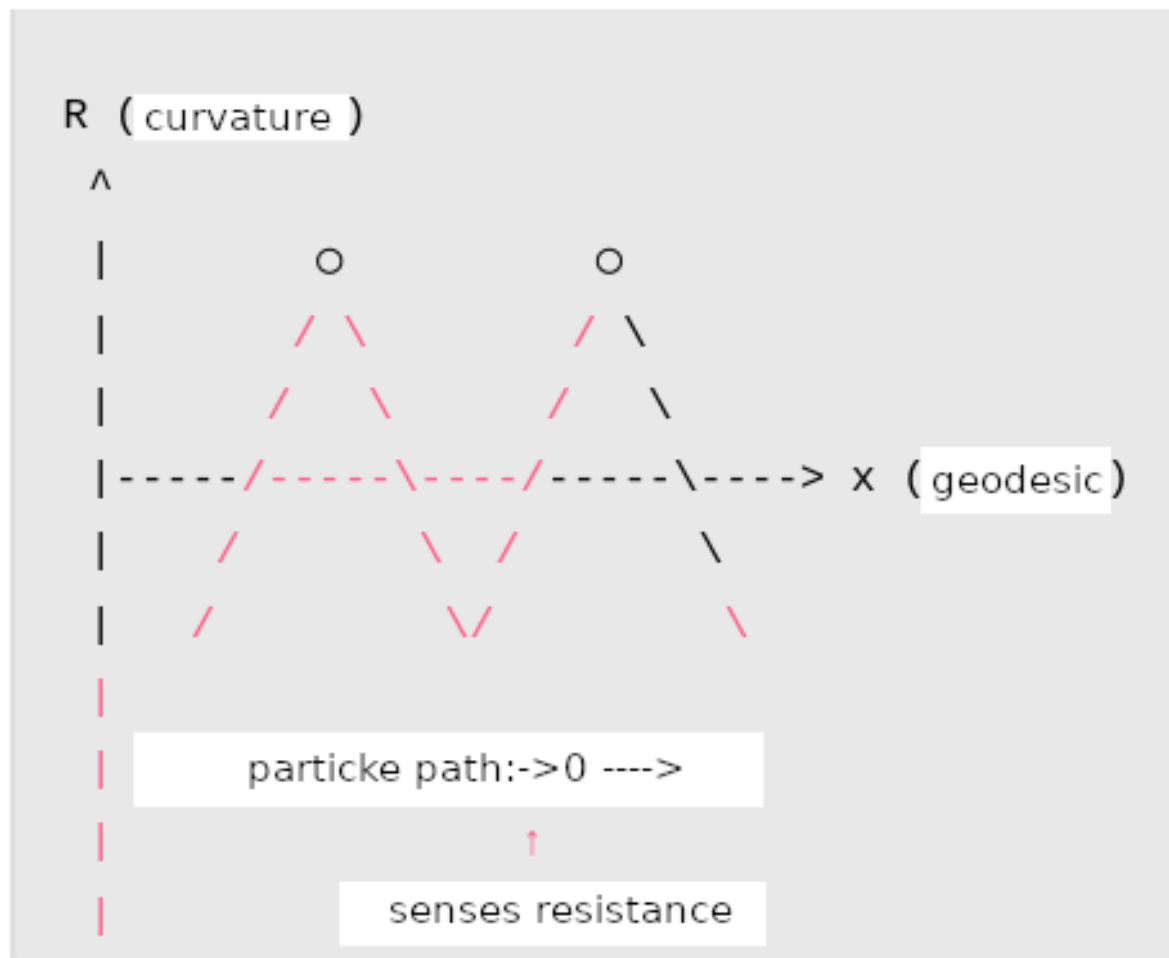


Diagram 2: Wirkung stabiler Krümmungsblobs auf klassische Quantenteilchen auf den Geodäten.

Legende und Interpretation:

O- stabile Krümmungsblobs,

--- - Quantenteilchen auf Geodäte.

/// ↑ \\\ ↓- Richtung des emergenten Trägheitswiderstandes, die Teilchenbahn ist leicht verzögert oder gebremst an den blobs, evtl. orthogonale Streuung.

Stabile blobs im gravitativen Quantengitter erzeugen also lokalen Widerstand, den das Teilchen überwinden muss, eine mögliche Ursache von Trägheit. Nicht gezeichnete instabile blobs würden explosionsartig anwachsen, einen kurzzeitigen starken Impuls auf das Teilchen bewirken durch eine Art minimalen Quanten-Urknall. Die Einwirkung mehrerer blobs kann zu additiver Trägheitswirkung führen und im semiklassischen limit emergent makroskopische Masseneffekte erzeugen. Fluktuationen und Resonanz im gravitativen Quantenvakuum erzeugen eine dynamische Pulsation des Widerstandes und damit eine leicht variierende Trägheit. Hierbei handelt es sich prinzipiell um durch Messung nachweisbare oder durch Nichtbeobachtung zurückzuweisende Effekte.

Appendix F:

Diagram 3: Effektive Masse entlang der Geodäten

.

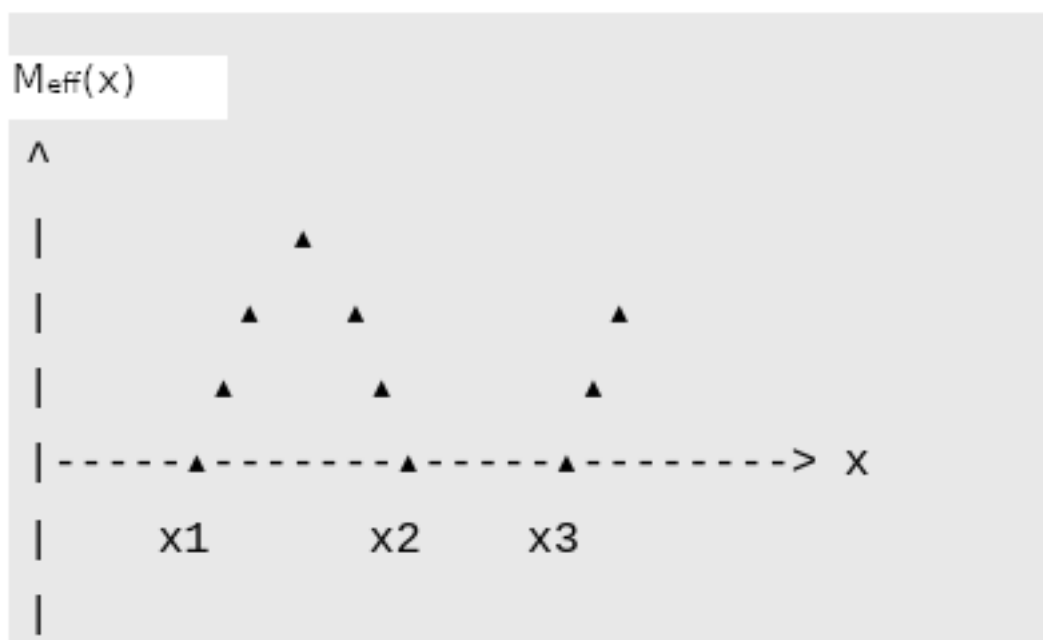


Diagram 3: die effektiv erzeugte, emergente Trägheit entlang eines Teilchenpfades.

Legende und Interpretation:

Die Pfeile zeigen die Bewegung des klassischen Quantenteilchens um die Geodäte x herum. Stabile blobs existieren bei x_1 und x_3 . Der stabile blob in x_1 erzeugt einen Hügel in M_{eff} und damit konstante Trägheit. Ebenso der stabile blob bei x_3 , dessen Einfluss sich erst herausbildet. Der instabile blob bei x_2 erzeugt eine spitze, kurzzeitige Trägheitserhöhung, also eine Art Vacuumimpulsstoß. Das ganze Phänomen kann also als eine Art gravitative Brownsche Bewegung klassischer Quantenteilchen im gravitativen Vacuum betrachtet werden. Unstabile blobs erzeugen eine schnelle, lokale Änderung der Krümmung, wodurch das Teilchen eine kurzzeitige Beschleunigung oder Verzögerung erfährt. Das klassische Quantenteilchen wird also bei der Bewegung auf seiner Geodäte durch gravitative Quantenfluktuationen auf zwei Arten gestört. Dieser Effekt erzeugt emergente Trägheit, wodurch die klassische Trägheit nach Newton und Einstein zumindest teilweise erklärbar sein könnte. Da auch die klassisch flache Raumzeit quantenblobs erzeugt, könnte hiermit möglicherweise die maximale Trägheitswiderstandsgröße c_0 der lokalen, elektromagnetischen Invarianzgeschwindigkeit erklärt werden. Der zweite Effekt ist kurzzeitig stochastisch und lokal und erzeugt nur einen zufälligen Impuls.

Appendix G:

Diagramm 4: Schematische Visualisierung der Geodäte mit stabilen und instabilen blobs und Wirkung auf die effektive Trägheit $M_{eff}(x, t)$.

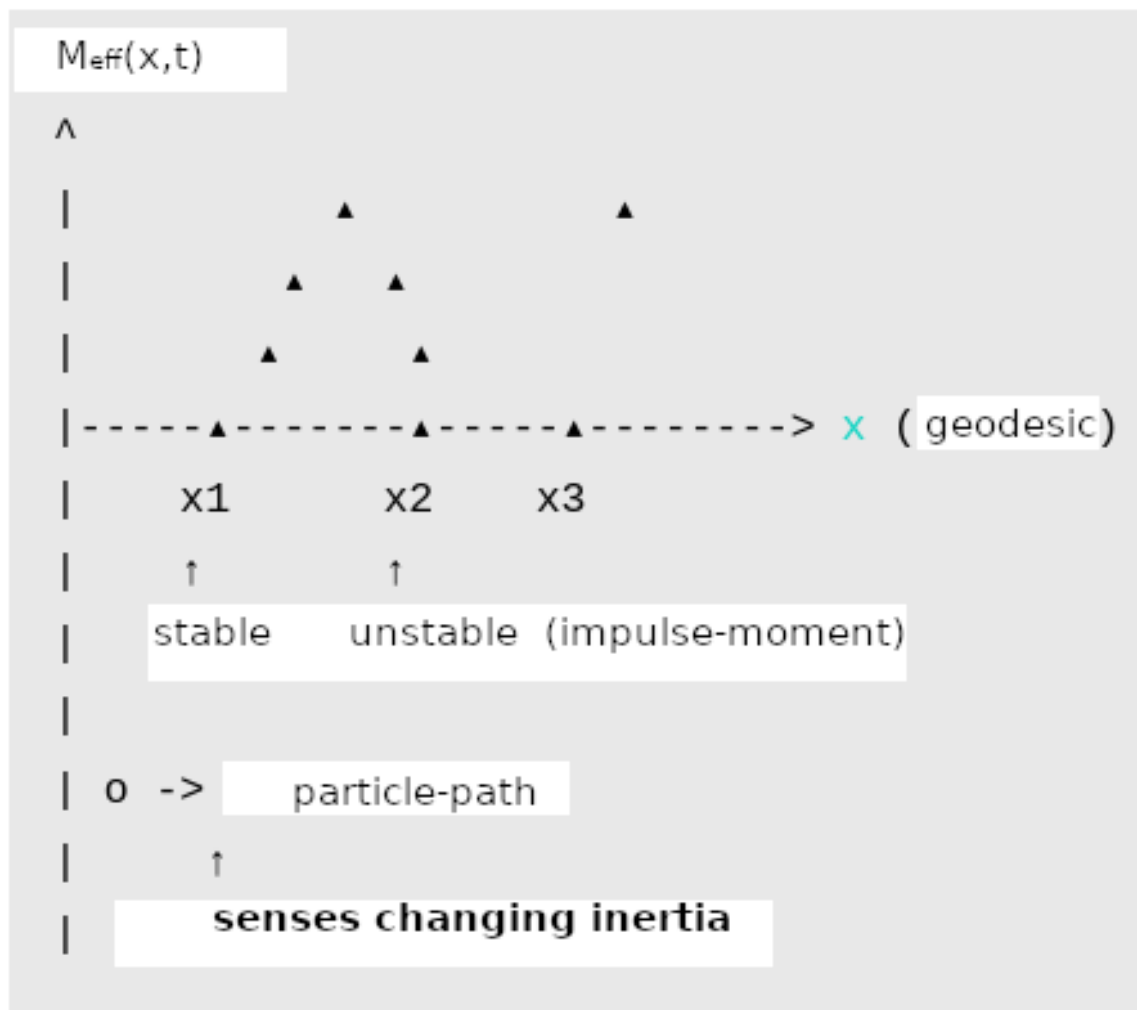


Diagramm 4: Raum-und zeitabhängiger Einfluss der blobs auf die Trägheit bewegter Quantenteilchen entlang einer Geodäten.

Legende und Interpretation:

Bei x_1, x_3 existieren stabile blobs, die konstante Hügel in M_{eff} erzeugen. Bei x_2 gibt es einen instabilen blob, der einen scharfen, kurzzeitigen Peak in M_{eff} erzeugt und damit einen kurzen Impulsstoß.

Das Teilchen auf der Geodäte erfährt den Widerstand des blobs. Stabile blobs erzeugen oder erhöhen lokal die Trägheit, das Teilchen muss mehr Arbeit leisten, was zu emergent erzeugter klassischer Masse führt. Instabile blobs erzeugen einen kurzzeitigen peak und damit erhält jedes Quantenteilchen einen kurzzeitigen Impulsstoß. Dieser Effekt führt zur gravitativen Brownschen Bewegung und möglicherweise zur grundlegenden Erklärung der Heisenbergschen Unschärferelation. Die Kombination mehrerer blobs erzeugt additive Effekte und damit eine semimakroskopische Trägheitslandschaft entlang der Geodäten. Durch Zeitabhängigkeit können instabile blobs pulsieren und erzeugen einen statistischen Effekt ähnlich wie bei der stochastischen Gravitation.

Appendix H:

Der Python-Pseudocode für das 2x2 Gitter der diskreten Hamiltonianstruktur mit nonlinearer Kopplung:

python

#λsteuert Stärke der nonlinearity

$\lambda_{n_1}=0.2$

Fluktuierende Zellflächen

$A_{fluct}=1+\epsilon$

$A_{fluct}=np.ones(N_{cells})+np.random.normal(0,\sigma,N_{cells})$

Nonlinearer Zell-Hamiltonian:

$H_{cells_{diag_{n_1}}}=(1/(8 * np.pi * G)) * (R * A_{fluct}+\lambda_{n_1} * A_{fluct}^2)$

$H_{cells_{n1}}=np.diag(H_{cells_{diag_{N1}}})$

$H_{cells_{n1}}=np.diag(H_{cells_{diag_{n_1}}})$

Gesamthamiltonian mit Geodäten wie vorher:

$H_{tot_{N_1}}=np.kron(H_{cells_{n1}},np.eye(N_{time} * nothing * N_{geod}))+np.kron(np.eye(N_{cells}).H_{geo})$

Der quadratische Term erzeugt also eine nonlineare Selbstkopplung und über mehrere Zeitschritte kann man lokale peaks der Zellfläche/Krümmung beobachten.

References:

- [1.] --- J. Ambjørn & R. Loll, *Causal Dynamical Triangulations: Gateway to Nonperturbative Quantum Gravity*, arXiv:2401.09399 (2024). — aktueller Überblick über CDT, seine Motivation und zentrale Ergebnisse. arXiv+1
- [2.] ---Carlo Rovelli & Francesca Vidotto, *Philosophical Foundations of Loop Quantum Gravity*, arXiv:2211.06718 (2022). — gute Übersicht über konzeptionelle Grundlagen, Problemstellungen und Status von LQG. ArXiv
- [3.] ---Y. Sekhmani et al., *Rotating Charged Nonsingular Black Holes in Loop Quantum Gravity*, 2025. — untersucht mögliche observational signatures von quantenkorrigierten Schwarzen Löchern in LQG. ScienceDirect

- [4] --- J. Brunekreef et al., *Simulating CDT quantum gravity*, Computer Physics Communications (2024). — praktische Einführung in Monte-Carlo Simulationen von CDT (2D und 3D), inklusive Code und methodischer Details. ScienceDirect+1
- [5.] --- „New quantization scheme of black holes in effective loop quantum gravity“, 2025. — neuere Studie zur Schwarzschild-/Kerr-Quantisierung im Rahmen effektiver LQG-Modellierungen. Inspire
- [6.] --- J. Ambjørn, A. Görlich, J. Gizbert-Studnicki, D. Németh: *Is lattice quantum gravity asymptotically safe? Making contact between causal dynamical triangulations and the functional renormalization group*, Phys. Rev. D 110, 126006 (2024). — wichtig für die Verbindung von CDT und Renormierungsgruppenansätzen. journals.aps.org+1
- [7.] --- IH Belfaqih et al., *Hawking Evaporation and the Fate of Black Holes in Loop ...* (2025). — Ansatz, wie Materiekopplung und Hawking-Radiation im LQG-Kontext behandelt werden können. APS Link
- [8.] --- T. Budd & D. Németh, *Phases of tree-decorated Dynamical Triangulations in 3D*, JHEP 2025 (2025). — neueste Untersuchung zur Phasenstruktur von erweiterten DT/CDT-Modellen in 3D. SpringerLink
- [9.] --- MA Raza et al., *Influence of quantum correction on Kerr black hole in effective loop quantum gravity*, 2025. — Analyse von Schatten und Photonringen quantenkorrigierter Kerr-Löcher und mögliche Constraints durch Beobachtungen. SpringerLink
- [10.] --- R. Barouki, H. Stubbs, J. Wheeler, *Conformal Dimensions on Causal Random Geometry*, arXiv:2501.17930 (2025). — Analyse der Kopplung von Materie (z. B. Ising-Modell) an CDT und Untersuchung der konformen Dimensionen. SpringerLink+1
- [11.] --- „Taming Thiemann's Hamiltonian constraint in canonical loop ...“, TLM Guedes et al., 2025. — technischer Beitrag zur Behandlung der Hamilton'schen Nebenbedingungen in der kanonischen LQG-Quantisierung. APS Link
- [12.] --- Frühere, aber grundlegende Reviews und technische Arbeiten — z. B. klassische Arbeiten über DT/CDT und deren Ideen (z. B. historischer Hintergrund, methodische Grundlagen) — relevant für Verständnis älterer und aktueller Entwicklungen. SpringerLink+1
- [13.] --- (Review) — ältere, klassische LQG-Übersicht: z. B. Kapitel / Artikel aus LQG-Literatur (oft referenziert bei neueren Arbeiten) — hilfreich für Grundlagen und Vergleichspunkte. Beispiel: Standardreferenzwerke. (Grundlage vieler aktueller Studien) ResearchGate+1
- [14.] --- Neuere Studien zur Verbindung von CDT mit Materie bzw. zu Matter-Coupled-Modellen im Rahmen dynamischer Triangulation — etwa in den Kontexten, wie Materie das Verhalten der quantisierten Geometrie beeinflusst. (Siehe z. B. Barouki et al.) SpringerLink+1
- [15.] --- Verbindung LQG ↔ Kosmologie: z. B. Studien im Bereich Loop Quantum Cosmology (LQC), die Rückschluss auf Voll-LQG erlauben — z. B. *Loop quantum cosmology: relation between theory and observations*, Agullo / Wang / Wilson-Ewing (2023). arXiv

[16.] ---Arbeiten, die das Verhalten quantisierter Geometrie untersuchen — z. B. Messung von Observablen, Spektraldimension, Wirkung etc. im CDT-Kontext (oft genannt in Reviews). Nature+1

[17.] ---Diskussion über fundamentale Konzepte wie Zeit, Raum, Messgrößen, Emergenz etc.: oft relevant für kritische Einschätzung von LQG, z. B. im Rovelli/Vidotto-Review. arXiv

[18.] ---Studien zur Skalierung und zum continuum-Limit: entscheidend, um nachzuweisen, dass CDT auch eine sinnvolle kontinuierliche Quantengravitationstheorie liefern kann — z. B. Renormierungsgruppenstudien wie Ambjørn et al. 2024. journals.aps.org/+1

[19.] ---Methodische Beiträge zum numerischen Simulationen, Phase-Diagrammen und zur Monte Carlo-Technik bei Dynamical Triangulations — wichtig, um praktische Machbarkeit und Limitationen abzuschätzen (z. B. Brunekreef et al. 2024). ScienceDirect+1

12. Verification:

This paper is definitely written without support of an AI or chatbot like Chat GPT 4 or other artificial tools. It is fully human work.

2025, December