ПУТЬ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
Часть 2. Модифицированная квантовая теория

Г. К. Артимович
E-mail: cfs137@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Вторая часть статьи посвящена переходу от классических полей к квантованным. Переосмыслено понятие произведения полевых операторов. На этой основе сформулирован модифицированный постулат канонического квантования. Предложено отличное от общепринятого уравнение движения операторов. На примере поляризационного оператора продемонстрирована способность модифицированной теории решать проблему ультрафиолетовых расходимостей.

TOWARDS A SOLUTION TO THE PROBLEM OF ULTRAVIOLET DIVERGENCES IN QUANTUM ELECTRODYNAMICS
Part 2. A Modified Quantum Theory.

G. K. Artimovich
E-mail: cfs137@gmail.com

ABSTRACT

The second part of the article is devoted to the transition from classical to quantized fields. The concept of the product of field operators is reconsidered. On this basis, a modified postulate of canonical quantization is formulated. An equation of motion for operators that differs from the generally accepted one is proposed. Using the example of the polarization operator, it is demonstrated that the modified theory can solve the problem of ultraviolet divergences.

4. Зеркальное произведение операторов.

Назовём *фундаментальным* оператором (далее - ф.о.) оператор, который невозможно представить в виде произведения двух других операторов, каждый из которых не является c-числом. Очевидно, что операторы свободных (т.е. невзаимодействующих) полей являются фундаментальными. В зависимости от спина частиц ф.о. могут быть фермионными или бозонными: коммутатор любых двух бозонных ф.о. является c-числом, в то время как для фермионных ф.о. c-числом является их антикоммутатор. Кроме того, ф.о. различаются зеркальностью – новой внутренней степенью свободы, введённой в первой части статьи. Ф.о. остаются ф.о. с той же зеркальностью при умножении их на любое c-число. Сумма двух ф.о. с одинаковой зеркальностью также является ф.о. с той же зеркальностью. Будем считать, что если $\hat{\varphi}(\varkappa)$ - ф.о., то $\hat{\varphi}^{+}(\varkappa)$ и $\partial_\mu\hat{\varphi}(\varkappa)$ также являются ф.о. с зеркальностью $\varkappa$, тем самым предполагая, что никаких иных ф.о. кроме операторов свободных полей и их линейных комбинаций нет.

Итак, имеется четыре вида ф.о.: фермионные с $\varkappa = \pm 1$ и бозонные с $\varkappa = \pm 1$. Предполагается, что любые фермионные ф.о. коммутируют с любыми бозонными ф.о. Также будем предполагать, что любые бозонные ф.о. с разными зеркальностями коммутируют, а любые фермионные ф.о. с разными зеркальностями антикоммутируют. Для удобства дальнейшего изложения целесообразно вместо словосочетания «оператор с зеркальностью $\varkappa$» ввести специальную терминологию. Ф.о. с зеркальностью 1 будем называть *французскими*, а ф.о. с зеркальностью -1 – *чешскими*. Соответственно вместо $\hat{\varphi}(1)$ будем писать просто $\hat{\varphi}$ (accent circonflexe – надстрочный знак «Λ» во французском языке), а вместо $\hat{\varphi}(-1)$ – просто $\check{\varphi}$ (гачек (háček) – надстрочный знак «V», который встречается во многих славянских языках, но впервые был введён в чешскую письменность Яном Гусом).

Назовём *элементарным* оператором (далее – э.о.) оператор, представляющий собой произведение фундаментальных операторов. Э.о., составленный только из фермионных или только из бозонных ф.о., будем так же называть соответственно фермионным или бозонным. Аналогично э.о., составленный из французских или чешских ф.о., будем называть французским или чешским. Если же э.о. составлен из ф.о. с различными зеркальностями, то для него будем использовать термин *смешанный.* Будем считать, что любой оператор, действующий в гильбертовом пространстве состояний некоторой физической системы, представляет собой сумму (быть может – бесконечную) элементарных операторов. Справедливо ли это на самом деле – весьма сложный, дискуссионный вопрос. Стоит иметь в виду, что, принимая это предположение, мы рискуем упустить какие–либо непертурбативные квантовомеханические эффекты.

Число ф.о., из которых составлен э.о. $\hat{F}$, будем обозначать $|\hat{F}|$ и назовём *длиной* оператора. Аналогично число фермионных или бозонных ф.о., входящих в состав э.о. $\hat{F}$, будем называть соответственно *фермионной* (обозначение $\left|\hat{F}\right|_f$) или *бозонной* (обозначение $\left|\hat{F}\right|_b$) длиной. Справедливы очевидные равенства

$$\left|\hat{F}\right| = \left|\hat{F}\right|_f + \left|\hat{F}\right|_b, \qquad \left|\hat{F}\hat{G}\right| = \left|\hat{F}\right| + \left|\hat{G}\right| \tag{4.1}$$

Очевидно также, что второе из равенств (4.1) справедливо не только для общей длины, но и для фермионной и бозонной длин по отдельности.

Пусть $\check{\varphi}_1, \check{\varphi}_2, \dots, \check{\varphi}_n$ - фермионные чешские ф.о., $\check{f}=\check{\varphi}_1\check{\varphi}_2 \dots \check{\varphi}_n$. Назовём оператор

$$\check{f}_* = \check{\varphi}_n \dots \check{\varphi}_2\check{\varphi}_1 \tag{4.2}$$

зеркальным образом оператора $\check{f}$, а преобразование $\check{f} \longmapsto \check{f}_*$ - *зеркальной инверсией.* Нетрудно показать, что для любых фермионных чешских э.о. из определения (4.2) следует равенство

$$(\check{f}\check{g})_* = \check{g}_*\check{f}_* \tag{4.3}$$

Определение (4.2) для $\check{f}_*$ нельзя непосредственно распространить на случай бозонных операторов, если мы хотим, чтобы зеркальная инверсия была дистрибутивной операцией. Действительно, коммутатор любых двух операторов меняет знак при их перестановке, а значит – и при дистрибутивном действии зеркальной инверсии. Но коммутатор любых бозонных ф.о. является c-числом, т.е. нужно допустить существование особых "бозонных" c-чисел, которые меняют знак при зеркальной инверсии. В принципе, такой подход возможен, однако есть более простой вариант решения этой проблемы.

Пусть $\check{\beta}_1, \check{\beta}_2, \dots, \check{\beta}_n$ - бозонные чешские ф.о. Определим зеркальную инверсию оператора $\check{b} = \check{\beta}_1\check{\beta}_2 \dots \check{\beta}_n$ следующим образом:

$$\check{b} \longmapsto \check{b}_* = \eta(n)\check{\beta}_n \dots \check{\beta}_2\check{\beta}_1 \tag{4.4}$$

где

$$\eta(n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tag{4.5}$$

Величина $\frac{1}{2}n(n-1) = n-1+n-2+\cdots+1$ есть не что иное, как число транспозиций, необходимых для перестановки n операторов в обратном порядке, т.е. чётность перестановки $(1,2,\dots,n) \longmapsto (n,\dots,2,1)$. При любом n число $n(n-1)$ – чётное. Используя этот факт, нетрудно получить следующую формулу:

$$\eta(m)\eta(n)\eta(m+n) = (-1)^{mn} \tag{4.6}$$

Из определения (4.4) и формулы (4.6) следует, что для любых бозонных чешских э.о. $\check{a}$ и $\check{b}$ справедливо равенство

$$(\check{a}\check{b})_* = (-1)^{|\check{a}||\check{b}|}\check{b}_*\check{a}_* \tag{4.7}$$

Покажем, что определение (4.4) действительно обеспечивает дистрибутивность. Пусть $\check{\beta}$ и $\check{\beta}'$ – бозонные чешские ф.о., $[\check{\beta}, \check{\beta}'] = c \neq 0$. Рассмотрим оператор

$$\check{B} = \check{\beta}_1 \dots \check{\beta}_k [\check{\beta}, \check{\beta}'] \check{\beta}_{k+1} \dots \check{\beta}_n = c\check{\beta}_1 \dots \check{\beta}_n$$

Согласно (4.4) справедливо равенство $\check{B}_* = c\eta(n)\check{\beta}_n \dots \check{\beta}_1$. С другой стороны $\check{B}_* = \eta(n+2)\check{\beta}_n \dots \check{\beta}_{k+1}[\check{\beta}', \check{\beta}]\check{\beta}_k \dots \check{\beta}_1 = -c\eta(n+2)\check{\beta}_n \dots \check{\beta}_1$, откуда имеем для $\eta(n)$ рекуррентное соотношение

$$\eta(n+2) = -\eta(n) \tag{4.8}$$

Коммутатор $[\check{\beta}, \check{\beta}']$ является c–числом, поэтому $[\check{\beta}, \check{\beta}']_* = [\check{\beta}, \check{\beta}']$. С другой стороны согласно (4.4) $[\check{\beta}, \check{\beta}']_* = -\eta(2)[\check{\beta}, \check{\beta}']$, откуда имеем $\eta(2) = -1$. Естественно считать, что бозонные чешские ф.о. не меняются при зеркальной инверсии, т.е. $\eta(1) = 1$. Из этих результатов и соотношения (4.8) однозначно следует формула (4.5). Рассмотренный выше оператор $\check{B}$ мы получили, вставив коммутатор $[\check{\beta}, \check{\beta}']$ среди сомножителей оператора $\check{b}$. Если среди этих сомножителей вставить не один, а k различных коммутаторов, то вместо (4.8) мы получим соотношение $\eta(n+2k) = (-1)^k\eta(n)$. Это соотношение опять приводит нас к формуле (4.5).

Итак, у нас имеется определение зеркальной инверсии для чешских э.о.: (4.2) – для фермионных и (4.4) – для бозонных э.о. Если $\hat{f}$ - французский э.о., то положим по определению $\hat{f}_* = \hat{f}$. Произвольный э.о. $\hat{F}$ можно представить с помощью перестановки сомножителей в виде $\hat{F} = \check{f}\check{b}\hat{g}$, где $\check{f}, \check{b}$ и $\hat{g}$ – э.о. соответственно фермионный чешский, бозонный чешский и французский. Положим по определению $\hat{F}_* = \check{f}_*\check{b}_*\hat{g}$. Операция зеркальной инверсии дистрибутивна, поэтому для любых двух э.о. $\hat{F}$ и $\hat{G}$ имеет место равенство $(\hat{F} + \hat{G})_* = \hat{F}_* + \hat{G}_*$. Тем самым понятие зеркальной инверсии полностью определено для любого оператора.

Для любого n справедливо равенство $\eta^2(n) = 1$, поэтому повторное применение зеркальной инверсии приводит к исходному оператору. Эрмитово сопряжение не меняет длины э.о., т.к. входящие в его состав ф.о. остаются фундаментальными и число их не меняется. При дифференцировании по времени или любой из пространственных координат ф.о. также остаются фундаментальными, поэтому э.о. длиной n переходит в сумму из n э.о. длиной n . Учитывая всё это, а также дистрибутивность рассматриваемых операций, нетрудно показать, что эрмитово сопряжение и дифференцирование перестановочны с зеркальной инверсией. Итак, для любого оператора $\hat{F}$ справедливы соотношения:

$$\left(\hat{F}_*\right)_* = \hat{F}\,, \qquad \left(\hat{F}^+\right)_* = \left(\hat{F}_*\right)^+ \equiv \hat{F}_*^+\,, \qquad \left(\partial_\mu \hat{F}\right)_* = \partial_\mu\left(\hat{F}_*\right) \equiv \partial_\mu \hat{F}_* \quad (4.9)$$

Произвольный оператор можно представить в виде суммы э.о. вида $\check{f}\hat{g}$, где $\check{f}$ и $\hat{g}$ – э.о. соответственно чешский и французский. В дальнейшем будем называть такой вид э.о. *стандартным.* Пусть $\hat{F} = \check{f}\hat{d}$ и $\hat{G} = \check{g}\hat{h}$ – э.о., приведённые к стандартному виду, т.е. $\check{f}$ и $\check{g}$ - чешские, а $\hat{d}$ и $\hat{h}$ – французские э.о. Введём понятие *зеркального произведения* операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ (обозначение $\hat{F} * \hat{G}$), которое определим следующим образом:

$$\hat{F} * \hat{G} = (-1)^{|\check{f}|_f|\check{g}|_f + |\check{f}|_b|\check{g}|_b}\left(\hat{F}_* \hat{G}_*\right)_* \quad (4.10)$$

Пусть $\hat{F}^{(i)} = \check{f}^{(i)}\hat{g}^{(i)}$ - э.о. стандартного вида, $\left|\check{f}^{(i)}\right|_f = m_i$, $\left|\check{f}^{(i)}\right|_b = n_i$ $(i = 1,2,3)$. Вычисление $\left(\hat{F}^{(1)} * \hat{F}^{(2)}\right) * \hat{F}^{(3)}$ и $\hat{F}^{(1)} * \left(\hat{F}^{(2)} * \hat{F}^{(3)}\right)$ согласно определению (4.10) приводит к одинаковому результату:

$$\left(\hat{F}^{(1)} * \hat{F}^{(2)}\right) * \hat{F}^{(3)} = \hat{F}^{(1)} * \left(\hat{F}^{(2)} * \hat{F}^{(3)}\right) \equiv \hat{F}^{(1)} * \hat{F}^{(2)} * \hat{F}^{(3)} =$$

$$= (-1)^{m_1 m_2 + n_1 n_2 + m_1 m_3 + n_1 n_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3}\left(\hat{F}_*^{(1)} \hat{F}_*^{(2)} \hat{F}_*^{(3)}\right)_* \quad (4.11)$$

Таким образом, зеркальное произведение ассоциативно. Потребуем по определению его дистрибутивность:

$$\hat{F} * \left(\hat{G} + \hat{H}\right) = \hat{F} * \hat{G} + \hat{F} * \hat{H}\,, \qquad \left(\hat{F} + \hat{G}\right) * \hat{H} = \hat{F} * \hat{H} + \hat{G} * \hat{H}$$

Формулы для эрмитова сопряжения и дифференцирования по 4-координатам зеркального произведения такие же, как и для традиционного произведения:

$$\left(\hat{F} * \hat{G}\right)^+ = \hat{G}^+ * \hat{F}^+, \qquad \partial_\mu\left(\hat{F} * \hat{G}\right) = \left(\partial_\mu \hat{F}\right) * \hat{G} + \hat{F} * \left(\partial_\mu \hat{G}\right) \quad (4.12)$$

Справедливость (4.12) несложно доказать, используя перестановочность обеих операций с зеркальной инверсией.

Для произвольных э.о. $\hat{F}$ и $\hat{G}$ введём следующее обозначение:

$$\eta\left(\hat{F}, \hat{G}\right) = (-1)^{|\hat{F}|_f |\hat{G}|_f} \quad (4.13)$$

Из определения (4.13) вытекают очевидные равенства:

$$\eta\left(\hat{F}, \hat{G}\right) = \eta\left(\hat{G}, \hat{F}\right)\,, \qquad \eta\left(\hat{F}\hat{G}, \hat{H}\right) = \eta\left(\hat{F}, \hat{H}\right)\eta\left(\hat{G}, \hat{H}\right) \quad (4.14)$$

Пусть $\check{\varphi}_1, \dots, \check{\varphi}_m, \check{\chi}_1, \dots, \check{\chi}_n$ – фермионные чешские ф.о., $\check{f} = \check{\varphi}_1 \dots \check{\varphi}_m$, $\check{g} = \check{\chi}_1 \dots \check{\chi}_n$. Для зеркального произведения $\check{f} * \check{g}$ согласно (4.10) имеем

$$\check{f} * \check{g} = (-1)^{|\check{f}||\check{g}|}(\check{\varphi}_m \dots \check{\varphi}_1 \check{\chi}_n \dots \check{\chi}_1)_* = \eta\left(\check{f}, \check{g}\right)\check{\chi}_1 \dots \check{\chi}_n \check{\varphi}_1 \dots \check{\varphi}_m = \eta\left(\check{f}, \check{g}\right)\check{g}\check{f}$$

Пусть теперь $\check{\alpha}_1, \dots, \check{\alpha}_m, \check{\beta}_1, \dots, \check{\beta}_n$ – бозонные чешские ф.о., $\check{a} = \check{\alpha}_1 \dots \check{\alpha}_m$, $\check{b} = \check{\beta}_1 \dots \check{\beta}_n$. Из (4.10) и (4.4) с учётом формулы (4.6) получаем:

$$\check{a} * \check{b} = (-1)^{|\check{a}||\check{b}|}\left(\eta(|\check{a}|)\check{\alpha}_m \dots \check{\alpha}_1 \eta(|\check{b}|)\check{\beta}_n \dots \check{\beta}_1\right)_* =$$

$$= (-1)^{|\check{a}||\check{b}|}\eta(|\check{a}|)\eta(|\check{b}|)\eta(|\check{a}| + |\check{b}|)\check{\beta}_1 \dots \check{\beta}_n \check{\alpha}_1 \dots \check{\alpha}_m =$$

$$= (-1)^{mn}\eta(m)\eta(n)\eta(m+n)\check{b}\check{a} = \check{b}\check{a}$$

Учитывая эти результаты, а также перестановочность фермионных и бозонных операторов, нетрудно показать, что для произвольных э.о. $\check{f}$ и $\hat{F}$, где $\check{f}$ – чешский, можно выразить их зеркальное произведение через традиционное следующим образом:

$$\check{f} * \hat{F} = \eta(\check{f}, \hat{F})\hat{F}\check{f} \ , \ \ \hat{F} * \check{f} = \eta(\check{f}, \hat{F})\check{f}\hat{F} \tag{4.15}$$

Если же $\hat{f}$ – французский оператор (не обязательно элементарный), то его зеркальное произведение на любой оператор сводится к традиционному. В общем случае произвольных смешанных э.о. их зеркальное произведение нельзя выразить через традиционное. Действительно, пусть $\hat{F} = \check{f}\hat{d}$ и $\hat{G} = \check{g}\hat{h}$ - смешанные э.о. стандартного вида. В этом случае для зеркального произведения справедлива следующая формула:

$$\hat{F} * \hat{G} = \eta(\hat{F}, \check{g})\check{g}\hat{F}\hat{h} \tag{4.16}$$

Если $\eta(\check{f}, \check{g}) = \pm 1$, то из (4.16) можно получить следующее выражение для разности зеркального и традиционного произведений:

$$\hat{F} * \hat{G} - \hat{F}\hat{G} = -\eta(\hat{d}, \check{g})[\check{f}, \check{g}]_{\mp}\hat{d}\hat{h} \tag{4.17}$$

Зеркальное произведение алгебраически эквивалентно традиционному – это можно использовать для модификации различных операторных выражений. В разделе 5 нам понадобятся аналоги коммутатора и антикоммутатора операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$:

$$]\hat{F}, \hat{G}[_- \equiv]\hat{F}, \hat{G}[= \hat{F} * \hat{G} - \hat{G} * \hat{F} , \qquad]\hat{F}, \hat{G}[_+ \equiv \}\hat{F}, \hat{G}\{ = \hat{F} * \hat{G} + \hat{G} * \hat{F} \tag{4.18}$$

Эти аналоги будем называть соответственно коммутатором и антикоммутатором с добавлением прилагательного «зеркальный». Очевидно, что для французских операторов $\hat{f}$ и $\hat{g}$ справедливо равенство

$$]\hat{f}, \hat{g}[_\pm = [\hat{f}, \hat{g}]_\pm \tag{4.20}$$

Если $\check{f}$ и $\check{g}$ - чешские, то из (4.15) с очевидностью следует равенство

$$]\check{f},\breve{g}[_{\pm} = \pm\eta(\check{f},\breve{g})[\check{f},\breve{g}]_{\pm} \tag{4.21}$$

Используя (4.21), можно преобразовать формулу (4.17) следующим образом:

$$\hat{F}\hat{G} = \hat{F} * \hat{G} - \eta\big(\hat{d},\breve{g}\big)]\check{f},\breve{g}[_{\mp} * \hat{d} * \hat{h} \tag{4.22}$$

С помощью (4.22) в любом операторном выражении можно избавиться от традиционных произведений операторов, сводя их к зеркальным. В частном случае, когда операторы $\check{f}$ и $\breve{g}$ коммутируют или антикоммутируют, традиционное и зеркальное произведения совпадают.

Введём также аналог экспоненты оператора $\hat{F}$

$$\mathrm{e}_*^{\hat{F}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\hat{F} * \hat{F} * \ldots * \hat{F}}_{n\ \text{раз}} \tag{4.23}$$

который назовём *зеркальной экспонентой*. Из определения (4.23) с очевидностью следует тождество

$$\mathrm{e}_*^{\hat{F}} * \mathrm{e}_*^{-\hat{F}} = 1 \tag{4.24}$$

Для доказательства (4.24), как и в традиционном случае, требуется только ассоциативность умножения операторов. К сожалению, в общем случае

$$\left(\mathrm{e}^{\hat{F}}\right)_* \neq \mathrm{e}_*^{\hat{F}}\,, \qquad \left(\mathrm{e}^{\hat{F}}\right)_* \neq \mathrm{e}^{\hat{F}_*}$$

Важную роль в квантовой теории поля играет понятие т.н. хронологического произведения операторов $\hat{F}_1(x_1), \hat{F}_2(x_2), \ldots, \hat{F}_n(x_n)$, которое с точностью до знака равно произведению этих операторов, взятых в порядке убывания временного аргумента сомножителей слева направо:

$$\mathrm{T}\hat{F}_1(x_1)\hat{F}_2(x_2)\ldots\hat{F}_n(x_n) = \eta\hat{F}_{i_1}\big(x_{i_1}\big)\hat{F}_{i_2}\big(x_{i_2}\big)\ldots\hat{F}_{i_n}\big(x_{i_n}\big)\,,$$

$$x_{i_1}^0 > x_{i_2}^0 > \cdots > x_{i_n}^0 \tag{4.25}$$

где $\eta = (-1)^{\mathrm{P}}$, P - число транспозиций в перестановке $(\hat{F}_1, \hat{F}_2, \ldots, \hat{F}_n) \mapsto$ $\mapsto (\hat{F}_{i_1}, \hat{F}_{i_2}, \ldots, \hat{F}_{i_n})$, для которых $\eta\big(\hat{F}_j, \hat{F}_k\big) = -1$. Антихронологическое произведение (обозначение T^+ вместо T) определяется аналогичным образом, но временные аргументы возрастают слева направо, т.е. в (4.25) нужно считать, что $x_{i_1}^0 < x_{i_2}^0 < \cdots < x_{i_n}^0$. В определении (4.25) вместо традиционных произведений можно подразумевать зеркальные: суть хронологического упорядочения от этого не меняется.

Пусть $\hat{F}_i(x_i) = \check{f}_i(x_i)\hat{g}_i(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ – э.о. стандартного вида. Произведение этих операторов можно привести к стандартному виду:

$$\hat{F}_1(x_1)\hat{F}_2(x_2)\ldots\hat{F}_n(x_n) = \eta_n\check{f}_1(x_1)\check{f}_2(x_2)\ldots\check{f}_n(x_n)\hat{g}_1(x_1)\hat{g}_2(x_2)\ldots\hat{g}_n(x_n) \tag{4.26}$$

где

$$\eta_n = \eta(\hat{g}_1, \check{f}_2)\eta(\hat{g}_1\hat{g}_2, \check{f}_3) \dots \eta(\hat{g}_1\hat{g}_2 \dots \hat{g}_{n-1}, \check{f}_n) \tag{4.27}$$

Определим *зеркальное хронологическое произведение* (обозначение T_*) операторов $\hat{F}_1(x_1), \hat{F}_2(x_2), \dots, \hat{F}_n(x_n)$ следующим образом:

$$\mathrm{T}_*\hat{F}_1(x_1)\hat{F}_2(x_2) \dots \hat{F}_n(x_n) =$$

$$= \eta_n \left(\mathrm{T}^+\check{f}_1(x_1)\check{f}_2(x_2) \dots \check{f}_n(x_n)\right)\left(\mathrm{T}\hat{g}_1(x_1)\hat{g}_2(x_2) \dots \hat{g}_n(x_n)\right) \tag{4.28}$$

Таким образом, зеркальное хронологическое упорядочение выстраивает французские операторы в порядке убывания, а чешские – в порядке возрастания их временных аргументов. Естественно предполагать, что операция зеркального хронологического упорядочения дистрибутивна, поэтому определение (4.28) распространяется на произведение любых операторов, а не только элементарных.

Пусть $\hat{F}(x_1) = \check{f}(x_1)\hat{d}(x_1)$ и $\hat{G}(x_2) = \check{g}(x_2)\hat{h}(x_2)$ - э.о. стандартного вида. Хронологическое упорядочение их зеркального произведения даёт следующий результат:

$$\mathrm{T}\hat{F}(x_1) * \hat{G}(x_2) = \begin{cases} \hat{F}(x_1) * \hat{G}(x_2), & x_1^0 > x_2^0 \\ \eta(\hat{F}, \hat{G})\hat{G}(x_2) * \hat{F}(x_1), & x_1^0 < x_2^0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \eta(\hat{F}, \check{g})\check{g}(x_2)\check{f}(x_1)\hat{d}(x_1)\hat{h}(x_2), & x_1^0 > x_2^0 \\ \eta(\hat{G}, \hat{d})\check{f}(x_1)\check{g}(x_2)\hat{h}(x_2)\hat{d}(x_1), & x_1^0 < x_2^0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Выясним теперь связь между традиционным хронологическим упорядочением зеркальных произведений и зеркальным хронологическим упорядочением традиционных произведений. Рассмотрим традиционное произведение:

$$\hat{F}(x_1)\hat{G}(x_2) = \eta(\hat{d}, \check{g})\check{f}(x_1)\check{g}(x_2)\hat{d}(x_1)\hat{h}(x_2) \tag{4.30}$$

Согласно определению зеркального хронологического упорядочения (4.28) имеем:

$$\mathrm{T}_*\check{f}(x_1)\check{g}(x_2)\hat{d}(x_1)\hat{h}(x_2) =$$

$$= \begin{cases} \eta(\check{f}, \check{g})\check{g}(x_2)\check{f}(x_1)\hat{d}(x_1)\hat{h}(x_2), x_1^0 > x_2^0 \\ \eta(\hat{d}, \hat{h})\check{f}(x_1)\check{g}(x_2)\hat{h}(x_2)\hat{d}(x_1), x_1^0 < x_2^0 \end{cases} \tag{4.31}$$

Домножив выражение (4.31) согласно (4.30) на $\eta(\hat{d}, \check{g})$ и сравнив результат с (4.29), получим окончательно

$$\mathrm{T}\hat{F}(x_1) * \hat{G}(x_2) = \mathrm{T}_*\hat{F}(x_1)\hat{G}(x_2) \tag{4.32}$$

Формулу (4.32) для двух операторов можно распространить на случай произвольного числа операторов. Действительно, пусть $\hat{F}_i(x_i) = \check{f}_i(x_i)\hat{g}_i(x_i)$

$(i = 1,2, \dots, n)$ - э.о. стандартного вида , и пусть $x_{i_1}^0 > x_{i_2}^0 > \dots > x_{i_n}^0$. Хронологическое упорядочение сводится к следующей перестановке операторов:

$$\check{f}_1(x_1)\hat{g}_1(x_1)\check{f}_2(x_2)\hat{g}_2(x_2) \dots \check{f}_n(x_n)\hat{g}_n(x_n) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \check{f}_{i_n}(x_{i_n}) \dots \check{f}_{i_2}(x_{i_2})\check{f}_{i_1}(x_{i_1})\hat{g}_{i_1}(x_{i_1})\hat{g}_{i_2}(x_{i_2}) \dots \hat{g}_{i_n}(x_{i_n})$$

причём при каждой транспозиции фермионных э.о. с нечётными фермионными длинами нужно менять знак произведения на противоположный. Операции Т и T_* осуществляют одну и ту же перестановку, но в разной последовательности: вывод формулы (4.32) иллюстрирует это на примере двух операторов. Результирующий знак не зависит от последовательности транспозиций, поэтому эти операции приводят к одинаковому результату. Итак, справедливо обобщение формулы (4.32) на случай произвольного числа операторов:

$$\mathrm{T}\hat{F}_1(x_1) * \hat{F}_2(x_2) * \dots * \hat{F}_n(x_n) = \mathrm{T}_*\hat{F}_1(x_1)\hat{F}_2(x_2) \dots \hat{F}_n(x_n) \qquad (4.33)$$

В (4.33) операторы не обязательно должны быть элементарными: в силу дистрибутивности всех рассматриваемых операций формула справедлива для произвольных операторов.

5. Каноническое квантование.

Каноническое квантование полей – это мост между классической физикой и квантовой теорией поля. В каноническом формализме обобщёнными координатами являются компоненты полей, описывающих фундаментальные частицы, а канонически сопряжённые этим координатам обобщённые импульсы представляют собой частные производные лагранжиана по обобщённым скоростям. При квантовании полевые функции становятся операторами, которые действуют на векторы из гильбертова пространства состояний. Эти операторы должны удовлетворять тем же дифференциальным уравнениям, что и исходные неквантованные поля – назовём это утверждение *постулатом соответствия*.

Решения операторных дифференциальных уравнений недостаточно для полного определения операторов, требуется ещё установить для них перестановочные соотношения. Наиболее последовательным путём для этого, по-видимому, является формализм канонического квантования с использованием классических скобок Дирака. Пусть $\varphi_a(x)$ и $\varphi_b(x)$ - произвольные обобщённые координаты, а $\pi_a(x)$ и $\pi_b(x)$ - отвечающие им обобщённые импульсы. Согласно традиционному постулату канонического квантования, для операторов этих величин справедливо перестановочное соотношение

$$[\hat{\varphi}_a(\mathbf{x},x^0),\hat{\pi}_b(\mathbf{x}',x^0)]_\pm = \mathrm{i}\{\varphi_a(\mathbf{x},x^0),\pi_b(\mathbf{x}',x^0\}_D \qquad (5.1)$$

В соотношении (5.1) следует выбирать коммутатор или антикоммутатор в зависимости от спина фундаментальной частицы, которой отвечает поле $\varphi(x)$. Для электрон–позитронного поля из (5.1) с учётом (3.50) получим

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x},x^0;\varkappa),\hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{x}',x^0;\varkappa')\right\} = \varkappa\delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (5.2)$$

Левая часть соотношения (5.2) при $\mathbf{x}=\mathbf{x}',\alpha=\beta,\varkappa=\varkappa'=-1$ представляет собой сумму операторов вида $\hat{\varphi}\hat{\varphi}^+ + \hat{\varphi}^+\hat{\varphi}$, а правая является отрицательным c-числом. Это возможно только если допустить существование векторов состояния с отрицательной нормой (т.н. индефинитная метрика). Индефинитная метрика иногда используется в квантовой теории поля (например, при квантовании электромагнитного поля), однако в случае электрон–позитронного поля с помощью этого искусственного приёма невозможно получить разумные результаты. Таким образом, соотношение (5.2) содержит противоречие, которое необходимо разрешить.

Внесём в (5.2) изменение, убрав в правой части сомножитель $\varkappa$:

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x},x^0;\varkappa),\hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{x}',x^0;\varkappa')\right\} = \delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (5.3)$$

Соотношение (5.3) не приводит к противоречию с индефинитной метрикой, однако оно не является калибровочно инвариантным. Действительно, если перейти от операторов $\hat{\psi}(\varkappa)$ к новым операторам $\hat{\psi}'(\varkappa)$ с помощью глобального калибровочного преобразования (3.27), то, как нетрудно видеть, в правой части соотношения (5.3) при $\varkappa=\varkappa'$ появится дополнительный множитель $\operatorname{ch}2\theta$, а при $\varkappa\neq\varkappa'$ операторы перестанут быть антикоммутирующими. Можно показать, что для калибровочной инвариантности рассматриваемого перестановочного соотношения необходимо, чтобы антикоммутатор менял знак при переходе от операторов с $\varkappa=1$ к операторам с $\varkappa=-1$.

Итак, соотношение (5.2) является калибровочно инвариантным, но приводит к индефинитной метрике, а у соотношения (5.3) всё обстоит с точностью до наоборот. Это наводит на мысль, что традиционный антикоммутатор в перестановочных соотношениях нужно заменить на какую-то другую билинейную функцию от операторов. Рассмотрим частный случай свободного электрон-позитронного поля. В этом случае операторы $\hat{\psi}(\varkappa)$ и $\hat{\psi}^+(\varkappa)$ являются согласно терминологии предыдущего раздела фундаментальными, поэтому в соотношении (5.3) можно без труда перейти от традиционного произведения операторов к зеркальному. В результате такого перехода при $\varkappa=\varkappa'=-1$ антикоммутатор поменяет знак, поэтому в правой части соотношения (5.3) опять появится множитель $\varkappa$:

$$\}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x},x^0;\varkappa),\hat{\psi}_\beta^+(\mathbf{x}',x^0;\varkappa')\{=\varkappa\delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (5.4)$$

Соотношение (5.4) не приводит к индефинитной метрике и в то же время, как нетрудно убедиться, является калибровочно инвариантным. Сделаем теперь принципиально важный шаг: будем считать, что соотношение (5.4) справедливо в общем случае, а не только для свободных полей.

Рассмотрим теперь перестановочные соотношения для электромагнитного поля. Из (5.1) с учётом (3.51) получим

$$\left[\hat{A}_m(\mathbf{x},x^0;\varkappa),\hat{A}_n(\mathbf{x}',x^0;\varkappa')\right]=\mathrm{i}\delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{mn}^{\perp}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (5.5)$$

Выясним корпускулярную картину, к которой приводит соотношение (5.5). С этой целью рассмотрим операторное уравнение Максвелла для свободных фотонов

$$\partial_\mu\partial^\mu\hat{A}_n(\varkappa)=0 \qquad (5.6)$$

в калибровке излучения

$$\partial_n\hat{A}_n(\varkappa)=0, \qquad \hat{A}^0(\varkappa)=0 \qquad (5.7)$$

Произвольное решение уравнения (5.6) можно представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$\hat{A}_n(x,\varkappa)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1,2}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\hat{c}_\lambda(\mathbf{k},\varkappa)e_{\lambda n}(\mathbf{k})+ \\ +\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\hat{c}_\lambda^+(\mathbf{k},\varkappa)e_{\lambda n}^*(\mathbf{k})) \qquad (5.8)$$

где $e_{\lambda n}(\mathbf{k})$ - трёхмерные векторы поляризации, удовлетворяющие уравнениям

$$k_n e_{\lambda n}(\mathbf{k})=k_n e_{\lambda n}^*(\mathbf{k})=0, \qquad e_{\lambda n}(\mathbf{k})e_{\lambda' n}^*(\mathbf{k})=\delta_{\lambda\lambda'} \qquad (5.9)$$

$\lambda=1,2$ - поляризационный индекс, $\omega=|\mathbf{k}|$, $k^2=0$. Подставив (5.8) в (5.5), нетрудно убедиться, что отличными от нуля являются следующие коммутаторы:

$$\left[\hat{c}_\lambda(\mathbf{k},\varkappa),\hat{c}_{\lambda'}^+(\mathbf{k}',\varkappa')\right]=\delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \qquad (5.10)$$

Согласно общепринятой трактовке (от которой нет никаких оснований отказываться), операторные коэффициенты $\hat{c}_\lambda(\mathbf{k},\varkappa)$ в разложении (5.8) являются операторами уничтожения, а $\hat{c}_\lambda^+(\mathbf{k},\varkappa)$ – операторами рождения фотона. При этом операторы с различными значениями $\varkappa$ должны уничтожать или рождать абсолютно неотличимые друг от друга фотоны: в этом и заключается смысл понятия зеркальности. По этой причине векторы $e_{\lambda n}(\mathbf{k})$ выбраны не зависящими от $\varkappa$. Действительно, векторы поляризации фотонов, имеющих одинаковые импульсы и одинаково поляризованных, могут отличаться только фазовым множителем, который можно включить в операторные коэффициенты.

Из лагранжиана свободного электромагнитного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sum_{\varkappa=\pm1} F_{\mu\nu}(\varkappa)F^{\mu\nu}(\varkappa) \qquad (5.11)$$

получается следующее выражение для тензора энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = -\sum_{\varkappa=\pm1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\rho,\mu}(\varkappa)}\partial^{\nu}A_{\rho}(\varkappa) + \mathcal{L}g^{\mu\nu} =$$
$$= \sum_{\varkappa=\pm1} F^{\mu\rho}(\varkappa)\partial^{\nu}A_{\rho}(\varkappa) + \mathcal{L}g^{\mu\nu} \qquad (5.12)$$

Вычислим оператор энергии электромагнитного поля:

$$\hat{P}^0 = \int d^3x\hat{T}^{00}(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=\pm1}\int d^3x\left(\hat{\dot{A}}_n(x,\varkappa)\hat{\dot{A}}_n(x,\varkappa) + \hat{B}_n(x,\varkappa)\hat{B}_n(x,\varkappa)\right) \qquad (5.13)$$

Подставив (5.8) в (5.13), получим следующий результат:

$$\hat{P}^0 = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2}\int d^3k\omega\sum_{\varkappa=\pm1}\left(\hat{c}_{\lambda}(\mathbf{k},\varkappa)\hat{c}_{\lambda}^{+}(\mathbf{k},\varkappa) + \hat{c}_{\lambda}^{+}(\mathbf{k},\varkappa)\hat{c}_{\lambda}(\mathbf{k},\varkappa)\right) \quad (5.14)$$

Из формулы (5.14) видно, что соотношение (5.10) обеспечивает ожидаемые роли операторов $\hat{c}_{\lambda}(\mathbf{k},\varkappa)$ и $\hat{c}_{\lambda}^{+}(\mathbf{k},\varkappa)$, т.е. из соотношения (5.5) следует правильная корпускулярная картина. Если бы, например, в правой части (5.5) стоял дополнительный множитель $\varkappa$, то роли операторов $\hat{c}_{\lambda}(\mathbf{k},-1)$ и $\hat{c}_{\lambda}^{+}(\mathbf{k},-1)$ поменялись бы. В результате эти операторы входили бы в разложение (5.8) в качестве коэффициентов при плоских волнах с неправильной временно́й зависимостью, что неприемлемо.

Итак, будем считать перестановочное соотношение (5.5) справедливым для операторов свободного электромагнитного поля. При переходе в (5.5) к зеркальному коммутатору в правой части появится дополнительный множитель $\varkappa$, т.к. бозонные чешские операторы меняются местами. В результате соотношение (5.5) приобретает вид:

$$\left]\hat{A}_m(\mathbf{x},x^0;\varkappa),\hat{\dot{A}}_n(\mathbf{x}',x^0;\varkappa')\right[= \mathrm{i}\varkappa\delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{mn}^{\perp}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (5.15)$$

Соотношения (5.5) и (5.15) эквивалентны только для свободных полей, однако нет никаких физических оснований отдать предпочтение одному из них в общем случае. По аналогии с соотношением (5.4) для электрон-позитронного поля будем считать, что в общем случае для электромагнитного поля справедливо соотношение (5.15). Этот шаг, как мы увидим ниже, позволяет построить непротиворечивую квантовую электродинамику, что, в конечном счёте, его и оправдывает.

Итак, мы имеем перестановочные соотношения, необходимые для построения квантовой электродинамики: (5.4) – для электрон-позитронного и (5.15) – для электромагнитного поля. Особенностью этих соотношений является замена традиционных произведений операторов на зеркальные. Естественно предположить, что это правило является универсальным, и внести необходимые изменения в традиционный постулат канонического квантования (5.1). Пусть $\varphi_a(x,\varkappa)$ и $\varphi_b(x,\varkappa')$ – произвольные обобщённые координаты, а $\pi_a(x,\varkappa)$ и $\pi_b(x,\varkappa')$ – отвечающие им обобщённые импульсы. Тогда справедливо перестановочное соотношение

$$]\hat{\varphi}_a(\mathbf{x},x^0;\varkappa),\hat{\pi}_b(\mathbf{x}',x^0;\varkappa')[_{\pm}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}1\\ \varkappa\end{pmatrix}\{\varphi_a(\mathbf{x},x^0;\varkappa),\pi_b(\mathbf{x}',x^0;\varkappa')\}_D \quad (5.16)$$

Дополнительный множитель $\varkappa$ для бозонных полей в правой части (5.16) необходим из-за того, что при переходе от традиционного произведения к зеркальному меняется порядок операторов. Коммутатор в отличие от антикоммутатора меняет знак при перестановке операторов, а классические скобки Дирака не могут учесть этот нюанс. Скобки Дирака отличны от нуля только при $\varkappa=\varkappa'$, поэтому множитель $\varkappa$ можно заменить на $\varkappa'$. Отметим, что запись постулата канонического квантования в виде (5.16) предполагает, что скобки Дирака не зависят от обобщённых координат и импульсов. В противном случае соотношение (5.16) требует дальнейшего обобщения, однако мы оставим этот вопрос открытым.

Рассмотрим теперь операторное уравнение Дирака для свободных частиц:

$$\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\hat{\psi}(\varkappa)=0 \quad (5.17)$$

Произвольное решение уравнения (5.17) запишем в виде:

$$\hat{\psi}(x,\varkappa)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\sigma=1,2}\int d^3p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{p},\varkappa)u_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{p})+$$
$$+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{b}_{\sigma}^{+}(\mathbf{p},\varkappa)u_{\sigma}^{(-)}(-\mathbf{p})) \quad (5.18)$$

где $u_{\sigma}^{(\pm)}(\pm\mathbf{p})$ – биспиноры, удовлетворяющие уравнению

$$(\pm\mathrm{i}\gamma p+m)u_{\sigma}^{(\pm)}(\pm\mathbf{p})=0 \quad (5.19)$$

и условию нормировки

$$\overline{u_{\sigma}^{(\pm)}}(\pm\mathbf{p})u_{\sigma'}^{(\pm)}(\pm\mathbf{p})=\pm\frac{m}{\varepsilon}\delta_{\sigma\sigma'} \quad (5.20)$$

$\sigma=1,2$ - поляризационный индекс, $\varepsilon=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, $p^2=-m^2$. Подставив (5.18) в (5.3), получим отличные от нуля антикоммутаторы:

$$\left\{\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa),\hat{a}^+_{\sigma'}(\mathbf{p}',\varkappa')\right\}=\left\{\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa),\hat{b}^+_{\sigma'}(\mathbf{p}',\varkappa')\right\}=\delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\qquad(5.21)$$

Из лагранжиана свободного электрон-позитронного поля (2.14) получается следующее выражение для тензора энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu}=-\sum_{\varkappa=\pm1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{\alpha,\mu}(\varkappa)}\partial^\nu\psi_\alpha(\varkappa)=\sum_{\varkappa=\pm1}\varkappa\bar{\psi}(\varkappa)\gamma^\mu\partial^\nu\psi(\varkappa)\qquad(5.22)$$

откуда для 4-импульса электрон-позитронного поля имеем

$$P^\mu=\int d^3xT^{0\mu}(x)=-\mathrm{i}\sum_{\varkappa=\pm1}\varkappa\int d^3x\psi^+(x,\varkappa)\partial^\mu\psi(x,\varkappa)\qquad(5.23)$$

При переходе от классических полей к квантованным важно установить порядок расположения полевых операторов, из произведений которых составлены операторы физических величин. Будем предполагать, как и в традиционной теории, что операторы $\hat{\psi}^+(\varkappa)$ нужно ставить слева от $\hat{\psi}(\varkappa)$. В дальнейшем будем называть такой порядок операторов *естественным*. Переходя в (5.23) к операторам с соблюдением естественного их порядка и подставив (5.18) в (5.23), получим следующий результат:

$$\check{P}^\mu=\sum_{\sigma=1,2}\int d^3pp^\mu\sum_{\varkappa=\pm1}\varkappa\left(\hat{a}^+_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)-\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)\hat{b}^+_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)\right)\quad(5.24)$$

Предположим, что $\check{P}^\mu$ является оператором 4-импульса. Тогда из (5.21) и (5.24) следует, что $\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},-1)$ и $\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},-1)$ – операторы рождения частицы, а это недопустимо по той же причине, что и в случае электромагнитного поля. Итак, величину $\check{P}^\mu$ нельзя считать оператором 4-импульса – именно по этой причине мы в её обозначении использовали перевёрнутую «шляпку». Для восстановления правильных ролей операторных коэффициентов разложения (5.18) нужно в (5.24) переставить местами операторы с $\varkappa=-1$. Таким образом, правильное выражение для оператора 4-импульса электрон-позитронного поля имеет вид

$$\hat{P}^\mu=\sum_{\sigma=1,2}\int d^3pp^\mu\left(\hat{a}^+_\sigma(\mathbf{p},1)\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},1)-\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},1)\hat{b}^+_\sigma(\mathbf{p},1)-\right.$$
$$\left.-\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},-1)\hat{a}^+_\sigma(\mathbf{p},-1)+\hat{b}^+_\sigma(\mathbf{p},-1)\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},-1)\right)\qquad(5.25)$$

Нетрудно видеть, что согласно определению зеркального образа оператора из раздела 4, справедливо равенство $\hat{P}^\mu=\check{P}^\mu_*$.

Из формулы (3.40) для 4-вектора тока получается следующее выражение для заряда электрон-позитронного поля:

$$Q=\int d^3xj^0(x)=\sum_{\varkappa=\pm1}\varkappa\int d^3x\psi^+(x,\varkappa)\psi(x,\varkappa)\qquad(5.26)$$

Перейдём в (5.26) к операторам, придерживаясь их естественного порядка. В результате получим следующую формулу:

$$\check{Q} = \sum_{\sigma=1,2} \int d^3p \sum_{\varkappa=\pm 1} \varkappa(\hat{a}_\sigma^+(\mathbf{p},\varkappa)\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa) + \hat{b}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)\hat{b}_\sigma^+(\mathbf{p},\varkappa)) \quad (5.27)$$

Поменяем теперь в (5.27) порядок чешских операторов и воспользуемся соотношениями (5.21) для упрощения полученного выражения. В результате получим

$$\hat{Q} = \check{Q}_* = \sum_{\sigma=1,2} \int d^3p \sum_{\varkappa=\pm 1} (\hat{a}_\sigma^+(\mathbf{p},\varkappa)\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa) - \hat{b}_\sigma^+(\mathbf{p},\varkappa)\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)) \quad (5.28)$$

Предположим, что $\check{Q}$ является оператором заряда. Тогда из (5.27) следует, что например $\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},1)$ и $\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},-1)$ – операторы уничтожения электрона, причём уничтожаемые этими операторами электроны должны быть идентичны. Это означает, что биспиноры $u_\sigma^{(+)}(\mathbf{p})$ и $u_\sigma^{(-)}(-\mathbf{p})$ должны совпадать с точностью до фазового множителя, что невозможно, поскольку согласно (5.19) эти биспиноры удовлетворяют разным уравнениям. Таким образом, как и в случае с оператором 4-импульса, для построения правильного оператора заряда необходимо, сохранив естественный порядок французских операторов, поменять местами чешские операторы. Из (5.28) следует, что $\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)$ и $\hat{b}_\sigma(\mathbf{p},\varkappa)$ - операторы уничтожения, а $\hat{a}_\sigma^+(\mathbf{p},\varkappa)$ и $\hat{b}_\sigma^+(\mathbf{p},\varkappa)$ – операторы рождения соответственно электрона и позитрона. Биспиноры $u_\sigma^{(\pm)}(\pm\mathbf{p})$ в разложении (5.18) выбраны не зависящими от $\varkappa$ по той же причине, что и в случае электромагнитного поля. Отметим, что в отличие от традиционной теории заряд вакуума согласно (5.28) равен нулю.

Правило расстановки французских и чешских операторов, используемое выше при построении операторов физических величин, справедливо и для бозонных полей, т.е. является универсальным. Проиллюстрируем это на примере свободного заряженного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\sum_{\varkappa=\pm 1} \left(\frac{\partial\varphi^*(\varkappa)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi(\varkappa)}{\partial x^\mu} + m^2\varphi^*(\varkappa)\varphi(\varkappa)\right) \quad (5.29)$$

Поскольку связи отсутствуют, скобки Дирака совпадают со скобками Пуассона, что существенно упрощает переход к квантованным полям. Произвольное решение операторного уравнения Клейна–Гордона-Фока запишем в виде

$$\hat{\varphi}(x,\varkappa) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\varepsilon}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\,\hat{a}(\mathbf{p},\varkappa) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{b}^+(\mathbf{p},\varkappa)) \quad (5.30)$$

где $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $p^2 = -m^2$. Операторные коэффициенты разложения (5.30) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{a}(\mathbf{p},\varkappa), \hat{a}^+(\mathbf{p},\varkappa)] = \left[\hat{b}(\mathbf{p},\varkappa), \hat{b}^+(\mathbf{p},\varkappa)\right] = \delta_{\varkappa\varkappa'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \quad (5.31)$$

Из (5.31) следует, что $\hat{a}(\mathbf{p},\varkappa)$ и $\hat{b}(\mathbf{p},\varkappa)$ являются операторами уничтожения частиц – как и должно быть. Из лагранжиана (5.29) получается следующее выражение для заряда скалярного поля:

$$Q = \mathrm{i}\sum_{\varkappa=\pm 1}\int d^3x\big(\varphi^*(x,\varkappa)\dot{\varphi}(x,\varkappa) - \dot{\varphi}^*(x,\varkappa)\varphi(x,\varkappa)\big) \qquad (5.32)$$

Переходя в (5.32) к операторам с соблюдением естественного порядка их расстановки, имеем

$$\check{Q} = \int d^3p \sum_{\varkappa=\pm 1}(\hat{a}^+(\mathbf{p},\varkappa)\hat{a}(\mathbf{p},\varkappa) - \hat{b}(\mathbf{p},\varkappa)\hat{b}^+(\mathbf{p},\varkappa)) \qquad (5.33)$$

Предположим, что $\check{Q}$ является оператором заряда. Тогда, как нетрудно из (5.33) видеть, заряд вакуума оказывается равным $-\infty$. Формула для оператора заряда, которая обеспечивает нулевой заряд вакуума, опять получается с помощью перестановки чешских операторов:

$$\hat{Q} = \int d^3p \sum_{\varkappa=\pm 1}(\hat{a}^+(\mathbf{p},\varkappa)\hat{a}(\mathbf{p},\varkappa) - \hat{b}^+(\mathbf{p},\varkappa)\hat{b}(\mathbf{p},\varkappa)) \qquad (5.34)$$

Отметим, что в данном случае $\hat{Q} \neq \check{Q}_*$, как это было в случае электрон-позитронного поля. Дело в том, что для построения правильного оператора заряда нужна перестановка чешских операторов без изменения знака, а при зеркальной инверсии двух бозонных чешских ф.о. появляется дополнительный множитель $\eta(2) = -1$. Мы ещё вернёмся в разделе 6 к обсуждению этого вопроса.

Для удобства дальнейшего изложения будем использовать вместо аргумента $\varkappa$ надстрочные знаки, которые использовались в разделе 4: $\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},1) \equiv \hat{a}_\sigma(\mathbf{p})$, $\hat{a}_\sigma(\mathbf{p},-1) \equiv \check{a}_\sigma(\mathbf{p})$ и т.д. Кроме того, перейдём к дискретному представлению и вместо импульса и поляризационного индекса будем использовать мультииндекс n . Итак, $\hat{a}_n$ и $\check{a}_n$ - операторы уничтожения частиц, $\hat{b}_n$ и $\check{b}_n$ - операторы уничтожения античастиц, а при эрмитовом сопряжении операторы уничтожения переходят в операторы рождения. Перестановочные соотношения в дискретном представлении приобретают вид

$$\left[\hat{a}_n,\hat{a}^+_{n'}\right]_\pm = \left[\check{a}_n,\check{a}^+_{n'}\right]_\pm = \left[\hat{b}_n,\hat{b}^+_{n'}\right]_\pm = \left[\check{b}_n,\check{b}^+_{n'}\right]_\pm = \delta_{nn'} \qquad (5.35)$$

Для оператора энергии получается следующее выражение:

$$\hat{P}^0 = \sum_n \varepsilon_n(\hat{a}^+_n\hat{a}_n + \check{a}^+_n\check{a}_n + \hat{b}^+_n\hat{b}_n + \check{b}^+_n\check{b}_n \mp 2) \qquad (5.36)$$

где ε_n - энергия частицы в состоянии n . В (5.35) и (5.36) верхний знак – для фермионов, а нижний – для бозонов. Из (5.36) следует, что энергия вакуума равна

$$\mp 2\sum_n \varepsilon_n$$

Это не что иное, как энергия морей соответственно Дирака и Эйнштейна, о которой упоминалось в первой части статьи, а коэффициент 2 возникает из-за того, что частица и античастица имеют свои "индивидуальные" моря.

Выражение для оператора заряда имеет одинаковый вид для фермионных и бозонных полей:

$$\hat{Q} = \sum_n (\hat{a}_n^+ \hat{a}_n + \check{a}_n^+ \check{a}_n - \hat{b}_n^+ \hat{b}_n - \check{b}_n^+ \check{b}_n) \tag{5.37}$$

Как уже отмечалось выше, заряд вакуума равен нулю, причём этот результат достигается с помощью расстановки полевых операторов в выражении для оператора заряда в правильном порядке. В традиционной теории также считается, что вакуум обладает нулевым зарядом. Однако достигается это достаточно сомнительными способами: либо грубым вычёркиванием расходящегося вакуумного члена, либо переходом к т.н. нормальной форме операторов. Перейти к нормальной форме невозможно с помощью перестановки полевых операторов – для этого необходима перестановка отдельных слагаемых этих операторов. К тому же традиционная теория строится не вполне последовательно: операторы наблюдаемых физических величин приводятся к нормальной форме, в то время как в дифференциальных уравнениях и перестановочных соотношениях фигурируют обычные, т.е. "ненормализованные" операторы. В конечном счёте, именно эта непоследовательность и приводит к ультрафиолетовым расходимостям.

Формула (5.14) для оператора энергии электромагнитного поля в дискретном представлении приобретает вид

$$\hat{P}^0 = \sum_n \omega_n \left(\hat{c}_n^+ \hat{c}_n + \check{c}_n^+ \check{c}_n + 1\right) \tag{5.38}$$

Из (5.38) следует, что энергия вакуума равна

$$\sum_n \omega_n$$

Коэффициент 2 в данном случае отсутствует, т.к. фотон является истинно нейтральной частицей - море Эйнштейна у него только одно. Отметим, что в (5.38) нет характерных для традиционной теории "половинок" фотона, которые не поддаются никакой разумной интерпретации.

Формулы (5.36), (5.37) и (5.38) демонстрируют корпускулярную картину, словесно описанную в разделе 1. Выясним теперь, как с помощью операторов уничтожения и рождения можно построить вектор состояния совокупности реальных частиц. Пусть $\hat{\alpha}_n$ и $\check{\alpha}_n$ – операторы уничтожения некой абстрактной частицы, находящейся в состоянии n . Вектор состояния вакуума $\Phi_0 \equiv |0\rangle$ определяется равенствами $\hat{\alpha}_n\Phi_0 = \check{\alpha}_n\Phi_0 = 0$ и условием нормировки $(\Phi_0, \Phi_0) = 1$, а одночастичные состояния получаются при действии на Φ_0 линейной комбинации операторов рождения $c_1\hat{\alpha}_n^+ + c_2\check{\alpha}_n^+$. Операторы рождения определены с точностью до фазового множителя, поэтому можно считать коэффициенты c_1 и c_2 вещественными. Из соображений зеркальной симметрии естественно предположить выполнение равенства $|c_1| = |c_2|$, откуда имеем $c_2 = \pm c_1$. Наконец, потребуем, чтобы вектор одночастичного состояния имел единичную норму, откуда получим равенство $c_1^2 = c_2^2 = 1/2$. Не ограничивая общности, можно выбрать коэффициент c_1 положительным. Итак, одночастичное состояние получается при действии на Φ_0 следующего оператора:

$$\hat{\alpha}_n^+(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\alpha}_n^+ + \chi\breve{\alpha}_n^+) \tag{5.39}$$

где $\chi = \pm 1$ – ненаблюдаемый параметр, который назовём *зеркальной чётностью частицы* (далее – з.ч.). Из перестановочных соотношений $[\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_{n'}]_\pm = [\breve{\alpha}_n, \breve{\alpha}_{n'}]_\pm = \delta_{nn'}$ получается соотношение

$$\left[\hat{\alpha}_n(\chi), \hat{\alpha}_{n'}^+(\chi')\right]_\pm = \delta_{\chi\chi'}\delta_{nn'} \tag{5.40}$$

Вектор состояния произвольной совокупности реальных частиц имеет вид

$$\Phi = \hat{\alpha}_{n_1}^{(1)+}(\chi_1) \dots \hat{\alpha}_{n_k}^{(k)+}(\chi_k)\Phi_0 \tag{5.41}$$

где $\hat{\alpha}_{n_i}^{(i)+}(\chi_i)$ – оператор рождения частицы типа i в состоянии n_i с з.ч. χ_i . Введём эрмитов оператор $\hat{\chi}$, действующий по правилам

$$\hat{\chi}\hat{\alpha}_n^+ = \breve{\alpha}_n^+\hat{\chi}, \qquad \hat{\chi}\breve{\alpha}_n^+ = \hat{\alpha}_n^+\hat{\chi}, \qquad \hat{\chi}\Phi_0 = \Phi_0 \tag{5.42}$$

Из (5.42) и равенства $\hat{\chi}^+ = \hat{\chi}$ имеем

$$\hat{\chi}\hat{\alpha}_n = \breve{\alpha}_n\hat{\chi}, \qquad \hat{\chi}\breve{\alpha}_n = \hat{\alpha}_n\hat{\chi} \tag{5.43}$$

Нетрудно видеть, что вектор Φ , определяемый формулой (5.41), является собственным вектором оператора $\hat{\chi}$: $\hat{\chi}\Phi = \chi\Phi$, где $\chi = \chi_1 \dots \chi_k = \pm 1$. Назовём оператор $\hat{\chi}$ *оператором зеркальной чётности*, а величину χ – *зеркальной чётностью состояния*, отвечающего вектору Φ.

Операторы рождения определены с точностью до фазового множителя, поэтому на первый взгляд понятие зеркальной чётности частицы лишено смысла. Действительно, замена в (5.39) $\breve{\alpha}_n^+$ на $-\breve{\alpha}_n^+$ приводит к изменению знака з.ч. на противоположный, поэтому мы можем сделать з.ч. всех частиц, например, равными 1. Однако такую процедуру можно осуществить только для какого-то фиксированного момента времени. Если же нас интересует временнáя эволюция системы взаимодействующих частиц, то всё усложняется. Вероятность перехода из одного состояния в другое не должна зависеть от выбора з.ч. начальных частиц. Однако, как мы увидим ниже, при фиксированных начальных з.ч. эта вероятность зависит от з.ч. конечных частиц. Ограничившись только одним из значений конечных з.ч., мы можем упустить какой-либо канал рассеяния.

Возникает принципиально важный вопрос: могут ли одновременно существовать две одинаковые частицы в одном и том же физическом состоянии, но имеющие различные з.ч.? Допущение такой возможности приводит к ряду противоречий. Действительно, пусть $\Phi = \hat{\alpha}_n^+(1)\Phi_0$ и

$\Phi' = \hat{\alpha}_n^+(-1)\Phi_0$ – векторы состояния частиц, отличающиеся друг от друга только з.ч. Поскольку эти векторы отвечают одному и тому же физическому состоянию, должно выполняться равенство $|(\Phi, \Phi')|^2 = 1$. Однако это не так, более того – $(\Phi, \Phi') = 0$.

Рассмотрим теперь вектор состояния

$$\Phi = \hat{\alpha}_n^+(1)\hat{\alpha}_n^+(-1)\Phi_0 = \frac{1}{2}((\hat{\alpha}_n^+)^2 - (\breve{\alpha}_n^+)^2 - [\hat{\alpha}_n^+, \breve{\alpha}_n^+])\Phi_0$$

В фермионном случае $(\hat{\alpha}_n^+)^2 = (\breve{\alpha}_n^+)^2 = 0$, поэтому вектор Ф приобретает вид

$$\Phi = -\hat{\alpha}_n^+\breve{\alpha}_n^+\Phi_0 \neq 0 \qquad (5.44)$$

Результат (5.44) противоречит принципу Паули: в одном и том же состоянии не могут находиться два одинаковых фермиона. Отметим, что в случае фермионов с одинаковой з.ч. принцип Паули автоматически соблюдается благодаря равенству $(\hat{\alpha}_n^+(\chi))^2 = 0$.

Рассмотрим наконец суперпозицию операторов рождения

$$c_1\hat{\alpha}_n^+(1) + c_2\hat{\alpha}_n^+(-1) = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}}\hat{\alpha}_n^+ + \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{2}}\breve{\alpha}_n^+ \qquad (5.45)$$

Если $|c_1 + c_2| \neq |c_1 - c_2|$, то суперпозиция (5.45) не может быть оператором рождения реальной частицы, т.к. в этом случае нарушается зеркальная симметрия. В частности, при $c_1 = c_2$ или $c_1 = -c_2$ мы получили бы частицы с определённой зеркальностью, т.е. мы вынуждены были бы признать зеркальность наблюдаемым физическим параметром. Если же $|c_1 + c_2| = |c_1 - c_2|$, то нетрудно видеть, что с помощью замены фаз операторов суперпозиция (5.45) сводится к оператору рождения частицы с определённой з.ч. Таким образом, мы приходим к нарушению квантовомеханического принципа суперпозиции: произвольная линейная комбинация векторов физических состояний не обязательно отвечает реальному физическому состоянию. Подобные ограничения схожи с т.н. правилами суперотбора, которые изучались Д.К. Виком, А.С. Уайтманом и Е.П. Вигнером [1,2]. Однако эти правила действенны для линейных комбинаций векторов, отвечающих существенно различным состояниям – например, состояниям с разным электрическим зарядом или с целым и полуцелым угловым моментом. Если бы нарушение принципа суперпозиции имело место для векторов состояния двух одинаковых частиц, то это привело бы к специфическим интерференционным эффектам. Ничего подобного экспериментально не наблюдалось, поэтому мы имеем ещё один аргумент в пользу запрета на существование одинаковых частиц в одном и том же физическом состоянии, но с различными з.ч.

Итак, векторы состояния совокупности реальных частиц должны быть собственными векторами оператора зеркальной чётности $\hat{\chi}$. При этом необходимо исключить одновременное существование одинаковых частиц в одном и том же физическом состоянии, но с различными з.ч. Соображения, приведённые выше, нельзя считать строгим теоретическим обоснованием этих правил. Для этого потребовался бы анализ, аналогичный проведённому в работах [1,2]. Как мы увидим в дальнейшем, это не единственная и даже не главная проблема, возникающая в процессе построения модифицированной квантовой теории, так что подобный анализ представляется преждевременным.

Вернёмся теперь к непрерывному импульсному представлению. Вектор состояния системы, состоящей из n электронов при условии, что взаимодействие между ними выключено, имеет вид

$$\Phi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \chi_1; \dots; \mathbf{p}_n, \sigma_n, \chi_n) \equiv |\mathbf{p}_1, \sigma_1, \chi_1; \dots; \mathbf{p}_n, \sigma_n, \chi_n\rangle =$$

$$= \hat{a}^+_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1, \chi_1) \dots \hat{a}^+_{\sigma_n}(\mathbf{p}_n, \chi_n)\Phi_0$$

где $\mathbf{p}_i, \sigma_i, \chi_i$ - соответственно импульсы, поляризации и з.ч. электронов. Аналогичным образом можно составить вектор состояния системы, состоящей из произвольного количества электронов, позитронов и фотонов. Включение взаимодействия приводит к переходу от начального состояния Φ к конечному состоянию Φ' . Если бы з.ч. была наблюдаемым физическим параметром, то для нахождения полной вероятности перехода $\Phi \longrightarrow \Phi'$ нужно было бы просуммировать парциальные вероятности по з.ч. конечных частиц. Такой путь, однако, является ошибочным. Действительно, суммирование парциальных вероятностей переходов в состояния Φ'_1 и Φ'_2 подразумевает возможность одновременного существования этих состояний в виде суперпозиции $c_1\Phi'_1 + c_2\Phi'_2$, однако в рассматриваемом нами случае это не так. Логично было бы предположить, что вероятность перехода вообще не должна зависеть от з.ч., однако это тоже неверно. Как мы увидим в дальнейшем, при определённом выборе з.ч. вероятность перехода может оказаться равной нулю. С учётом этого можно прийти к выводу, что имеется единственная непротиворечивая альтернатива: в зависимости от выбора з.ч. участвующих в процессе рассеяния частиц вероятность перехода либо равна нулю, либо имеет постоянное ненулевое значение, не зависящее от этого выбора. Таким образом, для вычисления вероятности перехода в каждом конкретном случае нужно выбирать з.ч. так, чтобы получился ненулевой результат, в остальном выбор з.ч. произволен. Различные ненулевые вероятности при различном выборе з.ч. указывают на какую-то ошибку – это важный критерий правильности получаемых результатов.

Во всех случаях, рассматриваемых далее в этой статье, парциальные вероятности оказываются зависящими от множителей $1 - \chi\chi'$ либо $1 + \chi\chi'$, где χ и χ' - з.ч. соответственно начального и конечного состояний, поэтому для получения вероятности перехода нужно просуммировать их по χ или χ'. Не исключено, что только эти два варианта имеют место в общем случае, однако доказать или опровергнуть данное предположение пока не представляется возможным. Отметим, что факт зависимости вероятностей различных процессов от зеркальных чётностей является несколько неожиданным, даже парадоксальным. Физический смысл этой зависимости пока не ясен.

6. Уравнение Гейзенберга.

В традиционной теории временна́я эволюция произвольного оператора $\hat F$ определяется уравнением

$$\dot{\hat F} = \mathrm{i}\left[\hat H, \hat F\right] \tag{6.1}$$

где $\hat H$ – оператор энергии, который принято называть гамильтонианом. Для уравнений типа (6.1) будем использовать термин «уравнение Гейзенберга», хотя этот термин не является общепринятым и используется достаточно редко. Итак, уравнение (6.1) – традиционное уравнение Гейзенберга. Наша задача – выяснить, каким должно быть уравнение Гейзенберга в модифицированной теории. Как мы увидим ниже, роль, которую играет гамильтониан в традиционной теории, переходит к его зеркальному образу $\hat H_*$, который обозначим $\breve H$ и назовём *гейзенбергианом*. Закон сохранения энергии требует выполнения равенства $\dot{\hat H} = 0$, откуда в силу перестановочности операций дифференцирования по времени и зеркальной инверсии следует, что гейзенбергиан также сохраняется. Итак,

$$\hat H_* \equiv \breve H, \qquad \dot{\hat H} = \dot{\breve H} = 0 \tag{6.2}$$

Выясним вид уравнения Гейзенберга для свободных полей. Гамильтониан свободного электромагнитного поля определяется формулой (5.13). Подставив эту формулу в уравнение (6.1) и положив $\hat F = \hat A_n(\varkappa)$, получим с использованием перестановочного соотношения (5.5) тождество. Если же положить $\hat F = \dot{\hat A}_n(\varkappa)$, то из (6.1) получится уравнение (5.6). Таким образом, уравнение (6.1) правильно описывает эволюцию свободного электромагнитного поля. Заменим теперь в (6.1) гамильтониан на гейзенбергиан, а обычный коммутатор на зеркальный:

$$\dot{\hat F} = \mathrm{i}\left]\breve H, \hat F\right[\tag{6.3}$$

Операторы $\hat A_n(\varkappa)$ и $\dot{\hat A}_n(\varkappa)$ являются фундаментальными, поэтому в формуле (5.13) можно заменить традиционные произведения на зеркальные. Учитывая это, получим для плотности гейзенбергиана следующее выражение:

$$\breve{\mathcal H} = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=\pm1} \varkappa\left(\dot{\hat A}_n(\varkappa) * \dot{\hat A}_n(\varkappa) + \hat B_n(\varkappa) * \hat B_n(\varkappa)\right) \tag{6.4}$$

Подставив (6.4) в уравнение (6.3) и используя перестановочное соотношение (5.15), нетрудно убедиться, что уравнение (6.3) приводит к тем же результатам, что и уравнение (6.1).

Рассмотрим теперь случай свободного электрон-позитронного поля. Первый член в формуле (3.56) представляет собой необходимую нам для данного случая плотность функции Гамильтона. Благодаря равенствам $\mathrm{tr}\alpha_n = \mathrm{tr}\gamma^0 = 0$ при переходе в (3.56) к квантованным полям можно использовать как традиционное, так и зеркальное произведение операторов – результат от этого не зависит. Действительно, рассмотрим антикоммутатор

$$\left\{\left(\Gamma\hat{\psi}_r(\mathbf{x},x^0)\right)_\alpha,\hat{\psi}^+_{s\alpha}(\mathbf{x}',x^0)\right\} = \delta_{rs}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathrm{tr}\Gamma \qquad (6.5)$$

где Γ – произвольная матрица. При $\mathrm{tr}\Gamma = 0$ антикоммутатор (6.5) обращается в ноль, поэтому согласно (4.17) зеркальное произведение операторов $\left(\Gamma\hat{\psi}_r\right)_\alpha$ и $\hat{\psi}^+_{s\alpha}$ совпадает с традиционным. Если перейти к квантованным полям, соблюдая естественный порядок операторов, то согласно результату (5.24) и пояснениям к нему мы получим не гамильтониан, а его зеркальный образ, т.е. гейзенбергиан. Таким образом, для плотности гейзенбергиана имеем

$$\breve{\mathcal{H}} = \mathrm{i}\tau_{rs}\hat{\psi}^+_r * (-\alpha_n\partial_n + \gamma^0 m)\hat{\psi}_s \qquad (6.6)$$

Из (6.6) с очевидностью получается следующее выражение для плотности гамильтониана:

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathrm{i}\hat{\psi}^+_r(-\alpha_n\partial_n + \gamma^0 m)\hat{\psi}_r \qquad (6.7)$$

Используя выражения (6.7) и (6.6) с перестановочными соотношениями соответственно (5.3) и (5.4), нетрудно убедиться, что уравнения (6.1) и (6.3) приводят к одинаковому результату, а именно – к операторному уравнению Дирака (5.17).

Итак, для свободных полей уравнения (6.1) и (6.3) равносильны. С аналогичной ситуацией мы уже сталкивались при рассмотрении перестановочных соотношений: соотношения (5.3) и (5.4), а также (5.5) и (5.15) вытекают одно из другого в случае свободных полей. В общем случае взаимодействующих полей ситуация существенно усложняется. Операторы взаимодействующих полей не являются фундаментальными, они представляют собой бесконечные суммы элементарных операторов. При рассмотрении перестановочных соотношений мы пришли к заключению, что в общем случае правильными являются соотношения, сформулированные с помощью зеркального произведения, т.е. соотношения (5.4) и (5.15). Естественно прийти к аналогичному заключению и для уравнения Гейзенберга, т.е. считать справедливым для произвольных полей именно уравнение (6.3). Для свободных полей возможен ещё один вариант уравнения Гейзенберга с использованием зеркального произведения и гамильтониана:

$$\dot{\hat{f}}(\varkappa) = \mathrm{i}\varkappa\left]\hat{H},\hat{f}(\varkappa)\right[\qquad (6.8)$$

Однако в общем случае уравнение (6.8) противоречит перестановочным соотношениям. Действительно, рассмотрим перестановочное соотношение

$$\left]\hat{f}(\varkappa), \hat{g}(\varkappa')\right[_{\pm} = c(\varkappa, \varkappa') \tag{6.9}$$

где $c(\varkappa, \varkappa')$ – не зависящее от времени c-число. Дифференцируя (6.9) по времени, получим следующий результат:

$$\partial_0 \left]\hat{f}(\varkappa), \hat{g}(\varkappa')\right[_{\pm} = \mathrm{i}(\varkappa - \varkappa')(\}\hat{H}, \hat{f}(\varkappa)\hat{g}(\varkappa')\{ - c(\varkappa, \varkappa')\hat{H} -$$

$$-\hat{f}(\varkappa)\hat{H}\hat{g}(\varkappa') \pm \hat{g}(\varkappa')\hat{H}\hat{f}(\varkappa)) \tag{6.10}$$

При $\varkappa \neq \varkappa'$ правая часть равенства (6.10) в общем случае в ноль не обращается, так что уравнение (6.8) в отличие от (6.3) не может претендовать на универсальность.

Покажем, что при надлежащем выборе гейзенбергиана уравнение (6.3) позволяет получить дифференциальные уравнения для операторов взаимодействующих полей, удовлетворяющие постулату соответствия. Выберем плотность гейзенбергиана в виде

$$\check{\mathcal{H}} = \check{\mathcal{H}}_0 + \check{\mathcal{V}}, \qquad \check{\mathcal{V}} = \check{\mathcal{U}} + \check{\mathcal{U}}_0 \tag{6.11}$$

где $\check{\mathcal{H}}_0$ – сумма правых частей равенств (6.4) и (6.6), а операторы $\check{\mathcal{U}}$ и $\check{\mathcal{U}}_0$ получаются из соответствующих выражений для плотностей функции Гамильтона (3.57):

$$\check{\mathcal{U}} = -e \sum_{\varkappa=\pm 1} \check{\jmath}_n(\varkappa) * \hat{A}_n(\varkappa), \qquad \check{\mathcal{U}}_0 = \frac{1}{2} e \sum_{\varkappa=\pm 1} \check{\rho}(\varkappa) * \hat{A}^0(\varkappa) \tag{6.12}$$

где

$$\check{\jmath}^{\mu}(\varkappa) = \mathrm{i}(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}(\lambda_{11}(\varkappa)\hat{\bar{\psi}}_{1\alpha} * \hat{\psi}_{1\beta} + \lambda_{12}(\varkappa)\hat{\bar{\psi}}_{1\alpha} * \hat{\psi}_{2\beta} +$$

$$+\lambda_{21}(\varkappa)\hat{\bar{\psi}}_{2\alpha} * \hat{\psi}_{1\beta} - \lambda_{22}(\varkappa)\hat{\psi}_{2\beta} * \hat{\bar{\psi}}_{2\alpha}) \tag{6.13}$$

$$\hat{A}^0(\mathbf{x}, x^0; \varkappa) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \check{\rho}(\mathbf{x}', x^0; \varkappa), \qquad \check{\rho}(\varkappa) = \check{\jmath}^0(\varkappa) \tag{6.14}$$

Воспользовавшись равенством $\mathrm{tr}\gamma^0\gamma_n = 0$, можно придать выражению для $\check{\jmath}_n(\varkappa)$ более компактный вид:

$$\check{\jmath}_n(\varkappa) = \mathrm{i}\hat{\bar{\psi}}_r * \lambda_{rs}(\varkappa)\gamma_n\hat{\psi}_s \tag{6.15}$$

Полагая в (6.3) $\hat{F} = \hat{\psi}_r$, получим следующее уравнение:

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\hat{\psi}_r = \frac{\mathrm{i}}{2} e \sum_{\varkappa=\pm 1} \left(\tau\lambda(\varkappa)\right)_{rs} \gamma^{\mu} \left(\hat{A}_{\mu}(\varkappa) * \hat{\psi}_s + \hat{\psi}_s * \hat{A}_{\mu}(\varkappa)\right) \tag{6.16}$$

Если в уравнении (6.16) перейти от операторов к неквантованным полям, то получится в точности уравнение (3.38): два члена в правой части (6.16) вместо одного в (3.38) возникают из-за того, что операторы $\hat{\psi}_r$ и $\hat{A}^0(\varkappa)$ не коммутируют. Калибровочная группа электродинамики абелева, поэтому генераторы группы $\tau\lambda(1)$ и $\tau\lambda(-1)$ коммутируют. Воспользовавшись этим, можно без труда доказать, что из (6.16) следует уравнение непрерывности для оператора $\check{j}^\mu(\varkappa)$:

$$\partial_\mu \check{j}^\mu(\varkappa) = 0 \tag{6.17}$$

Рассмотрим теперь уравнение для операторов электромагнитного поля. Полагая в (6.3) $\hat{F} = \hat{A}_n(\varkappa)$, мы опять, как и в случае свободного поля, получим тождество. Если же положить $\hat{F} = \hat{\dot{A}}_n(\varkappa)$, то с использованием (6.17) мы получим следующее уравнение:

$$\partial_\mu \partial^\mu \hat{A}_n(\varkappa) - \partial_n \partial_0 \varkappa \hat{A}^0(\varkappa) = -e\varkappa \check{j}_n(\varkappa) \tag{6.18}$$

При $\varkappa = 1$ (6.18) совпадает с уравнением (3.39), если перейти от операторов к неквантованным полям. В случае $\varkappa = -1$ дополнительный знак «минус» можно устранить с помощью перестановки операторов электрон-позитронного поля. Действительно, для $\check{j}_n(-1)$ имеем

$$\check{j}_n(-1) = (\alpha_n)_{\alpha\beta} \lambda_{rs}(-1) \hat{\psi}^+_{r\alpha} * \hat{\psi}_{s\beta} = -(\alpha_n)_{\alpha\beta} \lambda_{rs}(-1) \hat{\psi}_{s\beta} * \hat{\psi}^+_{r\alpha} \tag{6.19}$$

В уравнении (6.18) присутствует также оператор $\check{\rho}(\varkappa)$, который входит в выражение для оператора $\hat{A}^0(\varkappa)$. Оператор $\check{\rho}(-1)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\check{\rho}(-1) = \lambda_{rs}(-1) \hat{\psi}^+_{r\alpha} * \hat{\psi}_{s\alpha} = -\lambda_{rs}(-1) \hat{\psi}_{s\alpha} * \hat{\psi}^+_{r\alpha} + c \tag{6.20}$$

где c – не зависящее от времени (хотя и бесконечное) c-число. Поскольку в уравнении (6.18) содержится дифференцирование по времени, то это дополнительное слагаемое несущественно.

Приведём ещё один аргумент в пользу справедливости уравнения (6.3). Предположим, что в общем случае взаимодействующих полей справедливы перестановочные соотношения (5.3) и (5.5), а правильным уравнением Гейзенберга является уравнение (6.1). Рассмотрим член плотности гамильтониана, линейно зависящий от операторов $\hat{A}_n(\pm 1)$. Запишем его в виде

$$\hat{\mathcal{U}} = -e \sum_{\varkappa=\pm 1} \hat{A}_n(\varkappa) \hat{\psi}^+_r \Lambda_{rs}(\varkappa) \alpha_n \hat{\psi}_s \tag{6.21}$$

где $\Lambda(\pm 1)$ – матрицы, которые нужно выбрать исходя из постулата соответствия. Оператор $\hat{\mathcal{U}}$ эрмитов, поэтому матрицы $\Lambda(\pm 1)$ также должны быть эрмитовыми. Используя перестановочное соотношение (5.3), получим

$$\mathrm{i}\left[\hat{U},\hat{\psi}_r\right] = \mathrm{i}e \sum_{\varkappa=\pm 1} \alpha_n \hat{A}_n(\varkappa)\Lambda_{rs}(\varkappa)\hat{\psi}_s \tag{6.22}$$

Постулат соответствия требует выполнение равенства $\Lambda(\varkappa) = \tau\lambda(\varkappa)$, однако это недопустимо, т.к. матрицы $\tau\lambda(\pm 1)$ не являются эрмитовыми. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно: именно зеркальное произведение операторов обеспечивает в уравнении Гейзенберга (как и в перестановочных соотношениях) правильную "игру" знаков.

Итак, будем считать, что в общем случае взаимодействующих полей уравнение Гейзенберга имеет вид (6.3). Очевидно, что благодаря алгебраическим свойствам коммутаторов это уравнение справедливо не только для полевых операторов, но и для зеркального произведения произвольного числа этих операторов. Учитывая дистрибутивность всех операций, а также тот факт, что с помощью формулы (4.22) традиционные произведения сводятся к зеркальным, можно утверждать, что уравнение (6.3) справедливо для произвольных операторов. Мы убедились в том, что уравнение (6.3) справедливо в частном случае квантовой электродинамики. Логично предположить, что уравнение (6.3) наряду с перестановочным соотношением (5.16) является универсальным, т.е. справедливым для любых совокупностей частиц и любых взаимодействий между ними. Гейзенбергиан в общем случае получается из функции Гамильтона заменой неквантованных полей на операторы и традиционных произведений – на зеркальные. Необходимо дополнить этот "рецепт" правилами расстановки операторов в зеркальных произведениях, а также знаков «$\pm$» перед каждым слагаемым. Эти правила должны быть применимы не только для построения гейзенбергиана, но и для построения зеркальных образов операторов любых физических величин. Заряженные поля $\varphi_a(\varkappa)$ входят в выражения для физических величин, как правило, в виде билинейных комбинаций вида $\varphi_a^*(\varkappa)\varphi_b(\varkappa')$. Основываясь на различных примерах, рассмотренных выше, можно прийти к заключению, что для построения зеркального образа оператора физической величины нужно осуществить следующее преобразование:

$$\varphi_a^*(\varkappa)\varphi_b(\varkappa') \mapsto \begin{cases} \hat{\varphi}_a^+(\varkappa) * \hat{\varphi}_b(\varkappa'), & \varkappa = 1 \text{ и/или } \varkappa' = 1 \\ -\hat{\varphi}_b(\varkappa') * \hat{\varphi}_a^+(\varkappa), & \varkappa = \varkappa' = -1 \end{cases} \tag{6.23}$$

Правило (6.23) применимо как для фермионных, так и для бозонных полей, а также в случае, когда $\varphi_a(\varkappa)$ – истинно нейтральное поле. Как распространить это правило на общий случай полилинейных комбинаций полей – открытый вопрос.

Стоит отметить одно весьма любопытное свойство гейзенбергиана. Из (5.36) получается следующее выражение для гейзенбергиана свободных полей:

$$\breve{H} \equiv \hat{P}_*^0 = \sum_n \varepsilon_n \left(\hat{a}_n^+\hat{a}_n + \hat{b}_n^+\hat{b}_n - \check{a}_n^+\check{a}_n - \check{b}_n^+\check{b}_n\right) \tag{6.24}$$

Рассмотрим произвольное физически наблюдаемое состояние, т.е. состояние, имеющее вид (5.41). Нетрудно видеть, что квантовомеханическое среднее гейзенбергиана по любому такому состоянию равно нулю. Очевидно, что аналогичное утверждение справедливо не только для заряженных, но и для истинно нейтральных частиц. Сохраняется ли это свойство гейзенбергиана при включении взаимодействия – открытый вопрос.

До сих пор мы использовали т.н. гейзенберговское представление, в котором векторы состояния не зависят от времени, а временна́я эволюция операторов определяется уравнением Гейзенберга. Пусть $\hat{F}^{(h)}$ – произвольный оператор в гейзенберговском представлении. Используя зеркальную экспоненту (4.23), можно по аналогии с традиционной теорией перейти к т.н. шрёдингеровскому представлению операторов:

$$\hat{F}^{(s)} = \mathrm{e}_*^{-\mathrm{i}\breve{H}x^0} * \hat{F}^{(h)} * \mathrm{e}_*^{\mathrm{i}\breve{H}x^0} \tag{6.25}$$

В (6.25) у оператора $\breve{H}$ отсутствует индекс принадлежности к какому-либо представлению, т.к. $\breve{H}^{(h)} = \breve{H}^{(s)} \equiv \breve{H}$. Из (6.25) с учётом уравнения (6.3) следует равенство $\dot{\hat{F}}^{(s)} = 0$, т.е. операторы в шрёдингеровском представлении от времени не зависят. Пусть теперь Φ – произвольный вектор состояния в гейзенберговском представлении, удовлетворяющий условию нормировки $(\Phi, \Phi) = 1$. Действуя по аналогии с традиционной теорией, осуществим следующее преобразование:

$$\Psi = \mathrm{e}_*^{-\mathrm{i}\breve{H}x^0}\Phi \tag{6.26}$$

Очевидно, что вектор Ψ не является вектором состояния в шрёдингеровском представлении – хотя бы потому, что он не удовлетворяет условию нормировки $(\Psi, \Psi) = 1$. Это условие выполнялось бы, если бы в формуле (4.24) фигурировало не зеркальное, а традиционное произведение. Источником этой проблемы являются зеркальные произведения в уравнении (6.3), от которых можно избавиться с помощью преобразования зеркальной инверсии:

$$\dot{\hat{F}}_* = \mathrm{i}\left]\breve{H}, \hat{F}\right[_* \tag{6.27}$$

В правой части уравнения (6.27) нет зеркальных произведений. Действительно, из определения зеркального произведения (4.10) получается следующее выражение для его зеркального образа:

$$\left(\hat{F} * \hat{G}\right)_* = (-1)^{|\check{f}|_f|\check{g}|_f + |\check{f}|_b|\check{g}|_b}\hat{F}_*\hat{G}_* \tag{6.28}$$

Однако в общем случае операторы $\breve{H}$ и $\hat{F}$ представляют собой сумму э.о. различной длины, так что знакопеременный множитель в (6.28) не позволяет решить проблему. Пока неясно, как распутывать этот "клубок". Более того, неясно, существует ли для векторов состояния преобразование $\Phi \mapsto \Psi$, удовлетворяющее условию

$$\left(\Phi, \hat{F}^{(h)}\Phi\right) = \left(\Psi, \hat{F}^{(s)}\Psi\right) \tag{6.29}$$

для любых операторов $\hat{F}^{(h)}$ и $\hat{F}^{(s)}$, связанных равенством (6.25). Иными словами, под вопросом существование шрёдингеровских векторов состояния, которые полностью описывают состояние системы в любой момент времени. Уравнение Гейзенберга определяет динамику отдельных физических величин, однако оно не позволяет изучать временну́ю эволюцию физической системы как целого. Именно для этого в традиционной теории используют переход к шрёдингеровскому представлению. Трудности такого перехода (или даже принципиальная невозможность?) – главная проблема выстраиваемой в данной статье модифицированной теории. Мы ещё вернёмся к обсуждению этой проблемы в третьей части статьи.

Шрёдингеровские векторы состояния в традиционной теории подчиняются уравнению Шрёдингера

$$\dot{\Psi} = -\mathrm{i}\hat{H}\Psi \tag{6.30}$$

с помощью которого можно получить точное выражение для оператора рассеяния. По причинам, изложенным в предыдущем абзаце, мы не можем пойти этим путём, тем не менее некоторые интересные результаты для оператора рассеяния можно получить без использования уравнения Шрёдингера. Матрица рассеяния будет рассматриваться в третьей части статьи, здесь же мы получим некоторые подготовительные результаты.

Рассмотрим переход от шрёдингеровского представления к представлению, которое в традиционной теории принято называть представлением взаимодействия или представлением Дирака:

$$\hat{F} = \mathrm{e}_*^{\mathrm{i}\breve{H}_0 x^0} * \hat{F}^{(s)} * \mathrm{e}_*^{-\mathrm{i}\breve{H}_0 x^0} \tag{6.31}$$

где $\breve{H}_0$ – свободный гейзенбергиан, который не меняется при переходе от шрёдингеровского представления к представлению взаимодействия: $\breve{H}_0 = \breve{H}_0^{(s)}$. В дальнейшем по умолчанию будем использовать для операторов исключительно представление взаимодействия. В этом представлении уравнение Гейзенберга имеет вид

$$\dot{\hat{F}} = \mathrm{i}\big]\breve{H}_0, \hat{F}\big[= \mathrm{i}\big[\hat{H}_0, \hat{F}\big] \tag{6.32}$$

Это означает, что полевые операторы $\hat{A}_n(\varkappa)$ и $\hat{\psi}(\varkappa)$ являются фундаментальными, причём для них справедливы разложения соответственно (5.8) и (5.18). Вместо аргумента $\varkappa$ будем использовать надстрочные знаки:

$$\hat{A}_n(1) \equiv \hat{A}_n, \qquad \hat{A}_n(-1) \equiv \check{A}_n, \qquad \hat{\psi}(1) \equiv \hat{\psi}_1 \equiv \hat{\psi}, \;\; \hat{\psi}(-1) \equiv \hat{\psi}_2 \equiv \check{\psi} \tag{6.33}$$

В традиционной теории уравнение Шрёдингера (6.30) приводит к выражению для оператора рассеяния $\hat{S}$ в виде т.н. ряда Дайсона:

$$\hat{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}^{(n)} \tag{6.34}$$

где

$$\hat{S}^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \mathrm{T}\hat{\mathcal{V}}\,(x_1) \dots \hat{\mathcal{V}}(x_n) \tag{6.35}$$

а $\hat{\mathcal{V}}(x)$ – плотность гамильтониана взаимодействия в представлении взаимодействия. Заменяя в (6.35) $\hat{\mathcal{V}}(x)$ на плотность гейзенбергиана взаимодействия $\check{\mathcal{V}}(x)$, а традиционные произведения операторов на зеркальные, получим

$$\hat{Z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Z}^{(n)} \tag{6.36}$$

где

$$\hat{Z}^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \mathrm{T}\check{\mathcal{V}}\,(x_1) * \dots * \check{\mathcal{V}}(x_n) \tag{6.37}$$

Оператор $\hat{Z}$ удовлетворяет соотношению

$$\hat{Z} * \hat{Z}^{+} = 1 \tag{6.38}$$

в то время как оператор рассеяния должен быть унитарным:

$$\hat{S}\hat{S}^{+} = 1 \tag{6.39}$$

Таким образом, оператор $\hat{Z}$ нельзя считать оператором рассеяния, однако, как мы увидим в дальнейшем, величины $\hat{Z}^{(n)}$ можно использовать для его построения. Использование формулы (4.33) позволяет избавиться в (6.37) от зеркальных произведений:

$$\hat{Z}^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n\, \mathrm{T}_{*}\check{\mathcal{V}}(x_1) \dots \check{\mathcal{V}}(x_n) \tag{6.40}$$

Оператор $\check{\mathcal{V}}$ состоит из двух слагаемых, пропорциональных соответственно e и e^2 , что создаёт определённое неудобство, поэтому выделим из $\hat{Z}^{(n)}$ члены, зависящие только от оператора $\check{\mathcal{U}}$:

$$\hat{Z}^{(n)} = \check{S}^{(n)} + \check{S}_0^{(n)} \tag{6.41}$$

где

$$\check{S}^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \,\mathrm{T}_*\check{\mathcal{U}}(x_1)\dots\check{\mathcal{U}}(x_n) \qquad (6.42)$$

а $\check{S}_0^{(n)}$ содержит члены, зависящие от операторов $\check{\mathcal{U}}$ и $\check{\mathcal{U}}_0$ и имеющие порядок по константе e от e^{n+1} до e^{2n} . Для оператора рассеяния будем по-прежнему использовать обозначение $\hat{S}$ и считать справедливым разложение (6.34), однако в отличие от (6.35) под $\hat{S}^{(n)}$ будем подразумевать член разложения, пропорциональный e^n .

Главная задача этой статьи (а, возможно, и всей квантовой теории поля) – найти выражение для $\hat{S}^{(n)}$ в виде функционала от оператора $\check{\mathcal{V}}(x)$. К сожалению, ввиду отсутствия в теоретическом арсенале уравнения Шрёдингера строгое решение этой задачи пока недоступно. Однако, сделав ряд предположений относительно структуры оператора $\hat{S}^{(n)}$ и используя унитарность оператора $\hat{S}$, можно получить вполне удовлетворительные результаты. Оператор рассеяния будет подробно рассматриваться в третьей части статьи, в этом же разделе мы хотим лишь продемонстрировать, что выбранный нами путь себя оправдывает. Сделаем это на примере первого и второго порядка по константе e , предполагая, что $\hat{S}^{(n)}$ можно выразить через операторы $\check{S}^{(n)}$ и $\check{S}_0^{(n)}$ из формулы (6.41). Для $\hat{S}^{(1)}$ возможен только один вариант: $\hat{S}^{(1)}$ и $\check{S}^{(1)}$ должны совпадать с точностью до вещественного множителя. Этот множитель не ограничивая общности можно положить равным единице. Действительно, оператор $\check{S}^{(1)}$ пропорционален $\sqrt{d}$, где d - неизвестный пока параметр, фиксирующий единицы измерения электромагнитного поля и константы e , поэтому можно включить коэффициент пропорциональности между $\hat{S}^{(1)}$ и $\check{S}^{(1)}$ в $\sqrt{d}$. Итак, для оператора $\hat{S}^{(1)}$ имеем

$$\hat{S}^{(1)} = \check{S}^{(1)} \qquad (6.43)$$

Оператор $\hat{S}^{(2)}$ будем искать в виде

$$\hat{S}^{(2)} = \check{S}^{(2)} + \hat{X}^{(2)} \qquad (6.44)$$

Подстановка (6.44) в (6.39) даёт следующий результат:

$$\hat{X}^{(2)} + \hat{X}^{(2)+} = -\check{S}^{(2)} - \check{S}^{(2)+} + \check{S}^{(1)}\check{S}^{(1)} \qquad (6.45)$$

откуда имеем

$$\hat{X}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(-\check{S}^{(2)} - \check{S}^{(2)+} + \check{S}^{(1)}\check{S}^{(1)}\right) + \check{X}^{(2)} \qquad (6.46)$$

где $\check{X}^{(2)}$ – антиэрмитов оператор, который невозможно определить из уравнения (6.45). Сделаем ещё одно предположение: будем считать, что неизвестный пока оператор $\check{X}^{(2)}$ функционально не зависит от операторов электромагнитного поля $\hat{A}_n$ и $\check{A}_n$, как, например, оператор $\check{S}_0^{(1)}$. Ограничимся рассмотрением процессов 2-го порядка, в которых отсутствуют виртуальные фотоны – тогда оператор $\check{X}^{(2)}$ можно вообще не учитывать. Итак, для оператора $\hat{S}^{(2)}$ имеем следующий результат:

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\check{S}^{(2)} - \check{S}^{(2)+} + \check{S}^{(1)}\check{S}^{(1)}\right) + \cdots \qquad (6.47)$$

Многоточие в (6.47) означает некий антиэрмитов оператор, функционально зависящий только от операторов $\hat{\psi}$ и $\check{\psi}$.

При переходе от гейзенберговского представления к представлению взаимодействия все полевые операторы становятся фундаментальными, поэтому в выражении (6.12) для гейзенбергиана взаимодействия $\check{\mathcal{U}}$ можно заменить все зеркальные произведения на традиционные. Введём следующие обозначения:

$$\hat{C}_\mu = \hat{A}_\mu + \check{A}_\mu, \qquad \check{C}_\mu = \hat{A}_\mu - \check{A}_\mu \qquad (6.48)$$

$$\hat{J}_\mu = \mathrm{i}\left(\hat{\bar{\psi}}\gamma_\mu\hat{\psi} - \check{\bar{\psi}}\gamma_\mu\check{\psi}\right), \qquad \check{J}_\mu = \mathrm{i}\left(\hat{\bar{\psi}}\gamma_\mu\check{\psi} + \check{\bar{\psi}}\gamma_\mu\hat{\psi}\right) \qquad (6.49)$$

Используя эти обозначения и формулу (3.24) для матриц $\lambda(\varkappa)$, получим для оператора $\check{\mathcal{U}}$ следующее компактное выражение:

$$\check{\mathcal{U}} = -\frac{\sqrt{d}}{4} e\left(\hat{C}_n\hat{J}_n + \check{C}_n\check{J}_n\right) \qquad (6.50)$$

Как и в традиционной теории, будем называть нормальной формой оператора такую форму, в каждом слагаемом которой все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения. Нормальное произведение операторов определяется как произведение, приведённое к нормальной форме, причём в процессе приведения все перестановочные функции считаются равными нулю. Для нормального произведения операторов $\hat{F}_1\hat{F}_2 \ldots \hat{F}_n$ будем использовать обозначение $N(\hat{F}_1\hat{F}_2 \ldots \hat{F}_n)$. Для спаривания двух фундаментальных операторов $\hat{f}$ и $\hat{g}$ будем использовать следующее обозначение:

$$\underbracket{\hat{f}\hat{g}} = \hat{f}\hat{g} - N(\hat{f}\hat{g}) \qquad (6.51)$$

Из разложения (5.8) с учётом равенства

$$\sum_{\lambda=1,2} e_{\lambda m}(\mathbf{k})e^*_{\lambda n}(\mathbf{k}) = d_{mn}(\mathbf{k}) \qquad (6.52)$$

получим

$$\underbracket{\hat{A}_m(x_1)\hat{A}}_n(x_2) = \underbracket{\check{A}_m(x_1)\check{A}}_n(x_2) = D^{(+)}_{mn}(x_1 - x_2) = -D^{(-)}_{mn}(x_2 - x_1) \qquad (6.53)$$

где $D_{mn}^{(\pm)}(x)$ – т.н. частотные части фотонной перестановочной функции, которые равны

$$D_{mn}^{(\pm)}(x) = \pm\frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}d_{mn}(\mathbf{k}) \tag{6.54}$$

В случае электрон-позитронного поля формулы, аналогичные (6.53), получаются из разложения (5.18):

$$\begin{gathered}\underbrace{\hat{\psi}_\alpha(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\beta}_{}(x_2) = \underbrace{\check{\psi}_\alpha(x_1)\check{\bar{\psi}}_\beta}_{}(x_2) = G_{\alpha\beta}^{(+)}(x_1 - x_2)\\ \underbrace{\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\hat{\psi}_\beta}_{}(x_2) = \underbrace{\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\check{\psi}_\beta}_{}(x_2) = G_{\beta\alpha}^{(-)}(x_2 - x_1)\end{gathered} \tag{6.55}$$

где

$$G_{\alpha\beta}^{(\pm)}(x) = \pm\frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}px}(m \mp \mathrm{i}\gamma p)_{\alpha\beta} \tag{6.56}$$

Пусть $\mathcal{G}^{(\pm)}$ – частотные части некой абстрактной перестановочной функции. Функцию

$$\mathcal{G}^{(c)}(x) = \theta(x^0)\mathcal{G}^{(+)}(x) - \theta(-x^0)\mathcal{G}^{(-)}(x) \tag{6.57}$$

принято называть причинным пропагатором. Наряду с $\mathcal{G}^{(c)}(x)$ нам понадобится функция

$$\mathcal{G}^{(u)}(x) = \theta(x^0)\mathcal{G}^{(-)}(x) - \theta(-x^0)\mathcal{G}^{(+)}(x) \tag{6.58}$$

которую назовём *союзным пропагатором*. Как нетрудно убедиться, справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{G}^{(\pm)}(x) = \pm\theta(\pm x^0)\mathcal{G}^{(c)}(x) \mp \theta(\mp x^0)\mathcal{G}^{(u)}(x) \tag{6.59}$$

$$\mathcal{G}^{(c)}(x) - \mathcal{G}^{(u)}(x) = \mathcal{G}^{(+)}(x) - \mathcal{G}^{(-)}(x) \tag{6.60}$$

Введём специальные обозначения ещё для двух функций:

$$\mathcal{G}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{G}^{(c)} - \mathcal{G}^{(u)}\right), \qquad \mathcal{G}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{G}^{(c)} + \mathcal{G}^{(u)}\right) \tag{6.61}$$

В дальнейшем будем также использовать обобщённое обозначение $\mathcal{G}^{(\varkappa)}$, где индекс $\varkappa$ может иметь одно из значений $+, -, c, u, 0, 1$.

Для вычисления операторов $\check{S}^{(n)}$ можно использовать известную в традиционной теории теорему Вика, однако нужно учесть одну особенность, которую вносит в неё модифицированная теория. Назовём *зеркальным хронологическим спариванием* операторов $\hat{f}(x_1)$ и $\hat{g}(x_2)$ следующую величину:

$$\overbracket{\hat{f}(x_1)\hat{g}}(x_2) = \mathrm{T}_*\hat{f}(x_1)\hat{g}(x_2) - N\left(\hat{f}(x_1)\hat{g}(x_2)\right) \qquad (6.62)$$

Определение (6.62) отличается от определения хронологического спаривания в традиционной теории заменой оператора Т на T_* . Очевидно, что при использовании теоремы Вика в модифицированной теории нужно заменить все хронологические спаривания на зеркальные. Используя определение (4.28) для оператора T_* , получим следующие результаты:

$$\overbracket{\hat{A}_m(x_1)\hat{A}_n}(x_2) = D_{mn}^{(c)}(x_1 - x_2), \qquad \overbracket{\check{A}_m(x_1)\check{A}_n}(x_2) = -D_{mn}^{(u)}(x_1 - x_2) \quad (6.63)$$

$$\overbracket{\hat{\psi}_\alpha(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\beta}(x_2) = G_{\alpha\beta}^{(c)}(x_1 - x_2), \qquad \overbracket{\check{\psi}_\alpha(x_1)\check{\bar{\psi}}_\beta}(x_2) = -G_{\alpha\beta}^{(u)}(x_1 - x_2) \quad (6.64)$$

где

$$D_{mn}^{(c,u)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\mathrm{e}^{ikx}D_{mn}^{(c,u)}(k), \quad D_{mn}^{(c,u)}(k) = -\frac{\mathrm{i}}{k^2 \mp \mathrm{i}0}d_{mn}(\mathbf{k}) \quad (6.65)$$

$$G^{(c,u)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\mathrm{e}^{ipx}G^{(c,u)}(p), \quad G^{(c,u)}(p) = -\mathrm{i}\frac{m - \mathrm{i}\gamma p}{p^2 + m^2 \mp \mathrm{i}0} \quad (6.66)$$

Вернёмся теперь к формуле (6.37). Операторы $\check{\mathcal{V}}(x)$ эрмитовы, поэтому при эрмитовом сопряжении зеркального произведения $\check{\mathcal{V}}(x_1) * \ldots * \check{\mathcal{V}}(x_n)$ просто происходит перестановка операторов в обратном порядке. Таким образом, для получения эрмитово-сопряжённого оператора $\hat{Z}^{(n)+}$ нужно заменить в (6.37) оператор Т на T^+ и ввести дополнительный множитель $(-1)^n$. Очевидно, что при этом все причинные пропагаторы заменятся на союзные со знаком «минус» и наоборот. Итак, для оператора $\hat{Z}^{(n)+}$ имеем

$$\hat{Z}^{(n)+} = (-1)^n\hat{Z}^{(n)}[\mathcal{G}^{(c)} \leftrightarrow -\mathcal{G}^{(u)}] \qquad (6.67)$$

Аналогичный приём можно использовать для перехода от оператора $\check{S}^{(n)}$ к $\check{S}^{(n)+}$.

Обозначим через $\hat{S}^{(n,k,2m)}$ слагаемое в $\hat{S}^{(n)}$, которое отвечает процессу с k внешними фотонами и суммарным числом внешних электронов и позитронов, равным $2m$. В частности, при $n = 2$ имеем

$$\hat{S}^{(2)} = \hat{S}^{(2,2,4)} + \hat{S}^{(2,2,2)} + \hat{S}^{(2,2,0)} + \hat{S}^{(2,0,4)} + \hat{S}^{(2,0,2)} + \hat{S}^{(2,0,0)} \qquad (6.68)$$

Аналогичные обозначения будем использовать и для других операторов, например – для $\check{S}^{(n)}$. В данном разделе мы будем рассматривать только процессы с двумя внешними фотонами, т.к. опущенные в (6.47) члены только в такие процессы не вносят вклада.

Для операторов $\hat{C}_n$ и $\check{C}_n$, определённых согласно (6.48), справедливы следующие формулы:

$$\underbracket{\hat{C}_m(x_1)\hat{C}}_n(x_2) = \underbracket{\check{C}_m(x_1)\check{C}}_n(x_2) = 2D^{(+)}_{mn}(x_1 - x_2) \tag{6.69}$$

$$\underbracket{\hat{C}_m(x_1)\check{C}}_n(x_2) = \underbracket{\check{C}_m(x_1)\hat{C}}_n(x_2) = 0 \tag{6.70}$$

$$\overbracket{\hat{C}_m(x_1)\hat{C}}_n(x_2) = \overbracket{\check{C}_m(x_1)\check{C}}_n(x_2) = 2D^{(0)}_{mn}(x_1 - x_2) \tag{6.71}$$

$$\overbracket{\hat{C}_m(x_1)\check{C}}_n(x_2) = \overbracket{\check{C}_m(x_1)\hat{C}}_n(x_2) = 2D^{(1)}_{mn}(x_1 - x_2) \tag{6.72}$$

Используя теорему Вика, можно преобразовать всевозможные произведения токов $\hat{J}_n$ и $\check{J}_n$ следующим образом:

$$\begin{gathered}
\hat{J}_m(x_1)\hat{J}_n(x_2) - N\left(\hat{J}_m(x_1)\hat{J}_n(x_2)\right) = \\
= \left(\gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1 - x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N\left(\hat{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\right) - \\
-\left(\gamma_n \hat{G}^{(-)}(x_2 - x_1)\gamma_m\right)_{\beta\alpha} N\left(\hat{\psi}_\alpha(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\beta(x_2)\right) - \\
-\mathrm{tr}\, \gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1 - x_2)\gamma_n \hat{G}^{(-)}(x_2 - x_1) + \text{з. с.}
\end{gathered} \tag{6.73}$$

$$\begin{gathered}
\check{J}_m(x_1)\check{J}_n(x_2) - N\left(\check{J}_m(x_1)\check{J}_n(x_2)\right) = \\
= \left(\gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1 - x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N\left(\check{\psi}_\beta(x_2)\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\right) - \\
-\left(\gamma_n \hat{G}^{(-)}(x_2 - x_1)\gamma_m\right)_{\beta\alpha} N\left(\check{\psi}_\alpha(x_1)\check{\bar{\psi}}_\beta(x_2)\right) - \\
-\mathrm{tr}\, \gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1 - x_2)\gamma_n \check{G}^{(-)}(x_2 - x_1) + \text{з. с.}
\end{gathered} \tag{6.74}$$

$$\begin{gathered}
\hat{J}_m(x_1)\check{J}_n(x_2) - N\left(\hat{J}_m(x_1)\check{J}_n(x_2)\right) = \\
= \left(\gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1 - x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N\left(\check{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\right) - \\
-\left(\gamma_n \hat{G}^{(-)}(x_2 - x_1)\gamma_m\right)_{\beta\alpha} N\left(\hat{\psi}_\alpha(x_1)\check{\bar{\psi}}_\beta(x_2)\right) - \text{з. с.}
\end{gathered} \tag{6.75}$$

$$\begin{gathered}
\check{J}_m(x_1)\hat{J}_n(x_2) - N\left(\check{J}_m(x_1)\hat{J}_n(x_2)\right) = \\
= \left(\gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1 - x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N\left(\hat{\psi}_\beta(x_2)\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\right) - \\
-\left(\gamma_n \hat{G}^{(-)}(x_2 - x_1)\gamma_m\right)_{\beta\alpha} N\left(\check{\psi}_\alpha(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\beta(x_2)\right) - \text{з. с.}
\end{gathered} \tag{6.76}$$

В формулах (6.73-6.76) надстрочные знаки «∧» и «∨» у функций $G^{(\pm)}$ означают, что эти функции возникли в результате спаривания соответственно французских или чешских операторов. «З.с.» означает зеркально симметричное выражение, т.е. выражение, в котором все "шляпки" перевёрнуты. Например

$$\left(\gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1-x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N\left(\check{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\right) - \text{з.с.} \equiv$$

$$\equiv \left(\gamma_m \hat{G}^{(+)}(x_1-x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N\left(\check{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\right) -$$

$$-\left(\gamma_m \check{G}^{(+)}(x_1-x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N\left(\hat{\psi}_\beta(x_2)\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\right)$$

Если нам требуется обычное произведение токов, то надстрочные знаки у $G^{(\pm)}$ нужно просто опустить. Если же мы хотим осуществить зеркальное хронологическое упорядочение, то необходимо сделать замену $\hat{G}^{(\pm)} \longrightarrow \pm G^{(c)}$, $\check{G}^{(\pm)} \longrightarrow \mp G^{(u)}$.

Введём следующие обозначения:

$$\hat{R}^{(2)} = \frac{1}{2}\check{S}^{(1)}\check{S}^{(1)}, \quad \check{I}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\check{S}^{(2)} - \check{S}^{(2)+}\right) \tag{6.77}$$

С учётом этих обозначений формула (6.47) приобретает вид

$$\hat{S}^{(2)} = \hat{R}^{(2)} + \check{I}^{(2)} + \cdots \tag{6.78}$$

Оператор $\hat{R}^{(2)}$ – эрмитова часть оператора $\check{S}^{(2)}$. Что касается $\check{I}^{(2)}$, то этот оператор представляет собой антиэрмитову часть $\hat{S}^{(2)}$ за вычетом членов, не вносящих вклад в процессы без виртуальных фотонов. С целью упрощения формул примем следующее соглашение: запись $\hat{F} \sim \hat{f}(x_1, \dots, x_n)$ будет означать равенство

$$\hat{F} = \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \hat{f}(x_1, \dots, x_n)$$

Выражение для слагаемых $\hat{R}^{(2)}$, отвечающих двум внешним фотонам, имеет вид:

$$\hat{R}^{(2,2,4)} + \hat{R}^{(2,2,2)} + \hat{R}^{(2,2,0)} \sim -\frac{de^2}{32}(\hat{J}_m(x_1)\hat{J}_n(x_2)N\left(\hat{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2)\right) +$$

$$+\check{J}_m(x_1)\check{J}_n(x_2)N\left(\check{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2)\right) + \hat{J}_m(x_1)\check{J}_n(x_2)N\left(\hat{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2)\right) +$$

$$+\check{J}_m(x_1)\hat{J}_n(x_2)N\left(\check{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2)\right)) \tag{6.79}$$

Для получения из (6.79) оператора $\hat{R}^{(2,2,2)}$ нужно воспользоваться формулами (6.73-6.76), оставив в них только слагаемые с одним спариванием. В результате с учётом формулы (6.60) получим

$$\hat{R}^{(2,2,2)} \sim -\frac{de^2}{16}\left(\gamma_m G^{(0)}(x_1-x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N((\hat{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2)+$$

$$+\check{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2))(\hat{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)+\check{\psi}_\beta(x_2)\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1))+$$

$$+(\hat{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2)-\check{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2))(\check{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)-\hat{\psi}_\beta(x_2)\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1))) \quad (6.80)$$

Различие между пропагаторами $G^{(c)}(p)$ и $G^{(u)}(p)$ существенно только в случае интегрирования по d^4p . При вычислении матричных элементов оператора $\hat{R}^{(2,2,2)}$ такое интегрирование не возникает, поэтому можно положить пропагатор $G^{(0)} = G^{(c)} - G^{(u)}$ равным нулю. Таким образом, $\hat{R}^{(2,2,2)}$ не вносит вклада в процессы рассеяния частиц.

Для вычисления оператора $\check{S}^{(2,2,2)}$ также нужно воспользоваться формулами (6.73-6.76), предварительно осуществив в них зеркальное хронологическое упорядочение, а оператор $\check{S}^{(2,2,2)+}$ получается из $\check{S}^{(2,2,2)}$ заменой пропагаторов $G^{(c)} \leftrightarrow -G^{(u)}$. В результате с использованием соотношений

$$\hat{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2)-\check{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2) = 2(\hat{A}_m(x_1)\check{A}_n(x_2)+\check{A}_m(x_1)\hat{A}_n(x_2))$$

$$\hat{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2)+\check{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2) = 2\left(\hat{A}_m(x_1)\hat{A}_n(x_2)-\check{A}_m(x_1)\check{A}_n(x_2)\right) \quad (6.81)$$

получим для оператора $\check{I}^{(2,2,2)}$ следующее выражение:

$$\check{I}^{(2,2,2)} \sim -\frac{de^2}{8}\left(\gamma_m G^{(1)}(x_1-x_2)\gamma_n\right)_{\alpha\beta} N((\hat{A}_m(x_1)\check{A}_n(x_2)+$$

$$+\check{A}_m(x_1)\hat{A}_n(x_2))(\hat{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)-\check{\psi}_\beta(x_2)\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1))+$$

$$+(\hat{A}_m(x_1)\hat{A}_n(x_2)-\check{A}_m(x_1)\check{A}_n(x_2))(\check{\psi}_\beta(x_2)\hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)+\hat{\psi}_\beta(x_2)\check{\bar{\psi}}_\alpha(x_1))) \quad (6.82)$$

Оператор $\check{I}^{(2,2,2)}$ определяет все процессы рассеяния 2-го порядка с участием двух внешних фотонов: комптоновское рассеяние, двухфотонную аннигиляцию пары и рождение пары двумя фотонами. Примечательно, что этим процессам отвечает именно антиэрмитова часть оператора рассеяния, в то время как эрмитова часть не вносит никакого вклада.

Рассмотрим комптоновское рассеяние фотона на электроне. Матричный элемент перехода из начального состояния $|\mathbf{p},\sigma,\chi_1;\mathbf{k},\lambda,\chi_2\rangle$ в конечное состояние $|\mathbf{p}',\sigma',\chi_1';\mathbf{k}',\lambda',\chi_2'\rangle$ равен

$$M = \delta(p+k-p'-k')\frac{de^2}{32(2\pi)^2}g(\chi_1,\chi_2,\chi_1',\chi_2')(M_1+M_2) \quad (6.83)$$

где

$$M_1 = \frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}\overline{u_{\sigma'}^{(+)}}(\mathbf{p}')e^*_{\lambda' m}(\mathbf{k}')\gamma_m G^{(1)}(p+k)\gamma_n e_{\lambda n}(\mathbf{k})u_\sigma^{(+)}(\mathbf{p}) \quad (6.84)$$

$$M_2 = \frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}} \overline{u_{\sigma'}^{(+)}}(\mathbf{p}') e_{\lambda m}(\mathbf{k}) \gamma_m G^{(1)}(p-k') \gamma_n e_{\lambda' n}^{*}(\mathbf{k}') u_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{p}) \tag{6.85}$$

$$g(\chi_1, \chi_2, \chi_1', \chi_2') = (1-\chi_1\chi_1')(\chi_2+\chi_2') + (\chi_1+\chi_1')(1-\chi_2\chi_2') \tag{6.86}$$

Учитывая равенства $\chi_{1,2}^2 = \left(\chi_{1,2}'\right)^2 = 1$, получим для функции g из (6.86) следующий результат:

$$|g(\chi_1, \chi_2, \chi_1', \chi_2')|^2 = 8(1-\chi\chi') \tag{6.87}$$

где $\chi = \chi_1\chi_2$ и $\chi' = \chi_1'\chi_2'$ – з.ч. соответственно начального и конечного состояния. Из (6.87) видно, что при рассеянии фотона на электроне происходит изменение знака з.ч. состояния: канал рассеяния, при котором з.ч. остаётся неизменной, оказывается под запретом. Для получения полной вероятности рассеяния нужно просуммировать $|M|^2$ по з.ч. конечного состояния. В результате получим

$$\sum_{\chi'=\pm 1} |M|^2 = \delta^2(p+k-p'-k') \frac{d^2 e^4}{64(2\pi)^4} |M_1 + M_2|^2 \tag{6.88}$$

Результат (6.88) отличается от традиционного множителем $d^2/64$, причём параметр d до сих пор считался неизвестным. Экспериментально установлено, что традиционный результат приводит к правильной формуле для сечения комптоновского рассеяния. Это позволяет наконец определить значение d : для соответствия модифицированной теории эксперименту нужно положить $d = 8$. Рассмотрение процессов аннигиляции и рождения пары не даёт ничего нового: вероятность процесса аналогичным образом отлична от нуля только при изменении знака з.ч. состояния, а результат модифицированной теории совпадает с традиционным.

Рассмотрим теперь оператор $\hat{S}^{(2,2,0)}$, который отвечает самодействию фотона. В данном случае нужно оставить только слагаемые с двумя спариваниями, которые есть в (6.73) и (6.74). Для $\hat{R}^{(2,2,0)}$ получается следующий результат:

$$\hat{R}^{(2,2,0)} \sim \frac{\mathrm{i}}{2} \Pi_{mn}^{(+,-)}(x_1, x_2) N(\hat{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2) + \check{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2)) \sim$$

$$\sim \frac{\mathrm{i}}{4} \left(\Pi_{mn}^{(+,-)}(x_1, x_2) + \Pi_{mn}^{(-,+)}(x_1, x_2) \right) N \left(\hat{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2) + \check{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2) \right) \tag{6.89}$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\varkappa_1, \varkappa_2)}(x_1, x_2) = -\mathrm{i} e^2 \mathrm{tr}\, \gamma_\mu G^{(\varkappa_1)}(x_1 - x_2) \gamma_\nu G^{(\varkappa_2)}(x_2 - x_1) \tag{6.90}$$

Пусть $\mathcal{G}_1^{(\pm)}(x)$ и $\mathcal{G}_2^{(\pm)}(x)$ - частотные части неких абстрактных перестановочных функций. Используя формулу (6.59), можно доказать справедливость следующего соотношения:

$$\mathcal{G}_1^{(+)}(x)\mathcal{G}_2^{(-)}(-x) + \mathcal{G}_1^{(-)}(x)\mathcal{G}_2^{(+)}(-x) =$$
$$= -\mathcal{G}_1^{(c)}(x)\mathcal{G}_2^{(c)}(-x) - \mathcal{G}_1^{(u)}(x)\mathcal{G}_2^{(u)}(-x) \qquad (6.91)$$

Воспользуемся (6.91) для преобразования выражения (6.89). В результате получим

$$\hat{R}^{(2,2,0)} \sim -\mathrm{i}\Pi_{mn}(x_1, x_2) N\left(\hat{A}_m(x_1)\hat{A}_n(x_2) + \check{A}_m(x_1)\check{A}_n(x_2)\right) \qquad (6.92)$$

где

$$\Pi_{mn}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\Pi_{mn}^{(c,c)}(x_1, x_2) + \Pi_{mn}^{(u,u)}(x_1, x_2)\right) \qquad (6.93)$$

Для оператора $\check{S}^{(2,2,0)}$ с помощью (6.73) и (6.74) получается следующий результат:

$$\check{S}^{(2,2,0)} \sim -\frac{\mathrm{i}}{4}(\left(\Pi_{mn}^{(c,c)}(x_1, x_2) + \Pi_{mn}^{(u,u)}(x_1, x_2)\right) N\left(\hat{C}_m(x_1)\hat{C}_n(x_2)\right) +$$
$$+ (\Pi_{mn}^{(c,u)}(x_1, x_2) + \Pi_{mn}^{(u,c)}(x_1, x_2)) N(\check{C}_m(x_1)\check{C}_n(x_2))) \qquad (6.94)$$

Очевидно, что оператор $\check{S}^{(2,2,0)}$ эрмитов, так что $\check{I}^{(2,2,0)} = 0$. Таким образом, вклад в самодействие фотона вносит только эрмитова часть оператора рассеяния.

Для матричного элемента оператора $\hat{S}^{(2,2,0)}$ получается следующий результат:

$$\langle \mathbf{k}', \lambda', \chi' \left| \hat{S}^{(2,2,0)} \right| \mathbf{k}, \lambda, \chi \rangle =$$
$$= -2\pi\mathrm{i}(1 + \chi\chi')\delta(k - k') e_{\lambda' m}^{*}(\mathbf{k}) \Pi_{mn}(k) e_{\lambda n}(\mathbf{k}) \qquad (6.95)$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2}\left(\Pi_{\mu\nu}^{(c,c)}(k) + \Pi_{\mu\nu}^{(u,u)}(k)\right) \qquad (6.96)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\varkappa,\varkappa')}(k) = -\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4} \mathrm{tr} \int d^4p \gamma_\mu G^{(\varkappa)}(p) \gamma_\nu G^{(\varkappa')}(p - k) \qquad (6.97)$$

В традиционной теории величину $\Pi_{\mu\nu}^{(c,c)}(k)$ принято называть поляризационным оператором. Как известно, его вычисление по формуле (6.97) приводит к т.н. ультрафиолетовой расходимости. Расходимости будут подробно рассматриваться в третьей части статьи, здесь же мы лишь отметим, что расходящийся член, возникающий при вычислении $\Pi_{\mu\nu}^{(u,u)}(k)$, компенсирует расходимость $\Pi_{\mu\nu}^{(c,c)}(k)$. В результате величина $\Pi_{\mu\nu}(k)$, определяемая формулой (6.96), оказывается конечной, и именно эту величину логично назвать поляризационным оператором в модифицированной теории. Отметим, что матричный элемент (6.95) отличен от нуля только для переходов с сохранением з.ч. состояния.

Итак, мы убедились, что модификация теории может решить проблему расходимости поляризационного оператора. При этом все прочие результаты для процессов 2-го порядка с двумя внешними фотонами получаются такими же, как и в традиционной теории.

Литература

1. Wigner E.P. // Zs. f. Phys., **133**, 101 (1952)
2. Wick G. C., Wightman A.S., Wigner E.P. // Phys. Rev., **88**, 101 (1952)