

A Theory of Gravito-Electromagnetism - Extending Newtonian Gravitation with a Maxwellian Framework

{Schlüsselworte: Maxwellgleichungen, Gravitation, Gravitoelektromagnetismus, Gravitomagnetismus, gravitostatisch, gravitodynamisch, gravitoelektrisch, gravitomagnetisch, Ringe des Saturn}

Dr.-Ing. Josef Graf, Egg, im November 2025

Abstract:

The profound mathematical analogy between Coulomb's law and Newton's law of gravitation hints at a deeper theoretical correspondence. This article develops a system of equations for gravitation that mirrors the structure of Maxwell's equations for electromagnetism. This Gravito-Electromagnetic (GEM) formalism introduces physical entities such as the gravitomagnetic field, offering a unified framework with the potential to explain diverse phenomena. As a key application, the model provides a compelling explanation for the stability and equatorial alignment of planetary rings, as observed around Saturn and Uranus.

Motivation:

Die Maxwellgleichungen sind in der Elektrotechnik verwurzelt, während man Gravitation mit Newton verbindet. Beide Begriffe sind im Sprachgebrauch in keiner Weise miteinander gekoppelt.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz aus dem Jahre 1687 ist ziemlich genau hundert Jahre älter als das Coulombsche Gesetz aus dem Jahre 1785.

- Das Newtonsche Gravitationsgesetz beschreibt die Kraft zwischen zwei Massen,
- Das Coulombsche Gesetz beschreibt die Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen.

Die mathematische Beschreibung beider Gesetze ist ungeheuer ähnlich:

Coulombkraft

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{r^2} \quad (0.1)$$

Q_1 und Q_2 sind hierbei zwei kugelsymmetrisch verteilte Ladungsmengen und r ist der Abstand der Mittelpunkte der beiden Ladungsmengen. Im Vorfaktor ist die elektrische Feldkonstante ϵ_0 enthalten.

Gravitationskraft

$$|\vec{F}_G| = G_N \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \quad (0.2)$$

M_1 und M_2 sind hierbei zwei kugelsymmetrisch verteilte Massen und r ist der Abstand der Mittelpunkte der beiden Massen. Im Vorfaktor ist die Newtonsche Gravitationskonstante G_N enthalten. Der Wert beträgt $G_N = 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3/\text{kg/s}^2]$

Um die Ähnlichkeit der beiden Formeln noch zu vergrößern, kann man folgende Beziehung einführen:

$$\gamma_0 := \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G_N} \quad (0.3)$$

Hieraus folgt:

Coulombkraft

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{r^2} \quad (0.4)$$

Gravitationskraft

$$|\vec{F}_G| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \gamma_0} \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \quad (0.5)$$

Das Coulombsche Gesetz lieferte die Grundlage der Elektrostatik. Über diese Gleichung ist z.B. die elektrische Feldstärke definiert.

Bis Anfang des 19. Jahrhunderts waren zwar sowohl elektrische als auch magnetische Phänomene bekannt, aber ein Zusammenhang zwischen den beiden war noch nicht gefunden. Erst 1820 konnte Ørsted eine Beziehung zwischen Elektrizität und Magnetismus nachweisen – allerdings nur experimentell.

Maxwell schließlich gelang 1865 eine formelhafte Beschreibung von elektrischen und magnetischen Vorgängen – insbesondere gelang es ihm, den Zusammenhang zwischen den beiden mathematisch zu erfassen. Dies war sozusagen die Geburtsstunde der *Maxwellschen Gleichungen*.

Die Maxwell-Gleichungen machen jedoch keine Aussage über auftretende Kräfte im Rahmen des Elektromagnetismus; mit den Maxwell-Gleichungen lässt sich z.B. nicht die Funktionsweise eines elektrischen Motors erklären.

Ein in sich geschlossenes System erhält man erst dann, wenn man zu den Maxwell-Gleichungen die Lorentz-Gleichung mit dazu nimmt. Die Lorentz-Gleichung sagt aus, dass sich die träge Masse elektrischer Ladung aus zwei Kraftkomponenten zusammen setzt. Übrigens: die Lorentz-Gleichung lässt sich aus den Maxwell-Gleichungen mathematisch **NICHT** ableiten! Die Lorentz-Gleichung wurde empirisch ermittelt!

Das System aus Maxwell-Gleichungen und Lorentz-Gleichung wird auch als *Maxwell-Lorentz-Gleichungen* bezeichnet, findet sich aber in der Literatur nur eher selten so genannt.

Im einzelnen lauten die elektromagnetischen Gesetze und deren Zusammenfassung folgendermaßen:

Gauss'sches Gesetz für das elektrische Feld

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_E}{\epsilon_0} \quad (0.6)$$

Gauss'sches Gesetz für das magnetische Feld

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (0.7)$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei, d.h. es gibt keine magnetischen Monopole. Feldlinien sind stets geschlossen.

Faraday'sches Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (0.8)$$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

$$c^2 \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \vec{j}_E \quad (0.9)$$

Ladungsträgerstromdichte $\vec{j}_E = \rho_E \cdot \vec{v}_E$ in [A/m²]

Lorentz-Gleichung für das elektromagnetische Feld

$$m_E \cdot \dot{\vec{v}}_E = q_E \cdot (\vec{E} + (\vec{v}_E \times \vec{B})) \quad (0.10)$$

m_E bzw. q_E sind die Masse bzw. die Ladung eines Elektrons. Die Gleichung ist auch als „Kraftgleichung“ oder „Bewegungsgleichung“ im elektromagnetischen Feld bekannt.

Ladungsträgerstromdichtengesetz

$$\vec{j}_E = \rho_E \cdot \vec{v}_E \quad (0.11)$$

Eine Hilfsgleichung, die evtl. einem besseren Verständnis dient.

Die Gleichungen 0.6 – 0.9 sind die $\rightarrow$ **Maxwell-Gleichungen**,
 die Gleichungen 0.6 – 0.10 sind die $\rightarrow$ **Maxwell-Lorentz-Gleichungen**,
 Gleichung 0.11 ist eine Hilfsgleichung.

Bedeutung und Einheiten der Größen:

$$\vec{E} \left[\frac{V}{m} \right] \rightarrow \text{elektrische Feldstärke} \quad \vec{B} \left[\frac{Vs}{m^2} \right] \rightarrow \text{magnetische Flussdichte} \quad (0.12)$$

$$\rho_E \left[\frac{As}{m^3} \right] \rightarrow \text{elektr. Raumladungsdichte} \quad \vec{j}_E \left[\frac{A}{m^2} \right] \rightarrow \text{Ladungsträgerstromdichte} \quad (0.13)$$

$$\vec{v}_E \left[\frac{m}{s} \right] \rightarrow \text{Ladungsträgergeschwindigkeit} \quad (0.14)$$

Zahlenwerte:

$$m_E = 9,1 \cdot 10^{-31} [kg] \quad q_E = 1,6 \cdot 10^{-19} [As] \quad \epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm} \right] \quad (0.15)$$

Wegen der ungeheuren Ähnlichkeit zwischen der Coulombkraft und der Gravitationskraft (siehe Gleichungen 0.4 und 0.5) kann man nun auf die Idee kommen, dass es auch innerhalb von gravitativen Erscheinungen ein ähnliches System von Gleichungen (wie 0.6 - 0.11) geben sollte.

Die Ähnlichkeit zwischen der Coulombkraft und der Gravitationskraft war bereits Maxwell im Rahmen der Formulierung seines Gleichungssystems [1] im Jahr 1865 aufgefallen, er hat jedoch Abstand davon genommen, entsprechende Gleichungen innerhalb der Gravitation zu formulieren.

Auch Oliver Heaviside, dem wir die heutige Form der Maxwell-Gleichungen verdanken, dachte in diese Richtung [2] im Jahr 1893, gab jedoch mit den Worten auf, er sei nicht glücklich über seine Theorie.

Es soll an dieser Stelle ein System von Differentialgleichungen vorgestellt werden, das es erlaubt, Gravitation ähnlich zu formulieren, wie die Maxwell-Lorentz-Gleichungen den Elektromagnetismus beschreiben. Dabei geht es in diesem Artikel nicht darum, das Gleichungssystem abzuleiten, sondern die einzelnen Ergebnisse zu diskutieren und auf Sinnfälligkeit zu testen.

Das hier vorgestellte Differentialgleichungssystem wird in diesem Artikel als
Gravitatives Maxwell-Lorentz-Gleichungssystem (GEM)
bezeichnet.

Auf der folgenden Seite sind die Gleichungssysteme des Elektromagnetismus (EM) und die des Gravitoelektromagnetismus (GEM) gegenüber gestellt.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass „gravitoelektrisch“ nichts mit Elektrizität zu tun hat und „gravitomagnetisch“ nichts mit Magnetismus!!! Aus diesem Grund werden in der Literatur mitunter auch die Bezeichnungen „gravitostatisch“ statt „gravitoelektrisch“ verwendet und „gravitodynamisch“ statt „gravitomagnetisch“.

Elektromagnetischer Fall (EM)	Bezeichnung	Gravitoelektromagnetischer Fall (GEM)
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_E}{\epsilon_0}$ $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $c^2 \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \vec{j}_E$ $m_E \cdot \dot{\vec{v}}_E = q_E \cdot (\vec{E} + (\vec{v}_E \times \vec{B}))$ $\vec{j}_E = \rho_E \cdot \vec{v}_E$	Gauss'sches Gesetz E Gleichung [EM.1 bzw. GEM.1] Gauss'sches Gesetz M Gleichung [EM.2 bzw. GEM.2] Faraday'sches Induktionsgesetz Gleichung [EM.3 bzw. GEM.3] Ampère'sches Durchflutungsgesetz Gleichung [EM.4 bzw. GEM.4] Lorentz-Gleichung Gleichung [EM.5 bzw. GEM.5] Stromdichtegesetz Gleichung [EM.6 bzw. GEM.6]	$\operatorname{div} \vec{G} = -\frac{\rho_G}{\gamma_0}$ $\operatorname{div} \vec{N} = 0$ $\operatorname{rot} \vec{G} = +\dot{\vec{N}}$ $c^2 \cdot \operatorname{rot} \vec{N} = \dot{\vec{G}} - \frac{1}{\gamma_0} \cdot (\vec{j}_G + \epsilon_0 \cdot (\vec{E} \times \vec{B}))$ $\dot{\vec{v}}_G = \vec{G} - (\vec{v}_G \times \vec{N})$ $\vec{j}_G = \rho_G \cdot \vec{v}_G$
Elektrische Feldstärke $\vec{E} \left[\frac{V}{m} \right]$ Elektrische Flussdichte $\vec{D} \left[\frac{As}{m^2} \right]$ Magnetische Feldstärke $\vec{H} \left[\frac{A}{m} \right]$ Magnetische Flussdichte $\vec{B} \left[\frac{Vs}{m^2} \right]$ Elektrische Raumladungsdichte $\rho_E \left[\frac{As}{m^3} \right]$ Ladungsträgerstromdichte $\vec{j}_E \left[\frac{A}{m^2} \right]$ Elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm} \right]$	Bezeichnung der Gleichungen: Dieser Konvention zufolge lautet Gleichung (EM.3) z.B.: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ und Gleichung (GEM.5) z.B.: $\dot{\vec{v}}_G = \vec{G} - (\vec{v}_G \times \vec{N})$ und Gleichung (EM.5) z.B.: $m_E \cdot \dot{\vec{v}}_E = q_E \cdot (\vec{E} + (\vec{v}_E \times \vec{B}))$ Leistungsdichten (Poynting-Vektoren) Elektromagnetischer Fall: $\vec{S}_E = \vec{E} \times \vec{H}$ Gravitativer Fall: $\vec{S}_G = \vec{G} \times \vec{M}$ Im Vakuum gilt: $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ $\vec{A} = \gamma_0 \cdot \vec{G} \quad \vec{N} = \phi_0 \cdot \vec{M}$ $c^2 \cdot \mu_0 \cdot \epsilon_0 = c^2 \cdot \gamma_0 \cdot \phi_0 = 1$	Gravitoelektrische Feldstärke $\vec{G} \left[\frac{m}{s^2} \right]$ Gravitoelektrische Flussdichte $\vec{A} \left[\frac{kg}{m^2} \right]$ Gravitomagnetische Feldstärke $\vec{M} \left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]$ Gravitomagnetische Flussdichte $\vec{N} \left[\frac{1}{s} \right]$ Massendichte $\rho_G \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ Massenstromdichte $\vec{j}_G \left[\frac{kg}{m^2 \cdot s} \right]$ Gravitative Feldkonstante $\gamma_0 := \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G_N} = 1,1923 \cdot 10^9 \left[\frac{kg \cdot s^2}{m^3} \right]$ (Dabei ist G_N die Newtonsche Gravitationskonstante)

1 Bezeichnungen:

1.1 Was kann man sich unter einer *Gravitoelektrischen Feldstärke* $\vec{G} [\frac{m}{s^2}]$ vorstellen?

Die elektrische Feldstärke $\vec{E} [\frac{V}{m}]$ ist definiert als die auf eine Elementarladung q_E bezogene, gerichtete Kraft, die sich nach der Coulomb'schen Gleichung ergibt, wenn sich eine Elementarladung im Abstand r von einer zweiten Ladung Q befindet. Nach (0.4) folgt damit:

$$\vec{E} = \frac{1}{q_E} \cdot \vec{F}_C = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot q_E} \cdot \frac{q_E \cdot Q}{r^2} \cdot \vec{e}_R = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_R \quad (1.1)$$

Der Ursprung des Einheitsvektors $\vec{e}_R$ liegt dabei im Zentrum der Ladung Q . Ist Q positiv, dann zeigt somit die elektrische Feldstärke bei einer kugelförmigen Ladung nach außen.

Analog dazu definiert man eine gravitoelektrische Feldstärke $\vec{G} [\frac{m}{s^2}]$ als die auf eine Probemasse m bezogene, gerichtete Kraft, die sich nach der Newton-Gleichung ergibt, wenn sich eine Probemasse im Abstand von einer zweiten Masse M befindet. Nach (0.5) folgt damit¹:

$$\vec{G} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}_G = + - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \gamma_0 \cdot m} \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_R = + - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \gamma_0} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_R \quad (1.2)$$

Die gravitoelektrische Feldstärke $\vec{G} [\frac{m}{s^2}]$ ist nichts anderes als die Gravitationsfeldstärke. Der Einheitsvektor $\vec{e}_R$ zeigt dabei vom Mittelpunkt der Masse M nach außen und da die Gewichtskraft in Richtung M wirkt, muss ein negatives Vorzeichen gewählt werden. Demnach gilt:

$$\vec{G} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}_G = - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \gamma_0} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_R \quad (1.3)$$

In der Nähe der Erdoberfläche wird die Gravitationsfeldstärke (gravitoelektrische Feldstärke) als Erdbeschleunigung bezeichnet. In (1.3) wäre dabei M die Masse der Erde und r der Erdradius. Als Zahlenwert ergibt sich 9,81 [m/s²]

¹ Das Vorzeichen sei zunächst nicht bekannt.

1.2 Was kann man sich unter einer *Gravitomagnetischen Flussdichte* $\vec{N}$ [$\frac{1}{s}$] vorstellen?

Hierzu wieder ein Vergleich mit dem Elektromagnetismus: Wie würde man am besten die Frage beantworten, was man sich unter einer *magnetischen Flussdichte* vorstellen kann bzw. wie sich diese in der Praxis bemerkbar macht. Erschwerend soll hier hinzukommen, dass zwar elektrische Felder bekannt sein mögen, magnetische jedoch nicht.

Die magnetische Flussdichte erscheint in 3 der 6 Gleichungen (siehe Seite 5 Elektromagnetischer Fall) zur Beschreibung des Elektromagnetismus:

- (a) Die Lorentz-Gleichung (EM.5) $m_E \cdot \vec{\overset{\circ}{v}}_E = q_E \cdot (\vec{E} + (\vec{v}_E \times \vec{B}))$ sagt aus, dass auf bewegte Ladungen ablenkende Kräfte wirken können – auch wenn gar kein elektrisches Feld vorhanden sein sollte.

Überträgt man dies auf den Gravitoelektromagnetischen Fall (**GEM-Fall**), so würde man die Lorentz-Gleichung (GEM.5) $\vec{\overset{\circ}{v}}_G = \vec{G} - (\vec{v}_G \times \vec{N})$ verwenden **und behaupten, dass auf bewegte Massen ablenkende Kräfte wirken können – auch wenn keine Gravitation vorhanden sein sollte!**

Wird so etwas beobachtet? Womöglich ja, denn:

- Im Rahmen der Besonderheiten der Periheldrehung des Merkur hat man jahrelang nach einem versteckten Planeten gesucht, für den man bereits einen Namen vergeben hatte – dem Vulcan, der sich innerhalb der Merkurbahn befinden sollte. Gefunden wurde dieser Planet nie. Die Besonderheit der Merkurbahn konnte mit Einsteins Relativitätstheorie erklärt werden.
 - Sterne am Rande einer Galaxie bewegen sich schneller als die newtonsche Physik erwarten lässt. Dies wird als Galaxienrotationskurve bezeichnet. Der Verlauf dieser Kurve wird meist mit der Hypothese einer Existenz von Dunkler Materie verknüpft.
- (b) Das Ampère'sches Durchflutungsgesetz (EM.4) $c^2 \cdot \text{rot } \vec{B} = \vec{\overset{\circ}{E}} + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \vec{j}_E$ beschreibt die Erzeugung von magnetischen Flussdichten. Demnach werden sie erzeugt durch *zeitliche Änderungen der elektrischen Feldstärke* und/oder *dem Vorhandensein von Ladungsträgerströmen*. Vereinfachend: Jede Bewegung von Ladungsträgern erzeugt magnetische Flussdichten. Beispiel: Eine von Gleichstrom durchflossene Spule erzeugt eine zeitunabhängige magnetische Flussdichte im Inneren der Spule.

- Überträgt man dies auf den Gravitoelektromagnetischen Fall (**GEM-Fall**), so würde man das Ampère'sches Durchflutungsgesetz (GEM.4) $c^2 \cdot \text{rot } \vec{N} = \vec{\overset{\circ}{G}} - \frac{1}{\gamma_0} \cdot (\vec{j}_G + \epsilon_0 \cdot (\vec{E} \times \vec{B}))$ verwenden **und behaupten, dass gravitomagnetische Flussdichten $\vec{N}$ auf dreierlei Arten erzeugt werden können:**
 - **durch zeitliche Änderungen der Gravitationsfeldstärke und/oder**
 - **durch Massenstromdichten und/oder**
 - **durch elektromagnetische Strahlung**

Demzufolge müsste jede Bahn eines Planeten um einen Stern ein gravitomagnetisches Feld erzeugen und auch jede Rotationsbewegung eines Himmelskörpers um die eigene Achse hätte ein gravitomagnetisches Feld zur Folge.

(c) Das *Faraday'sches Induktionsgesetz* (EM.3) $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ sagt aus, dass elektrische Feldstärken auch ohne Ladung existent sein können – wenn sich die magnetische Flussdichte zeitlich ändert.

Überträgt man dies auf den Gravitoelektromagnetischen Fall (**GEM-Fall**), so würde man das *Faraday'sches Induktionsgesetz* (GEM.3) $\text{rot } \vec{G} = +\dot{\vec{N}}$ verwenden **und behaupten, dass Gravitationsfeldstärken auch ohne Massen existent sein können – wenn sich die gravitomagnetische Flussdichte $\vec{N}$ zeitlich ändert.**

Zweifelsohne sind dies überraschende Folgerungen mit weitreichenden Konsequenzen!

2 Diskussion von Erhaltungssätzen:

Es gibt im Bereich des Elektromagnetismus zwei zentrale Erhaltungssätze: den Ladungserhaltungssatz und den Energieerhaltungssatz.

Im Bereich der Gravitation ist der Energieerhaltungssatz von zentraler Bedeutung. Daneben gibt es noch den Massenerhaltungssatz, der fordert, dass Masse nicht einfach verschwinden kann – hier hilft das Äquivalenzgesetz von Masse und Energie weiter.

Nun sind die Erhaltungssätze nicht zusätzliche Forderungen, die über die Maxwell-Lorentz-Gleichungen (egal ob EM oder GEM) hinaus gehen – vielmehr müssen sie aus diesen hervorgehen!

Allerdings benötigt man dazu zwei zentrale Gesetze aus der Mathematik: den Satz von Gauß und den Satz von Stokes:

(a) Der **Satz von Gauß** lautet in allgemeiner Form für ein Vektorfeld $\vec{u}$:

$$\iiint_G (\operatorname{div} \vec{u}) \cdot dV = \oint_{\partial G} \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (2.1)$$

Dabei ist G ein beliebiges räumliches Gebiet mit einer geschlossenen Randfläche ∂G und $d\vec{S}$ ist ein gerichtetes Oberflächenelement der Randfläche. Der Normalenvektor der Randfläche zeige dabei nach außen.

(b) Der **Satz von Stokes** lautet in allgemeiner Form für ein Vektorfeld $\vec{u}$:

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{u}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial \Sigma} \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (2.2)$$

Dabei ist Σ ein beliebiges Flächenstück mit der Randkurve $\partial \Sigma$ und $d\vec{r}$ ist ein gerichteter Streckenabschnitt der Randkurve. Die Randkurve ist dabei so gerichtet, dass bei einer Umrandung entgegen des Uhrzeigersinns das Flächenstück immer links liegt².

Der Ladungserhaltungssatz z.B. ergibt sich dadurch, dass man auf die Gleichung (EM.4) die Divergenz anwendet und anschließend den Satz von Gauß unter Zuhilfenahme von Gleichung (EM.1) verwendet. Der Ladungserhaltungssatz ist damit eine Folge des *Gauss'schen Gesetzes* und des *Ampère'schen Durchflutungsgesetzes*. Mit anderen Worten: Der Ladungserhaltungssatz ist in den Maxwell-Lorentz-Gleichungen bereits enthalten!

Auch der Energieerhaltungssatz des elektromagnetischen Feldes lässt sich (etwas mühsam) aus den Maxwell-Lorentz-Gleichungen ableiten. Diesen separat zu den Maxwell-Lorentz-Gleichungen zu formulieren, ist deshalb nicht nötig.

2 Oder *Rechte-Hand-Regel*: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächennormalen, dann zeigen die Finger die Umrundungsrichtung an. Die Festlegung einer Außenseite ist eine Definition, wichtig ist, dass Flächenrichtung und Umrundungsrichtung zueinander in richtiger Beziehung stehen.

Im Bereich der Gravitation ist deshalb zu fragen, ob denn die Maxwell-Lorentz-Gleichungen im gravitoelektromagnetischen Fall alle Erhaltungssätze erfüllen!

Zunächst aber noch eine Betrachtung des Gravitationsgesetzes von Newton: Genauso wie sich die Formel für die Coulombkraft (0.1) aus den Maxwellgleichungen ableiten lässt, müsste sich auch Newtons Gravitationsgesetz (0.2) aus den Maxwell-Lorentz-Gleichungen herleiten lassen.

Wie bereits in Gleichung (0.2) erwähnt, soll es sich bei dieser Herleitung um kugelsymmetrisch verteilte Massen handeln. Demzufolge ist die spezifische Dichte ρ innerhalb der jeweils betrachteten Kugel konstant.

Wendet man auf Gleichung (GEM.1) den Satz von Gauß an, so erhält man:

$$\iiint_V (\operatorname{div} \vec{G}) \cdot dV = \oint_{\partial V} \vec{G} \cdot d\vec{A} \quad (2.3)$$

Hierbei ist V das Volumen der Massenkugel und $d\vec{A}$ ein gerichtetes Oberflächenelement. Weiterhin ist M die im Volumen V befindliche Masse. Für die linke Seite von (2.3) erhält man dann:

$$\iiint_V (\operatorname{div} \vec{G}) \cdot dV = \iiint_V \left(\frac{-\rho_G}{\gamma_0} \right) \cdot dV = -\frac{1}{\gamma_0} \cdot \rho_G \cdot V = -\frac{M}{\gamma_0} \quad (2.4)$$

Bei der rechten Seite von (2.3) argumentiert man folgendermaßen: Da die Masse M innerhalb des Volumens V gleichmäßig verteilt sein soll, ist $\vec{G}$ von der Lage einer inkrementellen Oberfläche unabhängig und kann somit als Betrag aus dem Integral gezogen werden. Die Richtungen der Gravitationsfeldstärke und der gerichteten Oberflächenelemente sollen dabei gleich sein. Es ergibt sich:

$$\oint_{\partial V} \vec{G} \cdot d\vec{A} = |\vec{G}| \cdot \oint_{\partial V} dA = |\vec{G}| \cdot A = |\vec{G}| \cdot 4 \cdot \pi r^2 \quad (2.5)$$

r sei dabei der Radius der Kugel und $\vec{e}_R$ der Einheitsvektor, dessen Ursprung in Kugelmitte liegt. Damit erhält man folgende Formel für die Gravitationsfeldstärke in Abhängigkeit des Abstandes r vom Kugelmittelpunkt und in Abhängigkeit von der Masse M der Kugel:

$$\vec{G} = -\frac{M}{4 \cdot \pi \cdot \gamma_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_R \quad (2.6)$$

Eine kleine Probemasse m erfährt dadurch nach Newton eine Kraft $\vec{F}_G = m \cdot \vec{G}$

$$\vec{F}_G = -\frac{m \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot \gamma_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_R \quad (2.7)$$

Setzt man hier wieder Gleichung (0.3) ein, so erhält man die bekannte Newtonsche Kraftgleichung mit der Gravitationskonstanten G_N .

$$\vec{F}_G = -G_N \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_R \quad (2.8)$$

Newtons Kraftgleichung entpuppt sich somit als Sonderlösung des Gauss'schen Gesetzes für das gravitoelektrische Feld. Sonderlösung insofern, als bei der Herleitung homogene Körper betrachtet werden und Kräfte auf die Mittelpunkte dieser Körper wirken.

2.1 Der Massenerhaltungssatz:

Zur Herleitung des Massenerhaltungssatzes bemüht man das *Ampère'sches Durchflutungsgesetz* für den GEM-Fall (GEM.4) und bildet davon die Divergenz:

$$\text{div}(c^2 \cdot \text{rot } \vec{N}) = \text{div}(\vec{G} - \frac{1}{\gamma_0} \cdot (\vec{j}_G + \epsilon_0 \cdot (\vec{E} \times \vec{B}))) \quad (2.9)$$

Da die linke Seite von (2.9) Null ist, erhält man unter Verwendung von (GEM.1):

$$\gamma_0 \cdot \text{div}(\vec{G}) = -\dot{\rho}_G = \text{div}(\vec{j}_G) + \text{div}(\epsilon_0 \cdot (\vec{E} \times \vec{B})) \quad (2.10)$$

Mit Verwendung des Poyntingvektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ und der Identität $c^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 = 1$ und einer Betrachtung im Volumen, erhält man:

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_G \cdot dV = \iiint_V \text{div}(\vec{j}_G) \cdot dV + \frac{1}{c^2} \cdot \iiint_V \text{div}(\vec{S}) \cdot dV \quad (2.11)$$

Die linke Seite von (2.11) ist nichts anderes als die negative zeitliche Änderung der im Volumen V befindlichen Masse M. Auf die rechte Seite kann man wieder den Satz von Gauß anwenden:

$$-\dot{M} = \oint_{\partial V} \vec{j}_G \cdot d\vec{F} + \frac{1}{c^2} \cdot \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{F} \quad (2.12)$$

Was sagt nun Gleichung (2.12) aus?

Man betrachte hierzu z.B unsere Sonne mit der Masse M:

- Lässt man zunächst einen Strahlungseinfluss außer Acht, dann kann sich die Sonnenmasse nur ändern, wenn Massenströme zur oder von der Sonne vorhanden sind. Ist etwa ein Massenstrom von der Sonne weg vorhanden (rechte Seite positiv), dann muss die Masse der Sonne zeitlich abnehmen $\rightarrow \odot$
- Die Masse der Sonne kann aber auch zeitlich abnehmen, wenn gar kein Teilchenstrom vorhanden ist, aber Strahlung die Sonne verlässt. Dies entspricht durchaus der Realität, denn bei der in der Sonne stattfindenden Kernfusion wird Wasserstoff in Helium fusioniert. Hierbei ist die resultierende atomare Masse kleiner als die Ausgangsmasse. Die sich hieraus ergebende Differenz wird als elektromagnetische Welle abgestrahlt. Diese Abstrahlung hat mit

den sogenannten „Sonnenwinden“ nichts zu tun! Sonnenwinde sind Teilchenströme und keine elektromagnetischen Wellen.

Also:

Der Massenerhaltungssatz ist in den Maxwell-Lorentz-Gleichungen enthalten – wenn auch sehr versteckt.

2.2 Der Energieerhaltungssatz:

Man ist hier vielleicht zunächst geneigt, sich zu fragen, warum auf den Energieerhaltungssatz separat eingegangen wird, denn im Bereich der Gravitation wird der Energieerhaltungssatz laut ChatGPT folgendermaßen formuliert:

Der Energieerhaltungssatz im Bereich der Gravitation lautet:

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems von Massen, das sich unter dem Einfluss der Gravitation bewegt, bleibt konstant.

Mathematisch ausgedrückt lautet dies:

$$E=T+U$$

wobei:

- E die Gesamtenergie des Systems ist,
- T die kinetische Energie der Massen im System ist,
- U die potenzielle Energie aufgrund der Gravitationskräfte im System ist.

Eine potentielle Energie kann es jedoch nur in einem konservativen Feld geben. Dies ist hier aber definitiv **nicht** der Fall, denn das Faraday'sche Induktionsgesetz (Gleichung GEM.3) sagt:

$\text{rot } \vec{G} = +\vec{\dot{N}}$. Die gravitoelektrische Feldstärke $\vec{G}$ besitzt demnach **kein** Potential und damit gibt es auch **keine** potentielle Energie!

Zur Erinnerung: Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ besitzt auch nur dann ein Potential, wenn es **keine** Änderung der magnetischen Flussdichte gibt. Vergisst man dies bei der einen oder anderen Betrachtung, dann ergeben sich Fehler (z.B. beim Maschensatz, ...).

Und noch etwas Wichtiges in diesem Zusammenhang: Überall steht geschrieben, es gelte die **Wegunabhängigkeit** der geleisteten Arbeit. Das bedeutet: Die Arbeit, die man leisten muss, um einen Probekörper im Gravitationsfeld entlang einer beliebigen Kurve zu bewegen, hängt **nur** vom Anfangs- und Endpunkt ab! **Bei den Maxwell-Lorentz-Gleichungen ist dies nicht mehr der Fall!** Die bei dieser Bewegung verrichtete Arbeit ist sehr wohl auch von der Kurve selbst abhängig und nicht nur vom Anfangs- und Endwert.

Ein gutes Beispiel ist hier der Maschensatz in der Elektrotechnik, der besagt, dass die Summe der Teilspannungen innerhalb einer Masche den Wert Null ergibt. Dies geht direkt auf die Wegunabhängigkeit der elektrischen Arbeit zurück. Wenn allerdings diese besagte Masche von einem zeitlich

sich ändernden magnetischen Feld durchsetzt wird, dann ist die Summe aller in der Masche auftretenden Spannungen eben nicht mehr Null, sondern gerade so groß, wie die durch das Magnetfeld induzierte Spannung in der Masche ist.

Zur Herleitung des Energieerhaltungssatzes im Gravitoelektromagnetismus geht man am besten genauso vor wie im elektromagnetischen Fall:

Der Energieerhaltungssatz geht aus der mit $\rho_G \cdot \vec{v}_G$ multiplizierten Lorentz-Gleichung hervor. Man betrachtet hierzu die Leistungsdichte:

$$\frac{d^4 W}{dV \cdot dt} = \rho_G \cdot \vec{v}_G \cdot \dot{\vec{v}}_G = \rho_G \cdot \vec{v}_G \cdot \vec{G} - \rho_G \cdot \vec{v}_G \cdot (\vec{v}_G \times \vec{N}) \quad (2.13)$$

Daraus folgt:

$$\frac{d^4 W}{dV \cdot dt} = \vec{j}_G \cdot \dot{\vec{v}}_G = \vec{j}_G \cdot \vec{G} \quad (2.14)$$

Die Massenstromdichte lässt sich aus dem *Ampère'schen Durchflutungsgesetz* ermitteln, man erhält:

$$\vec{j}_G = \gamma_0 \cdot \vec{G} - \frac{1}{\phi_0} \cdot \text{rot } \vec{N} - \frac{1}{c^2} \cdot \vec{S}_E \quad \text{mit } \vec{S}_E = (\vec{E} \times \vec{H}) \quad \text{Poynting-Vektor} \quad (2.15)$$

Eingesetzt in (2.14) erhält man:

$$\frac{d^4 W}{dV \cdot dt} = \vec{j}_G \cdot \dot{\vec{v}}_G = \vec{j}_G \cdot \vec{G} = \gamma_0 \cdot \vec{G} \cdot \vec{G} - \frac{1}{\phi_0} \cdot \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{N} - \frac{1}{c^2} \cdot \vec{G} \cdot \vec{S}_E \quad (2.16)$$

Es gilt ganz allgemein:

$$\vec{G} \cdot \text{rot } \vec{N} = \vec{N} \cdot \text{rot } \vec{G} - \text{div}(\vec{G} \times \vec{N}) = \vec{N} \cdot \text{rot } \vec{G} - \phi_0 \cdot \text{div}(\vec{S}_G) \quad \text{mit } \vec{S}_G = (\vec{G} \times \vec{M}) \text{ gravitativer Poynting-Vektor} \quad (2.17)$$

(2.17) in (2.16) eingesetzt $\rightarrow$

$$\frac{d^4 W}{dV \cdot dt} = \vec{j}_G \cdot \dot{\vec{v}}_G = \vec{j}_G \cdot \vec{G} = \gamma_0 \cdot \vec{G} \cdot \vec{G} - \frac{1}{\phi_0} \cdot (\vec{N} \cdot \text{rot } \vec{G} - \phi_0 \cdot \text{div}(\vec{S}_G)) - \frac{1}{c^2} \cdot \vec{G} \cdot \vec{S}_E \quad (2.18)$$

und mit (GEM.3) und $\vec{N} = \phi_0 \cdot \vec{M} \rightarrow$

$$\frac{d^4 W}{dV \cdot dt} = \vec{j}_G \cdot \dot{\vec{v}}_G = \vec{j}_G \cdot \vec{G} = \gamma_0 \cdot \vec{G} \cdot \vec{G} - \phi_0 \cdot \vec{M} \cdot \dot{\vec{M}} + \text{div}(\vec{S}_G) - \frac{1}{c^2} \cdot \vec{G} \cdot \vec{S}_E \quad (2.19)$$

In Analogie zum elektromagnetischen Feld definiert man:

$$\gamma_0 \cdot \vec{G} \cdot \vec{G} - \phi_0 \cdot \vec{M} \cdot \dot{\vec{M}} =: u_G \quad (2.20)$$

$\dot{u}_G$ ist dabei die Leistungsdichte im gravitoelektromagnetischen Feld. Setzt man (2.20) in (2.19) ein und wählt die integrale Schreibweise für ein Volumen V , dann erhält man den

Leistungserhaltungssatz für den Gravitoelektromagnetismus:

$$\iiint_V \dot{u}_G(t) dV = - \oint_{\partial V} \vec{S}_G \cdot \vec{\partial} \vec{V} + \iiint_V \vec{G} \cdot \left(\vec{j}_G + \frac{1}{c^2} \cdot \vec{S}_E \right) \cdot dV \quad (2.21)$$

Integriert man Gleichung 2.21 über die Zeit, so erhält man den

Energieerhaltungssatz für den Gravitoelektromagnetismus:

$$\int_t \iiint_V \dot{u}_G(t) dV dt = - \int_t \oint_{\partial V} \vec{S}_G \cdot \vec{\partial} \vec{V} dt + \int_t \iiint_V \vec{G} \cdot \left(\vec{j}_G + \frac{1}{c^2} \cdot \vec{S}_E \right) \cdot dV dt \quad (2.22)$$

Der Energieerhaltungssatz ist mit (2.22) deutlich komplizierter als die herkömmliche Aussage, dass „die Summe aus potentieller und kinetischer Energie“ konstant bleiben muss. Aber ist der Satz auch plausibel?

Ohne Berücksichtigung von elektromagnetischer Leistung (also $\vec{S}_E = \vec{0}$) $\rightarrow$

Nimmt die gravitoelektromagnetische Energiedichte zeitlich im Volumen zu (linke Seite positiv) und entspricht die Zunahme nicht dem in die Oberfläche eintretenden gravitoelektromagnetischen Energiefluss, so müssen im Volumeninneren Massen in Gravitationsrichtung bewegt werden, d.h. „es muss potentielle Energie abgebaut werden“.

Mit anderen Worten und als Grenzfälle betrachtet:

- Würde man einen gravitoelektromagnetischen Energiefluss nach außen verhindern (können), so hätte eine Abnahme der in den Feldern gespeicherten gravitoelektromagnetischen Energie im Volumen einen Massenfluss entgegen der Gravitationsrichtung zur Folge, es würde „potentielle Energie erzeugt“ werden.
- Sind keine Massen vorhanden, so entfällt eine Änderung der Lageenergie und damit muss jede zeitliche Abnahme der im Volumen gespeicherten gravitoelektromagnetischen Energie über die Hüllfläche des Volumens nach außen abgegeben werden.
- Wenn die Energiedichte der Felder zeitlich nicht geändert werden kann (linke Seite = 0), so kann eine über die Hüllfläche des Volumens einfallende gravitoelektromagnetische Energie nur über eine entsprechende „Zunahme der potentiellen Energie“ kompensiert werden. D.h.: Massen müssen entgegen der Gravitationsrichtung bewegt werden.

Und mit der Möglichkeit elektromagnetischer Leistung erhält man:

Sollte eine zeitliche Änderung der gespeicherten gravitoelektromagnetischen Energie nicht möglich sein und auch gravitoelektromagnetische Energieflüsse nach außen nicht stattfinden können, so kann auf einfallende Materie nur mit einer elektromagnetischen Abstrahlung nach außen reagiert werden.

2.3 Die Lenzsche Regel:

Die Lenzsche Regel ist eine einfach zu merkende Richtungsangabe im Bereich von elektromagnetischen Feldern und ist nur anzuwenden bei zeitlich sich ändernden magnetischen Feldern. Die „Regel“ ist keine Formel, sondern nur ein Vorzeichen. Man sollte diese Regel nicht überbewerten, sie steht in der Rangfolge mit großem Abstand nicht so weit oben wie die Maxwell-Lorentz-Gleichungen! Die Lenz'sche Regel erweitert auch die Maxwell-Lorentz-Gleichungen nicht – im Gegenteil: sie geht daraus hervor!

Die hier beschriebenen Vorgänge im Zusammenhang mit der Lenzschen Regel mögen banal klingen, da sie mehr als bekannt sind. Aber es geht hier auch darum zu beschreiben, wie sich eine entsprechende Lenz'sche Regel im Bereich der Gravitation zeigen könnte. Dazu muss man erst die Lenz'sche Regel im Bereich des elektromagnetischen Feldes ausreichend verstanden haben.

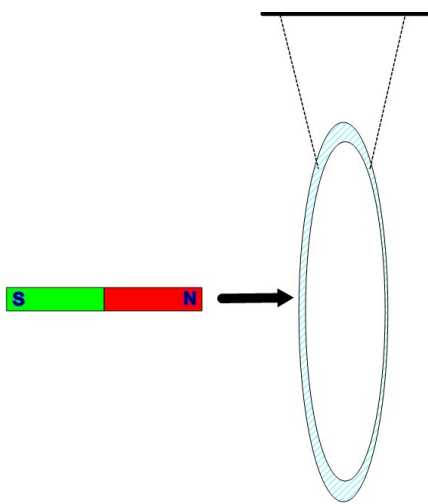


Abbildung 2.1: An zwei dünnen Fäden sei ein elektrisch leitender Draht aufgehängt. Der Draht ist zu einem Kreis geschlossen (das ist wichtig!) und im Sprachgebrauch wird dieser so geformte Draht meist als *Leiterschleife* bezeichnet.

- Im Ruhezustand gibt es keinerlei Änderung an der Anordnung.
- Der Leiterschleife möge sich nun ein Permanentmagnet nähern, was durch den schwarzen Pfeil symbolisiert werden soll. Das magnetische Feld ist dabei laut Konvention nach rechts gerichtet.
- Nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz hat die magnetische Feldänderung Wirbel der elektrischen Feldstärke in der Leiterschleife zur Folge. Vom sich nach vorne bewegenden Magneten aus gesehen, sind die

Wirbel entgegen des Uhrzeigersinns gerichtet.

- Die so gerichtete elektrische Feldstärke hat in dem Leiter einen Stromfluss zur Folge (sofern die Leiterschleife geschlossen ist), dessen technische Stromrichtung in dieselbe Richtung zeigt wie die elektrische Feldstärke – also wieder vom sich bewegenden Magneten aus gesehen: entgegen des Uhrzeigersinns.
- Nach dem Ampère'schen Durchflutungsgesetz hat der Stromfluss in der Leiterschleife magnetische Wirbelfelder um den Draht zur Folge. Diese magnetischen Wirbel sind innerhalb der Leiterschleife nach links gerichtet, außerhalb nach rechts.
- Demzufolge ist das durch die Bewegung des Magneten im Inneren der Leiterschleife erzeugte magnetische Feld dem Feld des Permanentmagneten entgegen gerichtet.
- Bildlich kann man sich das auch so vorstellen, dass im Inneren der Leiterschleife ein „dynamischer“ Permanentmagnet entsteht mit dem Nordpol auf der linken Seite und dem Südpol auf der rechten Seite.
- Da die Leiterschleife beweglich sein möge, wirkt auf sie eine Kraft nach rechts, da sich gleichnamige Pole abstoßen.

Anmerkung: Meist wird in der Literatur darauf hingewiesen, dass die Lenzsche Regel durch das negative Vorzeichen im Faraday'schen Induktionsgesetz repräsentiert wird. Das ist aber eigentlich nicht ganz korrekt, denn es kommt auch auf das Vorzeichen der Stromdichte im Ampère'schen Durchflutungsgesetz an.

Und nun zu einem vergleichbaren Versuch im Rahmen der gravitativen Maxwell-Lorentz-Gleichungen. Die Anordnung ist nur sinnbildlich zu verstehen – es geht bei dieser Überlegung lediglich darum, die gravitative Lenz'sche Regel zu beschreiben.

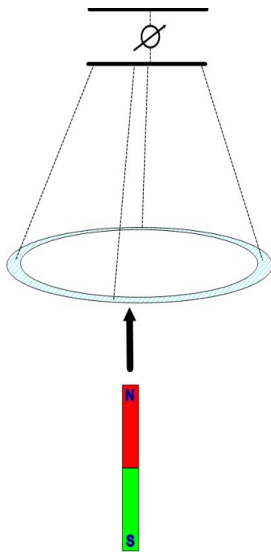


Abbildung 2.2: Der Permanentmagnet aus Abbildung 2.1 wird nun ersetzt durch einen gravitomagnetischen Permanentmagneten (den es wohl nicht gibt...!?).

Die elektrische Leiterschleife ersetzt man durch ein mit Flüssigkeit gefülltes Rohr – anschaulich gesehen einen Gartenschlauch, der mit Wasser gefüllt ist. Genauso, wie die Ladungsträger aus Abbildung 2.1 die Leiterschleife nicht verlassen können, können die Wasserteilchen den Schlauch nicht verlassen.

Der Gartenschlauch ist an einer vertikal beweglichen Platte befestigt und diese wiederum ist über eine Federwaage z.B. an der Decke befestigt.

Im Ruhezustand misst die Federwaage das Gewicht des Gartenschlauches.

Was passiert, wenn man den gravitomagnetischen Permanentmagneten wie im Bild nach oben bewegt?

- Nach dem gravitativen Faraday'schen Induktionsgesetz entstehen im Wasserschlauch Wirbel der gravitativen Feldstärke. Diese sind von unten betrachtet (also von der Position des sich nach oben bewegenden Gravitomagneten aus) im Uhrzeigersinn. Einfacher ist es vielleicht, den Gartenschlauch von oben zu betrachten: Dann sind die Wirbel der gravitativen Feldstärke entgegen des Uhrzeigersinns.
- Auf jedes Wasserteilchen im Wasserschlauch wirkt nun eine Gravitationskraft entlang dieser Gravitationswirbel, d.h. das im Schlauch befindliche Wasser beginnt, sich entgegen des Uhrzeigersinns zu drehen (wenn man den Wasserschlauch von oben betrachtet).
- Das gravitative Ampère'schen Durchflutungsgesetz sorgt nun dafür, dass um den Wasserschlauch herum Wirbel der gravitomagnetischen Flussdichte entstehen. Diese Flussdichte zeigt im inneren des Wasserschlauches nach unten, im äußeren nach oben.
- Genau das ist aber die Lenz'sche Regel: Das sich durch den Gravitomagneten nach oben ändernde Gravitomagnetfeld erzeugt im Inneren des Gartenschlauches ein Gravitomagnetfeld, das der Änderung entgegen wirkt. Die Lenz'sche Regel ist also bestätigt!
- Und wofür nun die Federwaage? Im Gartenschlauch wird ein Gravitomagnetfeld erzeugt, dessen Feldrichtung der des gravitativen Permanentmagneten entgegen gerichtet ist. Umgangssprachlich: Bei dem erzeugten Magnetfeld zeigt der Nordpol nach unten. Die beiden Pole stoßen sich ab und es entsteht eine Kraft nach oben auf den Gartenschlauch. Das heißt: Der Schlauch wird leichter!

Übrigens sieht man bei diesem Beispiel sehr deutlich, dass in der Tat die Wegunabhängigkeit der Arbeit nicht mehr gegeben ist (siehe Hinweis Seite 12):

- Ohne die Bewegung des gravitativen Permanentmagneten muss man für die Umrundung eines Wasserteilchens im Gartenschlauch weder Energie aufwenden, noch gewinnt man dabei Energie. Auch die Wegrichtung ist belanglos. Die Wegunabhängigkeit ist also gegeben!
- Wird der gravitative Permanentmagnet jedoch wie in Abbildung 2.2 von unten nach oben bewegt, so würde ein Wasserteilchen auf dem Weg um den Gartenschlauch im einen Fall (je nach Richtung) Energie aufnehmen, im anderen Fall müsste man für den Transport Energie aufbringen. Die Wegunabhängigkeit wäre also nicht mehr gegeben!

3 Was haben die gravitativen Maxwell-Lorentz-Gleichungen mit den Saturnringen zu tun?

Die Ringe des Saturn sind mit einer Dicke zwischen 10 und 100 Metern bei einem Durchmesser von fast einer Million Kilometern extrem dünn. Sie liegen genau in der Äquatorebene des Saturn und werfen einen sichtbaren Schatten auf ihn – wie auch umgekehrt der Saturn auf seine Ringe.

(https://de.wikipedia.org/wiki/Ringe_des_Saturn#)

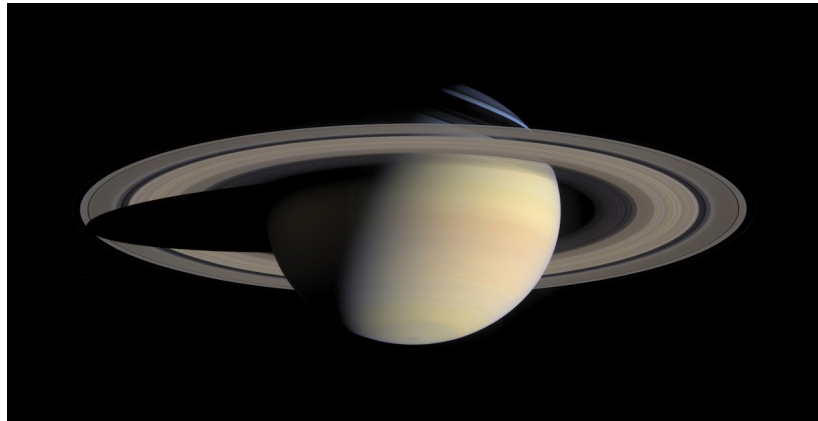


Abbildung 3.1: Saturn und Ringe mit gegenseitigem Schattenwurf (Cassini, 2004). Von NASA/JPL/Space Science Institute - JPL Photojournal (image link), Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1756414>

Es gibt verschiedene Theorien über die unglaublich geringe Dicke dieser Saturnringe.

Hier eine neue Theorie:

Die Ringe setzen sich zusammen aus einzelnen Partikeln, für die das Kreuzprodukt aus Bahngeschwindigkeit und gravitomagnetischer Flussdichte in Gravitationsrichtung zeigt. Dies gilt für prograde Ringe, bei retrograden Ringen wäre es die negative Gravitationsrichtung. Prograde Ringe sind zeitlich stabil, retrograde Ringe sind labil.....

Hintergrund sind die Auswirkungen der gravitativen Maxwell-Lorentz-Gleichungen.

Bildung von Gravitomagnetfeldern um rotierende Massen:

Eine im Studium der Theoretischen Elektrotechnik (bei Assistenten) beliebte Fragestellung ist die, ob eine rotierende, elektrisch geladene Kugel ein Magnetfeld erzeugt. Die Antwort lautet JA, die Herleitung ist jedoch nicht ganz „trivial“. Man kann sich die Frage nach dem *warum* und *wie* dennoch relativ leicht beantworten:

Nehmen wir an, die Kugel wäre negativ geladen, dann würden sich die überschüssigen Elektronen aus Gründen der gegenseitigen Abstoßung gleichmäßig auf die Kugeloberfläche verteilen, die sie natürlich nicht verlassen können. Dreht man nun die Kugel, so ist eine Drehachse vorhanden und

diejenige Ebene entlang der Drehachse, auf der die Drehachse senkrecht steht und die größte Fläche aufweist, nenne ich Äquatorebene. Auf der Äquatorebene befinden sich natürlich freie Elektronen und vom Mittelpunkt der Kugel aus betrachtet drehen sich diese Elektronen kreisförmig um den Mittelpunkt. Dies gilt auch für jede zur Äquatorebene parallele Ebene (Stichwort Breitengrad) innerhalb der Kugel. Der Kugelmittelpunkt ist demzufolge von einzelnen Leiterschleifen umgeben, die alle parallel zur Äquatorebene liegen.



Abbildung 3.2: Eine sich drehende geladene Kugel erzeugt ein Magnetfeld B . Ebenso erzeugt eine sich drehende Masse ein Gravitomagnetfeld N . Das Feldlinienbild ist qualitativ zu verstehen. Zur Bestimmung der Feldrichtung kann in beiden Fällen die linke-Faust-Regel verwendet werden.

Das Feldlinienbild sieht dann ähnlich aus, wie das der Abbildung 3.2 (links), nur werden die Feldlinien an den beiden Polen etwas kompakter ausfallen, da durch die Drehung auch die polnahen Bereiche ihren Beitrag leisten und der Radius dieser polnahen Leiterschleifen ist kleiner als der der äquaturnahen Leiterschleifen. Auch sind die Ströme der einzelnen Ebenen parallel zueinander, was eine Art Verschmelzung der Feldlinien zur Folge hat. Insgesamt kann man sich das Feldlinienbild vorstellen, wie das einer Spule, dessen innerer Bereich aufgebläht wurde.

Wenn aber eine sich drehende, geladene Kugel ein Magnetfeld hervorruft, dann muss auch eine sich drehende Masse ein Gravitomagnetfeld erzeugen.

Abbildung 3.2 zeigt das jeweils entstehende Feldlinienbild qualitativ. In der Realität dürften sich die beiden Feldlinienbilder deutlich unterscheiden, denn im Falle der geladenen Kugel tragen nur Elektronen auf der Kugeloberfläche zur Feldbildung bei, im Falle der massebehafteten Kugel jedoch sind auch alle Massenanteile im Inneren beteiligt.

Natürlich wäre es nun hervorragend, wenn man einen gravitomagnetischen Permanentmagneten zur Verfügung hätte. Dann könnte man das gravitomagnetische Feld der Erde ähnlich vermessen wie das bekannte Magnetfeld der Erde. Leider gibt es so etwas nicht.

Im weiteren Verlauf dieses Beitrages kann man oft Parallelen zum bekannten Magnetfeld der Erde ziehen. Was beschrieben wird, hat jedoch überhaupt nichts mit diesem Magnetfeld zu tun, aber die Feldlinienbilder ähneln sich.

Das Magnetfeld der Erde kann man sich (sehr vereinfacht) vorstellen als ein von einem im Inneren der Erde vorhandenen Permanentmagneten hervorgerufenen Feld. Eine Besonderheit besteht darin, dass die Erdachse und die Achse des Permanentmagneten nicht identisch sind, aber das ist für die Erklärung hier irrelevant.

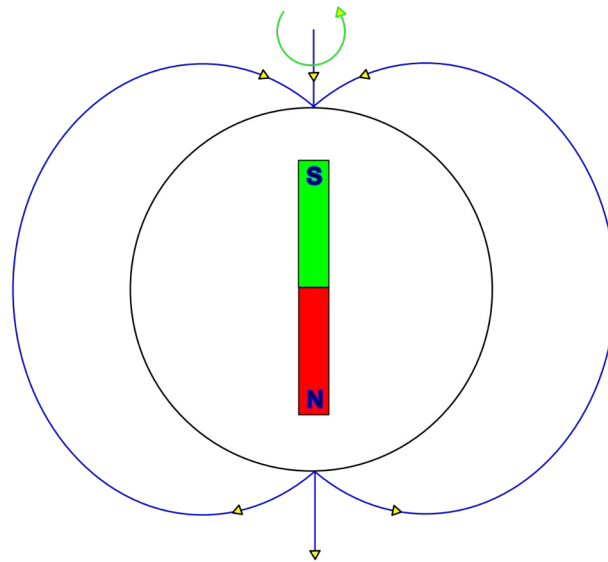


Abbildung 3.3.: Ein in der Kugel imaginär untergebrachter Permanentmagnet liefert ein ähnliches Feldlinienbild wie in Abbildung 3.2. Im einen Fall wäre das ein (bekannter) Permanentmagnet, im anderen Fall ein (unbekannter) Gravito-Permanentmagnet.

Das durch diesen gedachten Permanentmagneten verursachte Feldlinienbild ist mit den Feldlinienbildern aus Abbildung 3.2 sehr ähnlich, obwohl die Entstehungsweise sehr unterschiedlich ist und z.T. auch unterschiedliche physikalische Größen dahinter stecken.

Die bildhafte Vorstellung eines Permanentmagneten erleichtert oft das physikalische Verständnis, insbesondere wenn es um die Überlagerung verschiedener Feldlinienbilder geht. Auch Kraftwirkungen sind mit dieser Modellvorstellung mitunter leichter nachzuvollziehen.

Gravitomagnetfelder und Planetenringe:

In vorigen Abschnitt wurde verdeutlicht, dass sich drehende Massen (z.B. Saturn) Gravitomagnetfelder erzeugen. Hat sich – aus welchen Gründen auch immer – um einen Planeten ein Materiering gebildet, so erzeugt auch dieser Ring ein Gravitomagnetfeld, genauso, wie eine stromdurchflossene Leiterschleife ein Magnetfeld erzeugt.

Die Frage ist nun: wie passen die so erzeugten Felder ineinander?

Man kann sich das Ganze auch so vorstellen, dass eine geladene, sich drehende Kugel von einer stromdurchflossenen Leiterschleife umgeben ist. Wie wirkt sich in einem solchen Fall die Stromrichtung auf eine eventuelle Drehung (Kippen) der Leiterschleife aus?

Zur Vereinfachung denke man sich die Leiterschleife durch eine elektrische Spule ersetzt und die sich drehende, geladene Kugel durch einen Permanentmagneten. Dann ist die Frage die, wie sich ein Permanentmagnet in einer elektrischen, stromdurchflossenen Spule verhält. Dies soll Abbildung 3.4 verdeutlichen.

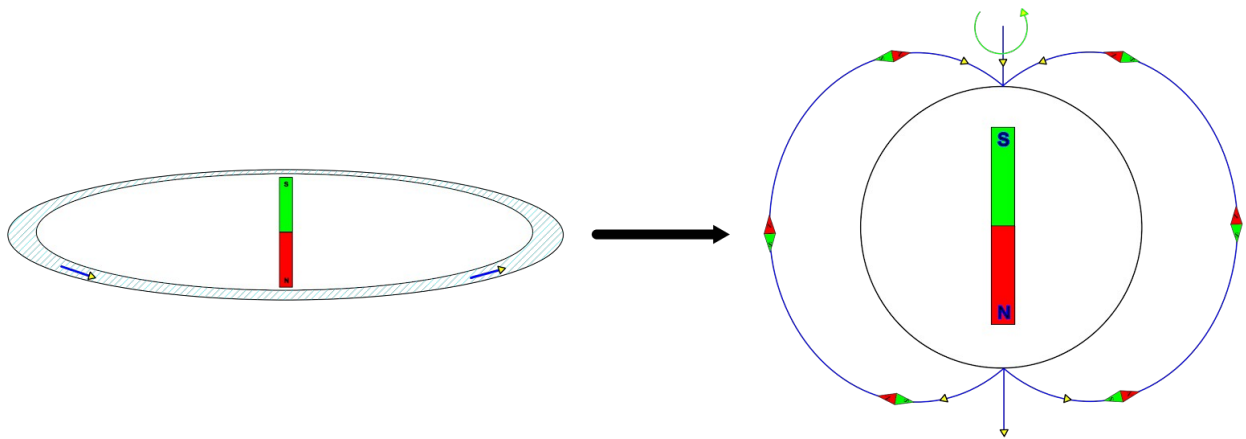


Abbildung 3.4: Links im Bild sei einer der Saturnringe inkl. seiner Drehrichtung zu sehen. Die Bewegung erzeugt ein Gravitomagnetfeld, das durch die symbolhafte Darstellung eines Gravito-Permanentmagneten im Zentrum verdeutlicht werden soll. Der schwarze Pfeil soll andeuten, dass man diesen Ring nun um Saturn legen möchte. Dies erweckt zunächst den Eindruck, dass die Ringbahn instabil wäre, also kippen müsste, da sich die beiden gedachten Gravito-Permanentmagnete abstoßen würden. Dies ist jedoch ein Trugschluss, wie Abbildung 3.5 verdeutlicht.

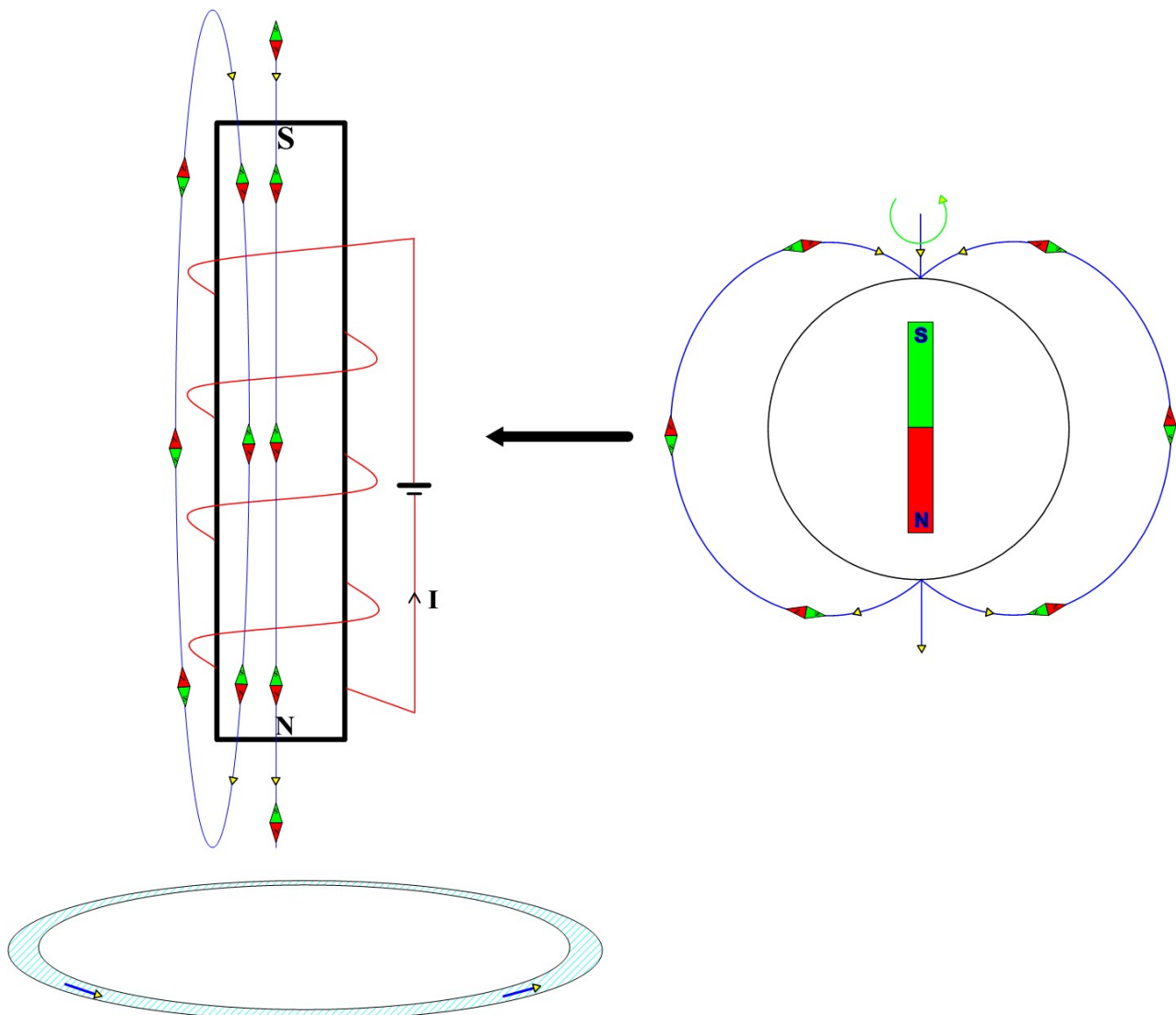


Abbildung 3.5: Links unten ist wieder ein Saturnring zu sehen. Die Analogie zum erzeugten Gravitomagnetfeld dieses Ringes ist in einem Magnetfeld zu sehen, das von einer Spule erzeugt wird (siehe Darstellung oberhalb des Ringes). Im Inneren der Spule ist ein Teil des erzeugten Magnetfeldes zu sehen, ein Kompass würde in die eingezeichnete Richtung weisen. Der schwarze Pfeil soll andeuten, dass man nun den Saturn mit einem gedachten Magnetfeld in die Spule bringt. Lässt man nun Trägheitskräfte, Massen, usw. außer acht, dann würde sich der Saturn verhalten wie ein Kompass, er richtet sich nach dem eingebauten Feld der Spule aus. Eine Drehung dieses Kompasses aus der Feldrichtung bewirkt eine rückstellende Kraft. Berücksichtigt man nun die völlig unterschiedlichen Massen des Saturn und die eines Ringes, so wird folgendes klar: Das Feld des Ringes und des Saturn passen ideal zusammen und sobald dies nicht mehr der Fall wäre, so würde auf den Ring eine rückstellende Kraft wirken. Demnach kann sich der Ring nur in der Äquatorebene befinden und nur dort ist ein Ring stabil. Liegt die Drehachse eines Planeten z.B. im Orbit und hat dieser Planet Ringe, so liegen diese Ringe nicht in der Ebene des Orbits, sondern in der Äquatorebene des Planeten. Genau so ist es bei Uranus.

Das Ergebnis ist:

1. Es gibt nur dann eine stabile Lage für den Permanentmagneten, wenn er genauso ausgerichtet ist wie das Feld der Spule. In diesem Fall wirkt auf den Permanentmagneten keine Kraft und falls sich der Permanentmagnet nur minimal aus dieser Position dreht, so stellt sich eine rückstellende Kraft ein.
2. Ist der Permanentmagnet genau entgegen der Feldrichtung der Spule ausgerichtet, so bleibt der Permanentmagnet zwar auch kräftefrei (keine Tendenz zur Drehung), aber jede kleine Auslenkung würde ihn zu einer 180° Drehung veranlassen.
3. Jede andere Lage des Permanentmagneten verursacht ein Drehmoment und führt damit zu einer Ausrichtung – genau so, wie das jeder Kompass macht.

Entscheidend ist:

Wenn sich aus irgendwelchen Gründen der Permanentmagnet nicht drehen kann, so dreht sich die Spule.

Auf die Planetenringe bezogen bedeutet das wegen der ganz unterschiedlichen Massen, dass sich ein Ring nur in der Äquatorebene stabil halten kann. Sobald der Ring auch nur wenig aus dieser Ebene dreht, wirkt eine rückstellende Kraft.

Zur Information: In unserem Sonnensystem haben alle äußeren Planeten Ringe. Als weiteres Merkmal besitzen alle diese Planeten eine Eigenrotationsperiode unter 24h. Würde man Pluto als äußersten Planeten akzeptieren, so zeigt er eine Rotationsperiode von etwa 6,4 Tagen und er besitzt KEINE Ringe. Vermutlich entscheidend für eine Ringbildung ist demnach eine hohe Eigenrotation. Bestes Beispiel hierzu: Der Zwergplanet *HAUMEA*, der sich alle vier Stunden um sich selbst dreht und trotz geringer Masse ebenfalls Ringe besitzt.

Literatur

- [1] J. C. MAXWELL, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, Philosophical Transactions, Volume 155, 01.01.1865. Hier speziell ab Seite 492 „Note on the Attraction of Gravitation“
- [2] Oliver HEAVISIDE, A GRAVITATIONAL AND ELECTROMAGNETIC ANALOGY, Part I, The Electrician, 31, 281-282 (1893)