

Les matrices périennes ordinaires

Sous-titre : Lien avec le problème des trois générations de particules.

©Thierry PERIAT

4 octobre 2025

The belief that one may unify physics, especially the theories concerning electromagnetism and gravitation, motivated me to propose ideas in 2003. I reanalyse the way of thinking which has been introduced in the initial document because it is in fact at the origin of the so-called (E) question. The search for answers to this question has allowed the development of diverse methods explaining how to divide (decompose) deformed cross products. It turns out that the kerns of the main parts of the decompositions have remarkable properties. Some of them are very useful in particle physics. This is what this document demonstrates since it succeeds in proving a link between a specific set of ordinary perian matrices and the mass-matrices proposed twenty-five years ago by theoreticians. The approach I have developed over the past quarter century therefore provides an algebraic and geometric explanation for matrices which were until now only resulting from the application of the inner logic of particle physics. It perhaps helps to give particles a more concrete face.

Key words : Matrices, determinants, polynomial forms of degree three, masses, generations.

Ma croyance en la possibilité d'unifier les théories de l'électromagnétisme et de la gravitation m'avait motivé à présenter quelques idées en 2003. Je reviens ici sur le raisonnement sous-jacent au document initial parce que c'est lui qui a justifié la naissance de la question dite (E). La recherche de réponse à cette question a permis le développement de méthodes mathématiques qui toutes avaient l'espoir de généraliser la formule initiale. L'étude répétée et approfondie des réponses apportées montre que les noyaux des parties principales des décompositions des produits vectoriels déformés ont des propriétés mathématiques remarquables et utilisables en physique. C'est bien ce que ce document finit par démontrer puisqu'il établit enfin un lien clair entre un ensemble particulier de matrices périennes ordinaires et les matrices des masses proposées il y a maintenant plus de vingt-cinq ans par théoriciens de la physique. L'approche que j'ai développé au cours du quart de siècle passé fournit donc une explication algébrique et géométrique à des matrices qui résultaient jusque-là de la logique interne du modèle standard des particules. Elle contribue ainsi à leur donner un visage plus concret.

Mots-clés : Matrices, déterminants, polynômes de degré trois, masses, générations.

©Thierry PERIAT : Le problème des trois générations - Le lien avec les matrices périennes ordinaires.

Table des matières

1	Motivations	3
1.1	Est-il possible de réunir l'électromagnétisme et la gravitation au sein d'une théorie cohérente ?	3
1.2	Les prémisses d'une question mathématique apparemment anodine	3
1.3	La question a-t-elle un lien avec la notion de torsion ?	5
1.4	La recherche des solutions dans les espaces de dimension entière égale ou supérieure à deux	7
1.5	La recherche d'une interprétation physique pour les réponses données en dimension trois à la question (E)	8
2	Les matrices périennes	9
2.1	Données élémentaires	9
2.2	Quelques règles utiles	10
3	La méthode de Tartaglia-Cardan	11
3.1	Geronimo (ou Gerolamo) Cardano.	11
3.2	Niccolo Fontana dit Tartaglia (celui qui bégaye).	12
3.3	Domaine d'application de la méthode de Tartaglia-Cardan	12
3.4	Exposé de la méthode de Tartaglia et Cardan	13
3.5	Application : les racines du déterminant d'une matrice noyaux-compatible	20
4	L'élément de longueur riemannien revisité	24
4.1	La troisième voie	24
4.2	Principes de l'analyse de l'élément de longueur riemannien	25
4.3	Les spécificités de l'analyse algébrique	25
4.4	L'élément de longueur riemannien en ambiance euclidienne	27
4.5	Retour sur la démonstration initiale	43
4.6	Structure mathématique des matrices périennes ordinaires	47
4.7	Sur l'injectivité des fonctions $f_{\mathbf{b}}$	49
4.8	Conclusion	53
5	Annexes	53
5.1	Calcul du déterminant d'une matrice noyaux-compatible	53
5.2	Déterminant des noyaux	55
5.3	Les coefficients de degré un en ambiance pré-euclidienne	55
5.4	Les coefficients de degré deux en ambiance pré-euclidienne	56
5.5	L'inverse des Hessiennes en ambiance pré-euclidienne non-dégénérée	58
5.6	Les matrices périennes ordinaires liées à un phénomène de type Thirring-Lense	59

6	Bibliographie	60
6.1	Travaux personnels	60
6.2	Articles, Cours et Livres	61

1 Motivations

1.1 Est-il possible de réunir l'électromagnétisme et la gravitation au sein d'une théorie cohérente ?

Nous entreprenons énormément d'actions au cours de la vie dont il n'est jamais certain qu'elles aboutissent à un résultat concret et utilisable par les autres. Elles trahissent notre activité cérébrale et les schémas logiques ou psychologiques qui la guident. L'histoire de cette théorie, comme toutes les autres, a son origine dans les méandres de mon passé, familial, scolaire et sociétal.

Il y a en physique deux grandes familles de convictions. Celle qui consiste à croire que les événements observables ont tous au moins un lien en commun ; l'autre se contente de les classer en catégories tout en réservant son point de vue sur l'existence éventuelle d'un plus petit dénominateur commun entre ces catégories. Les tenants de la première ont en eux une affinité pour le divin tandis que les porteurs de la seconde se rangent volontiers et sans honte dans le camp des pragmatiques. Mon père appartenait à la seconde. Je pense appartenir à la première.

L'attitude vis-à-vis de cette dialectique a son importance parce qu'elle peut déterminer une stratégie lorsqu'il s'agit de discuter de phénomènes réels et de tenter un pas de plus dans la compréhension du hiatus séparant la théorie de l'électromagnétisme de celle de la gravitation. Une aventure personnelle m'a permis de débiter ce long et difficile chemin allant de la croyance infondée à une bribe de raison grâce à l'acquisition progressive des outils scientifiques indispensables.

1.2 Les prémisses d'une question mathématique apparemment anodine

En 2003, j'ai présenté mes premières réflexions sur la notion de vide et sur les courants énergétiques les parcourant ; une partie d'entre elles sont actuellement visibles dans [a]. Ce travail imparfait redémontrait un résultat bien connu basé sur le fait incontesté que les ondes électromagnétiques circulant dans ces régions majoritairement dépourvues de matière sont légèrement polarisées. Mais et surtout, il introduisait de manière subliminale un problème mathématique en apparence anodin dont l'étude allait m'occuper jusqu'à ce jour.

Le travail débute avec la densité volumique d'énergie électromagnétique ρ_{EM} et

redémontre avec elle l'existence d'un flux préservé dans l'espace-temps :

$${}^{(3)}\mathbf{J} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge {}^{(3)}\mathbf{B})}_{= {}^{(3)}\mathbf{S} : \text{vecteur de Poynting}} + \frac{1}{\mu_0} \cdot \underbrace{\mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}({}^{(3)}\mathbf{Y})}_{\text{constante vectorielle d-integration}}$$

Puis, après quelques manipulations, la démarche aboutit à la formule majeure de la première partie de ce travail :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot {}^{(3)}\mathbf{J})}{\partial t} \right\rangle > \\ & = \\ & \underbrace{\epsilon_0 \cdot T_2(\partial_{\mathbf{r}}, {}^{(3)}\mathbf{E}) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{E}\rangle + \frac{1}{\mu_0} \cdot T_2(\partial_{\mathbf{r}}, {}^{(3)}\mathbf{B}) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{B}\rangle}_{\text{polarisation electromagnetique naturelle dans le vide}} \\ & \quad - \underbrace{|\mathbf{Grad}_{\mathbf{r}}\rho_{EM}\rangle}_{\text{variation de la densite volumique d'energie electromagnetique}} \\ & \quad + \underbrace{\left| \frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}({}^{(3)}\mathbf{Y}))}{\partial t} \right\rangle}_{\text{terme inconnu}} > \end{aligned}$$

Elle s'obtient en se servant de deux isomorphismes bien connus. Le premier lie les éléments des espaces vectoriels de dimension entière finie D ($= 1, 2, \dots$) bâties sur un corps K et leurs représentations duales dans K^D . Il est en particulier effectif lorsque $D = 3$. Le second relie les représentations duales des vecteurs de l'espace $E(3, K)$ dans K^3 à l'ensemble des matrices représentant des rotations axiales autour de ces vecteurs. Concrètement, elle était obtenue en posant systématiquement :

$${}^{(3)}\mathbf{X} \wedge {}^{(3)}\mathbf{Y} \rightarrow |{}^{(3)}\mathbf{X} \wedge {}^{(3)}\mathbf{Y}\rangle \rightarrow \Phi({}^{(3)}\mathbf{X}) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{Y}\rangle$$

Ce qui revenait effectivement à faire appel à :

$$\forall {}^{(3)}\mathbf{X} \in E(3, \mathbb{R}) \rightarrow |{}^{(3)}\mathbf{X}\rangle \in \mathbb{R} \rightarrow \Phi({}^{(3)}\mathbf{X}) \in SO(3) \subset M(3, \mathbb{R})$$

... et les propos précédents s'appliquaient au champ électrique ${}^{(3)}\mathbf{E}$ ainsi qu'au champ magnétique ${}^{(3)}\mathbf{B}$ au sein d'une manipulation aisée des équations de l'électromagnétisme énoncées par J.C. Maxwell [01] pour les régions vides d'un espace-temps du type $1 + 3$.

La manière dont j'avais obtenu ma première formule et le fait qu'elle soit réaliste ont induit un questionnement somme toute assez simple : « Qu'aurais-je obtenu si les décompositions des produits vectoriels impliqués dans la théorie de l'électromagnétisme n'avaient pas été triviales ? » La question consistait à se demander si oui ou non, et - si oui- quand il était possible, voire nécessaire de poser :

$${}^{(3)}\mathbf{X} \wedge {}^{(3)}\mathbf{Y} \rightarrow |{}^{(3)}\mathbf{X} \wedge {}^{(3)}\mathbf{Y}\rangle \rightarrow [N] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{Y}\rangle + |{}^{(3)}\mathbf{Z}\rangle$$

Une version intuitive de la Question (E) était posée. La recherche de réponses et le recensement des conséquences de celles-ci anime une quête qui perdure jusqu'à aujourd'hui, en particulier dans ce document.

1.3 La question a-t-elle un lien avec la notion de torsion ?

Le formalisme de cet énoncé suffit à évoquer la notion de torsion (translation plus rotation et vis-versa) ; elle en est d'ailleurs la motivation première. Un parcours universitaire montre d'ailleurs que les torsions survenant dans un espace de dimension quatre jouent un rôle primordial en physique mathématique, notamment au travers des transformations de Lorentz. Pour autant, les réponses apportées à la question (E) montrent qu'il serait erroné d'en limiter la portée à ce seul domaine des mathématiques et je vais expliquer ou rappeler pourquoi.

A) Tout d'abord, l'énoncé le plus simple de la question (E) peut être généralisé aux espaces vectoriels de dimension entière et finie D supérieure ou égale à deux à condition de définir les notions de produits tensoriels déformés, de produits alterné déformés et de produits de Lie déformés. Elles sont d'ailleurs liées entre elles comme le montre les définitions introduites dans [b].

B) Ensuite, même en restant dans un espace de dimension trois, le fait de poser plus généralement :

$$|[(^{(3)}\mathbf{X} \wedge ^{(3)}\mathbf{Y})]_{[A]} > = [P] \cdot |^{(3)}\mathbf{Y} > + |^{(3)}\mathbf{Z} > \in \mathbb{C}^3$$

... implique obligatoirement l'existence d'une forme polynomiale, notée conventionnellement $\Lambda(^{(3)}\mathbf{X})$, de degré deux écrite en fonction des trois composantes (éventuellement complexes) du premier argument figurant dans le produit vectoriel déformé, ici le vecteur $\mathbf{X}$ (Il sera génériquement dénommé **le projectile**) :

$$Decomposition \Rightarrow \exists \Lambda(^{(3)}\mathbf{X}) = \sum_a \sum_b d_{ab} \cdot X^a \cdot X^b + \sum_a d_a \cdot X^a + d$$

Un raisonnement exposé dans [b] démontre que la partie principale se décompose systématiquement en un produit de trois matrices :

$$[P]_{|A|} = |A| \cdot \{[A]^t \cdot [J]\} \cdot [N_{\Lambda}^{|A|}], |A| = \pm 1$$

... constitué, dans l'ordre :

1. de la transposée de la matrice déformante $[A]$;
2. de la représentation dans $M(3, \mathbb{C})$ du générateur du groupe cyclique C_6 ;
3. du noyau de la décomposition :

$$^{(3)}[N_{\Lambda}^{|A|}] = \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}] - \frac{1}{|A|} \cdot [J]\Phi(\Lambda \mathbf{s})$$

Il est lui-même la somme de la moitié de la Hessienne de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{projectile})$:

$$\begin{aligned} & [H_{\Lambda}] \\ & = \\ & [Hess_{(^{(3)}\mathbf{projectile},0)}\Lambda(^{(3)}\mathbf{projectile})] \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & 2.D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & 2.D_{33} \end{bmatrix} = [d_{mn}] + [d_{mn}]^t$$

... et, éventuellement à un signe moins près, de la représentation matricielle d'une rotation axiale réalisée autour d'un vecteur $_{\Lambda}\mathbf{s}$ dont la définition se laisse préciser en lien avec la dégénérescence ou la non-dégénérescence de la Hessienne.

Ainsi, l'énoncé exact du résultat d'une décomposition exige de distinguer deux classes de situations :

1. **La classe I** contient les situations pour lesquelles la Hessienne n'est pas dégénérée :

$$|H_{\Lambda}| \neq 0$$

Le vecteur $_{\Lambda}\mathbf{s}$ représente alors le vecteur singulier de la polynomiale Λ :

$$|_{\Lambda}\mathbf{s}\rangle = -[Hess_{(3)\mathbf{projectile},0}\Lambda^{(3)\mathbf{projectile}}]^{-1} \cdot |\mathbf{d}^*\rangle, \mathbf{d}^* : (d_1, d_2, d_3)$$

2. **La classe II** contient les situations pour lesquelles la Hessienne est dégénérée :

$$|H_{\Lambda}| = 0$$

Elles se caractérisent par l'obligation de choisir une paire de vecteur, par exemple $(\mathbf{K}, \mathbf{O})$, pour définir deux objets mathématiques jouant respectivement un rôle similaire à celui de la Hessienne non-dégénérée et à celui du vecteur singulier :

$$\begin{aligned} [H_{\Lambda}] &= \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{K}, ^{(3)}\mathbf{O}) + T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{O}, ^{(3)}\mathbf{K})\} \\ &\quad - \frac{1}{|A|} \cdot _{\Lambda}\mathbf{s} = \frac{1}{2} \cdot (^{(3)}\mathbf{K} \wedge ^{(3)}\mathbf{O}) \end{aligned}$$

Ce qui permet de définir des parties principales par la relation :

$$[P]_{|A|} = |A| \cdot \{[A]^t \cdot [J]\} \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{K}, ^{(3)}\mathbf{O}), |A| = \pm 1$$

Quelle que soit la classe à laquelle appartient la Hessienne de la polynomiale, je note que le fait d'écrire $[A] = [J]$ ramène le produit vectoriel déformé à sa version classique, réduit les parties principales à leurs noyaux respectifs et redonne à la question (E) son énoncé intuitif initial.

$$[A] = [J] \Rightarrow [..., ...]_{[A]} = ... \wedge ... \Rightarrow [P_{\Lambda}]_{-1} = -[N_{\Lambda}], |A| = -1$$

Ce constat invite à introduire la notion d'*ambiance pré-euclidienne* ; voir la [définition 4.1](#) plus bas dans ce document.

C) Enfin, bien qu'une matrice de rotation axiale figure dans la partie principale $[P]$ des solutions apportées à la formulation généralisée de la question (E) dans un espace vectoriel de dimension trois :

1. la partie principale ne se résume pas à elle ;
2. l'argument de la matrice représentant cette rotation axiale *ne coïncide curieusement et a priori pas* avec le premier argument du produit vectoriel déformé dont les décompositions sont analysées :

$$^{(3)}\mathbf{X} \neq {}_{\Lambda}\mathbf{s}$$

... sauf dans certaines circonstances impliquant des forces en $1/r^2$: voir [f].

3. il semble difficile, voire impossible, d'identifier la Hessienne figurant dans l'énoncé d'une partie principale [P] avec une translation.

Le dernier point montre donc assez clairement en quoi la recherche des réponses à la question (E) ne peut pas directement s'inspirer de celles concernant la notion de torsion. Cet état de fait m'a longtemps préoccupé.

Remarque 1.1. *Le lien entre les parties principales des décompositions et les décompositions d'Iwasawa, polaires et de Jordan-Chevalley.*

Le résultat obtenu dans [b] peut attirer l'oeil du mathématicien parce qu'il évoque les décompositions dites d'Iwasawa pour les éléments de l'ensemble $M(3, \mathbb{C})$; voir [04 ; pp. 250-253]. Pour rappel, tout élément de $GL(3, \mathbb{C})$ se laisse écrire de manière unique sous la forme d'un produit de trois matrices : une matrice orthogonale dans $U(3)$, une matrice diagonale positive dans $D(3)$ et une matrice triangulaire haute unipotente dans $N^+(3, \mathbb{C})$. En d'autres mots, il existe une bijection :

$$U(3) \times D(3) \times N^+(3, \mathbb{C}) \rightarrow GL(3, \mathbb{C})$$

De manière similaire, il existe une bijection :

$$N^-(3, \mathbb{C}) \times D(3) \times U(3) \rightarrow GL(3, \mathbb{C})$$

Dans le même registre et en ayant le formalisme des noyaux en tête, il peut s'avérer utile de rappeler l'existence des décompositions polaires et de Jordan-Chevalley (additives et multiplicatives) pour de futurs développements mathématiques.

1.4 La recherche des solutions dans les espaces de dimension entière égale ou supérieure à deux

Les tentatives de généralisation des raisonnements menés en dimension trois [b] aux espaces de dimension entière égale ou supérieure à quatre n'ont pas (encore) abouti et il est nécessaire de contourner cette difficulté technique en faisant appel à une méthode (dite) extrinsèque [c] pour parvenir à une réponse. Elle fonctionne quelle que soit la dimension entière D égale ou supérieure à deux de l'espace des discussions. Elle livre des parties principales dont le formalisme ressemble à celui apporté par la méthode intrinsèque pour les décompositions dans les espaces de dimension trois. Concrètement, chaque partie principale est la

somme d'une généralisation de la matrice de rotation axiale et d'une Hessienne. Cet heureux hasard permet un calibrage dans les espaces de dimension trois et rassure indirectement sur la validité des raisonnements qui ont été menés dans [b].

1.5 La recherche d'une interprétation physique pour les réponses données en dimension trois à la question (E)

De nombreuses années séparent l'énoncé des réponses mathématiques données à la question (E) pour les espaces de dimension trois du moment où il m'a été permis de découvrir des liens entre elles et des explorations mathématiques appartenant au cursus des connaissances déjà acquises. La découverte de ces liens s'est faite en quelques étapes cruciales :

1. au travers du travail concernant les surfaces en évolution exposé dans [03] ;
2. en observant les représentations matricielles dans $M(3, \mathbb{C})$ des paramétrisations de la sphère unitaire de dimension quatre (Euler-Rodrigues) [04] :

$$\begin{aligned} \forall {}^{(4)}\mathbf{X} : & \langle {}^{(4)}\mathbf{X}, {}^{(4)}\mathbf{X} \rangle_{Id_4} = 1 \\ & \exists [M({}^{(4)}\mathbf{X})] \\ & = \\ & \langle {}^{(4)}\mathbf{X}, {}^{(4)}\mathbf{X} \rangle_{[n]} \cdot Id_3 + 2 \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{X}, {}^{(3)}\mathbf{X}) + 2 \cdot X^0 \cdot \Phi({}^{(3)}\mathbf{X}) \end{aligned}$$

3. et en lisant [05], l'intuition est née que les noyaux des parties principales pourraient jouer le rôle d'opérateurs quantiques ; voir [d].
4. La lecture de [06 ; corollaire 4.19, p.41] introduisant des fonctions de transition entre les deux trivialisations du bouquet principal $SU(3)$ de G_2 vers S_6 dont les représentations équatoriales sont les matrices :

$$[M({}^{(3)}\mathbf{X}, {}^{(3)}\bar{\mathbf{X}}) = T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{X}, {}^{(3)}\mathbf{X}) - \Phi({}^{(3)}\bar{\mathbf{X}})$$

... a renforcé l'idée consistant à étendre les travaux initiaux aux espaces vectoriels bâtis sur des corps non-commutatifs, typiquement celui des quaternions $\mathbb{H}$ et celui des octonions $\mathbb{O}$; voir [g].

5. Enfin, le résultat de [07] indiquant l'existence de liens entre les espaces de type « Einstein » et certaines structures liées à G_2 a fini de me convaincre de pousser ma recherche plus avant et d'introduire un ensemble de matrices que j'ai prétentieusement baptisé de *périennes*.

2 Les matrices périennes

2.1 Données élémentaires

Définition 2.1. *Matrice périenne ordinaire*

Une matrice périenne ordinaire est un élément de $M(3, K)$ noté conventionnellement $[M(^{(3)}\mathbf{a}, ^{(3)}\mathbf{b})]$ et défini par :

$$[M(^{(3)}\mathbf{a}, ^{(3)}\mathbf{b})] = \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b}) + \chi \cdot [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{b})$$

Avec :

$$^{(3)}\mathbf{a} \equiv (\alpha, \beta, \chi) \in K^3$$

Définition 2.2. *Matrice périenne noyaux-compatible*

Une matrice périenne dite *noyaux-compatible* est, comme son nom tente de l'indiquer, une matrice périenne ordinaire dont la partie symétrique coïncide avec la Hessienne d'un noyau résultant de la décomposition d'un produit vectoriel déformé.

Concrètement, ceci veut dire qu'il existe au moins une polynomiale $\Lambda(\mathbf{projectile})$ dont la Hessienne s'identifie avec la partie symétrique de la matrice périenne *noyaux-compatible*. L'ensemble des matrices de ce type est conventionnellement noté $KerComp$.

$$\exists \Lambda(^{(3)}\mathbf{projectile}) :$$

$$\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cdot [Hess_{(^{(3)}\mathbf{projectile}, 0)}\Lambda(^{(3)}\mathbf{projectile})]$$

$$\equiv$$

$$[M(^{(3)}\mathbf{a}, ^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s})] \in KerComp$$

Remarque 2.1. *Déterminant d'une matrice périenne noyaux-compatible*

Le déterminant d'une matrice dite *noyaux-compatible* vaut :

$$\delta(^{(3)}\mathbf{a}, ^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s})$$

$$=$$

$$|\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b}) + \chi \cdot [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{s})|$$

$$=$$

$$\alpha^3 + \beta \cdot \|(^{(3)}\mathbf{b})\|^2 \cdot \alpha^2 + \chi^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 \cdot \alpha + \beta \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^2$$

Voir la preuve en [annexe A-1](#).

2.2 Quelques règles utiles

Les relations suivantes s'avèreront utiles ultérieurement :

1. La table de multiplication des matrices périennes ordinaires (ce sont également des représentations des paramétrisations d'Euler-Rodrigues pour les sphères de rayon un en dimension quatre) :

$$\begin{array}{c} \forall \mathbf{b} \\ Id \quad T \quad \Phi \\ Id \quad \left[\begin{array}{ccc} Id & T & \Phi \\ T & ||\mathbf{b}||^2 \cdot T & [0] \\ \Phi & [0] & T - ||\mathbf{b}||^2 \cdot Id \end{array} \right] \end{array}$$

Avec :

$$||\mathbf{b}||^2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_{Id_3} = (b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2$$

2.

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \cdot |\mathbf{P}\rangle = \langle \mathbf{M}, \mathbf{P} \rangle_{Id_3} \cdot |\mathbf{N}\rangle$$

3.

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{N}) - T_2(\otimes)(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = [J]\Phi(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

4.

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \cdot [J]\Phi(\mathbf{N}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}, \mathbf{M})$$

5.

$$[J]\Phi(\mathbf{N}) \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M}, -\mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

6.

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \cdot [J]\Phi(\mathbf{N}) + [J]\Phi(\mathbf{N}) \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M})$$

$$=$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}, \mathbf{M}) - T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

$$=$$

$$[J]\Phi((\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \wedge \mathbf{M})$$

$$=$$

$$||\mathbf{M}||^2 \cdot [J]\Phi(\mathbf{N}) - \langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle_{Id_3} \cdot [J]\Phi(\mathbf{M})$$

7.

$$[J]\Phi^2(\mathbf{M}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) - ||\mathbf{M}||^2 \cdot Id_3$$

8.

$$T_2^2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = ||\mathbf{M}||^2 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M})$$

3 La méthode de Tartaglia-Cardan

3.1 Geronimo (ou Gerolamo) Cardano.

Personnage éclectique italien né le 24 septembre 1501 à Pavie et décédé à Rome le 21 septembre 1576. Il étudie les mathématiques et la médecine à Pavie et Padoue et obtient son doctorat de médecine en 1525. Ce titre lui permet d'enseigner les mathématiques et la médecine à Milan, Pavie et Bologne. Non content de ces expertises, il se préoccupe aussi d'astronomie, d'astrologie, d'alchimie et de physique. Cette soif de savoir lui vaut de devenir l'astrologue du pape à Rome en 1571 [18].

Son ouvrage intitulé « *Ars Magna* » semble être le premier livre écrit en latin entièrement consacré à l'algèbre. Le livre constitue un jalon dans l'histoire des mathématiques puisqu'il permet de garder une trace du rapide développement que connaît alors cette discipline. Cette pièce rare expose les méthodes de résolution des polynômes du troisième et du quatrième degré. Ces méthodes ont été progressivement mises au point par dal Ferro et de manière plus complète par Tartaglia pour ce qui concerne les polynômes de degré trois ; puis par un élève de Cardano nommé Ferrari pour ce qui concerne les polynômes de degré quatre [20].

Le livre contient également des calculs utilisant pour la première fois le nombre complexe « i » ($i^2 + 1 = 0$) dont le carré vaut moins un. Une clarification et une systématisation sur la manière d'utiliser les nombres complexes sera apportée un peu plus tard - vers 1560- par un dénommé Bombelli, un autre mathématicien de l'Université de Bologne [18].

L'œuvre de Cardano ne se résume pas à cet ouvrage puisque ce personnage excentrique et joueur publie 412 documents au cours de sa vie. Parmi eux, en 1563, sans doute inspiré par sa propre expérience des jeux qu'il a pratiqué pendant ses études pour arrondir ses maigres finances : « *Liber de ludo alea* (livret sur les jeux aléatoires) ». Il y présente un des premiers essais de la théorie des probabilités [18]. Il publie également un horoscope du Christ qui lui vaut d'être condamné pour hérésie, puis arrêté et emprisonné en 1570. Il ne s'en sort qu'en renonçant à diffuser les thèses qu'il soutient (par exemple : l'apologie de l'empereur Néro persécutant les premiers chrétiens, etc.). En punition, il lui est interdit d'enseigner et de publier. Découragé, il accompagne un de ses étudiants à Rome où il reçoit une invitation à faire partie du collège des soignants et, ironie du sort, une pension versée par le pape. En 1575, il publie son autobiographie dans « *de vita propria liber* (Le livre de ma propre vie) ». Elle passe pour être une des premières à mettre un accent particulier sur la psychologie (de l'auteur) [18]. Enfin, Cardano ira jusqu'à prédire la date de sa mort et à se suicider pour prouver la justesse de sa prédiction ! [18 ; p.283].

3.2 Niccolo Fontana dit Tartaglia (celui qui bégaye).

D'origine et de formation très modestes, Tartaglia naît à Brescia en 1499 et meurt à Venise en 1557 [19]. Blessé en 1512 lors d'une bataille menée à Brescia par les Français, il supportera sa vie durant un handicap limitant sa diction ; d'où son surnom [20].

Essentiellement autodidacte, il enseigne le calcul à Vérone à partir de 1517 puis à Venise à partir de 1534. Il présente la résolution des polynômes de degré trois en 1535 lors d'une compétition de mathématique organisée par l'Université de Bologne [20]. La compétition l'oppose à Antonio Maria Fiore, un élève de Dal Ferro qui a résolu en partie le problème des cubiques vers 1510 sans avoir eu le temps de publier ses résultats.

Les contributions de Tartaglia aux mathématiques ne se limitent pas à la méthode dite de Tartaglia-Cardan. On lui doit des réflexions sur le triangle de Pascal, sur les valeurs aux limites et une traduction en italien des œuvres d'Archimède et d'Euclide. Il contribue également aux succès militaires et économiques de la République de Venise auprès de l'administration de laquelle il sert en tant que topographe, balisticien et comptable [20].

3.3 Domaine d'application de la méthode de Tartaglia-Cardan

Comme indiqué au cours du bref rappel bibliographique précédent, la méthode de Tartaglia a pour objectif principal de découvrir les racines des polynômes de degré trois. Dans le langage actuel des mathématiques, il revient au même de vouloir trouver les racines (synonyme : les solutions) de l'expression générique :

$$P(x) = x^3 + a.x^2 + b.x + c = 0 \quad (1)$$

Exemple 3.1. Application usuelle.

La recherche des valeurs propres d'un élément $[M]$ de l'ensemble des matrices carrées (3-3) à entrées dans l'ensemble des nombres complexes, $M(3, \mathbb{C})$, fait partie de la famille des applications de la méthode de Tartaglia. Le cadre de cette application équivaut à se demander quelles sont les solutions d'un système de trois équations linéaires impliquant trois inconnues (en l'occurrence ci-dessous : les composantes d'un vecteur $\mathbf{w}$) dont le formalisme condensé s'écrit :

$$\{^{(3)}[M] - \lambda.Id_3\} . |\mathbf{w}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad (2)$$

En effet, ce système ne se résout qu'en étudiant le polynôme :

$$P(\lambda) = |^{(3)}[M] - \lambda.Id_3| \quad (3)$$

Si le polynôme est dit "propre", il ne s'annule jamais et l'unique solution du système générique précédent est le vecteur nul.

$$\nexists \lambda | P(\lambda) = 0 \Rightarrow \forall \lambda : P(\lambda) \neq 0, \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Dans tous les cas, le polynôme - dont il convient de découvrir s'il a ou non des racines, s'écrit :

$$-P(\lambda) = \lambda^3 - \text{Trace}[M] \cdot \lambda^2 + \theta \cdot \lambda - |M| \quad (5)$$

Avec :

$$\theta = \{(M_2^1 \cdot M_1^2 + \dots) - (M_1^1 \cdot M_2^2 + \dots)\} \quad (6)$$

C'est bien un élément de l'ensemble des polynômes de degré trois. Ses coefficients prennent ici les valeurs particulières :

$$a = -\text{Trace}[M] \quad (7)$$

$$b = \theta \quad (8)$$

$$c = -|M| \quad (9)$$

Par conséquent, la méthode de Tartaglia est a priori sensée pouvoir lui être appliquée.

3.4 Exposé de la méthode de Tartaglia et Cardan

Remarque 3.1. *Un travail personnel de reconstitution.*

La phrase suivante va certainement faire sourire mais ... il n'est pas si aisé de reconstituer le procédé proposé par Tartaglia en 1535. Ce constat ne se justifie pas seulement par l'impossibilité de consulter le document historique (Ars Magna). La consultation en serait-elle d'ailleurs possible, rien ne garantirait mon aptitude à le déchiffrer puisque les langues vivantes évoluent au cours du temps. L'italien n'échappe pas à cette règle.

La consultation des références actuellement accessibles [18 ; p. 283], [08 ; pp. 81-82], n'offre qu'une aide partielle. En effet, [18] donne un résumé des résultats sans expliquer réellement comment y parvenir ; [08] offre le début de la procédure sans répondre clairement aux imprécisions qu'elle contient.

Ainsi, ce qui suit n'est pas qu'un simple travail de recopiage ou de traduction. Je remercie les auteurs cités dans la bibliographie pour avoir mis leurs travaux à disposition.

Remarque 3.2. *Commencer par faire un changement de variable.*

Les références consultées, [08] et [18], s'accordent sur la nécessité de commencer par réaliser un changement de variable éliminant les termes de degré deux. Cet objectif s'atteint en écrivant :

$$x \rightarrow z = x + \frac{a}{3} \quad (10)$$

En effet, en pratiquant de la sorte, le polynôme $P(x)$ devient :

$$P(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 & P(z) \\
 & = \\
 & (z - \frac{a}{3})^3 + a \cdot (z - \frac{a}{3})^2 + b \cdot (z - \frac{a}{3}) + c \\
 & = \\
 & (z^3 - a \cdot z^2 + \frac{a^2}{3} \cdot z - \frac{a^3}{27}) \\
 & + a \cdot (z^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot z + \frac{a^2}{9}) \\
 & + b \cdot (z - \frac{a}{3}) \\
 & + c \\
 & = \\
 & z^3 + (b - \frac{a^2}{3}) \cdot z + (2 \cdot \frac{a^3}{27} - b \cdot \frac{a}{3} + c)
 \end{aligned}$$

Il devient alors possible d'écrire le polynôme sous la forme générique :

$$P(z) = z^3 + p \cdot z + q \quad (11)$$

Avec :

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad (12)$$

$$q = 2 \cdot \frac{a^3}{27} - b \cdot \frac{a}{3} + c \quad (13)$$

Remarque 3.3. Supposer que la nouvelle variable est une somme de deux variables.

La référence [08] propose de poser a priori que :

$$z = z_- + z_+ \quad (14)$$

L'injection de cette hypothèse de travail dans le nouveau formalisme du polynôme étudié fournit :

$$\begin{aligned}
 & P(z) \\
 & = \\
 & (z_- + z_+)^3 + p \cdot (z_- + z_+) + q \\
 & = \\
 & (z_-)^3 + 3 \cdot (z_-)^2 \cdot z_+ + 3 \cdot z_- \cdot (z_+)^2 + (z_+)^3 + p \cdot (z_- + z_+) + q \\
 & = \\
 & (z_-)^3 + (z_+)^3 + \{3 \cdot z_- \cdot z_+ + p\} \cdot (z_- + z_+) + q
 \end{aligned}$$

Remarque 3.4. *Faire un constat pertinent.*

L'observation attentive du formalisme obtenu de la sorte permet de conclure au fait indéniable qu'un moyen simple d'annuler le polynôme étudié consiste à poser :

$$(z_-)^3 + (z_+)^3 = -q \quad (15)$$

$$z_- \cdot z_+ = -\frac{p}{3} \quad (16)$$

Il n'est pas certain que ce soit le seul moyen d'annuler le polynôme. Pour autant, cette remarque permet de ramener la discussion sur un terrain connu puisqu'il fournit les équations :

$$(z_-)^3 + (z_+)^3 = -q$$

$$(z_-)^3 \cdot (z_+)^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Elles autorisent à considérer que les cubes des deux sous-racines recherchées sont les solutions d'un trinôme du second degré s'écrivant :

$$P(Z) = Z^2 + q \cdot Z - \frac{p^3}{27} \quad (17)$$

Remarque 3.5. *Résoudre le trinôme du second degré écrit en fonction du cube d'une sous-racine.*

Arrivé à ce stade de la démonstration, il convient traditionnellement de calculer la quantité caractéristique du trinôme obtenu :

$$\Psi = q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27} \quad (18)$$

Comme j'ai placé d'emblée cette discussion sur le corps commutatif des nombres complexes¹, il n'est pas vraiment nécessaire de tenir compte du signe de cette quantité ; sauf à vouloir opérer une classification des solutions possibles. Ce domaine de définition permet de passer immédiatement à la formulation des racines de ce trinôme :

$$Z_{\pm} = (z_{\pm})^3 = \frac{1}{2} \cdot \{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}$$

Remarque 3.6. *Commencer à compter et classier les solutions du polynôme en z .*

A cet endroit, il devient possible de fabriquer les racines du polynôme $P(z)$: ce sont les sommes de deux des racines cubiques des $Z_{\pm}$. Mais combien y-a-t-il de solutions possibles pour le polynôme $P(z)$?

Dans l'absolu du corps commutatif des nombres complexes, Z_- et Z_+ ont chacune trois racines cubiques :

$$z_{-0} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}}$$

1. Je profite des travaux de Bombelli et de tous ses successeurs !

$$\begin{aligned}
 z_{-1} &= j \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \\
 z_{-2} &= j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \\
 z_{+0} &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \\
 z_{+1} &= j \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \\
 z_{+2} &= j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}}
 \end{aligned}$$

Ce qui pourrait à la rigueur se résumer par :

$$a = 0, 1, 2 : z_{\pm a} = j^a \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \quad (19)$$

Quoiqu'il en soit, une solution théorique du polynôme $P(z)$ doit être constituée par la somme d'une des trois z_{-a} et d'une des trois z_{+b} lorsque a et b parcourent arbitrairement l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

$$\forall a, b = 0, 1, 2 :$$

$$\begin{aligned}
 &z \\
 &= \\
 &z_{-a} + z_{+b} \\
 &= \\
 &j^a \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} + j^b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \quad (20)
 \end{aligned}$$

De sorte qu'une première estimation du nombre des solutions possibles donne le chiffre inattendu de neuf ... alors que le bon sens permet de supposer qu'il n'y a que trois racines admissibles.

Ce constat soulève quelques questions, à savoir :

1. Certaines des neuf solutions envisagées ci-dessus sont-elles égales à d'autres malgré les apparences du formalisme issu du raisonnement suivi ?
2. La démarche visant à dénombrer les solutions est-elle erronée ?
3. Pire encore : la procédure proposée par Tartaglia est-elle entachée d'une erreur logique ?

Remarque 3.7. *Analyse critique et fin du dénombrement des racines du polynôme en z .*

Premier argument :

Concernant la démarche du comptage opéré ci-dessus, je me demande si la multiplication par trois du nombre attendu de racines provient de l'élévation à la puissance trois du produit des sous-racines, Equ.(16) ?

En effet, cette élévation permet effectivement de présumer de l'existence du trinôme $P(Z)$, Equ.(17). Pour autant, les Equ.(15) et (16) imposent l'interdépendance forcée des solutions de $P(Z)$. En effet, si je considère uniquement Z_- , alors l'Equ.(15) oblige à poser :

$$Z_- + Z_+ = -q$$

Ce qui signifie que :

$$Z_+ = -(Z_- + q)$$

... et cette relation reste vraie quelle que soit la valeur z_{-a} (pour $a = 0, 1, 2$) dont la troisième puissance vaut Z_- . Les trois valeurs possibles de z_{-a} ne génèrent donc qu'une seule valeur pour Z_+ qui elle même n'a que trois racines cubiques. Cette argumentation réduit le nombre de racines indépendantes à trois puisqu'il faut écrire :

$$\forall b = 0, 1, 2 : z_{+b} = j^b \cdot \sqrt[3]{Z_- + q}, \forall z_{-a} \text{ lorsque } a = 0, 1, 2$$

Cette argumentation est-elle suffisante à mettre définitivement fin aux doutes concernant le dénombrement des solutions ? L'Equ.(14) donne envie de répondre : "non".

Second argument :

Une réflexion sur l'Equ.(16) apporte de nouveaux arguments permettant de réduire le nombre de solutions admissibles. En effet, après avoir suivi le raisonnement de Tartaglia, elle s'écrit en réalité :

$$z_{-a} \cdot z_{+b} = -\frac{p}{3} \tag{21}$$

En théorie, elle permet neuf produits. Mais puisque p est une donnée initiale du problème à résoudre, si la paire (z_{-0}, z_{+0}) est par exemple une paire de solutions admissibles, il ne semble plus possible d'accepter que les paires $(j \cdot z_{-0}, z_{+0})$, $(j^2 \cdot z_{-0}, z_{+0})$, $(z_{-0}, j \cdot z_{+0})$, $(z_{-0}, j^2 \cdot z_{+0})$, $(j \cdot z_{-0}, j \cdot z_{+0})$ et $(j^2 \cdot z_{-0}, j^2 \cdot z_{+0})$ le soient encore. En revanche, les paires $(j \cdot z_{-0}, j^2 \cdot z_{+0})$ et $(j^2 \cdot z_{-0}, j \cdot z_{+0})$ le restent. Ainsi, le fait de trouver une paire de solutions admissibles en élimine six et en valide deux de plus que celle choisie au départ.

Ce raisonnement s'applique quelle que soit la paire (a, b) choisie au hasard parmi les neuf possibles. Dans tous les cas, neuf paires sont alors automatiquement réparties dans deux catégories : trois dans la catégorie "admissible" et six dans la catégorie "non-admissible". Cette manière de penser est plus convainquante

que la précédente - basée sur l'Equ.(15)- et confortée par une confrontation des Equ.(16) et (19). En effet, en se servant de l'Equ.(19) :

$$\forall a, b = 0, 1, 2 :$$

$$\begin{aligned} & z_{-a} \cdot z_{+b} \\ &= {}^2 \\ & j^{(a+b) \equiv 3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \\ &= {}^3 \\ & j^{(a+b) \equiv 3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \{(-q)^2 - (q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27})\}} \\ &= \\ & -j^{(a+b) \equiv 3} \cdot \frac{p}{3} \end{aligned}$$

Or ce produit doit être égal à la valeur précisée dans l'Equ.(16) ; par conséquent, il faut absolument choisir les paires (a, b) de telle sorte que :

$$j^{(a+b) \equiv 3} = 1$$

Il revient au même d'imposer la condition :

$$a + b = 0 \equiv 3$$

Il ne reste donc que les paires :

$$(0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

... qui oblige à ne retenir que les solutions :

$$\begin{aligned} & z_0 \\ &= \\ & z_{-0} + z_{+0} \\ &= \\ & \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \quad (22) \\ & z_1 \\ &= \\ & z_{-1} + z_{+2} \\ &= \end{aligned}$$

-
2. En introduisant ici la notion de modulo 3 ; autrement dit $3 \equiv 0$.
 3. En se servant de l'identité remarquable : $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$.

$$j \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} + j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \quad (23)$$

z_2

$=$

$z_{-2} + z_{+1}$

$=$

$$j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} + j \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \quad (24)$$

Ainsi, ce raisonnement ne démontre pas seulement sans ambiguïté qu'un polynôme $P(z)$ n'a au plus que trois solutions admissibles. Il en livre le formalisme générique. Le lectorat pourra éventuellement vérifier avec plaisir que ce résultat coïncide avec celui qui est consigné sans explication dans [18 ; p. 283, colonne de gauche].

Remarque 3.8. *Complémentaire.*

Le raisonnement mené il y a près de cinq siècle par Tartaglia part de l'idée implicite que le polynôme $P(Z)$ a forcément deux racines distinctes. La complétude de cette exploration exige d'envisager ce que vaut ce raisonnement lorsque le polynôme $P(Z)$ a une racine double. Ces situations sont réalisées chaque fois que le cas examiné mène à :

$$\Psi = q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27} = 0 \quad (25)$$

Auquel cas justement, le raisonnement de Tartaglia - s'il s'applique encore - fournit trois racines dont une double. A noter que, tout comme dans le cas général (lorsque $\Psi \neq 0$), la somme des racines s'annule :

$$z_0 = -2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$z_1 = z_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

La traduction de la contrainte menant à ces résultats particuliers en fonction des coefficients a , b et c initiaux s'écrit :

$$\Psi = \left(2 \cdot \frac{a^3}{27} - b \cdot \frac{a}{3} + c\right)^2 + \frac{4 \cdot \left(b - \frac{a^2}{3}\right)^3}{27} = 0$$

3.5 Application : les racines du déterminant d'une matrice noyaux-compatible

Soit pour commencer quelques exemples simples :

Exemple 3.2. Lorsque $\mathbf{b} = \chi \cdot \mathbf{s}$,

... ce déterminant vaut :

$$\begin{aligned} & \delta^{(3)}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \\ &= \\ & \alpha^3 + \beta \cdot (\chi \cdot \|\mathbf{s}\|)^2 \cdot \alpha^2 + (\chi \cdot \|\mathbf{s}\|)^2 \cdot \alpha + \beta \cdot (\chi \cdot \|\mathbf{s}\|)^4 \\ &= \\ & \{\alpha^2 + (\chi \cdot \|\mathbf{s}\|)^2\} \cdot \{\alpha + \beta \cdot (\chi \cdot \|\mathbf{s}\|)^2\} \end{aligned}$$

Les racines sont faciles à trouver :

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm i \cdot \chi \cdot \|\mathbf{s}\| = \pm i \cdot \|\mathbf{b}\| \\ \alpha &= -\beta \cdot (\chi \cdot \|\mathbf{s}\|)^2 = -\beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

Exemple 3.3. Lorsque $\mathbf{b} \perp \mathbf{s}$,

... ce déterminant vaut :

$$\delta^{(3)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s}) = \alpha \cdot \{\alpha^2 + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \alpha + \chi^2 \cdot \|\mathbf{s}\|^2\}$$

Les racines sont également faciles à trouver :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \alpha_{\pm} &= \frac{1}{2} \cdot \{-\beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \pm \sqrt{\beta^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^4 - 4 \cdot \chi^2 \cdot \|\mathbf{s}\|^2}\} \end{aligned}$$

Remarque 3.9. Les racines du déterminant d'une matrice noyaux-compatible - (cas général).

Dans le cas général, il convient de faire appel à la méthode de Tartaglia et Cardan [08]. Les solutions sont rarement simples ; voir ci-dessus. Le déterminant d'une matrice "noyaux-compatible" peut se lire de diverses manières. L'une d'elles consiste à le voir comme un polynôme de degré trois lorsque la variable ajustable est α .

1. La résolution commence en vérifiant que le polynôme a bien le formalisme standard ; à savoir :

$$P(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

C'est bien le cas puisqu'ici :

$$\begin{aligned} a &= \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \\ b &= \chi^2 \cdot \|\mathbf{s}\|^2 \\ c &= \beta \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)} \mathbf{b}, ^{(3)} \mathbf{s} >_{Id_3}\}^2 \end{aligned}$$

2. Elle se poursuit en pratiquant le changement de variable :

$$\alpha \rightarrow z = \alpha + \frac{\beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2}{3}$$

Il a pour effet de transformer le polynome initial en :

$$P(z) = z^3 + p \cdot z + q$$

Avec :

$$\begin{aligned} p &= b - \frac{a^2}{3} = \chi^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 - \frac{\beta^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^4}{3} \\ &= \\ &= 2 \cdot \frac{a^3}{27} - b \cdot \frac{a}{3} + c \\ &= \\ &= 2 \cdot \frac{\beta^3 \cdot \|\mathbf{b}\|^6}{27} - \chi^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 \cdot \frac{\beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2}{3} + \beta \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^2 \end{aligned}$$

3. Le formalisme générique des solutions est donné ci-dessus. Ces solutions prennent ici une forme particulière. Pour la découvrir, il convient d'abord d'exprimer :

$$\begin{aligned} &q^2 \\ &= \\ &= (2 \cdot \frac{a^3}{27} - b \cdot \frac{a}{3} + c)^2 \\ &= \\ &= 4 \cdot \frac{a^6}{27^2} + b^2 \cdot \frac{a^2}{9} + c^2 - 4 \cdot \frac{a^4}{81} \cdot b - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot b \cdot c + 4 \cdot \frac{a^3}{27} \cdot c \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} &\frac{4 \cdot p^3}{27} \\ &= \\ &= \frac{4}{27} \cdot (b - \frac{a^2}{3})^3 \\ &= \\ &= \frac{4}{27} \cdot b^3 - \frac{4}{27} \cdot a^2 \cdot b^2 + \frac{4}{81} \cdot a^4 \cdot b - \frac{4}{27^2} \cdot a^6 \end{aligned}$$

Il en résulte ensuite que :

$$\begin{aligned} &q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27} \\ &= \\ &= \frac{4}{27} \cdot b^3 - \frac{1}{27} \cdot a^2 \cdot b^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot b \cdot c + 4 \cdot \frac{a^3}{27} \cdot c \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{27} \cdot \chi^6 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^6 - \frac{1}{27} \cdot \beta^2 \cdot \chi^4 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{b})\|^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^4 + \beta^2 \cdot \chi^4 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^4 \\ & - \frac{2}{3} \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 \cdot \beta^2 \cdot \chi^4 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \\ & + \frac{4}{27} \cdot \beta^4 \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^6 \end{aligned}$$

Il est en général inutile d'espérer aboutir à une expression simple.

Exemple 3.4. *Lorsqu'il existe une forme quadratique liant $\mathbf{b}$ et χ*

... telle que :

$$\|\mathbf{b}\|^2 + \frac{1}{4} \cdot \chi^2 = 1$$

Avec :

$$\beta = 2$$

Alors, en particulier :

$$\begin{aligned} & q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27} \\ & = \\ & \frac{4}{27} \cdot \chi^6 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^6 - \frac{1}{27} \cdot (4 - \chi^2) \cdot \chi^4 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^4 + 4 \cdot \chi^4 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^4 \\ & - \frac{2}{3} \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 \cdot (4 - \chi^2) \cdot \chi^4 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^2 \\ & + \frac{1}{27} \cdot (4 - \chi^2)^3 \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^2 \end{aligned}$$

Il est possible d'envisager quelques sous-cas de ces situations particulières :

1. Lorsque $\mathbf{b} = \chi \cdot \mathbf{s}$:

$$q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27} = \frac{4}{27} \cdot \|(^{(3)}\mathbf{b})\|^8 \cdot (9 + 16 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{b})\|^2)$$

Il en résulte que :

$$\sqrt[2]{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}} = \pm 2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{b})\|^4 \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{27} \cdot (9 + 16 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{b})\|^2)}$$

2. Lorsque $\mathbf{b} \perp \mathbf{s}$:

$$q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27} = \left\{ \frac{4}{27} \cdot \chi^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 - \frac{1}{27} \cdot (4 - \chi^2) \right\} \cdot \chi^4 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^4$$

Il en résulte que :

$$\sqrt[2]{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}} = \pm 2 \cdot \chi^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{27} \cdot (\chi^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 - \|(^{(3)}\mathbf{b})\|^2)}$$

Cette quantité ne s'annule que si les normes euclidiennes de ces deux vecteurs orthogonaux vérifient la condition d'égalité :

$$\chi \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\| = \pm \|(^{(3)}\mathbf{b})\|$$

3. Lorsque $||\mathbf{s}|| = 0$

$$q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27} = \{4 \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)} \mathbf{b}, {}^{(3)} \mathbf{s} >_{Id_3}\}^2 + \frac{1}{27} \cdot (4 - \chi^2)^3\} \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)} \mathbf{b}, {}^{(3)} \mathbf{s} >_{Id_3}\}^2$$

Certains commentaires méritent d'être faits :

1. Il existe en général trois solutions lorsque la discussion prend place sur le corps commutatif des nombres complexes, $\mathbb{C}$.
2. Le formalisme des solutions est du genre :

$$\begin{aligned} \forall k = 0, 1, 2 : \alpha_k &= z_k - \frac{\beta \cdot ||\mathbf{b}||^2}{3} \\ &= z_0 \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \\ &= z_1 \\ &= j \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} + j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \\ &= z_2 \\ &= j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} + j \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}} \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} p &= \chi^2 \cdot ||^{(3)} \mathbf{s}||^2 - \frac{\beta^2 \cdot ||\mathbf{b}||^4}{3} \\ &= q \\ &= 2 \cdot \frac{\beta^3 \cdot ||\mathbf{b}||^6}{27} - \chi^2 \cdot ||^{(3)} \mathbf{s}||^2 \cdot \frac{\beta \cdot ||\mathbf{b}||^2}{3} + \beta \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)} \mathbf{b}, {}^{(3)} \mathbf{s} >_{Id_3}\}^2 \end{aligned}$$

3. La somme des trois solutions vaut toujours :

$$\sum_{k=0}^{k=2} \alpha_k = -\beta \cdot ||\mathbf{b}||^2$$

Elle est donc nulle chaque fois que (i) la matrice noyau compatible est un élément de la deuxième famille des matrices tronquées (car dans ce cas $\beta = 0$) ou (ii) la discussion a lieu dans $\text{Iso}\Pi(\mathbf{b})$, l'ensemble des matrices noyaux compatibles dont le deuxième argument, $\mathbf{b}$, est un vecteur isotropique (car dans ce cas $||\mathbf{b}|| = 0$).

4. Chacune des trois solutions est bâtie sur deux expressions essentielles :

$$Q_- = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}}$$

$$Q_+ = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}\}}$$

... et sur les racines cubiques complexes de l'unité : $\{1 = j^0, j = j^1, j^2\}$. Il est ainsi possible d'en donner une expression générique :

$$\forall k = 0, 1, 2 : \alpha_k = -\frac{\beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2}{3} + j^{k \equiv 3} \cdot Q_- + j^{(2 \cdot k) \equiv 3} \cdot Q_+$$

5. En physique nucléaire et en cosmologie, certaines particules sont comprises comme des superpositions de trois états. Les neutrinos font partie du lot [09]. Diverses expériences ont démontré que ces particules oscillent entre divers états possibles, qu'elles possèdent une masse négligeable mais non nulle [10] ainsi que trois saveurs. Elles sont produites au cours d'interactions faibles avec des leptons chargés électriquement, détectées en tant que combinaison de trois saveurs pour une masse donnée mais se propagent en tant que superposition cohérente de trois masses. Ces constats mettent la complétude du modèle standard des particules en défaut. Ils expliquent également l'introduction et l'usage de matrices carrées (3-3) tentant de rendre compte de ces combinaisons et de ces superpositions. Les plus connues sont celles de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (dites PMNS). La mesure des masses des neutrinos représente un déficit technologique aux équipes de chercheur(se)s. Celles et ceux travaillant à l'expérience KATRIN ont apporté une précision importante sur la valeur haute de ces masses en avril 2025 [12] : 0,45 eV/c², soit environ 8×10^{-37} kg, c'est-à-dire environ un million de fois plus léger qu'un électron (qui n'est déjà pas lourd!). Bref, tout ceci justifie la poursuite des recherches en ce domaine, tant sur le plan expérimental que d'un point de vue théorique.

4 L'élément de longueur riemannien revisité

4.1 La troisième voie

Un des domaines d'application de ces calculs concerne la partie spatiale de l'élément infinitésimal de longueur riemannien $\delta \mathbf{r}$ ou, lorsque δx^0 n'est pas nul, la vitesse spatiale $\delta \mathbf{r} / \delta x^0$, éventuellement encore son multiple $m \cdot \delta \mathbf{r} / \delta x^0 = {}^{(3)}\mathbf{p}$, c'est-à-dire une quantité de mouvement.

Il est en effet possible de réaliser trois analyses concomitantes et contradictoires de l'élément infinitésimal de longueur riemannien :

1. Dans le cadre de la démarche initiée dans les années 1960 par trois physiciens américains [13 ; p. 7, (3.9), (3.10) et (3.11)] :

$$(\delta s)^2 = g_{ab} \cdot \delta x^a \cdot \delta x^b + \{2 \cdot N_a \cdot \delta x^0\} \cdot \delta x^a - (N^2 - N_a \cdot N^a) \cdot (\delta x^0)^2$$

2. Dans le contexte d'une généralisation de l'approche précédente [14] :

$$(\delta s)^2 = g_{ab} \cdot \delta x^a \cdot \delta x^b + \{(g_{0a} + g_{a0}) \cdot \delta x^0\} \cdot \delta x^a + g_{00} \cdot (\delta x^0)^2$$

3. Dans le cadre de la TQE, [b], qui grâce au théorème initial propose d'interpréter la décomposition 3 + 1 précédente comme la preuve de l'existence de produits vectoriels déformés du type :

$$|[\delta^{(3)}\mathbf{r}, {}^{(3)}\mathbf{cible}]_{[A]} > = [P] \cdot |^{(3)}\mathbf{cible} > + |^{(3)}\mathbf{z} >$$

Techniquement, elle choisit délibérément d'écrire :

$$\Lambda(\delta^{(3)}\mathbf{r}) = |_{[J]} \Phi(\delta^{(3)}\mathbf{r}) - [P]| = (\delta s)^2$$

Exemple 4.1. Le moment angulaire

Cette interprétation mathématique a une application physique immédiate au travers de la notion de moment angulaire ; il suffit pour cela de poser :

$${}^{(3)}\mathbf{cible} = m \cdot {}^{(3)}\mathbf{r}$$

Le théorème initial propose alors d'associer un moment angulaire à n'importe quel élément de longueur. Ce moment angulaire peut avoir deux explications : (i) la trajectoire est curviligne ou/et (ii) la masse m se déplace en tournant sur elle-même (elle a un spin intrinsèque) tout en suivant la trajectoire le long du trajet δs . Quoiqu'il en soit, cette troisième analyse fournit un éclairage *algébrique* sur l'élément de longueur riemannien.

4.2 Principes de l'analyse de l'élément de longueur riemannien

Dans ce qui suit, l'élément de longueur riemannien est considéré comme connu et la question qui se pose est celle de découvrir la (ou les) paire(s) ($[P]$, $\mathbf{z}$) qui lui correspond.

4.3 Les spécificités de l'analyse algébrique

Le fait de considérer que l'élément de longueur est la polynomiale résultant de la décomposition d'un produit vectoriel déformé du type donnée plus haut permet d'exprimer les coefficients de la polynomiale en fonction des composantes de la métrique :

- (a) Le coefficient de degré zéro vaut moins une fois le déterminant de la partie principale de la décomposition mais une fois celui du noyau :

$$d = -|P| = |N| = g_{00} \cdot (\delta x^0)^2$$

(b) Les trois coefficients de degré un valent :

$$\begin{aligned}
 & d_1 \\
 & = \\
 & A_{12}^1 \cdot (p_{31} \cdot p_{23} - p_{21} \cdot p_{33}) + A_{12}^2 \cdot (p_{33} \cdot p_{11} - p_{31} \cdot p_{13}) + A_{12}^3 \cdot (p_{21} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{23}) \\
 & + \\
 & A_{13}^1 \cdot (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) + A_{13}^2 \cdot (p_{31} \cdot p_{12} - p_{11} \cdot p_{32}) + A_{13}^3 \cdot (p_{11} \cdot p_{22} - p_{21} \cdot p_{12}) \\
 & = \\
 & (g_{01} + g_{10}) \cdot \delta x^0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_2 \\
 & = \\
 & A_{12}^1 \cdot (p_{32} \cdot p_{23} - p_{22} \cdot p_{33}) + A_{12}^2 \cdot (p_{33} \cdot p_{12} - p_{32} \cdot p_{13}) + A_{12}^3 \cdot (p_{22} \cdot p_{13} - p_{12} \cdot p_{23}) \\
 & + \\
 & A_{23}^1 \cdot (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) + A_{23}^2 \cdot (p_{31} \cdot p_{12} - p_{11} \cdot p_{32}) + A_{23}^3 \cdot (p_{11} \cdot p_{22} - p_{21} \cdot p_{12}) \\
 & = \\
 & (g_{02} + g_{20}) \cdot \delta x^0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_3 \\
 & = \\
 & A_{13}^1 \cdot (p_{32} \cdot p_{23} - p_{22} \cdot p_{33}) + A_{13}^2 \cdot (p_{33} \cdot p_{12} - p_{32} \cdot p_{13}) + A_{13}^3 \cdot (p_{22} \cdot p_{13} - p_{12} \cdot p_{23}) \\
 & + \\
 & A_{23}^1 \cdot (p_{21} \cdot p_{33} - p_{23} \cdot p_{31}) + A_{23}^2 \cdot (p_{31} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{33}) + A_{23}^3 \cdot (p_{11} \cdot p_{23} - p_{21} \cdot p_{13}) \\
 & = \\
 & (g_{03} + g_{30}) \cdot \delta x^0
 \end{aligned}$$

(c) Les neufs coefficients de degré deux ont pour expression générique [b ; p. 38] :

$$\begin{aligned}
 & d_{ab} \\
 & = \\
 & -p_{11} \cdot (A_{a2}^2 \cdot A_{b3}^3 - A_{a3}^2 \cdot A_{b2}^3) - p_{12} \cdot (A_{a1}^2 \cdot A_{b3}^3 - A_{a3}^2 \cdot A_{b1}^3) - p_{13} \cdot (A_{a1}^2 \cdot A_{b2}^3 - A_{a2}^2 \cdot A_{b1}^3) \\
 & - p_{21} \cdot (A_{a3}^1 \cdot A_{b2}^3 - A_{a2}^1 \cdot A_{b3}^3) - p_{22} \cdot (A_{a1}^1 \cdot A_{b3}^3 - A_{a3}^1 \cdot A_{b1}^3) - p_{23} \cdot (A_{a2}^1 \cdot A_{b1}^3 - A_{a1}^1 \cdot A_{b2}^3) \\
 & - p_{31} \cdot (A_{a2}^1 \cdot A_{b3}^2 - A_{a3}^1 \cdot A_{b2}^2) - p_{32} \cdot (A_{a3}^1 \cdot A_{b1}^2 - A_{a1}^1 \cdot A_{b3}^2) - p_{33} \cdot (A_{a2}^1 \cdot A_{b1}^2 - A_{a1}^1 \cdot A_{b2}^2) \\
 & = \\
 & g_{ab}
 \end{aligned}$$

La poursuite du raisonnement propre à la TQE permet de calculer la Hessienne de la polynomiale.

4.4 L'élément de longueur riemannien en ambiance euclidienne

Définition 4.1. *L'ambiance pré-euclidienne.*

La discussion est dite se situer en *ambiance pré-euclidienne* lorsque la matrice déformante se confond avec la matrice $[J]$:

$$[A] = [J]$$

Cette ambiance se caractérise aussi par les faits corollaires suivants :

$$|A| = -1$$

$$[P]_{|A|} = -[N_{\Lambda}^{|A|}] = -\left\{\frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}] + [J] \Phi(\Lambda \mathbf{s})\right\}$$

Remarque 4.1. *Les coefficients de la polynomiale fondamentale en ambiance pré-euclidienne.*

Quelques calculs ennuyeux livrent les relations suivantes qui sont vraies que la polynomiale $\Lambda(\delta \mathbf{r})$ (l'élément de longueur) soit ou non dégénérée :

1. Le coefficient de degré zéro ; voir l'[annexe 5.2](#) :

$$d = -|P| = |N| = g_{00} \cdot (\delta x^0)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \langle \Lambda^{(3)} \mathbf{s}, \Lambda^{(3)} \mathbf{s} \rangle_{[H_{\Lambda}]} - \frac{1}{8} \cdot |H_{\Lambda}|$$

2. Les trois coefficients de degré un ; voir l'[annexe 5.3](#) :

$$d_1 = p_{11} \cdot (p_{32} - p_{23}) + (p_{21} \cdot p_{13} - p_{31} \cdot p_{12}) = (g_{01} + g_{10}) \cdot \delta x^0$$

$$d_2 = p_{22} \cdot (p_{13} - p_{31}) + (p_{21} \cdot p_{32} - p_{12} \cdot p_{23}) = (g_{02} + g_{20}) \cdot \delta x^0$$

$$d_3 = p_{33} \cdot (p_{21} - p_{12}) + (p_{32} \cdot p_{13} - p_{23} \cdot p_{31}) = (g_{03} + g_{30}) \cdot \delta x^0$$

3. Les neuf coefficients de degré deux ; voir l'[annexe 5.4](#) :

$$d_{aa} = -p_{aa} = g_{aa}$$

$$d_{ab} = -p_{ab} = g_{ab}, \text{ si } a > b$$

$$d_{ab} = p_{ab} = g_{ab}, \text{ si } a < b$$

La confrontation visuelle des points 2 et 3 laisse entrevoir le fait que l'analyse de la TQE fixe des contraintes assez strictes sur les composantes de la métrique spatio-temporelle. En effet, si j'injecte les composantes spatiales de la métrique dans l'expression des coefficients de degré un, il vient :

$$d_1 = g_{11} \cdot (g_{32} + g_{23}) + (g_{31} \cdot g_{12} - g_{21} \cdot g_{13}) = (g_{01} + g_{10}) \cdot \delta x^0$$

$$d_2 = -g_{22} \cdot (g_{13} + g_{31}) + (g_{21} \cdot g_{32} - g_{12} \cdot g_{23}) = (g_{02} + g_{20}) \cdot \delta x^0$$

$$d_3 = g_{33} \cdot (g_{21} + g_{12}) + (g_{23} \cdot g_{31} - g_{32} \cdot g_{13}) = (g_{03} + g_{30}) \cdot \delta x^0$$

D'une manière générale, l'analyse proposée par la théorie étudiant les déformations et les décompositions des produits vectoriels éventuellement déformés

(alias la TQE) impose un type précis de géométrie spatiale à chaque hypersurface isochrone puisque le fait d'annuler l'intervalle de temps se traduit par :

$$\begin{aligned}\delta x^0 &= 0 \\ \Downarrow \\ d = -|P| &= |N| = -\frac{1}{2} \cdot \langle \Lambda^{(3)} \mathbf{s}, \Lambda^{(3)} \mathbf{s} \rangle_{[H_\Lambda]} - \frac{1}{8} \cdot |H_\Lambda| = 0 \\ d_1 &= g_{11} \cdot (g_{32} + g_{23}) + (g_{31} \cdot g_{12} - g_{21} \cdot g_{13}) = 0 \\ d_2 &= -g_{22} \cdot (g_{13} + g_{31}) + (g_{21} \cdot g_{32} - g_{12} \cdot g_{23}) = 0 \\ d_3 &= g_{33} \cdot (g_{21} + g_{12}) + (g_{23} \cdot g_{31} - g_{32} \cdot g_{13}) = 0\end{aligned}$$

De plus, l'existence d'une chronologie temporelle commune aux trois dimensions de l'espace (ce qui est admis depuis la nuit des temps) a pour conséquence d'entraîner une dépendance entre les composantes de la métrique spatio-temporelle dès le moment où $g_{0a} + g_{a0} \neq 0, \forall a = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\delta x^0 &= \\ &= \pm \sqrt{\frac{d}{g_{00}}} \\ &= \\ \frac{d_1}{g_{01} + g_{10}} &= \frac{g_{11} \cdot (g_{32} + g_{23}) + (g_{31} \cdot g_{12} - g_{21} \cdot g_{13})}{g_{01} + g_{10}} \\ &= \\ \frac{d_2}{g_{02} + g_{20}} &= \frac{-g_{22} \cdot (g_{13} + g_{31}) + (g_{21} \cdot g_{32} - g_{12} \cdot g_{23})}{g_{02} + g_{20}} \\ &= \\ \frac{d_3}{g_{03} + g_{30}} &= \frac{g_{33} \cdot (g_{21} + g_{12}) + (g_{23} \cdot g_{31} - g_{32} \cdot g_{13})}{g_{03} + g_{30}}\end{aligned}$$

La géométrie spatio-temporelle détermine donc la manière dont nous avons l'impression que le temps s'écoule. Lorsqu'un intervalle de temps n'est pas nul ($\delta x^0 \neq 0$), il est possible de reformuler l'élément de longueur riemannien pour exprimer une vitesse curviligne en fonction de la définition classique de la vitesse :

$$\begin{aligned}&Lim_{\delta x^0 \rightarrow 0} \left(\frac{\delta s}{\delta x^0} \right)^2 \\ &= \\ &Lim_{\delta x^0 \rightarrow 0} \left\{ g_{ab} \cdot \frac{\delta x^a}{\delta x^0} \cdot \frac{\delta x^b}{\delta x^0} + (g_{0a} + g_{a0}) \cdot \frac{\delta x^a}{\delta x^0} + g_{00} \right\} \\ &=^4 \\ &g_{ab} \cdot \frac{v^a}{c} \cdot \frac{v^b}{c} + (g_{0a} + g_{a0}) \cdot \frac{v^a}{c} + g_{00}\end{aligned}$$

4. Parce que $x^0 = c.t$

Il y a là l'explication d'un terme souvent rencontré dans les cours consacrés à la version restreinte de la théorie de la relativité [16 ; chapitres 9 et 10, pp. 228-283]. En effet, lorsque la métrique est *Minkowski* avec signature (+ - - -), cette relation s'écrit :

$$\lim_{\delta x^0 \rightarrow 0} \left(\frac{\delta s}{\delta x^0} \right)^2 = 1 - \frac{\|^{(3)}\mathbf{v}\|^2}{c^2}$$

Cette expression anodine porte une information importante illustrée par l'exemple des parcours des mésons [16 ; chapitres 9, pp. 242-243]. Les grandeurs mesurées (durées et distances) ne sont pas celles que livrerait l'usage d'une vitesse classique mais celles tenant compte de la vitesse curviligne. Par ailleurs, l'utilisation du théorème initial sur cette expression peut très bien se concevoir. La TQE propose de l'interpréter comme la preuve de l'existence de la relation :

$$[[\lim_{\delta x^0 \rightarrow 0} \frac{\delta^{(3)}\mathbf{r}}{\delta x^0}, {}^{(3)}\mathbf{cible}]_{[A]} > = [P] \cdot |^{(3)}\mathbf{cible} > + |^{(3)}\mathbf{z} >$$

Les coefficients sont les mêmes que précédemment aux facteurs près contenant l'intervalle de temps δx^0 qu'il convient de supprimer des expressions.

Lemme 4.1. *L'annulation de tous les coefficients de degré un en ambiance euclidienne.*

En ambiance pré-euclidienne et en partant du principe que la discussion se déroule avec des nombres réels, au pire avec des nombres complexes, il existe au moins quatre types de situations annulant les coefficients de degré un de la polynomiale fondamentale $\Lambda(\delta\mathbf{r})$ (le carré de l'élément de longueur riemannien) :

1. Lorsque deux événements sont isochrones parce que dans ce cas $\delta x^0 = 0$;
2. Lorsque $\forall a = 1, 2, 3 : g_{0a} + g_{a0} = 0$;
3. Lorsque la métrique spatiale est antisymétrique : $\forall a, b = 1, 2, 3 : g_{ab} + g_{ba} = 0$; cette éventualité devrait inviter à ouvrir une réflexion en lien avec l'exploration développée dans [e]. En effet, il y est spéculé que certaines interactions entre les champs électromagnétiques et la connexion de Levi-Civita peut donner naissance à des variations infinitésimales globalement anti-symétriques des composantes de la métrique.
4. Lorsque la partie spatiale de la métrique spatio-temporelle est diagonalisée : $\forall a \neq b, g_{ab} = 0$; $\forall a = b, g_{aa} \neq 0$.

Les éventualités 1 et 2 sont en quelque sorte évidentes et s'obtiennent en observant la décomposition de type A.D.M. du $(\delta s)^2$. Les éventualités 3 et 4 sont une spécificité de l'analyse proposée par la TQE. Elles proviennent d'une interdépendance spécifique et quelque part forcée entre les composantes de la métrique spatio-temporelle.

Lemme 4.2. *Sur les métriques spatio-temporelles symétriques.*

La symétrie d'une métrique spatio-temporelle se caractérise en ambiance pré-euclidienne par les relations de dépendance :

$$d_1 = 2 \cdot g_{11} \cdot g_{23} = 2 \cdot g_{01} \cdot \delta x^0$$

$$\begin{aligned} d_2 &= -2 \cdot g_{22} \cdot g_{13} = 2 \cdot g_{02} \cdot \delta x^0 \\ d_3 &= 2 \cdot g_{33} \cdot g_{12} = 2 \cdot g_{03} \cdot \delta x^0 \end{aligned}$$

Elles montre une fois encore combien les composantes de la métrique spatio-temporelle sont liées entre elles finalement grâce à l'existence d'une chronologie temporelle commune aux trois dimensions de l'espace ; pour $g_{0a} \neq 0 \ \forall a = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} &\delta x^0 \\ &= \\ &\frac{d_1}{2 \cdot g_{01}} = \frac{g_{11}}{g_{01}} \cdot g_{23} = \frac{d_2}{2 \cdot g_{02}} = -\frac{g_{22}}{g_{02}} \cdot g_{13} = \frac{d_3}{2 \cdot g_{03}} = \frac{g_{33}}{g_{03}} \cdot g_{12} \end{aligned}$$

Remarque 4.2. *La Hessienne de l'élément de longueur riemannien dans le cadre de la TQE en ambiance pré-euclidienne.*

Les résultats généraux rappelés ou acquis dans [b] et ci-dessus permettent alors de calculer la Hessienne de la polynomiale $\Lambda(\delta \mathbf{r})$ en ambiance pré-euclidienne :

$$[Hess_{(\delta^{(3)} \mathbf{r}, 0)} \Lambda(\delta^{(3)} \mathbf{r})] = [d_{ab}] + [d_{ab}]^t = [g_{ab}] + [g_{ab}]^t$$

En conséquence de quoi :

Lemme 4.3. -

En ambiance pré-euclidienne, la moitié de la Hessienne de la polynomiale $\Lambda(\delta \mathbf{r})$ s'identifie toujours avec la partie symétrique de la partie spatiale de la métrique quadri-dimensionnelle. Ce qui ne veut pas dire que cette partie spatiale est systématiquement symétrique.

Remarque 4.3. *Le vecteur $_{\Lambda} \mathbf{s}$ associé à l'élément de longueur riemannien dans le cadre de la TQE en ambiance pré-euclidienne.*

Une discussion sur le vecteur $_{\Lambda} \mathbf{s}$ exige de distinguer deux classes de situations :

1. **Classe I** : la partie symétrique de la partie spatiale de la métrique quadri-dimensionnelle n'est pas dégénérée :

$$|Hess_{(\delta^{(3)} \mathbf{r}, 0)} \Lambda(\delta^{(3)} \mathbf{r})| = |^{(3)}[g_{ab}] + ^{(3)}[g_{ab}]^t| \neq 0$$

Dans ce cas, la polynomiale $\Lambda(\delta \mathbf{r})$ a un vecteur singulier défini par la relation :

$$\begin{aligned} &|_{\Lambda} \mathbf{s} > \\ &= \\ &-[Hess_{(\delta^{(3)} \mathbf{r}, 0)} \Lambda(\delta^{(3)} \mathbf{r})]^{-1} \cdot |\mathbf{d}^* > \\ &= \\ &-2 \cdot \delta x^0 \cdot \{^{(3)}[G] + ^{(3)}[G]^t\}^{-1} \cdot |^{(3)} \mathbf{g}^* > \end{aligned}$$

Avec par définition :

$${}^{(3)}\mathbf{g}^* \equiv (g_{01} + g_{10}, g_{02} + g_{20}, g_{03} + g_{30})$$

A noter : Le vecteur $\mathbf{g}^*$ joue un rôle chaque fois qu'il existe un effet Thirring-Lense non-négligeable [17 ; chapitre 30, pp. 164-171]. En revanche, il est nul lorsque la métrique est celle de Minkowski.

Exemple 4.2. *Le vecteur singulier pour les matrices noyaux-compatibles en ambiance pré-euclidienne non-dégénérée.*

Pour ces matrices il convient de travailler avec :

$$\{{}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\} = 2 \cdot \{\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})\}$$

Il est possible de montrer que (voir l'exemple 4.4 plus bas) :

$$\begin{aligned} & |\Lambda \mathbf{s} \rangle \\ & = \\ & -\frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle + \frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot \frac{\beta}{(\alpha + \beta \cdot ||{}^{(3)}\mathbf{b}||)} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{g}^*, {}^{(3)}\mathbf{b} \rangle_{Id_3} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

Ce vecteur singulier :

(a) est nul :

- i. pour deux évènements isochrones ($\delta x^0 = 0$) ;
- ii. en absence d'effet du genre Thirring-Lense ($\mathbf{g}^* = \mathbf{0}$) ;
- iii. lorsque l'argument de la table de Pythagore, $\mathbf{b}$, et le vecteur $\mathbf{g}^*$ sont dans un rapport de proportionnalité ad hoc :

$$|{}^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle = \frac{\beta}{(\alpha + \beta \cdot ||{}^{(3)}\mathbf{b}||)} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{g}^*, {}^{(3)}\mathbf{b} \rangle_{Id_3} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{b} \rangle$$

(b) n'est pas nul et vaut :

$$\Lambda \mathbf{s} = -\frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot {}^{(3)}\mathbf{g}^*$$

... même quand :

- i. $\beta = 0$;
- ii. l'argument de la table de Pythagore est nul ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) ;
- iii. l'argument de la table de Pythagore est orthogonal au vecteur $\mathbf{g}^*$ ($\mathbf{b} \perp \mathbf{g}^*$).

(c) peut s'identifier au vecteur *position spatiale euclidienne*, ${}^{(3)}\mathbf{r}$, lorsqu'il existe une fonction f de classe C^2 dont le gradient est en inverse du carré de la distance euclidienne r et telle que $\Lambda(\delta \mathbf{r}) = df(\mathbf{r})$. La démonstration en est exposée dans [f ; section 2].

2. **Classe II** : la partie symétrique de la partie spatiale de la métrique quadri-dimensionnelle est dégénérée :

$$|Hess_{(\delta^{(3)}\mathbf{r},0)}\Lambda(\delta^{(3)}\mathbf{r})| = |^{(3)}[g_{ab}] + ^{(3)}[g_{ab}]^t| = 0$$

Dans ce cas, la polynomiale $\Lambda(\delta\mathbf{r})$ n'a pas à proprement parler de vecteur singulier mais il existe un vecteur pseudo-singulier défini par l'existence d'une paire de vecteurs $(\mathbf{K}, \mathbf{O})$ dont il est, peut-être à un facteur près, le produit vectoriel classique ; voir plus haut la discussion en [sous-section 1.3](#).

Exemple 4.3. *Le vecteur de Poynting ?*

Il est tentant de penser que le vecteur de Poynting peut illustrer cette situation mathématique car il est, par définition et à un facteur près, le produit vectoriel classique d'un champ électrique et d'un champ magnétique ; il vaut dans le vide [15 ; p. 360, Equ.(99)] :

$$^{(3)}\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot ^{(3)}\mathbf{E} \wedge ^{(3)}\mathbf{B}$$

Cette idée exige cependant de prouver d'une manière ou d'une autre que la propagation des ondes/champs électromagnétiques (abrégé : EM) se fait systématiquement dans une ambiance géométrique dégénérée.

Or un retour vers la [sous-section 1.3](#) indique que choisir de poser :

$$\begin{aligned} {}_{\Lambda}^{(3)}\mathbf{s} &= \frac{\mu_0}{2} \cdot ^{(3)}\mathbf{S} = \frac{1}{2} \cdot ^{(3)}\mathbf{E} \wedge ^{(3)}\mathbf{B} \\ ^{(3)}\mathbf{K} &= ^{(3)}\mathbf{E} \\ ^{(3)}\mathbf{O} &= ^{(3)}\mathbf{B} \end{aligned}$$

... permet d'envisager des situations dégénérées pré-euclidiennes pour lesquelles :

$$[H_{\Lambda}] = \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{B}) + T_2(\otimes)(\mathbf{B}, \mathbf{E})\}$$

$$[P]_{-1} = -[N]_{-1} = -T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

Et dans le cadre de l'analyse de l'élément de longueur riemannien proposé par la TQE, le [lemme 4.3](#) permet d'interpréter la matrice jouant ici le rôle d'une Hessienne dégénérée comme égale à la partie symétrique de la partie spatiale de la métrique quadri-dimensionnelle (rappel) :

$$[H_{\Lambda}] = \{^{(3)}[G] + ^{(3)}[G]^t\}$$

Par conséquent, le vecteur de Poynting illustre bien une situation dans la classe II dès lors que la métrique spatiale locale se définit au travers de la table de Pythagore :

$$^{(3)}[G] = \frac{1}{2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

... ou par sa transposée car il est aisé de constater que cette métrique est dégénérée :

$$|^{(3)}[G]| = |\frac{1}{2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{B})| = 0$$

Remarque 4.4. *Le dixième coefficient de la polynomiale $\Lambda(\delta \mathbf{r})$ associée à l'élément de longueur riemannien dans le cadre de la TQE en ambiance pré-euclidienne.*

Pour les raisons rappelées à la remarque précédente, il convient de distinguer là aussi deux classes de situations :

1. **Classe I :**

$$\begin{aligned} & d \\ & = \\ & -|P| = |N| \\ & = \\ & g_{00} \cdot (\delta x^0)^2 \\ & = \\ & -\frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}_{\Lambda} \mathbf{s}, {}^{(3)}_{\Lambda} \mathbf{s} \rangle_{[H_{\Lambda}]} - \frac{1}{8} \cdot |H_{\Lambda}| \\ & = \\ & -2 \cdot (\delta x^0)^2 \cdot \langle \{^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\}^{-1} \cdot |^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle, \{^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\}^{-1} \cdot |^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle_{\{^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\}} \\ & \quad - \frac{1}{8} \cdot |^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t| \\ & = \\ & -2 \cdot (\delta x^0)^2 \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{g}^* | \cdot \{ \{^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\}^{-1} \cdot |^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle \} - \frac{1}{8} \cdot |^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t| \end{aligned}$$

Exemple 4.4. *Le dixième coefficient pour les matrices noyaux-compatibles en ambiance pré-euclidienne non-dégénérée.*

Il convient de travailler avec :

$$\{^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\} = 2 \cdot \{\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})\}$$

Comme ces matrices sont ici supposées inversibles, et que leurs déterminants valent :

$$|^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t| = 8 \cdot \alpha^2 \cdot (\alpha + \beta \cdot ||^{(3)}\mathbf{b}||)$$

... la discussion concerne les situations telles que :

$$\alpha \neq 0$$

Et :

$$\alpha + \beta \cdot ||^{(3)}\mathbf{b}|| \neq 0$$

Il est alors possible de calculer leurs inverses ; voir l'[annexe 5.5](#) :

$$\{{}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\}^{-1} = \frac{1}{8 \cdot \alpha} \cdot \{Id_3 - \frac{\beta}{\alpha + \beta \cdot \|{}^{(3)}\mathbf{b}\|} \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})\}$$

Puis de calculer :

$$\begin{aligned} & \{{}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\}^{-1} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle \\ &= \\ & \frac{1}{8 \cdot \alpha} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle - \frac{1}{8 \cdot \alpha} \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta \cdot \|{}^{(3)}\mathbf{b}\|} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{g}^*, {}^{(3)}\mathbf{b} \rangle_{Id_3} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

Et en fin de compte :

$$\begin{aligned} & d \\ &= \\ & -|P| = |N| \\ &= \\ & g_{00} \cdot (\delta x^0)^2 \\ &= \\ & \frac{1}{8 \cdot \alpha} \cdot \|{}^{(3)}\mathbf{g}^*\|^2 - \frac{1}{8 \cdot \alpha} \cdot \frac{\beta}{(\alpha + \beta \cdot \|{}^{(3)}\mathbf{b}\|)} \cdot \{\langle {}^{(3)}\mathbf{g}^*, {}^{(3)}\mathbf{b} \rangle_{Id_3}\}^2 - \alpha^2 \cdot (\alpha + \beta \cdot \|{}^{(3)}\mathbf{b}\|) \end{aligned}$$

2. **Classe II** : les connaissances rappelées et acquises jusque-là sur cet ensemble de situations permet d'écrire (voir la [sous-section 1.3](#)) :

$$\begin{aligned} & d \\ &= \\ & -|P| = |N| \\ &= \\ & g_{00} \cdot (\delta x^0)^2 \\ &= \\ & -\frac{1}{8} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{K} \wedge {}^{(3)}\mathbf{O}, {}^{(3)}\mathbf{K} \wedge {}^{(3)}\mathbf{O} \rangle_{\frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{K}, \mathbf{O}) + T_2(\otimes)(\mathbf{O}, \mathbf{K})\}} \\ &= \\ & -\frac{1}{16} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{K} \wedge {}^{(3)}\mathbf{O} | \cdot \{ \{T_2(\otimes)(\mathbf{K}, \mathbf{O}) + T_2(\otimes)(\mathbf{O}, \mathbf{K})\} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{K} \wedge {}^{(3)}\mathbf{O} \rangle \} \\ &=^5 \\ & -\frac{1}{16} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{K} \wedge {}^{(3)}\mathbf{O} | \cdot \underbrace{\{ \langle \mathbf{O}, {}^{(3)}\mathbf{K} \wedge {}^{(3)}\mathbf{O} \rangle_{Id_3} \cdot \mathbf{K} + \langle \mathbf{K}, {}^{(3)}\mathbf{K} \wedge {}^{(3)}\mathbf{O} \rangle_{Id_3} \cdot \mathbf{O} \}}_{=0} \\ &= \\ & 0 \end{aligned}$$

5. Conséquence indirecte de la deuxième règle de calcul rappelée au niveau de la [sous-section 2.2](#) et des propriétés élémentaires du produit vectoriel classique.

Lemme 4.4. -

En ambiance pré-euclidienne dégénérée, le dixième coefficient de la polynomiale $\Lambda(\delta\mathbf{r})$ associée à l'élément de longueur riemannien est nul. Ce qui ne peut arriver que dans deux ensembles de situations :

- (a) La composante g_{00} de la métrique quadridimensionnelle est nulle :

$$g_{00} = 0$$

- (b) L'intervalle de temps entre deux évènements est nul :

$$\delta x^0 = 0$$

Ce qui interdit de définir une vitesse et ce qui ne peut concerner que des évènements situés sur la même hypersurface : ils sont isochrones. Pour eux, les trois coefficients de degré un de la polynomiale $\Lambda(\delta\mathbf{r})$ associée à l'élément de longueur riemannien sont également nuls.

$${}^{(3)}\mathbf{d}^* = {}^{(3)}\mathbf{0}$$

Corollaire 4.1. *Les champs électromagnétiques dans le vide.*

L'exemple 4.3 intuitif et simple illustrant les situations dégénérées grâce à l'introduction du vecteur de Poynting peut se poursuivre ici en écrivant :

$$(\delta s)^2 = g_{ab} \cdot \delta x^a \cdot \delta x^b = \frac{1}{2} \cdot \langle \delta\mathbf{r} | \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \cdot |\delta\mathbf{r} \rangle\} = 0$$

... parce que, dans le vide, la vitesse de propagation des ondes EM planes est perpendiculaire au plan formé par la paire $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Le déplacement spatial infinitésimal y est donc une sorte de vecteur isotropique dans la géométrie créée par l'entrelacement du champ électrique et du champ magnétique. En d'autres mots, il est de longueur nul sans être lui-même nul.

Remarque 4.5. *Les noyaux des décompositions des produits vectoriels $\delta\mathbf{r} \wedge \dots$ en ambiance pré-euclidienne.*

Il devient désormais possible de réunir l'ensemble des données accumulées jusque-là pour en déduire le formalisme des noyaux des produits vectoriels $\delta\mathbf{r} \wedge \dots$ décomposés. Il est entendu que le formalisme générique devant être décliné s'écrit (voir la [définition 4.1](#)) :

$$[P]_{-1} = -[N_{\Lambda}^{-1}] = -\left\{\frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}] + [J] \Phi(\wedge \mathbf{s})\right\}$$

1. **Classe I** ; [remarque 4.2](#), [lemme 4.3](#) :

$$[N_{\Lambda}^{-1}] = \frac{1}{2} \cdot \{ {}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t \} - 2 \cdot \delta x^0 \cdot [J] \Phi(\{ {}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t \}^{-1} \cdot |\mathbf{g}^* \rangle)$$

Exemple 4.5. *Le cas des matrices noyaux-compatibles - suite de l'exemple 4.3.*

Leurs noyaux valent :

$$\begin{aligned} & [N_{\Lambda}^{-1}] \\ & = \\ & \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ & - \frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot [J] \Phi^{(3)}(\mathbf{g}^*) + \frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta \cdot \|(^{(3)}\mathbf{b})\|} \cdot \langle ^{(3)}\mathbf{g}^*, ^{(3)}\mathbf{b} \rangle_{Id_3} \cdot [J] \Phi^{(3)}(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, ces noyaux :

- (a) ... se réduisent à leurs parties symétriques chaque fois que le vecteur singulier est nul ; ces cas sont recensés au niveau de l'exemple 4.2, point (a) :

$$^{(3)}_{\Lambda} \mathbf{s} = ^{(3)}\mathbf{0} \Rightarrow [N_{\Lambda}^{-1}] = \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b})$$

- (b) ... peuvent devenir des matrices périennes ordinaires lorsque l'argument de la table de Pythagore s'identifie au vecteur $\mathbf{g}^*$:

$$\begin{aligned} & ^{(3)}\mathbf{g}^* = ^{(3)}\mathbf{b} \\ & \Downarrow \\ & [N_{\Lambda}^{-1}] \\ & = \\ & \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{g}^*, \mathbf{g}^*) + \frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot \left\{ \frac{\beta \cdot \|(^{(3)}\mathbf{g}^*)\|^2}{\alpha + \beta \cdot \|(^{(3)}\mathbf{g}^*)\|} - 1 \right\} \cdot [J] \Phi^{(3)}(\mathbf{g}^*) \end{aligned}$$

2. **Classe II** ; ce cas a déjà été étudié plus haut :

$$[P]_{-1} = -[N_{\Lambda}^{-1}] = -T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{K}, ^{(3)}\mathbf{O})$$

Exemple 4.6. *Un cas particulier original de l'exemple 4.5, point 1.(b).*

Les matrices définies au point (b) de l'exemple précédent deviennent des représentations d'une paramétrisation d'Euler-Rodrigues pour un type original de sphères unitaires de dimension quatre bâties sur les composantes de $^{(3)}\mathbf{g}^*$ s'il existe des solutions au système des équations suivant :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot (\varsigma^0)^2 - 1 \\ \beta &= 2 \\ \frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot \left\{ \frac{\beta \cdot \|(^{(3)}\mathbf{g}^*)\|^2}{\alpha + \beta \cdot \|(^{(3)}\mathbf{g}^*)\|} - 1 \right\} &= 2 \cdot \varsigma^0 \\ (\varsigma^0)^2 + \underbrace{(\varsigma^1)^2 + (\varsigma^2)^2 + (\varsigma^3)^2}_{= \|(^{(3)}\mathbf{g}^*)\|^2} &= 1 \end{aligned}$$

Sachant que dans ce cas, voir [exemple 4.4](#), l'élément infinitésimal de durée δx^0 peut être calculé à l'aide de :

$$\begin{aligned} & g_{00} \cdot (\delta x^0)^2 \\ &= \\ & \frac{1}{8 \cdot \alpha} \cdot \|(3)\mathbf{g}^*\|^2 - \frac{1}{8 \cdot \alpha} \cdot \frac{\beta \cdot \|(3)\mathbf{g}^*\|^4}{(\alpha + \beta \cdot \|(3)\mathbf{g}^*\|)} - \alpha^2 \cdot (\alpha + \beta \cdot \|(3)\mathbf{g}^*\|) \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système d'équations, il est pertinent de commencer par remarquer la dépendance entre α et $\|\mathbf{g}^*\| = W$; en effet, puisque :

$$(\zeta^0)^2 = 1 - W^2$$

... la première contrainte se réécrit :

$$\alpha = 1 - 2 \cdot W^2$$

L'injection de cette relation de dépendance dans le carré de la troisième contrainte mène à pouvoir déterminer $(\delta x^0)^2$ en fonction de W puisque :

$$\frac{(\delta x^0)^2}{16 \cdot (1 - 2 \cdot W^2)^2} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot W^2}{1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W} - 1 \right\}^2 = 4 \cdot (1 - W^2)$$

... permet de poursuivre avec :

$$(\delta x^0)^2 = \frac{64 \cdot (1 - W^2) \cdot (1 - 2 \cdot W^2)^2 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)}{4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1}$$

Il devient évident que certaines valeurs de W sont interdites au sein de cet exemple parce qu'il est raisonnable - a minima- de demander le respect de la contrainte :

$$W \in \mathbb{R}^+ \cap W \in [0, 1]$$

A cette exigence s'ajoute l'obligation de ne pas obtenir des dénominateurs nuls. Dans le cas présent, deux valeurs sont donc de toute façon interdites : $W = 1/4 \cdot (1 \mp \sqrt{5})$. Bien que la valeur négative n'intéresse pas, il convient de retirer la valeur $W = 0,80902$ des valeurs acceptables.

La dernière des contraintes permet de déterminer g_{00} en fonction de W puisqu'elle s'écrit :

$$\begin{aligned} & g_{00} \cdot (\delta x^0)^2 \\ &= \\ & \frac{W^2}{8 \cdot (1 - 2 \cdot W^2)} - \frac{2 \cdot W^4}{8 \cdot (1 - 2 \cdot W^2) \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)} \\ & \quad - (1 - 2 \cdot W^2)^2 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W) \\ &= \\ & \frac{W^2 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W) - 2 \cdot W^4 - 8 \cdot (1 - 2 \cdot W^2)^3 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)^2}{8 \cdot (1 - 2 \cdot W^2) \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)} \end{aligned}$$

A ce stade, il faut encore retirer la valeur $W = 0,70711$ des valeurs acceptables parce qu'elle annule le dénominateur. Une réorganisation du numérateur permet d'aboutir à la conclusion que quatre valeurs réelles de W annulent l'expression $g_{00} \cdot (\delta x^0)^2$ (les six autres valeurs sont des éléments de $\mathbb{C}$). Il s'agit de $W = -0,840641$, $W = 0,612382$, $W = 1,29914$ et $W = 1,42067$. Une seule d'entre elles (la deuxième) satisfait les critères d'acceptabilité qui ont été fixés. L'unicité de la valeur permettant d'annuler l'expression $g_{00} \cdot (\delta x^0)^2$ suggère qu'elle ne doit pas être associée avec la nullité de l'intervalle de temps mais avec celle de la composante g_{00} . Il n'y aurait donc qu'une configuration assimilable à la représentation matricielle d'une paramétrisation d'Euler-Rodrigues qui soit associable avec la valeur $g_{00} = 0$.

Il est également possible de considérer que la valeur de la composante g_{00} est une question de convention ; ce qui permet par exemple de la poser égale à un. Auquel cas, le système offre deux expressions pour $(\delta x^0)^2$. Il convient bien entendu de les évaluer, d'en déduire ensuite les valeurs acceptables de W puis, par ricochet, celles de $(\delta x^0)^2$. Le calcul est fastidieux ; il commence en écrivant :

$$\begin{aligned} & \underbrace{g_{00}}_{si=1} \cdot (\delta x^0)^2 \\ &= \\ & \frac{W^2 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W) - 2 \cdot W^4 - 8 \cdot (1 - 2 \cdot W^2)^3 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)^2}{8 \cdot (1 - 2 \cdot W^2) \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)} \\ &= \\ & \frac{64 \cdot (1 - W^2) \cdot (1 - 2 \cdot W^2)^2 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)}{(4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1)} \end{aligned}$$

Ce qui permet de poursuivre avec :

$$\begin{aligned} & (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1) \cdot \\ & \{W^2 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W) - 2 \cdot W^4 - 8 \cdot (1 - 2 \cdot W^2)^3 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)^2\} \\ &= \\ & 512 \cdot (1 - W^2) \cdot (1 - 2 \cdot W^2)^3 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)^2 \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} & -W^2 \cdot (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1)^2 \\ &= \\ & (1 - 2 \cdot W^2)^3 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)^2 \cdot \{8 \cdot (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1) + 512 \cdot (1 - W^2)\} \end{aligned}$$

Le calcul peut se poursuivre patiemment (voir l'[annexe 5.6](#)) et il livre un polynôme de degré douze ; ce qui, conformément au théorème de D'Alambert, fournit douze racines dans $\mathbb{C}$. Pour autant, seules quatre sont réelles pures. Parmi celles-ci, seules deux sont acceptables eu égard aux critères fixés :

$$W = 0,288242$$

$$W = 0,984949$$

La logique interne de cette exploration mène ainsi à proposer l'existence de paramétrisations d'Euler-Rodrigues originales concernant les effets de type Thirring-Lense dès lors que ce polynôme a des solutions mathématiques physiquement acceptables. Mais quelle est la recevabilité de cette démarche ? Que faire des valeurs trouvées ? En revenant au début de cet exemple, elles permettent de découvrir deux valeurs supposées plausibles pour α :

$$\alpha = 1 - 2 \cdot (0,288242)^2 = 0,8338$$

$$\alpha = 1 - 2 \cdot (0,984949)^2 = -0,9402$$

Ce qui permet de calculer :

$$\frac{\delta x^0}{4 \cdot \alpha} \cdot \left\{ \frac{\beta \cdot \|(3)\mathbf{g}^*\|^2}{\alpha + \beta \cdot \|(3)\mathbf{g}^*\|} - 1 \right\} = 2 \cdot \zeta^0 = \pm 2 \cdot \sqrt{1 - W^2}$$

Ce qui mène à proposer quatre matrices périennes ordinaires représentant une paramétrisation d'Euler-Rodrigues en lien avec un effet Thirring-Lense lorsque $g_{00} = 1$:

$$[N_\Lambda^{-1}] = 0,8338 \cdot Id_3 + 2 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{g}^*, \mathbf{g}^*) \pm 1,9151 \cdot [J]\Phi(\mathbf{g}^*), \|\mathbf{g}^*\| = 0,288242$$

$$[N_\Lambda^{-1}] = -0,9402 \cdot Id_3 + 2 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{g}^*, \mathbf{g}^*) \pm 0,34569 \cdot [J]\Phi(\mathbf{g}^*), \|\mathbf{g}^*\| = 0,984949$$

L'hypothèse $g_{00} = 1$ contient cependant une information physique qui risque de rendre cette démarche caduque. En effet, dans le cadre d'un effet Thirring-Lense effectif, il se trouve que [17 ; chapitre 30, p.166] :

$$g_{00} = 1 - \frac{r_S}{r}$$

Par conséquent, les calculs précédents ne valent qu'à l'infini, c'est-à-dire lorsque la distance r entre la source de masse M en rotation et l'observateur tend vers l'infini ($r \rightarrow \infty$). Ils illustrent la démarche à suivre lorsque le ratio r_S/r n'est plus nul.

Mais quel intérêt ont-ils vraiment ? La réponse vient du fait que la partie symétrique de ces noyaux est une demi-Hessienne et que celle-ci représente la partie symétrique de la partie spatiale de la métrique de l'espace-temps. Autrement dit et en particulier :

$$\|\mathbf{g}^*\| = 0,288242 : 0,8338 \cdot Id_3 + 2 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{g}^*, \mathbf{g}^*) = \frac{1}{2} \cdot \{[G] + [G]^t\}$$

De plus, il existe un lien direct entre le tenseur impulsion-énergie et le tenseur métrique dans le cadre de la relativité générale, même lorsque la courbure est nulle [17 ; chapitre 21]. Enfin, j'ai montré que les noyaux des décompositions des produits vectoriels peuvent définir des opérateurs quantiques commutatifs à condition d'interpréter les Hessiennes comme des représentations d'Hamiltoniens

[d; remarque 2.8 et définition 2.6]. La trace de ces noyaux a donc, de manière générale, un lien avec la somme des énergies présentes.

$$Tr\{0,8338 \cdot Id_3 + 2 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{g}^*, \mathbf{g}^*)\} \sim 2,6667 \equiv \text{Energie totale}$$

Mais, questions subsidiaires cruciales : quelle unité ? L'énergie de quoi ?

Remarque 4.6. *Le formalisme des décompositions des produits vectoriels $\delta \mathbf{r} \wedge \dots$ en ambiance pré-euclidienne.*

Tout ce qui a été écrit étant su, il devient clair qu'en ambiance pré-euclidienne, chaque représentation de l'élément de longueur riemannien est associé avec une décomposition du produit vectoriel $\delta \mathbf{r} \wedge \dots$ telle que :

1. Dans le cas de la classe I :

$$\begin{aligned} & |\delta^{(3)} \mathbf{r} \wedge {}^{(3)} \mathbf{cible} > \\ & = \\ & [P] \cdot |{}^{(3)} \mathbf{cible} > + |{}^{(3)} \mathbf{z} > \\ & = \\ & -[N_{-1}] \cdot |{}^{(3)} \mathbf{cible} > + |{}^{(3)} \mathbf{z} > \\ & = \\ & 2 \cdot \delta x^0 \cdot [J] \Phi(\{ {}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t \}^{-1} \cdot |\mathbf{g}^* >) \cdot |{}^{(3)} \mathbf{cible} > \\ & - \frac{1}{2} \cdot \{ {}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t \} \cdot |{}^{(3)} \mathbf{cible} > + |{}^{(3)} \mathbf{z} > \end{aligned}$$

Le formalisme de ces décompositions génère un questionnement :

"Pourquoi la décomposition d'un produit vectoriel classique en ambiance pré-euclidienne n'est-elle pas systématiquement réduite à la matrice représentant une rotation axiale autour du premier argument impliqué dans ce produit, en l'occurrence ici le vecteur $\delta \mathbf{r}$?"

$$|\delta^{(3)} \mathbf{r} \wedge {}^{(3)} \mathbf{cible} > = [J] \Phi(\delta^{(3)} \mathbf{r}) \cdot |{}^{(3)} \mathbf{cible} >$$

La coïncidence entre le résultat intuitif attendu et ce que livre les mathématiques ne peut se faire qu'en écrivant deux relations supplémentaires :

$$2 \cdot \delta x^0 \cdot \{ {}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t \}^{-1} \cdot |\mathbf{g}^* > = |\delta^{(3)} \mathbf{r} >$$

Et :

$$\frac{1}{2} \cdot \{ {}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t \} \cdot |{}^{(3)} \mathbf{cible} > + |{}^{(3)} \mathbf{z} > = |{}^{(3)} \mathbf{0} >$$

2. Dans le cas de la classe II :

$$\begin{aligned}
 & |\delta^{(3)}\mathbf{r} \wedge {}^{(3)}\mathbf{cible} > \\
 & = \\
 & [P] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > + |{}^{(3)}\mathbf{z} > \\
 & = \\
 & -[N_{-1}] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > + |{}^{(3)}\mathbf{z} > \\
 & = \\
 & -T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{K}, {}^{(3)}\mathbf{O}) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > + |{}^{(3)}\mathbf{z} > \\
 & = \\
 & -\langle {}^{(3)}\mathbf{K}, {}^{(3)}\mathbf{cible} \rangle_{Id_3} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{O} > + |{}^{(3)}\mathbf{z} >
 \end{aligned}$$

Exemple 4.7. Les matrices noyaux-compatibles en ambiance pré-euclidienne.

Les considérations de la remarque précédente prennent ici un visage particulier :

1. Dans le cas de la classe I :

$$\begin{aligned}
 & |\delta^{(3)}\mathbf{r} \wedge {}^{(3)}\mathbf{cible} > \\
 & = \\
 & 2 \cdot \delta x^0 \cdot [J] \Phi(\{{}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\}^{-1} \cdot |\mathbf{g}^* >) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > \\
 & \quad - \frac{1}{2} \cdot \{{}^{(3)}[G] + {}^{(3)}[G]^t\} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > + |{}^{(3)}\mathbf{z} > \\
 & = \\
 & 2 \cdot \delta x^0 \cdot [J] \Phi(\{A \cdot Id_3 + B \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b})\} \cdot |\mathbf{g}^* >) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > \\
 & \quad - \{\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b})\} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > + |{}^{(3)}\mathbf{z} > \\
 & = \\
 & 2 \cdot \delta x^0 \cdot [J] \Phi(A \cdot \mathbf{g}^* + B \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^* \rangle_{Id_3} \cdot \mathbf{b}) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > \\
 & \quad - \alpha \cdot |{}^{(3)}\mathbf{cible} > - \beta \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{cible} \rangle_{Id_3} \cdot \mathbf{b} + |{}^{(3)}\mathbf{z} >
 \end{aligned}$$

A noter alors que :

(a) La coïncidence avec la décomposition intuitive la plus simple s'obtient en posant :

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \delta x^0 \cdot (A \cdot \mathbf{g}^* + B \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{g}^* \rangle_{Id_3} \cdot \mathbf{b}) = \delta^{(3)}\mathbf{r} \\
 & -\alpha \cdot {}^{(3)}\mathbf{cible} - \beta \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{cible} \rangle_{Id_3} \cdot \mathbf{b} + {}^{(3)}\mathbf{z} = {}^{(3)}\mathbf{0}
 \end{aligned}$$

- (b) Si l'argument de la table de Pythagore est nul ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), la décomposition s'écrit :

$$\delta^{(3)}\mathbf{r} \wedge {}^{(3)}\mathbf{cible} = -\alpha \cdot {}^{(3)}\mathbf{cible} + 2 \cdot \delta x^0 \cdot A \cdot \mathbf{g}^* \wedge {}^{(3)}\mathbf{cible} + {}^{(3)}\mathbf{z}$$

Ce qui induit :

$$-\alpha \cdot ||^{(3)}\mathbf{cible}||^2 + \langle \mathbf{z}, \mathbf{cible} \rangle_{Id_3} = 0$$

... et permet d'imaginer l'existence de situations singulières pour lesquelles la cible est un vecteur isotropique perpendiculaire à la partie résiduelle de la décomposition.

$$||^{(3)}\mathbf{cible}||^2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{cible} \rangle_{Id_3} = 0$$

- (c) Si l'argument de la table de Pythagore s'identifie au vecteur $\mathbf{g}^*$:

$$|\delta^{(3)}\mathbf{r} \wedge {}^{(3)}\mathbf{cible} \rangle$$

=

$$2 \cdot \delta x^0 \cdot {}_{[J]} \Phi(\{A + B \cdot ||\mathbf{g}^*||^2\} \cdot \mathbf{g}^*) \cdot |^{(3)}\mathbf{cible} \rangle$$

$$-\alpha \cdot |^{(3)}\mathbf{cible} \rangle - \beta \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{g}^*, {}^{(3)}\mathbf{cible} \rangle_{Id_3} \cdot |^{(3)}\mathbf{g}^* \rangle + |^{(3)}\mathbf{z} \rangle$$

Ce qui induit cette fois-ci :

$$\alpha \cdot ||^{(3)}\mathbf{cible}||^2 + \beta \cdot (\langle {}^{(3)}\mathbf{g}^*, {}^{(3)}\mathbf{cible} \rangle_{Id_3})^2 = \langle {}^{(3)}\mathbf{z}, {}^{(3)}\mathbf{cible} \rangle_{Id_3}$$

... et permet d'imaginer l'existence de situations singulières pour lesquelles la cible est un vecteur isotropique perpendiculaire à la partie résiduelle de la décomposition ainsi qu'au vecteur $\mathbf{g}^*$.

2. **Dans le cas de la classe II** : La démarche est en principe la même que pour la classe I, aux détails techniques près que le déterminant des matrices impliquées est nul et qu'il convient d'écrire :

$$\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})$$

=

$$\frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{K}, {}^{(3)}\mathbf{O}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{O}, {}^{(3)}\mathbf{K})\}$$

La poursuite de l'exemple 4.3 impliquant le vecteur de Poynting et les connaissances habituelles concernant l'électromagnétisme, notamment le tenseur des polarisations de Maxwell [21 ; p.97, Equ.(33,3)], invitent tous deux à proposer - à l'instar de ce qui se faisait autrefois- d'introduire un vecteur formellement inspiré par la relation [21 ; p.77, Equ.(25,5)] :

$${}^{(3)}\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \beta}} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E} + {}^{(3)}\mathbf{B})$$

Ce qui a l'avantage de pouvoir écrire une première relation formelle, provisoire et ajustable du genre :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot Id_3 + T_2(\otimes)((^{(3)}\mathbf{E} + ^{(3)}\mathbf{B}, ^{(3)}\mathbf{E} + ^{(3)}\mathbf{B}) \\ = \\ \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)((^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{B}) + T_2(\otimes)((^{(3)}\mathbf{B}, ^{(3)}\mathbf{E})\} \end{aligned}$$

Et d'aboutir à :

$$\alpha \cdot Id_3 + \frac{1}{2} \cdot T_2(\otimes)((^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{E}) + \frac{1}{2} \cdot T_2(\otimes)((^{(3)}\mathbf{B}, ^{(3)}\mathbf{B}) = ^{(3)}[0]$$

... qui pourrait s'interpréter comme une circonstance associée avec un tenseur des polarisations nul : une représentation du vide absolu ? Enfin, ici :

$$|\delta^{(3)}\mathbf{r} \wedge ^{(3)}\mathbf{cible} > = -T_2(\otimes)((^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{B}) \cdot |^{(3)}\mathbf{cible} > + |^{(3)}\mathbf{z} >$$

4.5 Retour sur la démonstration initiale

Remarque 4.7. *Généralisation de la discussion initiale à l'ambiance pré-euclidienne.*

Je rappelle pour mémoire et pour la pédagogie de ce qui suit les premières étapes de la démonstration proposée dans [b]. Fondamentalement, il s'agit de dériver le vecteur de Poynting par rapport à la variable *temps* : t. La règle de Leibnitz, mêlée aux équations de Maxwell pour les champs électromagnétiques dans le vide interstellaire, permet rapidement de parvenir à :

$$\frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot ^{(3)}\mathbf{J})}{\partial t} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ^{(3)}\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{B} \wedge ^{(3)}\mathbf{B} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{Y}}{\partial t}$$

C'est l'endroit exact où, par simplicité, j'ai opté sans le dire clairement pour une projection de cette expression dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot ^{(3)}\mathbf{J})}{\partial t} \right> \\ & = \\ & \epsilon_0 \cdot |\mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ^{(3)}\mathbf{E} > + \frac{1}{\mu_0} \cdot |\mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{B} \wedge ^{(3)}\mathbf{B} > + \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{Y}}{\partial t} \right> \end{aligned}$$

... et où, par ignorance de la problématique concernant la décomposition des produits vectoriels classiques, j'ai décomposé les deux produits vectoriels classiques le plus trivialement et le plus intuitivement du monde en poursuivant avec :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot ^{(3)}\mathbf{J})}{\partial t} \right> \\ & = \\ & \epsilon_0 \cdot [J] \Phi(\mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{E}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E} > + \frac{1}{\mu_0} \cdot [J] \Phi(\mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{B}) \cdot |^{(3)}\mathbf{B} > + \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{Y}}{\partial t} \right> \end{aligned}$$

La suite tient à une propriété remarquable des représentations des rotationnels à l'aide de tables de Pythagore. Vingt ans après et un nombre incalculable d'heures de travail plus tard, je réalise que les mathématiques auraient pu me pousser à proposer plus généralement dans l'ambiance pré-euclidienne caractérisant *a priori* les régions vides de l'espace-temps :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot {}^{(3)}\mathbf{J})}{\partial t} \right| > \\ & = \\ & -\epsilon_0 \cdot [N_{\Lambda(\mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{E})}] \cdot |^{(3)}\mathbf{E} > -\frac{1}{\mu_0} \cdot [N_{\Lambda(\mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{B})}] \cdot |^{(3)}\mathbf{B} > +\epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{Y}}{\partial t} \right| > \end{aligned}$$

En précisant que de manière générique et dans cette ambiance - voir la [sous-section 1.3](#) :

$${}^{(3)}[N_{\Lambda_i}] = \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_i}] + [J]\Phi(\Lambda_i\mathbf{s}), i = 1 \text{ (pour } \mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{E}) \text{ et } i = 2 \text{ (pour } \mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{B})$$

C'est l'endroit où la question de la non-concordance entre le vecteur singulier et le rotationnel qui lui est associé entre en jeu. Ou plus exactement, l'endroit où la possibilité de rétablir cette concordance joue un rôle important pour retrouver les équations proposées instinctivement dans [b].

Il est évident que rien ne s'oppose à refaire le même parcours en intervertissant les arguments des produits vectoriels sans oublier de changer les signes :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot {}^{(3)}\mathbf{J})}{\partial t} \right| > \\ & = \\ & -\epsilon_0 \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \wedge \mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{E} > -\frac{1}{\mu_0} \cdot |^{(3)}\mathbf{B} \wedge \mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{B} > +\epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{Y}}{\partial t} \right| > \\ & = \\ & \epsilon_0 \cdot [N_{\Psi({}^{(3)}\mathbf{E})}] \cdot |\mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{E} > -\frac{1}{\mu_0} \cdot [N_{\Psi({}^{(3)}\mathbf{B})}] \cdot |\mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{B} > +\epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{Rot}_r^{(3)}\mathbf{Y}}{\partial t} \right| > \end{aligned}$$

Avec :

$${}^{(3)}[N_{\Psi_i}] = \frac{1}{2} \cdot [H_{\Psi_i}] + [J]\Phi(\Psi_i\mathbf{s}), i = 1 \text{ (pour } {}^{(3)}\mathbf{E}) \text{ et } i = 2 \text{ (pour } {}^{(3)}\mathbf{B})$$

La question de l'écart entre vecteur singulier et le champ qui lui est associé reste ouverte en théorie. Heureusement, l'effort de calibrage entre la méthode intrinsèque et la méthode extrinsèque en dimension trois qui est exposé dans [c] indique que cette problématique disparaît en ambiance euclidienne ; en effet, en choisissant le scénario de jonction suivant entre les deux méthodes :

$$[A]\Phi({}^{(3)}\mathbf{projectile}) = |A| \cdot [A]^t \cdot [J] \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{vecteur singulier})$$

Il devient clair que :

$$[A] = [J] \Rightarrow {}^{(3)}\mathbf{projectile} = -{}^{(3)}\mathbf{vecteur singulier}$$

Il en résulte ici que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial(\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot {}^{(3)}\mathbf{J})}{\partial t} \right\rangle = \\
 & -\epsilon_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_1}] \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle + \epsilon_0 \cdot [J] \Phi(\mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{E}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle \\
 & - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_2}] \cdot |^{(3)}\mathbf{B}\rangle + \frac{1}{\mu_0} \cdot [J] \Phi(\mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{B}) \cdot |^{(3)}\mathbf{B}\rangle \\
 & + \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{Rot}_{\mathbf{r}}^{(3)}\mathbf{Y}}{\partial t} \right\rangle
 \end{aligned}$$

La généralisation de la question (E) à l'ambiance pré-euclidienne permet de retrouver la relation proposée dans [b] aux termes suivants près dont je ne sais pas encore ce qu'ils représentent physiquement :

$$-\frac{\epsilon_0}{2} \cdot [H_{\Lambda_1}] \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle - \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot [H_{\Lambda_2}] \cdot |^{(3)}\mathbf{B}\rangle$$

Remarque 4.8. *Recherche d'éléments de discussion pour une interprétation physique.*

En partant des *a priori* communément répandus et admis (mais pas nécessairement toujours exacts) que la géométrie des espaces de dimension trois (largeur, longueur, hauteur) absolument vides est euclidienne et que les deux opérations fondamentales pouvant y être pratiquées sont le produit scalaire (défini par $[G] = \text{Id}_3$) et le produit vectoriel classique (défini par $[A] = [J]$), la généralisation de la discussion conduite dans [b] à l'ambiance pré-euclidienne exposée plus haut dans ce document ne représente qu'une très modeste extension des propos tenus initialement et il semble raisonnable de penser que celle-ci concerne maintenant des espaces-temps quasiment vides de l'univers. En conséquence de quoi, les ondes électromagnétiques qui y circuleraient peuvent encore être considérées comme quasiment planes et très modestement polarisées. La suite de cet exposé va se baser sur cette hypothèse physique.

Cette hypothèse de travail invite à interpréter la force supplémentaire apparue au cours de la remarque précédente comme une image ou comme un effet de cette modeste polarisation. Il s'agit de découvrir laquelle des deux options est la bonne réponse. La discussion mathématique précédente fait également et involontairement ressortir un argument en faveur d'une interprétation centrée sur une question de polarisation dans l'espace. Je vais expliquer pourquoi.

La polarisation partielle des ondes électromagnétiques est un phénomène connu et sa description peut se lire dans de nombreux ouvrages universitaires ; par exemple [21 ; § 50, pp. 141-147]. Elle fait intervenir un type de matrices dont le formalisme ne surprendra pas celles et ceux étudiant les spineurs [22]. Bref, il s'agit des matrices représentant les tenseurs de polarisation, par exemple à l'aide des paramètres de Stokes comme indiqué dans [21 ; § 50, p. 145, Equ.(50,13)] :

$$[\sigma_{ab}]$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \lambda \cdot \cos(2 \cdot \phi) & \lambda \cdot \sin(2 \cdot \phi) - i \cdot \theta \\ \lambda \cdot \sin(2 \cdot \phi) + i \cdot \theta & 1 - \lambda \cdot \cos(2 \cdot \phi) \end{bmatrix} \\
 &= \\
 &\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\{Id_2 + \begin{bmatrix} \lambda \cdot \cos(2 \cdot \phi) & \lambda \cdot \sin(2 \cdot \phi) - i \cdot \theta \\ \lambda \cdot \sin(2 \cdot \phi) + i \cdot \theta & -\lambda \cdot \cos(2 \cdot \phi) \end{bmatrix}\}}_*
 \end{aligned}$$

* : Matrice associée au vecteur dont les composantes sont $(\lambda \cdot \cos(2 \cdot \phi), \theta, \lambda \cdot \sin(2 \cdot \phi))$ d'après [22 ; § 55]. Il faut rappeler à cet endroit que les spineurs sont des tenseurs euclidiens [22 ; § 53]. Pour une totale clarté de l'exposé : λ est le degré de polarisation linéaire maximal, θ est le degré de polarisation circulaire, ϕ est l'angle entre l'axe de polarisation maximale et l'axe OY (des y). Je remarque au passage la note de bas de page [21 ; § 50, p. 145] concernant les polarisations elliptiques. Si $\mathbf{b}_1$ est parallèle à l'axe OY et si $\mathbf{b}_2$ est parallèle/antiparallèle à l'axe OZ, alors le tenseur associé à ces polarisations a pour formalisme :

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{ab}] &= \frac{\|\mathbf{b}_1\|^2 - \|\mathbf{b}_2\|^2}{2 \cdot J} \cdot Id_2 \pm \frac{\|\mathbf{b}_1\| \cdot \|\mathbf{b}_2\|}{J} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{bmatrix}}_{= H_2 : [22 ; 55, p.44]} \\
 &= H_2 : [22 ; 55, p.44]
 \end{aligned}$$

Cette remarque incidente permet de faire apparaître les matrices de $M(2, \mathbb{C})$ représentant les vecteurs de base de n'importe quel espace de dimension trois et de commencer l'exposé des arguments justifiant l'idée selon laquelle les noyaux des décompositions des produits vectoriels déformés sont une sorte de généralisation aux espaces de dimension trois des tenseurs de polarisation dans un plan. Je note également que le formalisme des matrices de $M(3, \mathbb{C})$ représentant les paramétrisations d'Euler-Rodrigues de la sphère unitaire d'un espace de dimension quatre a quelques similitudes avec celui du tenseur des polarisations planes. Pour justifier l'intérêt d'une confrontation entre cette conversation et la théorie des spineurs, j'ajoute que le formalisme général du tenseur des polarisations dans un plan [21 ; § 50, pp. 144-145, Equ.(50,9) et Equ.(50,11)] peut s'exprimer simplement en fonction des représentations matricielles des vecteurs de base d'un espace de dimension trois comme indiqué dans [22 ; § 55, p. 44] :

$$2 \cdot [\sigma_{ab}] = \lambda \cdot Id_2 + \lambda \cdot \sin(2 \cdot \phi) \cdot H_1 + \theta \cdot H_2 + \lambda \cdot \cos(2 \cdot \phi) \cdot H_3$$

Enfin, avant de débiter cette montée de la dimension trois à la dimension quatre, je rappellerai aussi qu'un tenseur de polarisation dans le plan ne peut pas être diagonalisé lorsque les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux. Ces situations décrivent en principe des ondes électromagnétiques planes et elles correspondent à un état dégénéré du tenseur champ électromagnétique puisque son déterminant est alors nul. Cette information renvoie à la nécessité de consulter les cours de mathématique précisant les conditions de faisabilité d'une diagonalisation des matrices et sur ceux de physique approfondissant ces situations, par exemple comme dans [23]. Quoiqu'il en soit, il y a fort à parier que l'étude des polarisations dans un espace de dimension trois s'avérera être bien plus compliquée que

celle de son homologue en dimension deux et qu'elle fera probablement appel au cours sur les rotations dans l'espace-temps.

Les matrices H introduites dans [22 ; § 55, p. 44] représentent dans $M(2, \mathbb{C})$ des vecteurs d'un espace de dimension trois. Si la théorie de la Question (E) n'est qu'un sous-chapitre de la théorie des spineurs, il s'agit maintenant de travailler avec des matrices H représentant dans $M(3, \mathbb{C})$ les vecteurs d'un espace de dimension quatre. Pour E. Cartan, il suffit d'utiliser les recommandations concernant les espaces de dimension cinq en annulant les coordonnées "zéro" [22 ; § 120, p. 106]. Ce qui renvoie directement au [22 ; chapitre V], autorise effectivement à étudier des sphères d'un espace de dimension quatre (elles sont les formes fondamentales de ces espaces) mais oblige à travailler dans $M(4, \mathbb{C})$ puisque les représentations matricielles de n'importe quel vecteur dont les composantes seraient les (x^1, x^2, x^3, x^4) sont du genre [22 ; § 93, p.81, Equ(5)] :

$$[M(^{(4)}\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 0 & x^1 & x^2 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & x^2 \\ x^4 & 0 & 0 & -x^1 \\ 0 & x^4 & -x^3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il semble donc que le meilleur moyen de confronter les noyaux de la TQE aux éléments de $M(3, \mathbb{C})$ représentant des rotations soit de se rabattre sur [22 ; chapitre IV, pp.52-76]. Pour autant, les réflexions exposées au début de ce document en sous-section 1.3 entretiennent un doute sur l'aptitude des représentations des rotations infinitésimales dans l'espace de dimension trois à rendre correctement compte du formalisme des noyaux des décompositions de produits vectoriels déformés. Au bout de cette remarque, je dirai que cette théorie fait une supposition :

Proposition 4.1. *"Les noyaux des décompositions de produits vectoriels déformés rendent compte de polarisations spatiales"*

... non démontrée à ce jour et nécessite une étude approfondie de la structure mathématique de l'ensemble de ces noyaux avant de pouvoir en poursuivre l'interprétation physique.

4.6 Structure mathématique des matrices périennes ordinaires

De manière à ne pas sur-interpréter les résultats qui vont suivre, je rappelle que tous les noyaux ne sont pas des matrices périennes ordinaires ; définition 2.1 :

$$[M(^{(3)}\mathbf{a}, ^{(3)}\mathbf{b})] = \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b}) + \chi \cdot [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{b})$$

Avec :

$$^{(3)}\mathbf{a} \in E(3, K) \equiv (\alpha, \beta, \chi) \in K^3$$

Chaque matrice périenne ordinaire (MPO) peut se comprendre comme l'image dans $M(3, K)$ d'une paire de vecteurs choisie arbitrairement dans $E(3, K) \times E(3,$

K) par une *application* que je noterai conventionnellement et arbitrairement f . L'ensemble de départ est donc un ensemble $E^2(3, K)$, produit cartésien de $E(3, K)$ par lui-même, et chaque élément de cet ensemble peut, sans exception, avoir une image dans un ensemble d'arrivée Π qui est visiblement un sous-ensemble de $M(3; K)$. Dans cette sous-section, je me limiterai au corps K munis de multiplications commutatives ; et dans la pratique à $\mathbb{C}$:

$$\forall ({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b}) \in E^2(3, \mathbb{C}) \xrightarrow{f} f({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b}) = [M({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})] \in \Pi \subset M(3, \mathbb{C})$$

Comme les tables de Pythagore sont des objets mathématiques introduisant de la bi-linéarité dans les discussions les impliquant, il est dès-à-présent certain que la recherche de la structure mathématique dont Π est doté sera pavée de quelques particularités ; par exemple celle-ci :

$$[M({}^{(3)}\mathbf{a}_1 + {}^{(3)}\mathbf{a}_2, {}^{(3)}\mathbf{b})] \in \Pi$$

$$[M({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b}_1 + {}^{(3)}\mathbf{b}_2)] \notin \Pi$$

... qui encourage à opérer d'emblée une partition de Π en fonction des arguments $({}^{(3)}\mathbf{b})$.

$$\forall ({}^{(3)}\mathbf{a} \in E(3, \mathbb{C}) \xrightarrow{f({}^{(3)}\mathbf{b})} f({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b}) = [M({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})] \in \Pi({}^{(3)}\mathbf{b}) \subset \Pi \subset M(3, \mathbb{C})$$

Autrement dit, il semble opportun d'étudier la structure de chaque sous-ensemble $\Pi({}^{(3)}\mathbf{b})$ défini comme l'ensemble des images par $f_{\mathbf{b}}$ des paires $({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})$ dans lesquelles le second argument, en l'occurrence $({}^{(3)}\mathbf{b})$, est fixe.

Une deuxième particularité induite par la présence de la table de Pythagore est symbolisée par :

$$\forall z \in \mathbb{C} : [M(z \cdot {}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})] = z \cdot [M({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})] \in \Pi({}^{(3)}\mathbf{b})$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : [M({}^{(3)}\mathbf{a}, z \cdot {}^{(3)}\mathbf{b})] = f(\alpha, z^2 \cdot \beta, z \cdot \chi) \in \Pi({}^{(3)}\mathbf{b})$$

Mais attention :

$$\forall z \in \mathbb{C} : [M({}^{(3)}\mathbf{a}, z \cdot {}^{(3)}\mathbf{b})] \neq z \cdot [M({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})]$$

Autrement dit la fonction f est linéaire sur le premier argument mais elle ne l'est pas sur le second.

Une troisième particularité induite par la présence de la table de Pythagore est symbolisée par :

$$\forall {}^{(3)}\mathbf{a}_1, {}^{(3)}\mathbf{a}_2, {}^{(3)}\mathbf{b} \in E(3, \mathbb{C})$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : [M({}^{(3)}\mathbf{a}_1, {}^{(3)}\mathbf{b})] \cdot [M({}^{(3)}\mathbf{a}_2, z \cdot {}^{(3)}\mathbf{b})] \in \Pi({}^{(3)}\mathbf{b})$$

Il est finalement assez facile d'arriver à la conclusion que chaque sous-ensemble $\Pi({}^{(3)}\mathbf{b})$ est un $\mathbb{C}$ -module à gauche.

4.7 Sur l'injectivité des fonctions f_b

La matrice nulle est l'image des paires de vecteurs $(^{(3)}\mathbf{0}, ^{(3)}\mathbf{b})$. Dans le même état d'esprit, les matrices $\text{Id}_3 = f(\mathbf{e}_1, \mathbf{b})$, $T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b}) = f(\mathbf{e}_2, \mathbf{b})$ et $[_J]\Phi(^{(3)}\mathbf{b}) = f(\mathbf{e}_3, \mathbf{b})$ sont respectivement les images des trois vecteurs de la base canonique à laquelle l'espace $E(3, \mathbb{C})$ peut être rapporté.

Proposition 4.2. *La fonction f_b est injective.*

Démonstration. Soit deux éléments supposés a priori distincts de $\Pi(\mathbf{b})$. Par définition, ils correspondent par exemple à $[M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})]$ et à $[M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})]$ avec $[M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})] \neq [M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})]$. Si d'aventure l'égalité de ces deux éléments est testée ; ce qui consiste à poser :

$$[M(^{(3)}\mathbf{a}_1, ^{(3)}\mathbf{b})] = [M(^{(3)}\mathbf{a}_2, ^{(3)}\mathbf{b})] \in \Pi(^{(3)}\mathbf{b})$$

Alors, en faisant usage de la linéarité à gauche, il revient au même d'avoir écrit :

$$[M(\underbrace{^{(3)}\mathbf{a}_1 - ^{(3)}\mathbf{a}_2}_{d\mathbf{a} : (d\alpha, d\beta, d\chi)}, ^{(3)}\mathbf{b})] = ^{(3)}[0] \in \Pi(^{(3)}\mathbf{b})$$

En détail, il s'agit de :

$$[d\alpha \cdot \delta_{mn} + d\beta \cdot b^m \cdot b^n + d\chi \cdot \epsilon_{mnp} \cdot b^p] = ^{(3)}[0] \in \Pi(^{(3)}\mathbf{b})$$

A) Les entrées de la diagonale fournissent les égalités :

$$d\alpha + d\beta \cdot (b^1)^2 = d\alpha + d\beta \cdot (b^2)^2 = d\alpha + d\beta \cdot (b^3)^2 = 0$$

De trois choses l'une :

1. soit le second argument est nul, c'est-à-dire $\mathbf{b} = \mathbf{0}$;
2. soit $d\beta$ n'est pas nul et les trois composantes du second argument sont égales à un signe plus ou moins près (huit éventualités) :

$$(b^1)^2 = (b^2)^2 = (b^3)^2 = -\frac{d\alpha}{d\beta} = B^2$$

3. soit, quel que soit le second argument, $d\alpha = d\beta = 0$.

B) Les entrées hors de la diagonale fournissent les égalités :

$$\forall m, n, p = 1, 2, 3 : m \neq n \neq p \neq m, d\beta \cdot b^m \cdot b^n = \pm d\chi \cdot b^p$$

En reprenant les trois éventualités résultant de l'analyse de la diagonale :

1. Les égalités imposées par les entrées hors de la diagonale sont automatiquement vérifiées si le second argument est nul et ce, quelles que soient les différences $d\beta$ et $d\chi$.
2. Si, simultanément, $d\beta$ n'est pas nul et les trois composantes du second argument sont égales à un signe plus ou moins près, les égalités hors de la diagonale s'écrivent :

$$\forall m, n, p = 1, 2, 3 : m \neq n \neq p \neq m, d\beta \cdot B^2 = \pm d\chi \cdot B$$

Et de trois choses l'une :

- (a) B est nul ; ici cette éventualité revient à avoir un second argument nul : $\mathbf{b} = \mathbf{0}$;
- (b) B n'est pas nul et sa valeur doit satisfaire les conditions annexes :

$$(b^1)^2 = (b^2)^2 = (b^3)^2 = -\frac{d\alpha}{d\beta} = B^2 ; B = \pm \frac{d\chi}{d\beta}$$

- (c) Quelle que soit la valeur de B, donc en fait quel que soit le second argument, $d\beta = d\chi = 0$; ce qui est en contradiction logique avec l'exigence justifiant l'éventualité examinée ici.
3. Si, quel que soit le second argument, $d\alpha = d\beta = 0$, alors les égalités hors de la diagonale s'écrivent :

$$\forall p = 1, 2, 3 : d\chi \cdot b^p = 0$$

Ce qui soit impose la nullité du second argument ; soit, si ce second argument n'est pas nul, ce qui impose $d\alpha = d\beta = d\chi = 0$.

En résumé, le fait de poser :

$$[M^{(3)}\mathbf{a}_1, {}^{(3)}\mathbf{b}]] = [M^{(3)}\mathbf{a}_2, {}^{(3)}\mathbf{b}]] \in \Pi^{(3)}\mathbf{b}$$

... induit trois types de situations :

1. Le second argument est nul et cette discussion examine dans ce cas l'injectivité de la fonction :

$$\forall {}^{(3)}\mathbf{a} \in E(3, \mathbb{C}) \xrightarrow{f^{(3)}\mathbf{0}} f_{(3)\mathbf{0}}({}^{(3)}\mathbf{a}) = [M^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{0}]] = \alpha \cdot Id_3$$

Il est évident qu'elle est injective.

2. Toutes les composantes du second argument sont non nulles mais égales entre elles à un signe près et telles que :

$$(b^1)^2 = (b^2)^2 = (b^3)^2 = -\frac{d\alpha}{d\beta} = B^2 = \left(\frac{d\chi}{d\beta}\right)^2, d\beta \neq 0$$

Cette famille de situations mérite d'être étudiée plus à fond. Il semble d'ores et déjà que les fonctions $f_{\mathbf{b}}$ concernées ne sont pas injectives.

3. Quel que soit le second argument n'appartenant pas aux deux familles évoquées précédemment : $d\alpha = d\beta = d\chi = 0$. Il est évident que les fonctions $f_{\mathbf{b}}$ concernées sont injectives.

□

Lemme 4.5. *Sur l'injectivité des fonctions $f_{\mathbf{b}}$.*

A l'exception de huit fonctions dont le domaine de définition est indirectement déterminé par les relations :

$$(b^1)^2 = (b^2)^2 = (b^3)^2 = -\frac{d\alpha}{d\beta} = B^2 = \left(\frac{d\chi}{d\beta}\right)^2, d\beta \neq 0$$

... toutes les fonctions $f_{\mathbf{b}}$ sont injectives.

Remarque 4.9. *Non-injectivité et matrices démocratiques.*

Les fonctions non-injectives $f_{(B,B,B)}$ et $f_{(-B,-B,-B)}$ ont des images dont les tables de Pythagore permettent de faire apparaître des *matrices démocratiques* de $M(3, \mathbb{C})$. Pour vérification de cette affirmation, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
 & [M^{(3)\mathbf{a}}, {}^{(3)}\mathbf{b}] \\
 & = \\
 & \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b}) + \chi \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{b}) \\
 & = \\
 & \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B^2 & B^2 & B^2 \\ B^2 & B^2 & B^2 \\ B^2 & B^2 & B^2 \end{bmatrix}}_{\text{matrice dite démocratique}} + \chi \cdot \begin{bmatrix} 0 & -B & B \\ B & 0 & -B \\ -B & B & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Elles jouent un rôle dans certaines approches théoriques concernant les neutrinos, par exemple celle dite de *l'écume de mer démocratique* (*democratic seesaw model*) [25 ; évoqué en p. 7]. Je remarque que la discussion menée dans cette référence commence en se laissant inspirer par [25 ; référence [1]]. Ce qui mène à examiner des matrices du genre [25 ; Equ.(1.1) et Equ.(1.2)] :

$$[M] = \frac{a}{\sqrt[2]{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{b}{\sqrt[2]{6}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & e^{i.\omega} & e^{-i.\omega} \\ e^{-i.\omega} & 0 & e^{i.\omega} \\ e^{i.\omega} & e^{-i.\omega} & 0 \end{bmatrix}$$

Il est facile d'en déduire que pour les petites valeurs de l'argument ω , elles se laissent réécrire :

$$[M] = \frac{a}{\sqrt[2]{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{b}{\sqrt[2]{6}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{b}{\sqrt[2]{6}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & i.\omega & -i.\omega \\ -i.\omega & 0 & i.\omega \\ i.\omega & -i.\omega & 0 \end{bmatrix}$$

Une petite manipulation mène ensuite à :

$$\begin{aligned}
 & [M] \\
 & = \\
 & \left(\frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b}{\sqrt[2]{6}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{b}{\sqrt[2]{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{b}{\sqrt[2]{6}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i.\omega & i.\omega \\ i.\omega & 0 & -i.\omega \\ -i.\omega & i.\omega & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dès lors, en posant pour les petites valeurs de omega :

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b}{\sqrt[2]{6}}$$

$$\beta \cdot B^2 = \frac{b}{\sqrt[2]{6}}$$

$$\chi \cdot B = -\frac{i \cdot b}{\sqrt[2]{6}} \cdot \omega$$

... il devient facile de constater que les matrices étudiées dans [25 ; Equ.(1.1) et Equ.(1.2)] font partie des matrices périennes ordinaires de la TQE appartenant à l'ensemble des images des fonctions non injectives $f_{(B,B,B)}$ et $f_{(-B,-B,-B)}$. Ce constat permet de les classer au sein d'une approche mathématique. Il ne répond pas en soi à la question de savoir si ces matrices permettent de découvrir les masses des quarks et des leptons. Le document [25] affirme cependant qu'elles le permettent. Il explique même pourquoi et comment. Concrètement, il suffit de diagonaliser les matrices étudiées dans [25 ; Equ.(1.1) et Equ.(1.2)] à l'aide d'une *matrice mélangeuse tri-maximale* (*tri-maximal mixing matrix*) [25 ; Equ.(1.3)] pour obtenir une matrice diagonale des masses [25 ; Equ.(1.4)] dont les expressions détaillées sont données par [25 ; Equ.(1.5)]. Pour les petites valeurs de l'argument ω , ces expressions deviennent :

$$m_1 = \frac{a}{\sqrt[2]{3}} + \frac{2 \cdot b}{\sqrt[2]{6}} = \frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b}{\sqrt[2]{6}} + \frac{3 \cdot b}{\sqrt[2]{6}} = \alpha + 3 \cdot \beta \cdot B^2 = \alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2$$

$$m_2 = m_3 = \frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b}{\sqrt[2]{6}} = \alpha$$

Il ressort de ces modestes calculs que :

1. pour les très petites valeurs de l'argument ω , deux des trois masses sont égales et leur valeur coïncide avec la composante α du vecteur $\mathbf{a}$ dont une des fonctions non injectives $f_{(B,B,B)}$ et $f_{(-B,-B,-B)}$ donne une image. Ce résultat est compatible avec l'interprétation faite dans [i ; définition 2.6, pp.14-15] puisque les masses sont équivalentes à des énergies au facteur c^2 près (relation d'équivalence).
2. la démarche suivie par la TQE éclaire le point de vue de la physique des particules en ce sens qu'elle suggère que l'aptitude éventuelle de certaines des matrices périennes ordinaires à rendre compte des masses des particules peut se mettre en relation avec le comportement du produit vectoriel éventuellement déformé d'une ou plusieurs paire(s) de vecteurs jouant un rôle crucial en physique. La paire $({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{B})$ vient immédiatement à l'esprit mais il n'y a pas de raison justifiant que ce soit la seule à influencer la marche du monde.

Le raisonnement qui vient d'être exposé ci-dessus pour les petites valeurs de l'argument ω peut se généraliser à n'importe quelle valeur de celui-ci. Dans ce cas, il convient d'écrire :

$$\begin{aligned} & [M] \\ & = \\ & \left(\frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b \cdot \cos \omega}{\sqrt[2]{6}} \right) \cdot Id_3 + \frac{b \cdot \cos \omega}{\sqrt[2]{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - i \cdot \frac{b \cdot \sin \omega}{\sqrt[2]{6}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ces matrices sont bien des images des fonctions non injectives $f_{(B,B,B)}$ et $f_{(-B,-B,-B)}$; pour s'en persuader, il suffit de poser :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b \cdot \cos \omega}{\sqrt[2]{6}} \\ \beta \cdot B^2 &= \frac{b \cdot \cos \omega}{\sqrt[2]{6}} \\ \chi \cdot B &= -i \cdot \frac{b \cdot \sin \omega}{\sqrt[2]{6}}\end{aligned}$$

Elles permettent de prédire les masses :

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{a}{\sqrt[2]{3}} + \frac{2 \cdot b \cdot \cos \omega}{\sqrt[2]{6}} = \alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \\ m_2 &= \frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b \cdot \cos \omega}{\sqrt[2]{6}} + \frac{b \cdot \sin \omega}{\sqrt[2]{2}} = \alpha + i \cdot \sqrt[2]{3} \cdot \chi \cdot B \\ m_3 &= \frac{a}{\sqrt[2]{3}} - \frac{b \cdot \cos \omega}{\sqrt[2]{6}} - \frac{b \cdot \sin \omega}{\sqrt[2]{2}} = \alpha - i \cdot \sqrt[2]{3} \cdot \chi \cdot B \\ \mathbf{b} &: (B, B, B)\end{aligned}$$

Il est amusant de constater que - voir [i; annexe 4.1, pp.42-43] et [i; remarque 2.2, p.4] :

$$\begin{aligned}m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 &= (\alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2) \cdot (\alpha^2 + \chi^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2) = |f_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})| \\ m_1 + m_2 + m_3 &= 3 \cdot \alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 = \text{Trace}\{f_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})\}\end{aligned}$$

4.8 Conclusion

Si cette exploration montre bien enfin le lien entre certains sous-ensembles de matrices périennes et les matrices des masses proposées par les physiciens des particules, il reste cependant encore à faire la jonction entre ces matrices et les polarisations gravitationnelles.

5 Annexes

5.1 Calcul du déterminant d'une matrice noyaux-compatible

Il s'agit ici de donner un exemple de calcul du déterminant d'une matrice (3-3) élément de $M(3, \mathbb{C})$ jouant un rôle non-négligeable au sein de la théorie de la Question (E).

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta \cdot (X^1)^2 & \beta \cdot X^1 \cdot X^2 - \chi \cdot s^3 & \beta \cdot X^1 \cdot X^3 + \chi \cdot s^2 \\ \beta \cdot X^1 \cdot X^2 + \chi \cdot s^3 & \alpha + \beta \cdot (X^2)^2 & \beta \cdot X^2 \cdot X^3 - \chi \cdot s^1 \\ \beta \cdot X^1 \cdot X^3 - \chi \cdot s^2 & \beta \cdot X^2 \cdot X^3 + \chi \cdot s^1 & \alpha + \beta \cdot (X^3)^2 \end{vmatrix}$$

=

$$\begin{aligned}
& \{\alpha + \beta \cdot (X^1)^2\} \cdot \{\alpha + \beta \cdot (X^3)^2\} - \{\beta \cdot X^2 \cdot X^3 + \chi \cdot s^1\} \cdot \{\beta \cdot X^2 \cdot X^3 - \chi \cdot s^1\} \\
& - \{\beta \cdot X^1 \cdot X^2 - \chi \cdot s^3\} \cdot \{\beta \cdot X^1 \cdot X^2 + \chi \cdot s^3\} \\
& \{\{\beta \cdot X^1 \cdot X^2 + \chi \cdot s^3\} \cdot \{\alpha + \beta \cdot (X^3)^2\} - \{\beta \cdot X^1 \cdot X^3 - \chi \cdot s^2\} \cdot \{\beta \cdot X^2 \cdot X^3 - \chi \cdot s^1\}\} \\
& + \{\beta \cdot X^1 \cdot X^3 + \chi \cdot s^2\} \cdot \{\beta \cdot X^2 \cdot X^3 + \chi \cdot s^1\} \\
& \{\{\beta \cdot X^1 \cdot X^2 + \chi \cdot s^3\} \cdot \{\beta \cdot X^2 \cdot X^3 + \chi \cdot s^1\} - \{\beta \cdot X^1 \cdot X^3 - \chi \cdot s^2\} \cdot \{\alpha + \beta \cdot (X^2)^2\}\} \\
& = \\
& \{\alpha + \beta \cdot (X^1)^2\} \cdot \{\alpha^2 + \alpha \cdot \beta \cdot \{(X^2)^2 + (X^3)^2\} + \chi^2 \cdot (s^1)^2\} \\
& - \{\beta \cdot X^1 \cdot X^2 - \chi \cdot s^3\} \cdot \{\alpha \cdot \beta \cdot X^1 \cdot X^2 + \alpha \cdot \chi \cdot s^3 + \beta \cdot \chi \cdot s^3 \cdot (X^3)^2 + \beta \cdot \chi \cdot s^1 \cdot X^1 \cdot X^3 + \beta \cdot \chi \cdot s^2 \cdot X^2 \cdot X^3 - \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^2\} \\
& + \{\beta \cdot X^1 \cdot X^3 + \chi \cdot s^2\} \cdot \{\beta \cdot \chi \cdot s^1 \cdot X^1 \cdot X^2 + \beta \cdot \chi \cdot s^3 \cdot X^2 \cdot X^3 + \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^3 - \alpha \cdot \beta \cdot X^1 \cdot X^3 + \alpha \cdot \chi \cdot s^2 + \beta \cdot \chi \cdot s^2 \cdot (X^2)^2\} \\
& = \\
& \alpha^3 + \alpha^2 \cdot \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (s^1)^2 + \alpha \cdot \beta^2 \cdot (X^1)^2 \cdot \{(X^2)^2 + (X^3)^2\} \\
& - \alpha \cdot \beta^2 \cdot (X^1)^2 \cdot (X^2)^2 - \beta^2 \cdot \chi \cdot s^3 \cdot X^1 \cdot X^2 \cdot (X^3)^2 - \beta^2 \cdot \chi \cdot s^1 \cdot (X^1)^2 \cdot X^2 \cdot X^3 \\
& - \beta^2 \cdot \chi \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot (X^2)^2 \cdot X^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot X^2 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (s^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (s^1)^2 \cdot (X^1)^2 \\
& + \beta \cdot \chi^2 \cdot (s^3)^2 \cdot (X^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^3 \cdot X^1 \cdot X^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^2 \cdot s^3 \cdot X^2 \cdot X^3 \\
& - \chi^3 \cdot s^1 \cdot s^2 \cdot s^3 + \beta^2 \cdot \chi \cdot s^1 \cdot (X^1)^2 \cdot X^2 \cdot X^3 + \beta^2 \cdot \chi \cdot s^3 \cdot X^1 \cdot X^2 \cdot (X^3)^2 \\
& + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^3 \cdot X^1 \cdot X^3 - \alpha \cdot \beta^2 \cdot (X^1)^2 \cdot (X^3)^2 + \alpha \cdot \beta \cdot \chi \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot X^3 \\
& + \beta^2 \cdot \chi \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot (X^2)^2 \cdot X^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot X^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^2 \cdot s^3 \cdot X^2 \cdot X^3 \\
& + \chi^3 \cdot s^1 \cdot s^2 \cdot s^3 - \alpha \cdot \beta \cdot \chi \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot X^3 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (s^2)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (s^2)^2 \cdot (X^2)^2 \\
& = \\
& \alpha^3 + \alpha^2 \cdot \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (s^1)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot X^2 \\
& + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (s^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (s^1)^2 \cdot (X^1)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (s^3)^2 \cdot (X^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^3 \cdot X^1 \cdot X^3 \\
& + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^2 \cdot s^3 \cdot X^2 \cdot X^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^3 \cdot X^1 \cdot X^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^1 \cdot s^2 \cdot X^1 \cdot X^2 \\
& + \beta \cdot \chi^2 \cdot s^2 \cdot s^3 \cdot X^2 \cdot X^3 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (s^2)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (s^2)^2 \cdot (X^2)^2 \\
& = \\
& \alpha^3 + \alpha^2 \cdot \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 + \chi^2 \cdot \|(^{(3)}\mathbf{s})\|^2 \cdot \alpha + \beta \cdot \chi^2 \cdot \{<^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{s}>_{Id_3}\}^2
\end{aligned}$$

Quand $\mathbf{b} = \mathbf{s}$, ce déterminant vaut :

$$|M(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = (\alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2) \cdot (\alpha^2 + \chi^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2)$$

C'est le résultat déjà démontré et noté dans [i; annexe 4.1, pp.42-43].

5.2 Déterminant des noyaux

Il s'agit de calculer les déterminants du type :

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot H_{11} & \frac{1}{2} \cdot H_{12} - s^3 & \frac{1}{2} \cdot H_{13} + s^2 \\ \frac{1}{2} \cdot H_{12} + s^3 & \frac{1}{2} \cdot H_{22} & \frac{1}{2} \cdot H_{23} - s^1 \\ \frac{1}{2} \cdot H_{13} - s^2 & \frac{1}{2} \cdot H_{23} + s^1 & \frac{1}{2} \cdot H_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \cdot H_{11} \cdot \left\{ \frac{1}{4} \cdot H_{22} \cdot H_{33} - \frac{1}{4} \cdot H_{23}^2 + (s^1)^2 \right\} \\
 & - \left(\frac{1}{2} \cdot H_{12} - s^3 \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot H_{33} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot H_{12} + s^3 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot H_{13} - s^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot H_{23} - s^1 \right) \right\} \\
 & + \left(\frac{1}{2} \cdot H_{13} + s^2 \right) \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot H_{12} + s^3 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot H_{23} + s^1 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot H_{13} - s^2 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot H_{22} \right\} \\
 &= \\
 & \frac{1}{8} \cdot H_{11} \cdot H_{22} \cdot H_{33} - \frac{1}{8} \cdot H_{11} \cdot H_{23}^2 + \frac{1}{2} \cdot H_{11} \cdot (s^1)^2 \\
 & - \frac{1}{8} \cdot H_{33} \cdot H_{12}^2 + \frac{1}{2} \cdot H_{33} \cdot (s^3)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot H_{12} - s^3 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot H_{13} - s^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot H_{23} - s^1 \right) \\
 & + \frac{1}{8} \cdot H_{22} \cdot H_{13}^2 + \frac{1}{2} \cdot H_{22} \cdot (s^2)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot H_{12} + s^3 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot H_{13} + s^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot H_{23} + s^1 \right) \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \cdot \sum_{ab} H_{ab} \cdot s^a \cdot s^b + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot H_{11} & \frac{1}{2} \cdot H_{12} & \frac{1}{2} \cdot H_{13} \\ \frac{1}{2} \cdot H_{12} & \frac{1}{2} \cdot H_{22} & \frac{1}{2} \cdot H_{23} \\ \frac{1}{2} \cdot H_{13} & \frac{1}{2} \cdot H_{23} & \frac{1}{2} \cdot H_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{s}, {}^{(3)}\mathbf{s} \rangle_{[H]} + \frac{1}{8} \cdot |H|
 \end{aligned}$$

5.3 Les coefficients de degré un en ambiance pré-euclidienne

Lorsque $[A] = [J]$, les résultats généraux acquis dans [b] permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \\
 & 0 \cdot (p_{31} \cdot p_{23} - p_{21} \cdot p_{33}) + 0 \cdot (p_{33} \cdot p_{11} - p_{31} \cdot p_{13}) + 1 \cdot (p_{21} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{23}) \\
 & + \\
 & 0 \cdot (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) - 1 \cdot (p_{31} \cdot p_{12} - p_{11} \cdot p_{32}) + 0 \cdot (p_{11} \cdot p_{22} - p_{21} \cdot p_{12}) \\
 &= \\
 & (p_{21} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{23}) - (p_{31} \cdot p_{12} - p_{11} \cdot p_{32}) \\
 &= \\
 & p_{11} \cdot (p_{32} - p_{23}) + (p_{21} \cdot p_{13} - p_{31} \cdot p_{12})
 \end{aligned}$$

Et :

$$d_2$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&0 \cdot (p_{32} \cdot p_{23} - p_{22} \cdot p_{33}) + 0 \cdot (p_{33} \cdot p_{12} - p_{32} \cdot p_{13}) + 1 \cdot (p_{22} \cdot p_{13} - p_{12} \cdot p_{23}) \\
&+ \\
&1 \cdot (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) + 0 \cdot (p_{31} \cdot p_{12} - p_{11} \cdot p_{32}) + 0 \cdot (p_{11} \cdot p_{22} - p_{21} \cdot p_{12}) \\
&= \\
&(p_{22} \cdot p_{13} - p_{12} \cdot p_{23}) + (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) \\
&= \\
&p_{22} \cdot (p_{13} - p_{31}) + (p_{21} \cdot p_{32} - p_{12} \cdot p_{23})
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
&d_3 \\
&= \\
&0 \cdot (p_{32} \cdot p_{23} - p_{22} \cdot p_{33}) - 1 \cdot (p_{33} \cdot p_{12} - p_{32} \cdot p_{13}) + 0 \cdot (p_{22} \cdot p_{13} - p_{12} \cdot p_{23}) \\
&+ \\
&1 \cdot (p_{21} \cdot p_{33} - p_{23} \cdot p_{31}) + 0 \cdot (p_{31} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{33}) + 0 \cdot (p_{11} \cdot p_{23} - p_{21} \cdot p_{13}) \\
&= \\
&-1 \cdot (p_{33} \cdot p_{12} - p_{32} \cdot p_{13}) + (p_{21} \cdot p_{33} - p_{23} \cdot p_{31}) \\
&= \\
&p_{33} \cdot (p_{21} - p_{12}) + (p_{32} \cdot p_{13} - p_{23} \cdot p_{31})
\end{aligned}$$

5.4 Les coefficients de degré deux en ambiance pré-euclidienne

Lorsque $[A] = [J]$, les résultats généraux acquis dans [b] permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}
&d_{11} \\
&= \\
&p_{11} \cdot (-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + p_{21} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot A_{12}^3) + p_{31} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot A_{13}^2) \\
&= \\
&-p_{11} \\
&d_{22} \\
&= \\
&p_{12} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot A_{21}^3) + p_{22} \cdot (1 \cdot -1 - 0 \cdot 0) + p_{32} \cdot (0 \cdot 0 - A_{23}^1 \cdot 0) \\
&= \\
&-p_{22} \\
&d_{33} \\
&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & p_{13} \cdot (A_{31}^2 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + p_{23} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot A_{12}^3) + p_{33} \cdot (-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) \\
 & = \\
 & -p_{33}
 \end{aligned}$$

Avec l'expression [b ; p. 38], il vient par exemple :

$$\begin{aligned}
 & d_{12} \\
 & = \\
 & -p_{11} \cdot (A_{12}^2 \cdot A_{23}^3 - A_{13}^2 \cdot A_{22}^3) - p_{12} \cdot (A_{11}^2 \cdot A_{23}^3 - A_{13}^2 \cdot A_{21}^3) - p_{13} \cdot (A_{11}^2 \cdot A_{22}^3 - A_{12}^2 \cdot A_{21}^3) \\
 & -p_{21} \cdot (A_{13}^1 \cdot A_{22}^3 - A_{12}^1 \cdot A_{23}^3) - p_{22} \cdot (A_{11}^1 \cdot A_{23}^3 - A_{13}^1 \cdot A_{21}^3) - p_{23} \cdot (A_{12}^1 \cdot A_{21}^3 - A_{11}^1 \cdot A_{22}^3) \\
 & -p_{31} \cdot (A_{12}^1 \cdot A_{23}^2 - A_{13}^1 \cdot A_{22}^2) - p_{32} \cdot (A_{13}^1 \cdot A_{21}^2 - A_{11}^1 \cdot A_{23}^2) - p_{33} \cdot (A_{12}^1 \cdot A_{21}^2 - A_{11}^1 \cdot A_{12}^2) \\
 & = \\
 & -p_{11} \cdot A_{12}^2 \cdot A_{23}^3 + p_{12} \cdot A_{13}^2 \cdot A_{21}^3 - p_{13} \cdot A_{12}^2 \cdot A_{12}^3 \\
 & + p_{21} \cdot A_{12}^1 \cdot A_{23}^3 - p_{22} \cdot A_{13}^1 \cdot A_{12}^3 + p_{23} \cdot A_{12}^1 \cdot A_{12}^3 \\
 & - p_{31} \cdot A_{12}^1 \cdot A_{23}^2 + p_{32} \cdot A_{13}^1 \cdot A_{12}^2 + p_{33} \cdot A_{12}^1 \cdot A_{12}^2 \\
 & = \\
 & -p_{11} \cdot 0 \cdot 0 - p_{12} \cdot A_{13}^2 \cdot A_{12}^3 - p_{13} \cdot 0 \cdot A_{12}^3 \\
 & + p_{21} \cdot 0 \cdot 0 - p_{22} \cdot 0 \cdot A_{12}^3 + p_{23} \cdot 0 \cdot A_{12}^3 \\
 & - p_{31} \cdot 0 \cdot 0 + p_{32} \cdot 0 \cdot 0 + p_{33} \cdot 0 \cdot 0 \\
 & = \\
 & -p_{12} \cdot A_{13}^2 \cdot A_{12}^3 \\
 & = \\
 & -p_{12} \cdot -1 \cdot 1 \\
 & = \\
 & p_{12}
 \end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
 & d_{21} \\
 & = \\
 & -p_{11} \cdot (A_{22}^2 \cdot A_{13}^3 - A_{23}^2 \cdot A_{12}^3) - p_{12} \cdot (A_{21}^2 \cdot A_{13}^3 - A_{23}^2 \cdot A_{11}^3) - p_{13} \cdot (A_{21}^2 \cdot A_{12}^3 - A_{22}^2 \cdot A_{11}^3) \\
 & -p_{21} \cdot (A_{23}^1 \cdot A_{12}^3 - A_{22}^1 \cdot A_{13}^3) - p_{22} \cdot (A_{21}^1 \cdot A_{13}^3 - A_{23}^1 \cdot A_{11}^3) - p_{23} \cdot (A_{22}^1 \cdot A_{11}^3 - A_{21}^1 \cdot A_{12}^3) \\
 & -p_{31} \cdot (A_{22}^1 \cdot A_{13}^2 - A_{23}^1 \cdot A_{12}^2) - p_{32} \cdot (A_{23}^1 \cdot A_{11}^2 - A_{21}^1 \cdot A_{13}^2) - p_{33} \cdot (A_{22}^1 \cdot A_{11}^2 - A_{21}^1 \cdot A_{12}^2) \\
 & = \\
 & -p_{11} \cdot (0 \cdot A_{13}^3 - 0 \cdot A_{12}^3) - p_{12} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 0) - p_{13} \cdot (0 \cdot A_{12}^3 - 0 \cdot 0) \\
 & -p_{21} \cdot (A_{23}^1 \cdot A_{12}^3 - 0 \cdot 0) - p_{22} \cdot (0 \cdot 0 - A_{23}^1 \cdot 0) - p_{23} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot A_{12}^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -p_{31} \cdot (0 \cdot A_{13}^2 - A_{23}^1 \cdot 0) - p_{32} \cdot (A_{23}^1 \cdot 0 - 0 \cdot A_{13}^2) - p_{33} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 0) \\
& = \\
& -p_{21} \cdot A_{23}^1 \cdot A_{12}^3 \\
& = \\
& -p_{21} \cdot 1 \cdot 1 \\
& = \\
& -p_{21}
\end{aligned}$$

Etc.

5.5 L'inverse des Hessiennes en ambiance pré-euclidienne non-dégénérée

Il s'agit de trouver la valeur des coefficients A et B lorsque :

$$\begin{aligned}
& [Hess_{(\delta^{(3)}\mathbf{r},0)}\Lambda(\delta^{(3)}\mathbf{r})] \cdot [Hess_{(\delta^{(3)}\mathbf{r},0)}\Lambda(\delta^{(3)}\mathbf{r})]^{-1} \\
& = \\
& \{\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b})\} \cdot \{A \cdot Id_3 + B \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b})\} \\
& = \\
& \alpha \cdot A \cdot Id_3 + \{\alpha \cdot B + \beta \cdot A + \beta \cdot B \cdot ||^{(3)}\mathbf{b}||^2\} \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b}) \\
& = \\
& Id_3
\end{aligned}$$

Ces coefficients doivent vérifier :

$$\alpha \cdot A = 1$$

$$B \cdot (\alpha + \beta \cdot ||^{(3)}\mathbf{b}||^2) + \beta \cdot A = 0$$

... dans un contexte où :

$$\alpha \cdot (\alpha + \beta \cdot ||^{(3)}\mathbf{b}||^2) \neq 0$$

Il en résulte que :

$$A = \frac{1}{\alpha}, \alpha \neq 0$$

$$B = -\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\alpha + \beta \cdot ||^{(3)}\mathbf{b}||^2}, (\alpha + \beta \cdot ||^{(3)}\mathbf{b}||^2) \neq 0$$

5.6 Les matrices périennes ordinaires liées à un phénomène de type Thirring-Lense

Je finis ici les calculs exposés en [remarque 4.6](#). En partant de :

$$\begin{aligned} & -W^2 \cdot (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1)^2 \\ & = \\ & (1 - 2 \cdot W^2)^3 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)^2 \cdot \{8 \cdot (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1) + 512 \cdot (1 - W^2)\} \end{aligned}$$

Il est possible de prouver par étapes successives que :

$$\begin{aligned} & (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1)^2 \\ & = \\ & (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1) \cdot (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1) \\ & = \\ & 16 \cdot W^4 - 8 \cdot W^3 - 4 \cdot W^2 - 8 \cdot W^3 + 4 \cdot W^2 + 2 \cdot W - 4 \cdot W^2 + 2 \cdot W + 1 \\ & = \\ & 16 \cdot W^4 - 16 \cdot W^3 - 4 \cdot W^2 + 4 \cdot W + 1 \end{aligned}$$

Et donc que :

$$-W^2 \cdot (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1)^2 = -16 \cdot W^6 + 16 \cdot W^5 + 4 \cdot W^4 - 4 \cdot W^3 - W^2$$

Puis, par des calculs similaires que :

$$\begin{aligned} (1 - 2 \cdot W^2)^3 &= -8 \cdot W^6 + 12 \cdot W^4 - 6 \cdot W^2 + 1 \\ (-2 \cdot W^2 + 2 \cdot W + 1)^2 &= 4 \cdot W^4 - 8 \cdot W^3 + 4 \cdot W + 1 \\ 8 \cdot (4 \cdot W^2 - 2 \cdot W - 1) + 512 \cdot (1 - W^2) &= -480 \cdot W^2 - 16 \cdot W + 480 \end{aligned}$$

Ce qui permet de continuer avec :

$$\begin{aligned} & (1 - 2 \cdot W^2)^3 \cdot (1 - 2 \cdot W^2 + 2 \cdot W)^2 \\ & = \\ & (-8 \cdot W^6 + 12 \cdot W^4 - 6 \cdot W^2 + 1) \cdot (4 \cdot W^4 - 8 \cdot W^3 + 4 \cdot W + 1) \\ & = \\ & -32 \cdot W^{10} + 64 \cdot W^9 + 48 \cdot W^8 - 128 \cdot W^7 - 32 \cdot W^6 + 96 \cdot W^5 + 16 \cdot W^4 - 32 \cdot W^3 - 6 \cdot W^2 + 1 \end{aligned}$$

Puis ensuite avec :

$$\begin{aligned} & (-480 \cdot W^2 - 16 \cdot W + 480) \cdot \\ & \{-32 \cdot W^{10} + 64 \cdot W^9 + 48 \cdot W^8 - 128 \cdot W^7 - 32 \cdot W^6 + 96 \cdot W^5 + 16 \cdot W^4 - 32 \cdot W^3 - 6 \cdot W^2 + 1\} \\ & = \\ & 15360 \cdot W^{12} - 30720 \cdot W^{11} - 23040 \cdot W^{10} + 61440 \cdot W^9 + 15360 \cdot W^8 - 46080 \cdot W^7 - 7680 \cdot W^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 15360 \cdot W^5 + 2880 \cdot W^4 - 480 \cdot W^2 + 512 \cdot W^{11} - 1024 \cdot W^{10} - 768 \cdot W^9 + 2048 \cdot W^8 \\
& + 512 \cdot W^7 - 1536 \cdot W^6 - 256 \cdot W^5 + 512 \cdot W^4 + 96 \cdot W^3 - 16 \cdot W - 15360 \cdot W^{10} + 30720 \cdot W^9 \\
& + 23040 \cdot W^8 - 61440 \cdot W^7 - 15360 \cdot W^6 + 46080 \cdot W^5 + 7680 \cdot W^4 - 15360 \cdot W^3 - 2880 \cdot W^2 + 480 \\
& = \\
& 15360 \cdot W^{12} - 30208 \cdot W^{11} - 39424 \cdot W^{10} + 91392 \cdot W^9 + 40448 \cdot W^8 - 107008 \cdot W^7 \\
& - 24576 \cdot W^6 + 61184 \cdot W^5 + 11072 \cdot W^4 - 15264 \cdot W^3 - 3360 \cdot W^2 - 16 \cdot W + 480 \\
& \text{Tout ceci permet d'aboutir à un polynome de degré douze :} \\
& 15360 \cdot W^{12} - 30208 \cdot W^{11} - 39424 \cdot W^{10} + 91392 \cdot W^9 + 40448 \cdot W^8 - 107008 \cdot W^7 \\
& - 24560 \cdot W^6 + 61168 \cdot W^5 + 11068 \cdot W^4 - 15268 \cdot W^3 - 3359 \cdot W^2 - 16 \cdot W + 480 \\
& = \\
& 0
\end{aligned}$$

Les racines réelles en sont :

$$\begin{aligned}
W &= -1,01136 \\
W &= -0,956393 \\
W &= 0,288242 \\
W &= 0,984949
\end{aligned}$$

Les huit autres racines sont des nombres complexes. Parmi les quatre valeurs réelles ci-dessus, seules la troisième et la quatrième sont acceptables eu égard aux critères fixés.

©Thierry PERIAT, 4 octobre 2025.

Références

6 Bibliographie

6.1 Travaux personnels

- [a] Vides de Maxwell et cordes cosmiques ; viXra :2405.0053, 13 pages.
- [b] Discussion sur les décompositions des produits vectoriels déformés ; viXra :2405.0054, 40 pages. La version anglo- ou américainophone est : The (E) Question in a Three-Dimensional Space - Subtitle : Analyzing a Subset of Linear Systems with the Intrinsic Method ; viXra :2503.0200, 32 pages.
- [c] The so-called extrinsic method ; viXra :2406.0127, 12 pages.
- [d] Algebraic dynamics - first stones ; viXra :2509.0108, 49 pages.
- [e] The visages of the Lorentz-Einstein Law, speculative analysis with the extrinsic method ; viXra :2506.0057, 31 pages.
- [f] Einstein-Rosen Proposition (1935) Revisited ; viXra :2107.0089, 22 pages.
- [g] Matrices périennes - Recherche d'un lien avec les opérateurs quantiques anti-commutatifs ; viXra :2509.0014, 33 pages.
- [i] Algebraic dynamics ; the first stones ; viXra :2509.0108, 49 pages.

6.2 Articles, Cours et Livres

- [01] Maxwell, J.C. : VIII. A dynamical Theory of the Electromagnetic Field ; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1 January 1865, 155 : 459–512.
- [03] Cartan, E. : Les espaces métriques fondés sur la notion de d’aire ; “Actualités scientifiques et industrielles”, numéro 72, exposés de géométrie ; Hermann et Cie, Éditeurs, Paris, 1933, 46 pages (partie centrale de l’exposé).
- [04] Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker, zweite, korrigierte Auflage) ; ©2004 Birkhäuser Verlag, Basel, ISBN 3-7643-7144-7, 366 pages.
- [05] Generalized Hartree-Fock theory and the Hubbard model ; arXiv :cond-mat/9312044v1, 10 December 1993.
- [06] On the topology of the exceptional Lie group G_2 ; Budapest University of Technology and Economics, MSc Thesis, 2011, 49 pages.
- [07] On the geometry of closed G_2 -structures ; arXiv :math/0306362v3 [Math.DG] 14 March 2005, 14 p.
- [08] Encyclopédie Bordas en 23 volumes ; Caratini, R. : les nombres et l’espace, ©Bordas Editeur 1972.
- [09] Neutrino-oscillation ; <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Neutrino-oscillation>, 18 September 2025.
- [10] Forschungsbericht 2009 - Neutrinos : Grundlegende Erkenntnisse durch rätselhaftes Teilchen, Max Planck Gesellschaft, MPI für Kernphysik, Heidelberg.
- [12] Neue Obergrenze für Neutrinomasse ; Max Planck Gesellschaft ; mpg.de/24526300/neue-obergrenze-fuer-neutrinomasse, 11. April 2025.
- [13] A.D.M., the Dynamics of General Relativity ; arXiv : 0405109v1, 19 May 2004.
- [14] $3 + 1$ formalism and bases of numerical relativity - lecture notes ; arXiv : gr-qc/0703035v1, 06 March 2007.
- [15] Cours de physique, volume 3 : Ondes, Berkeley, Collection U, chez Armand Colin, Paris, 1972, 603 p.
- [16] Lennuier, R., Gal, P.Y., Perrin, D. : Mécanique des particules, champs ; Collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris 1970, 363 p.
- [17] Allgemeine Relativitätstheorie ; 4. Auflage, ©2003 Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, ISBN 3-8274-1356-7, 343 p.
- [18] Lexikon der Mathematik in sechs Bänden, Ersten Band, © 2001, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, ISBN 3-8274-0303-0, 475 Seiten.
- [19] Lexikon der Mathematik in sechs Bänden, Band 5, © 2002, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, ISBN 3-8274-0437-1, 483 Seiten.
- [20] Geschichte der Mathematik : Tartaglia, Cardano et Ferrari, article consulté en ligne le 26 août 2024 ; www.geschichtdermathematik.de.

- [21] Landau, L.D. et Lifschitz, E.M. : Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II klassische Feldtheorie ; 12.überarbeitete Auflage ©Akademie Verlag GmbH, Berlin 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 p.
- [22] Cartan, E. : The Theory of spinors ; ©1966 by Hermann, Paris, Dover publications, Inc. New York, ISBN 0-486-64070-1, 157 p.
- [23] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; ©Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1955, 298 pages.
- [25] Quark and Lepton Mass Matrices with a Cyclic permutation Invariant Form ; arXiv :hep-phy/0005137v1 15 May 2000.