

Petrovskaya, M. S. (1963). Estimates of the residual members of the Hill series. Bull. ITA, IX, 4 (107).

English translation of

Петровская, М. С. (1963). Оценки остаточных членов рядов Хилла. Бюлл. ИТА, IX, 4 (107).

Thomas S. Ligon, <http://orcid.org/0000-0002-4067-876X>

Last change: 2021-03-07.

How this translation was made:

The starting point was a recommendation by Urs Frauenfelder, who gave me a PDF version of the original paper. Based on the date (1963), it is clear that the document was created by traditional typesetting and later scanned to create the PDF. Then I went through the following steps:

- Opened the PDF document in Microsoft Word, which automatically ran OCR (optical character recognition), and converted it to an editable Word document.
- Translated the Russian text to English using the built-in Microsoft Translator.
- Corrected obvious errors, e.g. due to hyphenation and line breaks, and to formulas inline in the text.
- Recreated all formulas and equations using the built-in Microsoft Equation Editor.
- Edited the text to apply relevant mathematics conventions, e.g. referring to Hill's series instead of Hill's rows.

Finally, Tanya Znamenskaya proofread the whole document to insure correct translation of Russian to English.

Acknowledgment

I would like to thank both Urs Frauenfelder and Tanya Znamenskaya for their valuable support.

ACADEMY OF SCIENCES OF THE UNION OF SOVIET SOCIALIST
REPUBLICS

BULLETIN INSTITUTE
THEORETICAL ASTRONOMY

Volume IX N° 4 (107)

Ussr

PUBLISHING HOUSE OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR
Moscow 1963 Leningrad

Estimates of the residual members of the Hill series

M. S. Petrovskaya

Estimates have been obtained of the residual members of the Hill series for cases where the coefficients of these series, which are series by powers of m ($m = \frac{n_0}{n_1 - n_0}$, n_0, n_1 — average movements of the sun and moon), calculated with precision of the 2nd, 3rd, 4th, 5th, 6th power of m . There are also new estimates of the residual members of Hill's series, based on the powers of m^2 , considered in the paper (Lyapunov, 1954). Estimates were found for the case $|m| \leq \sigma$ (≈ 0.080849), where σ is the value of the m parameter for the moon.

SOME ESTIMATES OF THE QUANTITY OF NEGLECTED TERMS OF HILL'S SERIES

by M. S. Petrovskaya.

The power series in $m = \frac{n_0}{n_1 - n_0}$ in Hill's Lunar Theory are considered, n_0, n_1 being the mean angular velocities of the sun and the moon. Some estimates of errors are given for the cases when the series are replaced by polynomials of 2nd, 3rd, 4th, 5th, 6th powers of m . Analogous estimates are also obtained for Hill's series expanded in m^2 which were examined in Lyapunov's paper (Lyapunov, 1954). All the estimates concern the case $|m| \leq \sigma$ (≈ 0.080849), where σ is the value of m for the Moon.

The solution to the differential equations of the movement of celestial bodies is known to have the form of infinite series. When determining the orbit of a celestial body, one usually uses approximate coordinates, which are obtained by calculating the first few members of the respective series.

Replacing thus infinite series by finite, one assumes that the error, i.e. the difference between an accurate solution and an approximate one, is small: for example, one assumes that the error has the order of the first power of the discarded members of the series, or that it is beyond the accuracy of calculations, etc. However, such assumptions are usually made without any strict mathematical justification.

Characteristic in this sense is Hill's approach to the utilization of the series he obtained in the theory of the motion of the moon (Hill, 1905). "By applying his formulas to the theory of the moon, Hill accepts $m = 0.080848933808312^1$ and in final conclusions neglects only members above the 13th order regarding m . Calculating the relationship $\frac{a_s}{a_0}^2$ with fifteen positions after the decimal sign, he considers the errors not exceeding two units of the last decimal. This conclusion, however, is based only on the comparison of calculated members of different orders and cannot be considered proven, as in fact Hill does not give any means to determine the higher margin of error in calculating $\frac{a_s}{a_0}$ in the proposed method" (Lyapunov, 1954, p. 424).

The issue of obtaining strict error estimates in the case of infinite series is closely related to the convergence of series. If a series converges in a certain area of a couple of parameters of decomposition, the error is equal to the corresponding residual member of the series.

Currently, there are several works in which numerical estimates of the convergence radius of the series of celestial mechanics have been obtained. In particular, works devoted to Hill's series are (Wintner, 1929; Merman, 1952; Lyapunov, 1954; Petrovskaya, 1959). As for finding errors in the above sense, such a task seems to have been considered only in Lyapunov's work on the series of Hill (Lyapunov, 1954), in which, as is known, the first numerical estimate of the radius of convergence of these series was given.

¹ $m = \frac{n_0}{n_1 - n_0}$, n_0, n_1 — mean motions of the sun and moon.

² a_0, a_s ($s = \pm 1, +2, \dots$) — coefficients of Hill's trigonometric series.

When finding an error estimate, Lyapunov used one of the majorant series he built for Hill's series. At the same time, the error estimate was defined as a residual member of the majorant series.

The following should be noted, however. Hill's series are trigonometric series, the coefficients of which are in turn series by powers of the parameter m ¹. Lyapunov's error estimate refers to Hill's series, the coefficients of which, with different harmonics, are presented in the form $F(m) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(m)m^{2i}$ while for the same Hill series whose coefficients look like $F_1(m) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i m^i$ (a_i don't depend on m), no error estimate was found. In practice, as is known, the series of Hill with the coefficients of the species are used $F_1(m)$.

Lyapunov's majorant series, used to calculate the error, is built in such a way that being decomposed in a series by increasing powers of m , it is not major in relation to the series of Hill with species coefficients $F_1(m)$. Therefore, the calculated error cannot be used to find an estimate of the error of the series with $F_1(m)$ coefficients.

For the same reason, there is no evidence to suggest $m = \sigma = 0.080848933808312$, can serve as an estimate from above of the error in the case of $|m| \leq \sigma$.

This paper found error estimates for Hill series with $F_1(m)$ coefficients, as well as for series with $F(m)$ coefficients. This uses majorant series obtained in the author's work (1959). Since the convergence area of these series ($|m| \leq 0.21$) is larger than the convergence area of the majorant of Lyapunov's series, $[|m| \leq 0.179$ (Merman, 1952)]² - we can expect that the error estimate will be better than the estimate obtained in the work (Lyapunov, 1954).

§ 1. Method for getting an estimate of a residual member of a power series

In this paper, the error of Hill's series is determined by the method proposed by Lyapunov in the aforementioned work. The essence of this method is this.

Let there be a series $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m^k$ and a majorant series $z = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k m^k$ ($|\alpha_k| \leq \beta_k$), formally satisfying the equation

$$z = mZ(m, z) \quad (1)$$

where $Z(m, z)$ is a certain function of m, z , decomposed in a series by whole positive powers of m, z .

Equation (1) can be used to find the convergence area of the $x(m)$ series (Lyapunov, 1954), as well as to estimate the residual member of this series.

Let the series $z(m)$ and therefore a series $x(m)$ converge in the area of $|m| \leq \sigma$. Then, due to the majorant of the $z(m)$ series for $0 \leq |m| \leq \sigma$, we will have

$$|r_n(m)| = \left| x(m) - \sum_{k=1}^n \alpha_k m^k \right| \leq z(\sigma) - \sum_{k=1}^n \beta_k \sigma^k = R_n(\sigma) \quad (2)$$

Solving the equation (1) relative to z for $m = \sigma$ we find $z(\sigma)$.

Substituting the sum $\sum_{k=1}^n \beta_k m^k$ in the equation (1) and equating the coefficients with the same powers of m , we'll find β_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Then inequality (2) will estimate the residual member $r_n(m)$ of the series $x(m)$.

§ 2. Hill's series. Residual members of Hill's series

Hill's series are a periodic solution to the first-class equations of the moon's motion, which is in the field of gravity of the earth and the sun, in the extreme case - when the parallax of the sun is zero (Hill, 1905). In a geocentric coordinate system that rotates at a speed n_0 , these equations look like:

¹ Cf. footnote on page 257.

² Cf. note on page 265.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2}x - 2m\frac{d}{d\tau}y + \frac{x}{r^3} &= -3m^2x \\ \frac{d^2}{d\tau^2}y + 2m\frac{d}{d\tau}x + \frac{y}{r^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where $\tau = (n_1 - n_0)(t - t_0)$, $m = \frac{n_0}{n_1 - n_0}$, $\chi = \frac{k^2(T+L)}{(n_1 - n_0)^2}$, T, L mass of the earth and moon, n_1, n_0 — average motions of the moon and the sun, k^2 — constant of gravity, t time.

Hill considered the following solution of equations (3):

$$x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s \cos(2s+1)\tau, y = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s \sin(2s+1)\tau \quad (4)$$

The coefficients of series (4) satisfy the infinite system of equations

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} ([j, s]a_s a_{s-j} + [\bar{j}]m^2 a_s a_{j-s-1} + (\bar{j})m^2 a_s a_{-j-s-1}) = 0, \quad (5)$$

where $[j, s], [\bar{j}], (\bar{j})$ are some rational functions of m .

Making a substitution

$$a_s = a_0 b_s \quad (s = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (6)$$

Hill converts the system (5) to look like this:

$$b_j = f_j(m, b_{-1}, b_1, b_{-2}, b_2, \dots) \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (7)$$

Equations (7) together with equality (6) and equality

$$a_0 = l^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{3m^2}{2l} \frac{a_{-1}}{a_0} \right\}^{-\frac{1}{3}} \quad (8)$$

with

$$\left. \begin{aligned} a &= Kl^{-1/3}(1+m)^{2/3}, \quad K = k^{2/3}n_1^{-2/3}(T+L)^{1/3}, \\ l &= 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I &= 1 + (b_1 + b_{-1})^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{6}(b_1 + b_{-1})^2 + \frac{5}{8}b_1 b_{-1} - \frac{5}{2}(b_2 + b_{-2}) \right] \\ &+ (b_2 + b_{-2}) \left[\frac{3}{4}(b_2 + b_{-2}) + 6b_1 b_{-1} \right] + 6(b_1 + b_{-1})(b_1 b_2 + b_{-1} b_{-2}) \\ &+ 3b_1 b_{-1} + 45b_1^2 b_{-1}^2 + 3b_2 b_{-2}, \end{aligned} \quad (10)$$

determine series coefficients (4).

By solving the system (7) by successive approximations, Hill obtains

$$b_j = \sum_{i=2j}^{\infty} b_{ji} m^i \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11)$$

After substitution (11) in (8) a_0 has the appearance:

$$a_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{0i} m^i. \quad (12)$$

In the work (Lyapunov, 1954) the solution to Hill's problem is considered in the system of coordinates $\{\xi, \eta\}$, defined by equality:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -1 + a^{-1}(x \cos \tau + y \sin \tau), \\ \eta &= -a^{-1}(x \sin \tau - y \cos \tau), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

And it looks like:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_0 a^{-1} - 1 + a^{-1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s \cos 2s\tau, \\ \eta &= a^{-1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s \sin 2s\tau \quad (s \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Lyapunov introduces the parameter $\lambda = m^2$ so that the system (5) and equality (6) are recorded as follows:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} ([j, s] a_s a_{s-j} + [\bar{j}] m^2 a_s a_{j-s-1} + (\bar{j}) m^2 a_s a_{-j-s-1}) = 0, \quad (15)$$

$$(j = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$a_0 = l^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{3\lambda}{2l} \frac{a_{-1}}{a_0} \right\}^{-\frac{1}{3}}. \quad (16)$$

The solution of equations (15) is presented in the form of series by powers of λ

$$a_\sigma = -a \sum_{s=\sigma}^{\infty} a_{s,\sigma} \lambda^s \quad (\sigma = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (17)$$

Lyapunov examines the series by powers of λ , obtained after lookup (17) in (14). Substituting series (17)-(4) into equations (3) and equating coefficients with the same powers of λ and the same harmonics, he obtains the following formulas, from which are consistently defined $a_{s,\sigma}$:

$$\left. \begin{aligned} a_{s,0} &= -\frac{1}{3l} \mathcal{A}_{s,0}, \\ a_{s,\sigma} &= \frac{\frac{3}{2} l \mathcal{A}_{s,-\sigma} - [4\sigma^2 - 4(1+m)\sigma + \frac{3}{2} l] \mathcal{A}_{s,\sigma}}{2\sigma^2 [2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2]} \end{aligned} \right\} \quad (17^*)$$

where $\mathcal{A}_{s,\sigma}$ are polynomials relative to $a_{k,l}$, and $k < s$.

Since under λ , m , corresponding to the Lunar Theory, these series converge (Lyapunov, 1954), the difference between the solution ξ, η , and the different sums of the relevant series case amounts equal to the residual members of these series:

$$\left. \begin{aligned} \delta_p \xi \\ \delta_p \eta \end{aligned} \right\} = - \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{-j}^{+j} a_{j,s} \lambda^j \begin{cases} \cos 2s\tau \\ \sin 2s\tau \end{cases} \quad (18)$$

Lyapunov also finds the estimates $|\delta_p \xi|$ and $|\delta_p \eta|$ at $m = \sigma, p = 1, 2, 3$.

As noted, Hill series (4), (6), (8), (11) are used in practice.

Denote

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \cos(2s+1)\tau, \\ B_2 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \sin(2s+1)\tau \quad (s \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Then from (4), (6) we have

$$\begin{cases} x = a_0(1 + B_1) \\ y = a_0(1 + B_2) \end{cases} \quad (20)$$

When Hill's theory is applied in practice (Brown, 1899), approximate x and y values are as follows: first, series coefficients (19) are calculated from equations (7) for $m = \sigma$ with a degree of accuracy; then the approximate values b_j then are substituted in the a_0 limit formulas, and finally the values found, b_s, a_0 are substituted in formulas (19), (20).¹

As shown in the paper (Petrovskaya, 1959), the series (11), (19) converge absolutely and evenly when $|m| \leq 0.21$.

It is not difficult to establish that the series (12), (4) converge at the same values m . Indeed, in the mentioned work obtained inequalities $|m^{-1}b_{-1}| \leq 0.35, |m^{-1}b_1| \leq 0.08, |m^{-1}i^4 b_i| \leq 0.39$ ($i = \pm 2, \pm 3, \dots$). Then

$$|b_{-1}| \leq 0.35 \times 0.21, |b_1| \leq 0.08 \times 0.21, |b_{\pm 2}| \leq \frac{1}{16} \times 0.39 \times 0.21. \quad (21)$$

Turning to the formulas (8) -- (10) and taking into account that $b_{\pm 1}, b_{\pm 2}$ are regular functions of m when $|m| \leq 0.21$, we can present a_0 in the form of

$$a_0 = a\varphi(m),$$

Where

$$\varphi(m) = [1 + mf_1(m)]^{\frac{1}{3}} [1 + mf_2(m)]^{-\frac{1}{3}}, \quad (22)$$

and $f_1(m), f_2(m)$ are regular functions of m .

Taking into account (21), we have

$$|mf_1(m)| \leq 0.1 < 1, |mf_2(m)| \leq 0.5 < 1.$$

Consequently, each of the multipliers in (22) at $|m| \leq 0.21$ is a regular function of m . The same property has the expression $(1 + m)^{2/3} l^{-1/3}$ of the multiplier a . Thus, the series (12) and (4) converge absolutely and evenly (as a work of absolutely and evenly converging series). Since members of the series (4) are regular functions of m , then applying the theorem of Weierstrass, we come to the conclusion that if the series of Hill are placed on increasing powers of m , the latter will converge with $|m| \leq 0.21$.

Returning now to the calculation of approximate values of x, y , we come to the conclusion that for $|m| \leq \sigma$ at each stage of the calculation the errors will be equal to the corresponding residual members of the series.

Let r be some power series. By $r^{(k)}$ we will denote the k^{th} sums of this series.

Given the above-described way of calculating x, y , we will sequentially find estimates for expression modules (see. (11), (19), (12), (20)):

$$\delta_k b_j = \sum_{i=k+1}^{\infty} b_{ji} m^i \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (23)$$

$$\begin{cases} \delta_k B_1 \\ \delta_k B_2 \end{cases} = \sum_{\substack{j=-\infty \\ (j \neq 0)}}^{+\infty} \delta_k b_j \begin{cases} \cos(2s+1)\tau \\ \sin(2s+1)\tau \end{cases} \quad (24)$$

To determine a_0 Hill offers several formulas, where a_0 appears as different functions of b_j . When calculating a_0 , Hill doesn't use formulas (8)–(10). For our purposes, presenting a_0 in the form of (8), (9) is the most convenient.

$$\delta_k a_0 = K \sum_{i=k+1}^{\infty} a_{0i} m^i, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_k x &= a_0(1 + B_1) - a_0^{(k)} \left(1 + B_1^{(k)}\right), \\ \Delta_k y &= a_0(1 + B_2) - a_0^{(k)} \left(1 + B_2^{(k)}\right), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

When $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

The work will also find new estimates of the values of $|\delta_p \xi|, |\delta_p \eta|$ ($p = 1, 2, 3$).

All of these error estimates will be obtained in such a way that they are legitimate for all $|m| \leq \sigma$ at the same time.

§ 3. Majorant series and majorant equations

Since the error estimates will be calculated in the way outlined in § 1, we will first consider the series, majorant in relation to the § 2 series.

In the works devoted to the study of the convergence of the Hill series (above) various majorant series in relation to the series of Hill were built and their radius of convergence determined. When finding a convergence radius, these series were presented as solutions to certain equations, and the theory of implicit functions defined the circle in which the solution of interest to us decomposes into a power series.

In the works (Merman, 1952; Lyapunov, 1954) majorant equations are obtained on the basis of recurrent ratios (17*). Appropriate estimates of the circle of convergence: $|m| \leq \frac{1}{7}, |m| \leq 0.179$.

In the work (Wintner, 1929) for the infinite Hill system (7) one majorant equation is built by obtaining estimates of the f_j ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) values of the series coefficients b_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) so that the latter do not depend on j . The circle of convergence obtained by Wintner is $|m| \leq \frac{1}{12}$.

Analogously, in the work (Petrovskaya, 1959) for the system (7) three majorant equations are constructed so that two of them are majorant series (7) for $j = \pm 1$ and the third for all other equations. Appropriate convergence circle estimate $|m| \leq 0.21$.

In this work, the majorant system looks like:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k &= m(A_k + B_k \gamma_{-1}^2 + C_k \gamma_{-1} \gamma + D_k \gamma_{-1} \gamma + E_k \gamma_1 \gamma + F_k \gamma^2 + G_k \gamma), \\ \gamma &= m(C_2 \gamma_1 \gamma_{-1} + D_2 \gamma_{-1} \gamma + E_2 \gamma_1 \gamma + F_2 \gamma^2 + G_2 \gamma + K_2 \gamma_1^2 + H_2 \gamma_1) \end{aligned} \right\} \quad (k = \pm 1). \quad (27)$$

Coefficients at $\gamma_{\pm 1}, \gamma$, in the right parts of the rational functions of m , are given explicitly for the series in the work (Petrovsky, 1959, p. 462-464).

Series of $m\gamma_{\pm 1}, m j^{-4} \gamma$, where $\gamma_{\pm 1}, \gamma$ is a solution to equations (27), which disappears at $m = 0$ are majorants of the series $b_{\pm 1}, b_j$ ($j = \pm 2, \pm 3, \dots$) (formulas (11)).

If the function $\psi(m)$ is a majorant in relation to the function $\varphi(m)$, then this circumstance will be recorded in the form of equality

$$\psi(m) = \text{maj} \varphi(m)$$

So, we have

$$m\gamma_{\pm 1} = \text{maj} b_{\pm 1}, m j^{-4} \gamma = \text{maj} b_j \quad (j = \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (28)$$

Denote

$$\tilde{B} = m \left(\gamma_{-1} + \gamma_1 + \gamma \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right). \quad (29)$$

Then from (19), (27) have

$$\tilde{B} = \text{maj}B_1 = \text{maj}B_2. \quad (29')$$

We find a majorant for the function of $a_0(m)$ defined by formulas (8) (10). We have

$$\frac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{m^2}{(1+m)^2}}$$

and

$$\left[1 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{(1+m)^2}\right]^{-\frac{1}{3}} = \text{maj} \left[\frac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (30')$$

Next

$$\frac{1}{1-2m+\frac{3}{2}m^2} = \text{maj} \frac{1}{1+2m+\frac{3}{2}m^2} \quad (30'')$$

and

$$\left[1 - \frac{3}{2}\frac{m^3\gamma_{-1}}{1-2m+\frac{1}{2}m^2}\right]^{-\frac{1}{3}} = \text{maj} \left[1 + \frac{3}{2}\frac{m^2}{l}\frac{a_{-1}}{a_0}\right]^{-\frac{1}{3}}. \quad (30''')$$

Consider the function

$$\gamma_0 = \left[\frac{(1-m)^2}{1-2m+\frac{1}{2}m^2} \right]^{\frac{1}{3}} \times \text{maj} l^{\frac{1}{3}} \times \left[1 - \frac{3}{2}\frac{m^3\gamma_{-1}}{1-2m+\frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}}, \quad (31)$$

Where

$$\text{maj} l^{\frac{1}{3}} = \left\{ \begin{aligned} &1 - m^2(\gamma_{-1} + \gamma_1)^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{6}m^2(\gamma_{-1} + \gamma_1)^2 + \frac{5}{8}m^2\gamma_{-1}\gamma_1 + \frac{5}{16}m\gamma \right]^{-\frac{1}{3}} \\ &-\frac{1}{8}m^2\gamma \left(\frac{3}{32}\gamma + 6m\gamma_{-1}\gamma_1 \right) - \frac{3}{8}m^3(\gamma_{-1} + \gamma_1)^2\gamma - 3m^2\gamma_{-1}\gamma_1 \\ &-45m^4\gamma_{-1}^2\gamma_1^2 - \frac{3}{256}m^2\gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Considering (27), (30), it's easy to see that

$$\gamma_0 = K^{-1}\text{maj}a_0. \quad (33)$$

By now denoting $\tilde{\gamma}_0$ and B^* any majorants for a_0 and B_i ($i = 1, 2$),

$$z = \tilde{\gamma}_0(1 + B^*) \quad (34)$$

and understanding under x and y at the series (20), we have

$$z = \text{maj}x = \text{maj}y \quad (35)$$

Let

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\pm 1} &= m\gamma_{\pm 1}, \\ \beta &= s^{-4}\text{maj}b_s \ (s = \pm 2, \pm 3, \dots) \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

where $b_s = \frac{a_s}{a_0}$ ($s = \pm 2, \pm 3, \dots$) is a series of powers of λ obtained by solving system (15), and at the same time at $\lambda = m^2$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\pm 1} &= m\gamma_{\pm 1}, \\ \beta &= m\gamma \end{aligned} \right\} \quad (36^*)$$

Let

$$\beta_0 = K^{-1} \text{maj} a_0, \quad (37)$$

where a_0 is a series (16), when $\lambda = m^2$

$$\beta_0 = \gamma_0. \quad (37^*)$$

Turning to formulas (14), (16), (10), consider the expressions

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \text{maj} l^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \beta_{-1}}{1 - 2m + \frac{1}{2} m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \left\{ 1 + \beta_{-1} + \beta_1 + \beta \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right\} - 1, \\ \tilde{\eta} &= \text{maj} l^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \beta_{-1}}{1 - 2m + \frac{1}{2} m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \left\{ \beta_{-1} + \beta_1 + \beta \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

and $\text{maj} l^{1/3}$ there is an expression (32) in which a replacement is made $m\gamma_{\pm 1} = \beta_{\pm 1}$, $m\gamma = \beta$.

It is obvious that

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi} &= \text{maj} \xi, \\ \tilde{\eta} &= \text{maj} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

With the help of majorant series (27), (33), (35), (39) on the method § 1 we find estimates of the errors in question in § 2.

Before we get to this point, let's explain the comment on page 258 relative to the relatively majorant Lyapunov series, which was used to obtain error estimates (18).

This series was built as follows. In the coefficients at λ, λ^2 we put $m = \sigma$ (in $a_{1,\pm 1}, a_{2,\pm 2}, a_{2,0}$) and as the first members of the majorant series take the values of the expressions obtained. Subsequent members of the majorant series were determined by a recursive formula, getting the ratios (17*) between coefficients $a_{s,\sigma}$.

The question of whether the resulting error estimate is equal to the residual member of the majorant series built applies to $m < \sigma$ and whether it can be used to obtain an error estimate in the case of series (4), (11), Lyapunov does not consider. It is easy to establish that the majorant series of Lyapunov does not have such properties. In fact, decomposing

$$a_{2,0} = -\frac{3}{256} \cdot \frac{3816 - 1616m - 8492m^2 - 13616m^3 - 10674m^4 - 4212m^5 - 729m^6}{(6 - 4m + m^2)^2(2 + 4m + 3m^2)} \quad (40)$$

in a series of powers of m , we get

$$a_{2,0} = -\frac{159}{256} + \frac{65}{96}m + \frac{397}{576}m^2 + \dots \quad (40')$$

As an appropriate coefficient of the majorant series, Lyapunov takes the expression $(-a_{2,0})$ and considers $m = \sigma$.

From (40') it is clear that $(-a_{2,0})$ is not majorant for $a_{2,0}$. It follows that the resulting error estimate cannot be used in the estimate of the residual member of the Hill series (4), (11).

Next we have:¹

¹ Coefficient $a_{2,0}$ (cf. formula (40)), $a_{2,\pm 2}$ are derived from formula (17*).

$$\left. \begin{aligned} a_{2,-2} &= -\frac{27 \cdot 92m + 184m^2 + 124m^3 - 28m^4 - 21m^5}{64(6 - 4m + m^2)^2(2 + 4m + 3m^2)} \\ a_{2,2} &= -\frac{27 \cdot 1000 + 2816m + 3396m^2 + 1760m^3 + 430m^4 + 48m^5 + 27m^6}{256(6 - 4m + m^2)^2(2 + 4m + 3m^2)} \end{aligned} \right\} \quad (40'')$$

The coefficient of the majorant series at λ^2 the value of the expression $-(a_{2,0} + a_{2,-2} + a_{2,2})$ at $m = \sigma$, we have

$$\begin{aligned} -(a_{2,0} + a_{2,-2} + a_{2,2}) &= \frac{3}{16} \left(\frac{8280 + 1848m - 1780m^2 - 6300m^3}{-4734m^4 - 1598m^5 - 495m^6 - 81m^7} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2160 + 1152m - 960m^2 - 1280m^3}{+1784m^4 - 864m^5 + 224m^6 - 32m^7 + 3m^8} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (41)$$

The derivative of this expression is equal to

$$\frac{3}{16} \frac{P_1(m)}{P_2^2(m)} \quad (41')$$

where

$$\begin{aligned} P_1(m) &= -5546880 + 8208000m - 8305280m^2 - 109772160m^3 - 3970400m^4 \\ &\quad - 3080096m^5 + 12996240m^6 - 3703616m^7 - 741416m^8 - 4968m^9 \\ &\quad - 7844m^{10} + 94504m^{11} - 19602m^{12} + 2970m^{13} + 243m^{14}, \\ P_2(m) &= 2160 + 1152m - 960m^2 - 1280m^3 + 1784m^4 - 864m^5 + 224m^6 - 32m^7 + 3m^8. \end{aligned}$$

We have for $m > 0$

$$\begin{aligned} P_1(m) &< -5546880 + 8208000m + 12996240m^6 + 94504m^{11} + 2970m^{13} + 243m^{14} \\ &= \tilde{P}_1(m). \end{aligned} \quad (41'')$$

When $0 < m \leq \sigma$

$$\tilde{P}_1(m) < \tilde{P}_1(\sigma) < -4883268 < 0.$$

Thus, the expression $-(a_{2,0} + a_{2,-2} + a_{2,2})$ is not a monotonically increasing function of m . Therefore, Lyapunov's estimate does not apply to the case $0 < m < \sigma$.

Note. Note that the result of the convergence of the series of Hill, obtained in the work (Merman, 1952), is considered only proven for $m = 0.18$. However it is easy to prove, without going beyond the same method, convergence in the area $0 \leq m \leq 0.18$ and for the power series in the area $|m| \leq 0.179$.

In fact, in the work (Merman, 1952) to get an estimate of the convergence area of the series of Hill (17), (4) built the next majorant series. Coefficients at λ series (17)

$$a_{1,1} = -\frac{9}{16} \frac{2 + 4m + 3m^2}{6 - 4m + m^2}, \quad a_{1,-1} = \frac{3}{16} \frac{38 + 28m + 9m^2}{6 - 4m + m^2} \quad (A)$$

and the coefficients at λ^2 (40), (4), are replaced by their absolute values at $m = 0.18$ (in $-a_{1,1}, a_{1,-1}, -a_{2,0}, -a_{2,2}, -a_{2,-2}$ put $m = 0.18$). Subsequent coefficients of the majorant series were determined from the recurrent ratios

$$a_{r,\sigma} = \frac{\frac{3}{2} L A_{r,-\sigma} + \left(8 + 4M + \frac{3}{2} L\right) A_{r,\sigma}}{2(6 - 4M + M^2)} \quad (B)$$

where $L = 1 + 2M + \frac{3}{2} M^2$, $A_{r,\pm\sigma}$ are polynomials relative to $a_{k,l} (k < r)$, $M = 0.18$.

The radius of convergence of the majorant series was defined as the least positive root of equations

$$z = \frac{1 + 2^\delta}{3(1 + 2g)}, \quad 2gz = \frac{(1 - z)^3}{3 - 3z + z^2} \quad (C)$$

relative to λ , and

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}, g = \frac{h}{1-\varepsilon}, \varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon_1 - (1+3h)\varepsilon^2, \\ \varepsilon &= (a_{1,1} + a_{1,-1})\lambda, \varepsilon_1 = (a_{2,-2} + a_{2,2} + a_{2,0})\lambda^2, \\ h &= \frac{22 + 20M + 9M^2}{4(6 - 4M + M^2)}L, \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

$$a_{1,1} = -a_{1,-1}, a_{1,-1} = a_{1,-1}, a_{2,k} = -a_{2,k} (k = 0, \pm 2), \quad (E)$$

and in (E) put $m = M$.

As a result of the solution of system (C), an estimate of the convergence area of the series was obtained (17), (4):

$$m = 0.18, 0 \leq |\lambda| \leq 0.18^2 = 0.0324.$$

From the consideration of expressions (40), (40'') it is easy to establish that at $0 \leq m \leq 0.18$ absolute values of these fractions are equal — $(-a_{2,0}), (-a_{2,-2}), (-a_{2,2})$.

From (41'') we have for $0 \leq m \leq 0.18$

$$P_1(m) < -4\,069\,439 < 0,$$

therefore, the derivative (41') is negative, and the expression (41) in the $0 \leq m \leq 0.18$ period has a maximum at $m = 0$ equal to $\frac{159}{256}$. Denoting the $\max(-a_{2,k}) = a_{2,k} (k = 0, \pm 2)$, we have $a_{2,0} + a_{2,2} + a_{2,-2} = \frac{159}{256}$.

Absolute values $a_{1,\pm 1}$ for $0 \leq m \leq 0.18$ are equal $(-a_{1,1}), (a_{1,-1})$ and reach a maximum at a point of $m = 0.18$, where $\max(-a_{1,1} + a_{1,-1}) = 1.8277$. Denoting $\max(-a_{1,1}) = a_{1,1}, \max(a_{1,-1}) = a_{1,-1}$ we have $a_{1,1} + a_{1,-1} = 1.8277$. Let's build a majorant series in relation to the series by powers of λ (17), (4), assuming the coefficients for λ, λ^2 , equal $a_{k,l} (k = 1, 2; l = 0, \pm 1, \pm 2)$ and all the other coefficients determining by formula (B). Since the majorant series is still determined by the formula (B), the convergence area of it can be found again by solving the system (C) if (D) put $\varepsilon = \frac{159}{256}\lambda, \varepsilon_1 = 1.8277\lambda^2$. As a result, we get the following estimate of the series convergence area (17), (4):

$$0 \leq m \leq 0.18, 0 \leq |\lambda| \leq 0.0324.$$

Further, as it follows from Lyapunov's work, expressions (A) when decomposing them into series of powers of m have no negative coefficients.

Building majorants for $a_{2,\pm 2}, a_{2,0}$ analogously to how it is done in the work (Petrovskaya, 1959, § 3), we get

$$\begin{aligned} \text{maja}_{2,2} &= -a_{2,2}, \\ \text{maja}_{2,0} + \text{maja}_{2,-2} &= \frac{156}{256} + \frac{1369}{1920}m + \frac{11719}{14400}m^2 + \frac{518\,839}{288\,000}m^3 + \frac{13\,076\,857}{6\,480\,000}m^4 + \frac{89\,619\,601}{388\,800\,000}m^5 \\ &\quad + \frac{1\,678\,114\,957}{972\,000\,000}m^6 \\ &\quad + \frac{1}{62\,208}m^7(4\,473\,256 + 1\,818\,884m + 7\,579\,320m^2 + 6\,248\,756m^3 \\ &\quad + 2\,146\,489m^4 + 317\,901m^5)(6 - 4m + m^2)^{-2}(2 - 4m + 3m^2)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{640\,000\,000}m^7 \\ &\quad \times (2\,666\,140\,188 + 2\,125\,905\,384m + 2\,170\,555\,700m^2 + 788\,816\,100m^3 \\ &\quad + 907\,821m^4 + 14\,920\,388m^5)(6 - 4m + m^2)^{-2}(30 - 4m + m^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Now assuming

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -a_{1,-1}, a_{1,-1} = a_{1,-1}, \\ a_{2,l} &= mag a_{2,l} (l = 0, \pm 2) \end{aligned}$$

and by solving the system (C), we get the following estimate of the convergence area of the Hill series:

$$0 \leq |m| \leq 0.179 (\lambda = m^2).$$

§ 4. Estimates of the module errors $\delta_6 B_j, \delta_k B_1, \delta_k B_2, (j = \pm 1, \pm 2, \dots, k = 2, 3, \dots, 6)$

Based on (27) and outlined in § 1 when $m \leq \sigma$ we have

$$|\delta_k b_j| \leq \frac{1}{j^4} |\sigma \delta_k \bar{\gamma}_j|, \quad (42)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \delta_k \bar{\gamma}_j &= \bar{\gamma}_j - \bar{\gamma}_j^{(k)} (j = \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \bar{\gamma}_{\pm 1} &= \gamma_{\pm 1}(\sigma), \bar{\gamma}_j = \gamma(\sigma) (j = \pm 2, \pm 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Using the method of uncertain coefficients in solving equations (27) we get

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{-1}^{(6)} &= \frac{19}{16}m + \frac{5}{3}m^2 + \frac{43}{36}m^3 + \frac{14}{27}m^4 + \frac{1\,287\,869}{414\,720}m^5, \\ \gamma_1^{(6)} &= \frac{3}{16}m + \frac{1}{2}m^2 + \frac{7}{12}m^3 + \frac{11}{36}m^4 + \frac{145\,049}{138\,240}m^5, \\ \gamma^{(6)} &= \frac{393}{80}m^3 + \frac{3959}{200}m^4 + \frac{188\,987\,467}{2\,304\,000}m^5. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

The errors (43) could be found by solving numerical equations (27) with $m = \sigma$ then subtracting $\bar{\gamma}_j$ from the expression (44) in which it is supposed to $m = \sigma$.

However, in order to avoid losing accuracy in computations, we will do otherwise: on the basis of (27), (43) we will make equations for $m = \sigma$, and put in them $\delta_k \bar{\gamma}_j (j = \pm 1, \pm 2, \dots)$ and then we solve them numerically.

Designating

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma^{-1} \delta_6 \bar{\gamma}_{-1}, \alpha_2 = \sigma^{-1} \delta_6 \bar{\gamma}_1, \\ \alpha_3 &= \sigma^{-1} \delta_6 \bar{\gamma}_j (j = \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

we come to the equations:

$$\alpha_j = \bar{A}_j + \bar{B}_j \alpha_1 \alpha_2 + \bar{C}_j \alpha_1 \alpha_3 + \bar{D}_j \alpha_2 \alpha_3 + \bar{E}_j \alpha_1^2 + \bar{F}_j \alpha_2^2 + \bar{G}_j \alpha_3^2 (j = 1, 2, 3), \quad (46)$$

where¹

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= 0.818994 \cdot 10^{-4}, \bar{A}_2 = 0.281043 \cdot 10^{-4}, \bar{A}_3 = 0.149018 \cdot 10^{-2}, \\ \bar{B}_1 &= 0.472734 \cdot 10^{-3}, \bar{B}_2 = 131606 \cdot 10^{-3}, \bar{B}_3 = 0.114498, \\ \bar{C}_1 &= 0.214285 \cdot 10^{-2}, \bar{C}_2 = 0.494590 \cdot 10^{-3}, \bar{C}_3 = 0.410474 \cdot 10^{-1}, \\ \bar{D}_1 &= 0.908573 \cdot 10^{-3}, \bar{D}_2 = 0.901293 \cdot 10^{-3}, \bar{D}_3 = 0.382126 \cdot 10^{-1}, \\ \bar{E}_1 &= 0.137332 \cdot 10^{-4}, \bar{E}_2 = 0.890389 \cdot 10^{-5}, \bar{E}_3 = 0.223289 \cdot 10^{-5}, \\ \bar{F}_1 &= 0.121583 \cdot 10^{-5}, \bar{F}_2 = 0.378542 \cdot 10^{-6}, \bar{F}_3 = 0.387739 \cdot 10^{-3}, \\ \bar{G}_1 &= 0.127886 \cdot 10^{-3}, \bar{G}_2 = 0.143923 \cdot 10^{-4}, \bar{G}_3 = 0.435221 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Solving (46), we get

¹ Here and in the future rounding was made with the isbitcom?.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 0.0000819001, \\ \alpha_2 &= 0.000028105, \\ \alpha_3 &= 0.00149021. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

According to (29) we have for $m = \sigma$

$$|\delta_k B_i| \leq \delta_k \tilde{B} \quad (i = 1, 2; k = 2, 3, \dots, 6). \quad (48)$$

We will get an estimate on top for $\delta_6 \tilde{B}$ when $m = \sigma$. We have

$$0.16464646 < \sum_{\substack{j=-\infty \\ (j \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{j^4} < 0.16464647 \quad (49)$$

From (28), (43), (47) (49) we get

$$\left. \begin{aligned} \delta_6 \bar{y}_{-1} &< 0.54 \cdot 10^{-6}, \\ \delta_6 \bar{y}_1 &< 0.19 \cdot 10^{-6}, \\ \delta_6 \bar{y}_j &< 0.975 \cdot 10^{-5} \quad (j = \pm 2, \pm 3, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\delta_6 \tilde{B} < 0.24 \cdot 10^{-5}. \quad (51)$$

We will now get estimates of the error modules of $\delta_k B_i$ ($i = 1, 2$) for $k = 2, 3, 4, 5$ when $m = \sigma$. We have

$$\delta_k B_i = B_i^{(6)} - B_i^{(k)} + \delta_6 B_i \quad (i = 1, 2; k = 2, 3, \dots, 6). \quad (52)$$

It is obvious that the estimates of the $|\delta_k B_j|$ at $m = \sigma$ can be considered as relevant residual members of the majorant $\delta_k \tilde{B}$ determined by the formula.

$$\delta_k \tilde{B} = \tilde{B}^{(6)} - \tilde{B}^{(k)} + \delta_6 \tilde{B} \quad (52^*)$$

and formulas (28), (44), (51).

We won't use formulas (52*), but we'll get upper boundaries $|\delta_k B_i|$ as follows.

Let's denote a series, obtained after the replacement of coefficients of series B_i ($i = 1, 2$) at different powers of m on their modules.

From Hill's Formulas

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{2^2 \cdot 3} m^4 + \frac{11}{2^2 \cdot 3^2} m^5 - \frac{30749}{2^{12} \cdot 3^3} m^6 + m^7(\dots), \\ b_{-1} &= -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{2^2 \cdot 3^2} m^4 - \frac{14}{3^3} m^5 - \frac{7381}{2^{10} \cdot 3^4} m^6 + m^7(\dots), \\ b_2 &= \frac{25}{2^8} m^4 + \frac{803}{2^7 \cdot 3 \cdot 5} m^5 + \frac{6109}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} m^6 + m^7(\dots), \\ b_{-2} &= \frac{23}{2^7 \cdot 5} m^5 + \frac{299}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2} m^6 + m^7(\dots), \\ b_3 &= \frac{833}{2^7 \cdot 3} m^6 + m^7(\dots), \\ b_{-3} &= \frac{1}{2^6 \cdot 3} m^6 + m^7(\dots), \\ b_i &= m^7(\dots) \quad (i = \pm 4, \pm 5, \dots) \end{aligned}$$

we get

$$\bar{B}^{(6)} = \frac{11}{8} m^2 + \frac{13}{6} m^3 + \frac{4321}{2304} m^4 + \frac{2761}{2160} m^5 + \frac{5\,860\,331}{4\,147\,200} m^6. \quad (53)$$

Denote

$$\delta_k^* B = \bar{B}^{(6)} - B^{(k)} + \delta_6 \tilde{B} \quad (k = 2, 3, 4, 5). \quad (54)$$

Since the $\tilde{B}$ series coefficients are greater than or equal to the series $\bar{B}$, when $m = \sigma$ we have

$$|\delta_k B_i| < \delta_k^* B < \delta_k \tilde{B}. \quad (55)$$

Thus, using the formula (54), you can get a better error estimate than the estimate given by the formula (52*).

Below are the results of the calculation in $B_i^{(k)} (i = 1, 2; k = 2, 3, \dots, 6)$ at $m = \sigma$ with accuracy of m^7 . The calculations were made with seven decimal digits. At $k = 2, 3, 4, 5, 6$ we have

$$\left. \begin{aligned} B_1^{(k)} &= b_{-1}^{(k)} \cos \tau + (b_1^{(k)} + b_{-2}^{(k)}) \cos 3\tau + (b_2^{(k)} + b_{-3}^{(k)}) \cos 5\tau + b_3^{(k)} \cos 7\tau, \\ B_2^{(k)} &= -b_{-1}^{(k)} \sin \tau + (b_1^{(k)} - b_{-2}^{(k)}) \sin 3\tau + (b_2^{(k)} - b_{-3}^{(k)}) \sin 5\tau + b_3^{(k)} \sin 7\tau. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$B_i^{(6)} (i = 1, 2)$ After calculating the ratios, the harmonics appear as

$$\left. \begin{aligned} B_1^{(6)} &= -0.0086958 \cos \tau + 0.0017403 \cos 3\tau + 0.0000059 \cos 5\tau, \\ B_2^{(6)} &= 0.0086958 \sin \tau + 0.0017398 \sin 3\tau + 0.0000059 \sin 5\tau. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

The following table shows the harmonic coefficient values in the expressions (56) for $k = 2, 3, 4, 5$.

k	$b_{-1}^{(k)}$	$b_1^{(k)} + b_{-2}^{(k)}$	$b_1^{(k)} - b_{-2}^{(k)}$	$b_2^{(k)} + b_{-3}^{(k)}$	$b_2^{(k)} - b_{-3}^{(k)}$	$b_3^{(k)}$
2	-0.0077622	0.0012256	0.0012256	—	—	—
3	-0.0086429	0.0014898	0.0014898	—	—	—
4	-0.0086940	0.0017391	0.0017391	0.0000042	0.0000042	—
5	-0.0086958	0.0017402	0.0017400	0.0000056	0.0000056	—

From (28), (44) at $m = \sigma$ we get

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}^{(2)} &> 0.0089877, \\ \bar{B}^{(3)} &> 0.0101327, \\ \bar{B}^{(4)} &> 0.0102129, \\ \bar{B}^{(5)} &> 0.0102173, \\ 0.0102177 &< \bar{B}^{(6)} < 0.0102178 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

From (54), (51), (58) we get

$$\left. \begin{aligned} \delta_2^* B &< 0.0012325, \bar{B}^{(3)} - \bar{B}^{(2)} > 0.0012299, \\ \delta_3^* B &< 0.0000874, \bar{B}^{(6)} - \bar{B}^{(3)} > 0.0000849, \\ \delta_4^* B &< 0.0000073, \bar{B}^{(6)} - \bar{B}^{(4)} > 0.0000047, \\ 0.0000028 &< \delta_5^* B < 0.0000029, \bar{B}^{(6)} - \bar{B}^{(5)} > 0.0000005. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Formulas (59), (55) give estimates of errors that occur if B_1, B_2 are calculated by formula (56) at $k = 2, 3, 4, 5$, using the above table.

The comparison of numbers in each of the lines (59) gives some idea of the accuracy of the error estimates received. Looking at the ratios of numbers of the first and second column to the numbers themselves, we see that the first two estimates can be considered quite satisfactory. The latter estimate does not seem to be satisfactory.

If, as approximate values B_1, B_2 accept expressions (57), then, according to (51), the margin of error will not exceed 0.0000024.

According to § 1, the resulting upper boundaries are $\delta_6 \tilde{B}$ and $\delta_k^* B (k = 2, 3, 4, 5)$, the corresponding $m = \sigma$ are the upper borders $|\delta_k B_i| (k = 2, 3, 4, 5, 6; i = 1, 2)$ at $|m| < \delta$.

§ 5. Error-module estimate $\delta_k a_0, \Delta_k x, \Delta_k y$ ($k = 2, 3, 4, 5, 6$)

We get an estimate of $|\delta_6 a_0|$.

Using formulas (44), from (31), (32) we have

$$\gamma_0^{(6)} = 1 + \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{2\,125}{1\,152}m^4 + \frac{299}{144}m^5 + \frac{76\,795}{20\,736}m^6. \quad (60)$$

Designating $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0(\sigma)$ we get

$$\gamma_0^{(6)} > 1.00135260. \quad (61)$$

we have

$$\left. \begin{aligned} \gamma_j &= \gamma_j^{(6)} + \delta_6 \gamma_j \quad (j = \pm 1), \\ \gamma &= \gamma^{(6)} + \delta_6 \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

From (44), (50), (62) we have

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_{-1} &< 0.00869718, \\ \bar{\gamma}_1 &< 0.00151630, \\ \bar{\gamma}_j &< 0.000310923 \quad (j = \pm 2, \pm 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Then from (31), (32) it follows that

$$\bar{\gamma}_0 < 1.00135298. \quad (64)$$

According to (33) and § 1, we have at $|m| \leq \sigma$

$$|\delta_6 a_0| \leq K(\bar{\gamma}_0 - \bar{\gamma}_0^{(6)}) \equiv K\delta_6 \bar{\gamma}_0. \quad (65)$$

From (61), (64) we get

$$\delta_6 \bar{\gamma}_0 < 0.00000038. \quad (66)$$

We have

$$\delta_k a_0 = \sum_{i=k}^6 a_{0i} m^i + \delta_6 a_0 \quad (k = 2, 3, \dots, 6). \quad (67)$$

From The Hill Formula (Hill, 1905, Page 319)

$$a_0^{(7)} = K \left[1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2\,304}m^4 - \frac{67}{288}m^5 - \frac{45\,293}{41\,472}m^6 - \frac{8\,761}{6\,912}m^7 \right]. \quad (68)$$

From here, $|m| \leq \sigma$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=3}^6 |a_{0i} m^i| &< 0.00018482K, \\ \sum_{i=4}^6 |a_{0i} m^i| &< 0.00000866K, \\ \sum_{i=5}^6 |a_{0i} m^i| &< 0.00000111K, \\ |a_{06} m^6| &< 0.00000031K. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

From (65), (66), (69) we get at $|m| \leq \sigma$

$$\left. \begin{aligned} |\delta_2 a_0| &< 0.00018520K, \\ |\delta_3 a_0| &< 0.00000904K, \\ |\delta_4 a_0| &< 0.00000149K, \\ |\delta_5 a_0| &< 0.00000069K. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

From (68) at $|m| \leq \sigma$ we have

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=3}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00018484K, \\ \sum_{i=4}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00000868K, \\ \sum_{i=5}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00000113K, \\ \sum_{i=6}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00000032K, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$$|a_{07} m^7| < 0.00000003K. \quad (72)$$

From the comparison of numbers in (70), (71) in the lines of the same number, we see that the first three scores in (70) are relatively satisfactory, while the fourth estimate and estimate (64) [after comparison with (72)] are apparently rough estimates.

If you calculate a_0 at $m = \sigma$ with the accuracy of m^7 with seven decimal digits, we will get from (68)

$$a_0 = a_0^{(6)} = 0.9990932K. \quad (73)$$

The corresponding margin of error, according to (65), (66), will be less than $0.0000004K$.

We will now find the upper boundaries of $\Delta_k x, \Delta_k y$ at $k=2, \dots, 6$, using (34), (35). Since the series

$$\tilde{\gamma}_0 = K \sum_{i=0}^k |a_{0i}| m^i + |\delta_k a_0|, B^* = \bar{B}^{(k)} + \delta_k^* B \quad (74)$$

majorant series a_0 and B_i ($i = 1, 2$), then just formulas (34), (35). Then at $m = \sigma$

$$\left. \begin{aligned} |\Delta_k x| &\leq \Delta_k z, \\ |\Delta_k y| &\leq \Delta_k z, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

where

$$\Delta_k z = z - z^{(k)}. \quad (76)$$

Denote

$$\tilde{\gamma}_0^{(k)} = K \sum_{i=0}^k |a_{0i}| m^i, \delta_k \tilde{\gamma}_0 = |\delta_k a_0|. \quad (77)$$

Let's imagine $\delta_k z$ in the form of

$$\delta_k z = \tilde{\gamma}_0^{(k)} \delta_k^* B + \bar{B}^{(k)} \delta_k \tilde{\gamma}_0 + \delta_k \tilde{\gamma}_0 (1 + \delta_k^* B). \quad (78)$$

Using formula (68) and estimates (51), (58), (59), (66), (70), at $m = \sigma$ we get from (77), (78)

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 z &< 0.0001885K, \\ \Delta_3 z &< 0.0000092K, \\ \Delta_4 z &< 0.0000016K, \\ \Delta_5 z &< 0.0000007K, \\ \Delta_6 z &< 0.0000004K. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Thus, if as approximate values x, y at $m = \sigma$ consider the expressions $a_0^{(6)}(1 + B_1^{(6)})$ and $a_0^{(6)}(1 + B_2^{(6)})$ [instead of formulas (20)] (given by formulas (57), (73), then the corresponding errors will be less than $0.0000004 K$.

According to § 1, the estimates of $|\Delta_k x|, |\Delta_k y|$, given by inequality (75), (78), are legitimate when $|m| \leq \sigma$.

§ 6. Estimates of Errors $|\delta_p \xi|$ and $|\delta_p \eta|$ ($p = 1, 2, 3$)

First of all, we will build series (36), (37), which have properties (36*), (37*).

Analogously, the system (27) can be built as a majorant system that defines the series of the $\beta_{\pm 1}, \beta$.

The last can be written in general form

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= \tilde{A}_k + \tilde{B}_k \beta_{-1}^2 + \tilde{G}_k \beta_{-1} \beta_1 + \tilde{D}_k \beta_{-1} \beta + \tilde{E}_k \beta_1 \beta + \tilde{G}_k \beta \quad (k = \pm 1), \\ \beta &= \tilde{C}_2 \beta_1 \beta_{-1} + \tilde{D}_2 \beta_{-1} \beta + \tilde{E}_2 \beta_1 \beta + \tilde{G}_2 \beta + \tilde{K}_2 \beta_1^2 + \tilde{E}_2 \beta_1, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

implying coefficients in the right parts of function $\lambda, m, \beta_{\pm 1}, \beta$.

If you follow sequentially all operations to convert the right parts of the equations (7) to obtain the system (27) (Petrovskaya, 1959), it is easy to see that the majorant system (79) can be obtained by simply replacing m^2 by λ in some members of the decompositions A_k, B_k, C_k in the series by powers of m , in accordance with the transition from (7) to (15).

It is obvious that if in the right-hand side of the system obtained in this way (79) to make a replacement $\lambda = m^2$ then there will be equality (36*) and $\beta_{\pm 1}$ will be 1st, and β – 2nd order relative to λ .

Solving the system (79), you can get the β_k ($k = \pm 1$), β , in the form of series by powers of λ . Substituting these series in the right parts (79) and calculating the latter with precision to λ^3 we have to put

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_k &= \lambda A_k, \tilde{B}_k = \lambda m^{-2} B_k, \tilde{C}_k = \lambda m^{-2} C_k, \tilde{D}_k = D_k, \\ \tilde{E}_{-1} &= E_{-1} - \frac{m^2}{1944} (90 - 36m - 49m^2)(6 - 4m - m^2)^{-1}, \\ \tilde{E}_1 &= \frac{1}{8} (6 - m^2)(6 - 4m - m^2)^{-1}, \tilde{G}_k = \lambda m^{-1} G_k, (k = \pm 1), \\ \tilde{C}_2 &= C_2, \tilde{D}_2 = \frac{3}{400} (22950 + 1800m - 743m^2)(30 - 4m - m^2)^{-1}, \\ \tilde{E}_2 &= \frac{1}{400} (63450 + 10440m - 3129m^2)(30 - 4m - m^2)^{-1}, \tilde{G}_2 = \lambda m^{-1} G_2, \\ \tilde{K}_2 &= \lambda m^{-2} K_2, \tilde{H}_2 = \lambda m^{-1} H_2, \tilde{F}_k = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2). \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Designating $\beta_k^{(p)}, \beta^{(p)}$ particular sums of β_k, β series, by powers of the λ we have

$$\left. \begin{aligned} \beta_{-1}^{(3)} &= \tilde{A}_{-1} + \tilde{A}_{-1}^2 \tilde{B}_{-1} + \tilde{A}_{-1} \tilde{A}_1 \tilde{C}_{-1} + \tilde{A}_1 (\tilde{A}_{-1} \tilde{C}_2 + \tilde{H}_2) (\tilde{A}_{-1} \tilde{D}_{-1} + \tilde{A}_1 \tilde{E}_{-1} + \tilde{G}_{-1}), \\ \beta_1^{(3)} &= \tilde{A}_1 + \tilde{A}_1^2 \tilde{B}_1 + \tilde{A}_{-1} \tilde{A}_1 \tilde{C}_1 + \tilde{A}_1 (\tilde{A}_{-1} \tilde{C}_2 + \tilde{H}_2) (\tilde{A}_{-1} \tilde{D}_1 + \tilde{A}_1 \tilde{E}_1 + \tilde{G}_1), \\ \beta^{(3)} &= \tilde{A}_1 (\tilde{C}_2 \tilde{A}_{-1} + \tilde{H}_2) (\tilde{D}_2 \tilde{A}_{-1} + \tilde{E}_2 \tilde{A}_1 + \tilde{G}_2) + \tilde{K}_2 \tilde{A}_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

And $\tilde{A}_1, \tilde{A}_{-1}, \dots$ expression (80).

From (79), (80), (81) it follows that

$$\beta^{(1)} = \beta_{\pm 1}^{(2)} = 0. \quad (82)$$

Assuming (79), (80) $\lambda = m^2, m = \sigma$, we get

$$\left. \begin{aligned} \beta_{-1}^{(1)} &> 0.008695808, & \beta_{-1}^{(3)} &> 0.008697102, \\ \beta_1^{(1)} &> 0.001515849, & \beta_1^{(3)} &> 0.001516275, \\ & & \beta^{(3)} &> 0.0003093682. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Turning to (38), we will find $\xi^{(p)}, \tilde{\eta}^{(p)}$ ($p = 1, 2, 3$).

Making in (32) replacement (36*) and using formulas (79), (80), as well as expressions for $A_{\pm 1}$ given in the work (Petrovskaya, 1959) on page 462, 463, we get

$$\text{maj} I^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{4}(\beta_{-1} + \beta_1)^2 + \beta_{-1}\beta_1 + \dots = 1 + \frac{89}{128}\lambda^2 + \lambda^4(\dots). \quad (84)$$

Next

$$\left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda\beta_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2}m^2} \right]^{-1/3} = 1 + \frac{19}{32 \left(1 - 2m - \frac{1}{2}m^2 \right)} \lambda^2 + \lambda^4(\dots).$$

Then

$$\text{maj} I^{\frac{1}{3}} \times \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda\beta_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{89}{128}\lambda^2 + \frac{19}{32 \left(1 - 2m - \frac{1}{2}m^2 \right)} \lambda^2 + \lambda^4(\dots). \quad (85)$$

Denote

$$\frac{89}{128}\lambda^2 + \frac{19}{32 \left(1 - 2m - \frac{1}{2}m^2 \right)} \lambda^2 = I_2. \quad (86)$$

Given (85), we get

$$\text{maj} I^{\frac{1}{3}} \times \left[1 - \frac{\lambda\beta_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \left\{ \beta_{-1} + \beta_1 + \beta \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right\} = I_1 \times I_2 + I_3 + \lambda^4(\dots), \quad (87)$$

where

$$\begin{aligned} I_1 &= \beta_{-1}^{(1)} + \beta_1^{(1)}, \\ I_3 &= \beta_{-1}^{(3)} + \beta_1^{(3)} + \beta^{(3)} \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4}. \end{aligned} \quad (88)$$

Now from (38), (85) - (87) we get

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi}^{(3)} &= I_2(1 + I_1) + I_3, \\ \tilde{\eta}^{(3)} &= I_1 I_2 + I_3. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Using (49), (83), (86), (88), when $\lambda = m^2, m = \sigma$ we have

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi}^{(3)} &> 0.01032477, \\ \tilde{\eta}^{(3)} &> 0.01026492. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Let's find the upper limits $\tilde{\xi}$ and $\tilde{\eta}$. From (28), (38), (36*) we have

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \text{maj}^{1/3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \gamma_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2} m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} - 1 + \tilde{\eta}, \\ \tilde{\eta} &= \text{maj}^{1/3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \gamma_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2} m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \tilde{B}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Using inequality (63) and formulas (28), (32), when $\lambda = m^2, m = \sigma$ we have

$$\left. \begin{aligned} \xi &< 0.01032518, \\ \tilde{\eta} &< 0.01026528. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

From (90), (92) we have

$$\left. \begin{aligned} \delta_3 \xi &= \xi - \xi^{(3)} < 0.00000041 = \delta_3 \zeta, \\ \delta_3 \tilde{\eta} &= \tilde{\eta} - \tilde{\eta}^{(3)} < 0.00000036 < \delta_3 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Turning to work (Lyapunov, 1954), we have for $m = \sigma$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &< \{|a_{2,0}| + |a_{2,2}| + |a_{2,-2}|\} \lambda^2 < 0.00003001, \\ \varepsilon_3 &< \{|a_{3,-3}| + |a_{1,-1}| + |a_{1,1}| + |a_{3,3}|\} \lambda^3 < 0.00000028, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

where the ε_k ($k = 2, 3$) are the upper limits of the modules of the k th power series by powers of λ , resulting after substitution (17) in (14).

Denote

$$\delta_k \zeta = \sum_{i=k+1}^3 \varepsilon_i + \delta_3 \zeta \quad (k = 1, 2). \quad (95)$$

From (93), (94) we get

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \zeta &< 0.00003070, \\ \delta_2 \zeta &< 0.00000069. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

From (18), (39), (93) and § 1 it follows that at $|m| \leq \sigma$

$$\left. \begin{aligned} |\delta_3 \xi| &< \delta_3 \zeta, \\ |\delta_3 \eta| &< \delta_3 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Next, from (95), (97)

$$\left. \begin{aligned} |\delta_k \xi| &< \delta_k \zeta, \\ |\delta_k \eta| &< \delta_k \zeta \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

For comparison, we give estimates obtained in the work (Lyapunov, 1954) ¹

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \zeta &= 0.0000315_{0(+)}^{1(-)}, \\ \delta_2 \zeta &= 0.0000015_{0(+)}^{1(-)}, \\ \delta_3 \zeta &= 0.0000012_{2(+)}^{3(-)}. \end{aligned} \right\}$$

Literature

¹ Sign $(-)$ indicates that the exact number by absolute magnitude is less than written, a sign $(+)$ —more than written.

- Lyapunov A.M. 1954. About the series proposed by Hill to represent the movement of the moon. The sobr. 1, ed. AN USSR. Ляпунов А. М. 1954. О рядах, предложенных Хилл'ем для представления движения Луны. Собр. соч., 1, изд. АН СССР, М.
- Merman G. A. 1952. On Hill's yard convergence radius. The bull. ИТА, 5, 4 (67). Мерман Г. А. 1952. О радиусе сходимости рядов Хилла. Бюлл. ИТА, 5, 4 (67).
- М. Petrovskaya, 1959. A new estimate of the convergence radius of Hill's series. Bull. ИТА, 7, 6 (89). Петровская М. С, 1959. Новая оценка радиуса сходимости рядов Хилла. Бюлл. ИТА, 7, 6 (89).
- Brown E. W. 1899. Theory of the Motion of the Moon. Memoirs of the Royal Astr. Soc., LIII.
- Hill G, W. 1905. Researches in the Lunar Theory. The Collected Mathematical Works, 1, Memoir, 32.
- Wintner A. 1929. Uber die konvergenzfragen der Mondtheorie. Math. Zeitschr., 30, 1—2.

Received by the Editorial Office
12 January 1963.

Петровская, М. С. (1963). Оценки остаточных членов рядов Хилла. Бюлл. ИТА, IX, 4 (107).

Thomas S. Ligon, <http://orcid.org/0000-0002-4067-876X>

Last change: 2021-03-07.

This is the original Russian version, except that the document was created by traditional typesetting and later scanned to create the PDF. Then I went through the following steps:

- Opened the PDF document in Microsoft Word, which automatically ran OCR (optical character recognition), and converted it to an editable Word document.
- Recreated all formulas and equations using the built-in Microsoft Equation Editor.

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

том Ж, 4 (107)

СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1963 ЛЕНИНГРАД

Оценки остаточных членов рядов Хилла

М. С. Петровская

Получены оценки остаточных членов рядов Хилла для случаев, когда коэффициенты этих рядов, являющиеся рядами по степеням $m \left(m = \frac{n_0}{n_1 - n_0} \right)$, n_0, n_1 — средние движения Солнца и Луны), вычисляются с точностью до 2-й, 3-й, 4-й, 5-й, 6-й степеней относительно m . Получены также новые оценки остаточных членов рядов Хилла, расположенных по степеням m^2 , рассмотренных в работе (Ляпунов, 1954). Оценки найдены для случая $|m| \leq \sigma$ (≈ 0.080849), где σ — значение параметра m для Луны.

SOME ESTIMATES OF THE QUANTITY OF NEGLECTED TERMS OF HILL'S SERIES

by M. S. Petrovskaya.

The power series in $m = \frac{n_0}{n_1 - n_0}$ in Hill's Lunar Theory are considered, n_0, n_1 being the mean angular velocities of the sun and the moon. Some estimates of errors are given for the cases when the series are replaced by polynomials of 2, 3, 4, 5, 6 powers of m . Analogous estimates are also obtained for Hill's series expanded in m^2 which were examined in Lyapunov's paper (Ляпунов, 1954). All the estimates concern the case $|m| \leq \sigma$ (≈ 0.080849), σ being the value of m for the moon.

Решение дифференциальных уравнений движения небесных тел, как известно, имеет вид бесконечных рядов. При определении орбиты какого-либо небесного тела обычно пользуются приближенными значениями координат, которые получаются путем вычисления нескольких первых членов соответствующих рядов.

Заменяя таким образом бесконечные ряды конечными, предполагают, что погрешность, т. е. разность между точным решением и приближенным, мала: например, считают, что погрешность имеет порядок первого из отброшенных членов ряда, или, что она находится за пределами точности вычислений и т. д. Однако такие предположения, как правило, делаются без какого-либо строгого математического обоснования.

Характерным в этом смысле является подход Хилла к применению полученных им рядов в теории движения Луны (Hill, 1905). „Применяя свои формулы к теории Луны, Хилл принимает $m = 0.080848933808312^1$ и при окончательных выводах пренебрегает лишь членами выше 13-го порядка относительно m . Вычисляя при этом отношения $\frac{a_s}{a_0}$ с пятнадцатью десятичными знаками, он считает погрешности не превосходящими двух единиц последней десятичной. Это заключение, впрочем, основано только на сопоставлении вычисленных членов различных порядков и не может считаться доказанным, так как на самом деле Хилл не дает никаких средств для определения высших пределов погрешностей при вычислении $\frac{a_s}{a_0}$ по предлагаемому им способу” (Ляпунов, 1954, стр. 424).

Вопрос о получении строгих оценок погрешностей в случае бесконечных рядов тесно связан с вопросами сходимости рядов. Если ряд сходится в некоторой области значений параметров разложения, то погрешность равна соответствующему остаточному члену ряда.

В настоящее время имеется несколько работ, в которых получены численные оценки радиусов сходимости рядов небесной механики. В частности, рядам Хилла посвящены работы (Wintner, 1929; Мерман, 1952; Ляпунов, 1954; Петровская, 1959). Что же касается нахождения погрешностей в указанном выше смысле, то такая задача, по-видимому, рассматривалась лишь

¹ $m \left(m = \frac{n_0}{n_1 - n_0} \right)$, n_0, n_1 — средние движения Солнца и Луны.

² $a_0, a_1 (s = \pm 1, \pm 2, \dots)$ — коэффициенты тригонометрических рядов Хилла.

в работе Ляпунова, посвященной рядам Хилла (Ляпунов, 1954), в которой, как известно, была дана первая численная оценка радиуса сходимости этих рядов.

При нахождении оценки погрешности Ляпунов использовал один из мажорантных рядов, построенных им для рядов Хилла. При этом оценка погрешности определялась как остаточный член мажорантного ряда.

Следует, однако, отметить следующее. Ряды Хилла — это тригонометрические ряды, коэффициенты которых являются в свою очередь рядами по степеням параметра m .¹ Найденная Ляпуновым оценка погрешности относится к рядам Хилла, коэффициенты которых при различных гармониках представлены в виде $F(m) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(m)m^{2i}$ в то время как для тех же рядов Хилла, коэффициенты которых имеют вид $F_1(m) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i m^i$ (a_i не зависят от m), оценка погрешности не найдена. На практике же, как известно, применяются ряды Хилла с коэффициентами вида $F_1(m)$.

Мажорантный ряд Ляпунова, использованный для вычисления погрешности, построен таким образом, что будучи разложенным в ряд по возрастающим степеням m , он не является мажорантным по отношению к рядам Хилла с коэффициентами вида $F_1(m)$. Поэтому вычисленная погрешность не может быть использована для нахождения оценки погрешности рядов с коэффициентами $F_1(m)$.

По этой же причине нет оснований утверждать, что найденная погрешность, соответствующая значению $m = \sigma = 0.080848933808312$, может служить оценкой сверху погрешности в случае $|m| \leq \sigma$.

В настоящей работе найдены оценки погрешности для рядов Хилла с коэффициентами вида $F_1(m)$, а также для рядов с коэффициентами вида $F(m)$. При этом используются мажорантные ряды, полученные в работе автора (1959). Так как область сходимости этих рядов ($|m| \leq 0.21$) больше области сходимости мажорантного ряда Ляпунова [$|m| \leq 0.179$ (Мерман, 1952)]², то можно ожидать, что оценка погрешности будет лучше, чем оценка, полученная в работе (Ляпунов, 1954).

§ 1. Метод получения оценки остаточного члена степенного ряда

В настоящей работе погрешность рядов Хилла определяется методом, предложенным Ляпуновым в вышеупомянутой работе. Сущность этого метода состоит в следующем.

Пусть имеется ряд $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m^k$ и мажорантный ряд $z = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k m^k$ ($|\alpha_k| \leq \beta_k$), формально удовлетворяющий уравнению

$$z = mZ(m, z) \quad (1)$$

где $Z(m, z)$ — некоторая функция m, z , разлагающаяся в ряд по целым положительным степеням m, z .

Уравнение (1) может быть использовано для отыскания области сходимости ряда $x(m)$ (Ляпунов, 1954), а также для оценки остаточного члена этого ряда.

Пусть ряд $z(m)$ и, следовательно, ряд $x(m)$ сходятся в области $|m| \leq \sigma$. Тогда в силу мажорантности ряда $z(m)$ при $0 \leq |m| \leq \sigma$ будем иметь

$$|r_n(m)| = \left| x(m) - \sum_{k=1}^n \alpha_k m^k \right| \leq z(\sigma) - \sum_{k=1}^n \beta_k \sigma^k = R_n(\sigma) \quad (2)$$

Решая уравнение (1) относительно z при $m = \sigma$ найдем $z(\sigma)$.

Подставляя сумму $\sum_{k=1}^n \beta_k m^k$ в уравнение (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях m , найдем β_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда неравенство (2) даст оценку остаточного члена $r_n(m)$ ряда $x(m)$.

¹ См. сноску на стр. 257.

² См. примечание на стр. 265.

§ 2. Ряды Хилла. Остаточные члены рядов Хилла

Ряды Хилла представляют собой периодическое решение первого сорта уравнений движения Луны, находящейся в поле тяготения Земли и Солнца, в предельном случае — когда параллакс Солнца равен нулю (Hill, 1905). В геоцентрической системе координат, вращающейся со скоростью n_0 , эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2}x - 2m \frac{d}{d\tau}y + \frac{x}{r^3} &= -3m^2x \\ \frac{d^2}{d\tau^2}y + 2m \frac{d}{d\tau}x + \frac{y}{r^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\tau = (n_1 - n_0)(t - t_0)$, $m = \frac{n_0}{n_1 - n_0}$, $\chi = \frac{k^2(T+L)}{(n_1 - n_0)^2}$, T, L — массы Земли и Луны, n_1, n_0 — средние движения Луны и Солнца, k^2 — постоянная тяготения, t — время.

Хилл рассмотрел следующее решение уравнений (3):

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_s \cos(2s + 1)\tau, y = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_s \sin(2s + 1)\tau \quad (4)$$

Коэффициенты рядов (4) удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} ([j, s]a_s a_{s-j} + [\bar{j}]m^2 a_s a_{j-s-1} + (\bar{j})m^2 a_s a_{-j-s-1}) = 0, \quad (5)$$

где $[j, s]$, $[\bar{j}]$, $(\bar{j})$ — некоторые рациональные функции m .

Делая замену

$$a_s = a_0 b_s \quad (s = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (6)$$

Хилл преобразует систему (5) к виду:

$$b_j = f_j(m, b_{-1}, b_1, b_{-2}, b_2, \dots) \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (7)$$

Уравнения (7) совместно с равенством (6) и равенством

$$a_0 = l^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{3m^2}{2l} \frac{a_{-1}}{a_0} \right\}^{-\frac{1}{3}} \quad (8)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} a &= Kl^{-\frac{1}{3}}(1+m)^{\frac{2}{3}}, \quad K = k^{\frac{2}{3}}n_1^{-\frac{2}{3}}(T+L)^{\frac{1}{3}}, \\ l &= 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I &= 1 + (b_1 + b_{-1})^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{6}(b_1 + b_{-1})^2 + \frac{5}{8}b_1 b_{-1} - \frac{5}{2}(b_2 + b_{-2}) \right] \\ &+ (b_2 + b_{-2}) \left[\frac{3}{4}(b_2 + b_{-2}) + 6b_1 b_{-1} \right] + 6(b_1 + b_{-1})(b_1 b_2 + b_{-1} b_{-2}) \\ &+ 3b_1 b_{-1} + 45b_1^2 b_{-1}^2 + 3b_2 b_{-2}, \end{aligned} \quad (10)$$

определяют коэффициенты рядов (4).

Решая систему (7) методом последовательных приближений, Хилл получает

$$b_j = \sum_{i=2j}^{\infty} b_{ji} m^i \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11)$$

После подстановки (11) в (8) a_0 имеет вид:

$$a_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{0i} m^i. \quad (12)$$

В работе (Ляпунов, 1954) решение задачи Хилла рассматривается в системе координат $\{\xi, \eta\}$, определяемой равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -1 + a^{-1}(x \cos \tau + y \sin \tau) \\ \eta &= -a^{-1}(x \sin \tau - y \cos \tau) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_0 a^{-1} - 1 + a^{-1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s \cos 2s\tau, \\ \eta &= a^{-1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s \sin 2s\tau \quad (s \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ляпунов вводит в рассмотрение параметр $\lambda = m^2$ так, что система (5) и равенство (6) записываются следующим образом:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} ([j, s] a_s a_{s-j} + [\bar{j}] m^2 a_s a_{j-s-1} + (\bar{j}) m^2 a_s a_{-j-s-1}) = 0, \quad (15)$$

$$(j = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$a_0 = l^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{3\lambda}{2l} \frac{a_{-1}}{a_0} \right\}^{-\frac{1}{3}}. \quad (16)$$

Решение уравнений (15) представляется в виде рядов по степеням λ

$$a_\sigma = -a \sum_{s=\sigma}^{\infty} a_{s,\sigma} \lambda^s \quad (\sigma = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (17)$$

Ляпунов рассматривает ряды по степеням λ , получающиеся после подстановки (17) в (14). Подставляя ряды (17)—(4) в уравнения (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ и одинаковых гармониках, он получает следующие формулы, из которых последовательно определяются $a_{s,\sigma}$:

$$\left. \begin{aligned} a_{s,0} &= -\frac{1}{3l} \mathcal{A}_{s,0}, \\ a_{s,\sigma} &= \frac{\frac{3}{2} l \mathcal{A}_{s,-\sigma} - \left[4\sigma^2 - 4(1+m)\sigma + \frac{3}{2} l \right] \mathcal{A}_{s,\sigma}}{2\sigma^2 [2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2]} \end{aligned} \right\} \quad (17^*)$$

где $\mathcal{A}_{s,\sigma}$ — полиномы относительно $a_{k,l}$, причем $k < s$.

Так как при λ, m , соответствующим Лунной теории, эти ряды сходятся (Ляпунов, 1954), то разность между решением ξ, η и частными суммами соответствующих рядов равна остаточным членам этих рядов:

$$\left. \begin{aligned} \delta_p \xi \\ \delta_p \eta \end{aligned} \right\} = - \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{-j}^{+j} a_{j,s} \lambda^j \begin{cases} \cos 2s\tau \\ \sin 2s\tau \end{cases} \quad (18)$$

Ляпунов находит оценки $|\delta_p \xi|$ и $|\delta_p \eta|$ при $m = \sigma, p = 1, 2, 3$.

как уже отмечалось, на практике используются ряды Хилла (4), (6), (8), (11).

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \cos(2s+1)\tau, \\ B_2 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \sin(2s+1)\tau \quad (s \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Тогда из (4), (6) имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0(1 + B_1) \\ y &= a_0(1 + B_2) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Когда теория Хилла применяется на практике (Brown, 1899), приближенные значения x и y находятся следующим образом: сначала вычисляются коэффициенты рядов (19) из уравнений (7) при $m = \sigma$ с определенной степенью точности; затем полученные приближенные значения b_j подставляются в формулы, определяющие a_0 , и, наконец, найденные значения b_s, a_0 подставляются в формулы (19), (20).¹

Как показано в работе (Петровская, 1959), ряды (11), (19) сходятся абсолютно и равномерно при $|m| \leq 0.21$.

Нетрудно установить, что ряды (12), (4) сходятся при таких же значениях m . Действительно, в упомянутой работе получены неравенства $|m^{-1}b_{-1}| \leq 0.35, |m^{-1}b_1| \leq 0.08, |m^{-1}i^4b_i| \leq 0.39$ ($i = \pm 2, \pm 3, \dots$). Тогда

$$|b_{-1}| \leq 0.35 \times 0.21, |b_1| \leq 0.08 \times 0.21, |b_{\pm 2}| \leq \frac{1}{16} \times 0.39 \times 0.21. \quad (21)$$

Обращаясь к формулам (8)—(10) и учитывая, что $b_{\pm 1}, b_{\pm 2}$ — регулярные функции m при $|m| \leq 0.21$, мы можем представить a_0 в виде

$$a_0 = a\varphi(m),$$

где

$$\varphi(m) = [1 + mf_1(m)]^{\frac{1}{3}} [1 + mf_2(m)]^{-\frac{1}{3}}, \quad (22)$$

а $f_1(m), f_2(m)$ — регулярные функции m .

Принимая во внимание (21), будем иметь

$$|mf_1(m)| \leq 0.1 < 1, |mf_2(m)| \leq 0.5 < 1.$$

Следовательно, каждый из множителей в (22) при $|m| \leq 0.21$ есть регулярная функция m . Этим же свойством обладает выражение $(1 + m)^{2/3}l^{-1/3}$ входящее в множитель a . Таким образом, ряды (12) и (4) сходятся абсолютно и равномерно (как произведение абсолютно и равномерно сходящихся рядов). Так как члены рядов (4) регулярные функции m , то применяя теорему Вейерштрасса, приходим к выводу, что если ряды Хилла расположить по возрастающим степеням m , то последние будут сходиться при $|m| \leq 0.21$.

Возвращаясь теперь к вычислению приближенных значений x, y , приходим к заключению, что при $|m| \leq \sigma$ на каждом этапе вычислений погрешности будут равны соответствующим остаточным членам рядов.

Пусть r — какой-нибудь степенной ряд. Через $r^{(k)}$ будем обозначать k -е частные суммы этого ряда.

Учитывая вышеописанный способ вычисления x, y , найдем последовательно оценки для модулей выражений (см. (11), (19), (12), (20)):

¹ Для определения a_0 Хилл предлагает несколько формул, в которых a_0 имеет вид различных функций b_j . При вычислении a_0 Хилл формулы (8)—(10) не использует. Для наших же целей представление a_0 в виде (8), (9) является наиболее удобным.

$$\delta_k b_j = \sum_{i=k+1}^{\infty} b_{ji} m^i \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (23)$$

$$\left. \begin{matrix} \delta_k B_1 \\ \delta_k B_2 \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{j=-\infty \\ (j \neq 0)}}^{+\infty} \delta_k b_j \begin{cases} \cos(2s+1)\tau \\ \sin(2s+1)\tau \end{cases} \quad (24)$$

$$\delta_k a_0 = K \sum_{i=k+1}^{\infty} a_{0i} m^i, \quad (25)$$

$$\left. \begin{matrix} \Delta_k x = a_0(1+B_1) - a_0^{(k)}(1+B_1^{(k)}), \\ \Delta_k y = a_0(1+B_2) - a_0^{(k)}(1+B_2^{(k)}), \end{matrix} \right\} \quad (26)$$

при $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

В работе будут найдены также новые оценки значений $|\delta_p \xi|, |\delta_p \eta|$ ($p = 1, 2, 3$).

Все упомянутые оценки погрешностей будут получены таким образом, чтобы они были справедливы для всех $|m| \leq \sigma$ одновременно.

§ 3. Мажорантные ряды и мажорантные уравнения

Так как оценки погрешностей будут вычисляться способом, изложенным в § 1, то прежде всего рассмотрим ряды, мажорантные по отношению к рядам § 2.

В работах, посвященных исследованию сходимости рядов Хилла (см. выше) строились различные мажорантные ряды по отношению к рядам Хилла и определялся их радиус сходимости. При отыскании радиуса сходимости эти ряды представлялись в виде решений некоторых уравнений, и с помощью теории неявных функций определялся круг, в котором интересующее нас решение разлагается в степенной ряд.

В работах (Мерман, 1952; Ляпунов, 1954) мажорантные уравнения получены на основании рекуррентных соотношений (17*). Соответствующие оценки круга сходимости: $|m| \leq \frac{1}{7}, |m| \leq 0.179$.

В работе (Wintner, 1929) для бесконечной системы Хилла (7) построено одно мажорантное уравнение путем получения оценок значений модулей коэффициентов рядов f_j ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) при неизвестных b_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) таким образом, чтобы последние не зависели от j . Круг сходимости, полученный Винтнером, — $|m| \leq \frac{1}{12}$.

Аналогичным образом в работе (Петровская, 1959) для системы (7) построены три мажорантных уравнения так, что два из них мажорируют ряды (7) для $j = \pm 1$ а третье — все остальные уравнения. Соответствующая оценка круга сходимости $|m| \leq 0.21$.

В этой работе мажорантная система имеет вид:

$$\left. \begin{matrix} \gamma_k = m(A_k + B_k \gamma_{-1}^2 + C_k \gamma_{-1} \gamma + D_k \gamma_{-1} \gamma + E_k \gamma_1 \gamma + F_k \gamma^2 + G_k \gamma), \\ \gamma = m(C_2 \gamma_1 \gamma_{-1} + D_2 \gamma_{-1} \gamma + E_2 \gamma_1 \gamma + F_2 \gamma^2 + G_2 \gamma + K_2 \gamma_1^2 + H_2 \gamma_1) \end{matrix} \right\} \quad (k = \pm 1). \quad (27)$$

Коэффициенты при $\gamma_{\pm 1}, \gamma$, в правых частях рациональные функции m , приведенные в явном виде в работе (Петровская, 1959, стр. 462—464).

Ряды $m\gamma_{\pm 1}, m\gamma^{-4}\gamma$, где $\gamma_{\pm 1}, \gamma$ — решение уравнений (27), уничтожающееся при $m = 0$ мажорируют ряды $b_{\pm 1}, b_j$ ($j = \pm 2, \pm 3, \dots$) (формулы (11)).

Если функция $\psi(m)$ является мажорантной по отношению к функции $\varphi(m)$, то это обстоятельство будем записывать в виде равенства

$$\psi(m) = \text{mag} \varphi(m)$$

Итак, имеем

$$m\gamma_{\pm 1} = \text{mag}b_{\pm 1}, mj^{-4}\gamma = \text{mag}b_j \quad (j = \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (28)$$

Обозначим

$$\tilde{B} = m \left(\gamma_{-1} + \gamma_1 + \gamma \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right). \quad (29)$$

Тогда из (19), (27) имеем

$$\tilde{B} = \text{mag}B_1 = \text{mag}B_2. \quad (29')$$

Найдем мажоранту для функции $a_0(m)$, определяемой формулами (8) (10). Имеем

$$\frac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{m^2}{(1+m)^2}}$$

и

$$\left[1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{(1+m)^2} \right]^{-\frac{1}{3}} = \text{mag} \left[\frac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (30')$$

Далее

$$\frac{1}{1-2m+\frac{3}{2}m^2} = \text{mag} \frac{1}{1+2m+\frac{3}{2}m^2} \quad (30'')$$

и

$$\left[1 - \frac{3}{2} \frac{m^3\gamma_{-1}}{1-2m+\frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} = \text{mag} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{m^2}{l} \frac{a_{-1}}{a_0} \right]^{-\frac{1}{3}}. \quad (30''')$$

Рассмотрим функцию

$$\gamma_0 = \left[\frac{(1-m)^2}{1-2m+\frac{1}{2}m^2} \right]^{\frac{1}{3}} \times \text{mag}^{\frac{1}{3}} \times \left[1 - \frac{3}{2} \frac{m^3\gamma_{-1}}{1-2m+\frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}}, \quad (31)$$

где

$$\text{mag}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \begin{aligned} & 1 - m^2(\gamma_{-1} + \gamma_1)^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{6}m^2(\gamma_{-1} + \gamma_1)^2 + \frac{5}{8}m^2\gamma_{-1}\gamma_1 + \frac{5}{16}m\gamma \right]^{-\frac{1}{3}} \\ & - \frac{1}{8}m^2\gamma \left(\frac{3}{32}\gamma + 6m\gamma_{-1}\gamma_1 \right) - \frac{3}{8}m^3(\gamma_{-1} + \gamma_1)^2\gamma - 3m^2\gamma_{-1}\gamma_1 \\ & - 45m^4\gamma_{-1}^2\gamma_1^2 - \frac{3}{256}m^2\gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Учитывая (27), (30), легко видеть, что

$$\gamma_0 = K^{-1} \text{mag}a_0. \quad (33)$$

Обозначая теперь $\tilde{\gamma}_0$ и B^* любые мажоранты для a_0 и B_i ($i = 1, 2$),

$$z = \tilde{\gamma}_0(1 + B^*) \quad (34)$$

и понимая под x и y ряды (20), будем иметь

$$z = \text{mag}x = \text{mag}y \quad (35)$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\pm 1} &= m\gamma_{\pm 1}, \\ \beta &= s^{-4} \text{mag}b_s \quad (s = \pm 2, \pm 3, \dots) \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

где $b_s = \frac{a_s}{a_0}$ ($s = \pm 2, \pm 3, \dots$) — ряды по степеням λ , получающиеся при решении системы (15), причем при $\lambda = m^2$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\pm 1} &= m\gamma_{\pm 1}, \\ \beta &= m\gamma \end{aligned} \right\} \quad (36^*)$$

пусть

$$\beta_0 = K^{-1} \text{mag}a_0, \quad (37)$$

где a_0 — ряд (16), причем при $\lambda = m^2$

$$\beta_0 = \gamma_0. \quad (37^*)$$

Обращаясь к формулам (14), (16), (10), рассмотрим выражения

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \text{mag}l^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda\beta_{-1}}{1 - 2m + \frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \left\{ 1 + \beta_{-1} + \beta_1 + \beta \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right\} - 1, \\ \tilde{\eta} &= \text{mag}l^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda\beta_{-1}}{1 - 2m + \frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \left\{ \beta_{-1} + \beta_1 + \beta \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

причем $\text{mag}l^{1/3}$ есть выражение (32), в котором сделана замена $m\gamma_{\pm 1} = \beta_{\pm 1}$, $m\gamma = \beta$.

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \text{mag}\xi, \\ \tilde{\eta} &= \text{mag}\eta. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

С помощью мажорантных рядов (27), (33), (35), (39) по методу § 1 будут найдены оценки погрешностей, о которых шла речь в § 2.

Прежде чем перейти к этому вопросу, сделаем пояснение к замечанию на стр. 258 относительно мажорантного ряда Ляпунова, который был использован для получения оценок погрешностей (18).

Этот ряд был построен следующим образом. В коэффициентах при λ, λ^2 положено $m = \sigma$ (в $a_{1,\pm 1}, a_{2,\pm 2}, a_{2,0}$) и в качестве первых членов мажорантного ряда взяты значения модулей полученных выражений. Последующие члены мажорантного ряда определялись с помощью рекуррентной формулы, полученной на основании соотношений (17*) между коэффициентами $a_{s,\sigma}$.

Вопрос о том, распространяется ли полученная оценка погрешности, равная остаточному члену построенного мажорантного ряда, на случай $m < \sigma$ и можно ли ее использовать для получения оценки погрешности в случае рядов (4), (11), Ляпунов не рассматривает. Нетрудно установить, что мажорантный ряд Ляпунова не обладает такими свойствами. Действительно, разлагая

$$a_{2,0} = -\frac{3}{256} \cdot \frac{3816 - 1616m - 8492m^2 - 13616m^3 - 10674m^4 - 4212m^5 - 729m^6}{(6 - 4m + m^2)^2(2 + 4m + 3m^2)} \quad (40)$$

в ряд по степеням m , получим

$$a_{2,0} = -\frac{159}{256} + \frac{65}{96}m + \frac{397}{576}m^2 + \dots \quad (40')$$

В качестве соответствующего коэффициента мажорантного ряда Ляпунов берет выражение $(-a_{2,0})$ и полагает $m = \sigma$.

Из (40') видно, что $(-a_{2,0})$ не является мажорантной для $a_{2,0}$. Отсюда следует, что полученная оценка погрешности не может быть использована при оценке остаточного члена рядов Хилла (4), (11).

Далее имеем:¹

$$\left. \begin{aligned} a_{2,-2} &= -\frac{27}{64} \frac{92m + 184m^2 + 124m^3 - 28m^4 - 21m^5}{(6 - 4m + m^2)^2(2 + 4m + 3m^2)} \\ a_{2,2} &= -\frac{27}{256} \frac{1000 + 2816m + 3396m^2 + 1760m^3 + 430m^4 + 48m^5 + 27m^6}{(6 - 4m + m^2)^2(2 + 4m + 3m^2)} \end{aligned} \right\} \quad (40'')$$

Коэффициент мажорантного ряда при λ^2 равен значению выражения $-(a_{2,0} + a_{2,-2} + a_{2,2})$ при $m = \sigma$. Имеем

$$\begin{aligned} -(a_{2,0} + a_{2,-2} + a_{2,2}) &= \frac{3}{16} \left(\frac{8280 + 1848m - 1780m^2 - 6300m^3}{-4734m^4 - 1598m^5 - 495m^6 - 81m^7} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2160 + 1152m - 960m^2 - 1280m^3}{+1784m^4 - 864m^5 + 224m^6 - 32m^7 + 3m^8} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (41)$$

Производная от этого выражения равна

$$\frac{3}{16} \frac{P_1(m)}{P_2^2(m)} \quad (41')$$

где

$$\begin{aligned} P_1(m) &= -5546880 + 8208000m - 8305280m^2 - 109772160m^3 - 3970400m^4 \\ &\quad - 3080096m^5 + 12996240m^6 - 3703616m^7 - 741416m^8 - 4968m^9 \\ &\quad - 7844m^{10} + 94504m^{11} - 19602m^{12} + 2970m^{13} + 243m^{14}, \\ P_2(m) &= 2160 + 1152m - 960m^2 - 1280m^3 + 1784m^4 - 864m^5 + 224m^6 - 32m^7 + 3m^8. \end{aligned}$$

Имеем при $m > 0$

$$\begin{aligned} P_1(m) &< -5546880 + 8208000m + 12996240m^6 + 94504m^{11} + 2970m^{13} + 243m^{14} \\ &= \tilde{P}_1(m). \end{aligned} \quad (41'')$$

При $0 < m \leq \sigma$

$$\tilde{P}_1(m) < \tilde{P}_1(\sigma) < -4883268 < 0.$$

Таким образом, выражение $-(a_{2,0} + a_{2,-2} + a_{2,2})$ не является монотонно возрастающей функцией m . Поэтому оценка Ляпунова не распространяется на случай $0 < m < \sigma$.

Примечание. Заметим, что результат о сходимости рядов Хилла, полученный в работе (Мерман, 1952), можно считать доказанным лишь для $m = 0.18$. Однако легко доказать, не выходя за рамки того же метода, сходимость в области $0 \leq m \leq 0.18$, а для степенных рядов в области $|m| \leq 0.179$.

В самом деле, в работе (Мерман, 1952) для получения оценки области сходимости рядов Хилла (17), (4) построен следующий мажорантный ряд. Коэффициенты при λ рядов (17)

$$a_{1,1} = -\frac{9}{16} \frac{2 + 4m + 3m^2}{6 - 4m + m^2}, \quad a_{1,-1} = \frac{3}{16} \frac{38 + 28m + 9m^2}{6 - 4m + m^2} \quad (A)$$

¹ Коэффициент $a_{2,0}$ (см. формулу (40)), $a_{2,\pm 2}$ найдены из формул (17*).

и коэффициенты при λ^2 [(40), (40'')] заменены на их абсолютные значения при $m = 0.18$ (в $-a_{1,1}, a_{1,-1}, -a_{2,0}, -a_{2,2}, -a_{2,-2}$ положено $m = 0.18$). Последующие коэффициенты мажорантного ряда определялись из рекуррентных соотношений

$$a_{r,\sigma} = \frac{\frac{3}{2}LA_{r,-\sigma} + \left(8 + 4M + \frac{3}{2}L\right)A_{r,\sigma}}{2(6 - 4M + M^2)} \quad (B)$$

где $L = 1 + 2M + \frac{3}{2}M^2$, $A_{r,\pm\sigma}$ — полиномы относительно $a_{k,l} (k < r)$, $M = 0.18$.

Радиус сходимости мажорантного ряда определялся как наименьший положительный корень уравнений

$$z = \frac{1 + 2\delta}{3(1 + 2g)}, 2gz = \frac{(1 - z)^3}{3 - 3z + z^2} \quad (C)$$

относительно λ , причем

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon}, g = \frac{h}{1 - \varepsilon}, \varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon_1 - (1 + 3h)\varepsilon^2, \\ \varepsilon &= (a_{1,1} + a_{1,-1})\lambda, \varepsilon_1 = (a_{2,-2} + a_{2,2} + a_{2,0})\lambda^2, \\ h &= \frac{22 + 20M + 9M^2}{4(6 - 4M + M^2)}L, \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

$$a_{1,1} = -a_{1,1}, a_{1,-1} = a_{1,-1}, a_{2,k} = -a_{2,k} (k = 0, \pm 2), \quad (E)$$

и в (E) положено $m = M$.

В результате решения системы (C) получена оценка области сходимости рядов (17), (4):

$$m = 0.18, 0 \leq |\lambda| \leq 0.18^2 = 0.0324.$$

Из рассмотрения выражений (40), (40'') легко установить, что при $0 \leq m \leq 0.18$ абсолютные значения этих дробей равны — $(-a_{2,0}), (-a_{2,-2}), (-a_{2,2})$.

Из (41'') имеем при $0 \leq m \leq 0.18$

$$P_1(m) < -4\,069\,439 < 0,$$

следовательно, производная (41') отрицательна, и выражение (41) в промежутке $0 \leq m \leq 0.18$ имеет максимум при $m = 0$ равный $\frac{159}{256}$. Обозначая $\max(-a_{2,k}) = a_{2,k} (k = 0, \pm 2)$, будем иметь $a_{2,0} + a_{2,2} + a_{2,-2} = \frac{159}{256}$.

Абсолютные значения $a_{1,\pm 1}$ при $0 \leq m \leq 0.18$ равны $(-a_{1,1}), (a_{1,-1})$ и достигают максимума в точке $m = 0.18$, где $\max(-a_{1,1} + a_{1,-1}) = 1.8277$. Обозначая $\max(-a_{1,1}) = a_{1,1}, \max(a_{1,-1}) = a_{1,-1}$ имеем $a_{1,1} + a_{1,-1} = 1.8277$. Построим мажорантный ряд по отношению к рядам по степеням λ (17), (4), полагая коэффициенты при λ, λ^2 , равными $a_{k,l} (k = 1, 2; l = 0, \pm 1, \pm 2)$, а все остальные коэффициенты определяя по формуле (B). Так как мажорантный ряд по-прежнему определяется формулой (B), то область сходимости его может быть снова найдена путем решения системы (C), если в (D) положить $\varepsilon = \frac{159}{256}\lambda, \varepsilon_1 = 1.8277\lambda^2$. В результате получаем следующую оценку области сходимости рядов (17), (4):

$$0 \leq m \leq 0.18, 0 \leq |\lambda| \leq 0.0324.$$

далее, как следует из работы Ляпунова, выражения (A) при разложении их в ряды по степеням m не имеют отрицательных коэффициентов.

Строя мажоранты для $a_{2,\pm 2}, a_{2,0}$ аналогично тому, как это сделано в работе (Петровская, 1959, § 3), получим

$$ma_{2,2} = -a_{2,2},$$

$$\begin{aligned}
& maga_{2,0} + maga_{2,-2} \\
&= \frac{156}{256} + \frac{1369}{1920}m + \frac{11719}{14400}m^2 + \frac{518839}{288000}m^3 + \frac{13076857}{6480000}m^4 + \frac{89619601}{388800000}m^5 \\
&+ \frac{1678114957}{972000000}m^6 \\
&+ \frac{1}{62208}m^7(4473256 + 1818884m + 7579320m^2 + 6248756m^3 \\
&+ 2146489m^4 + 317901m^5)(6 - 4m + m^2)^{-2}(2 - 4m + 3m^2)^{-1} \\
&+ \frac{1}{64000000}m^7 \\
&\times (2666140188 + 2125905384m + 2170555700m^2 + 788816100m^3 \\
&+ 907821m^4 + 14920388m^5)(6 - 4m + m^2)^{-2}(30 - 4m + m^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Полагая теперь

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= -a_{1,1}, a_{1,-1} = a_{1,-1}, \\
a_{2,l} &= maga_{2,l} (l = 0, \pm 2)
\end{aligned}$$

и решая систему (С), получаем следующую оценку области сходимости рядов Хилла:

$$0 \leq |m| \leq 0.179 \quad (\lambda = m^2).$$

§ 4. Оценки модулей погрешностей $\delta_6 B_j, \delta_k B_1, \delta_k B_2, (j = \pm 1, \pm 2, \dots, k = 2, 3, \dots, 6)$

На основании (27) и изложенного в § 1 при $m \leq \sigma$ имеем

$$|\delta_k b_j| \leq \frac{1}{j^4} |\sigma \delta_k \bar{\gamma}_j|, \quad (42)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
\delta_k \bar{\gamma}_j &= \bar{\gamma}_j - \bar{\gamma}_j^{(k)} \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots), \\
\bar{\gamma}_{\pm 1} &= \gamma_{\pm 1}(\sigma), \bar{\gamma}_j = \gamma(\sigma) \quad (j = \pm 2, \pm 3, \dots).
\end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Пользуясь при решении уравнений (27) методом неопределенных коэффициентов, получаем

$$\left. \begin{aligned}
\gamma_{-1}^{(6)} &= \frac{19}{16}m + \frac{5}{3}m^2 + \frac{43}{36}m^3 + \frac{14}{27}m^4 + \frac{1287869}{414720}m^5, \\
\gamma_1^{(6)} &= \frac{3}{16}m + \frac{1}{2}m^2 + \frac{7}{12}m^3 + \frac{11}{36}m^4 + \frac{145049}{138240}m^5, \\
\gamma^{(6)} &= \frac{393}{80}m^3 + \frac{3959}{200}m^4 + \frac{188987467}{2304000}m^5.
\end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Погрешности (43) можно было бы найти, решая численно уравнения (27) при $m = \sigma$ и вычитая затем из $\bar{\gamma}_j$ выражения (44), в которых положено $m = \sigma$.

Однако для того чтобы избежать потери точности при вычислениях, мы поступим иначе: на основании (27), (43) составим уравнения для $\delta_k \bar{\gamma}_j$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$), подставим в них $m = \sigma$ и затем решим их численно.

Обозначая

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_1 &= \sigma^{-1} \delta_6 \bar{\gamma}_{-1}, \alpha_2 = \sigma^{-1} \delta_6 \bar{\gamma}_1, \\
\alpha_3 &= \sigma^{-1} \delta_6 \bar{\gamma}_j \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots),
\end{aligned} \right\} \quad (45)$$

приходим к уравнениям:

$$\alpha_j = \bar{A}_j + \bar{B}_j \alpha_1 \alpha_2 + \bar{C}_j \alpha_1 \alpha_3 + \bar{D}_j \alpha_2 \alpha_3 + \bar{E}_j \alpha_1^2 + \bar{F}_j \alpha_2^2 + \bar{G}_j \alpha_3^2 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (46)$$

где¹

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= 0.818994 \cdot 10^{-4}, \bar{A}_2 = 0.281043 \cdot 10^{-4}, \bar{A}_3 = 0.149018 \cdot 10^{-2}, \\ \bar{B}_1 &= 0.472734 \cdot 10^{-3}, \bar{B}_2 = 131606 \cdot 10^{-3}, \bar{B}_3 = 0.114498, \\ \bar{C}_1 &= 0.214285 \cdot 10^{-2}, \bar{C}_2 = 0.494590 \cdot 10^{-3}, \bar{C}_3 = 0.410474 \cdot 10^{-1}, \\ \bar{D}_1 &= 0.908573 \cdot 10^{-3}, \bar{D}_2 = 0.901293 \cdot 10^{-3}, \bar{D}_3 = 0.382126 \cdot 10^{-1}, \\ \bar{E}_1 &= 0.137332 \cdot 10^{-4}, \bar{E}_2 = 0.890389 \cdot 10^{-5}, \bar{E}_3 = 0.223289 \cdot 10^{-5}, \\ \bar{F}_1 &= 0.121583 \cdot 10^{-5}, \bar{F}_2 = 0.378542 \cdot 10^{-6}, \bar{F}_3 = 0.387739 \cdot 10^{-3}, \\ \bar{G}_1 &= 0.127886 \cdot 10^{-3}, \bar{G}_2 = 0.143923 \cdot 10^{-4}, \bar{G}_3 = 0.435221 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

Решая (46), получаем

$$\left. \begin{aligned}\alpha_1 &= 0.0000819001, \\ \alpha_2 &= 0.000028105, \\ \alpha_3 &= 0.00149021.\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Согласно (29) имеем при $m = \sigma$

$$|\delta_k B_i| \leq \delta_k \tilde{B} \quad (i = 1, 2; k = 2, 3, \dots, 6). \quad (48)$$

Получим оценку сверху для $\delta_6 \tilde{B}$ при $m = \sigma$. Имеем

$$0.16464646 < \sum_{\substack{j=-\infty \\ (j \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{j^4} < 0.16464647 \quad (49)$$

Из (28), (43), (47) (49) получим

$$\left. \begin{aligned}\delta_6 \bar{Y}_{-1} &< 0.54 \cdot 10^{-6}, \\ \delta_6 \bar{Y}_1 &< 0.19 \cdot 10^{-6}, \\ \delta_6 \bar{Y}_j &< 0.975 \cdot 10^{-5} \quad (j = \pm 2, \pm 3, \dots),\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

$$\delta_6 \tilde{B} < 0.24 \cdot 10^{-5}. \quad (51)$$

Получим теперь оценки модулей погрешностей $\delta_k B_i$ ($i = 1, 2$) для $k = 2, 3, 4, 5$ при $m = \sigma$. Имеем

$$\delta_k B_i = B_i^{(6)} - B_i^{(k)} + \delta_6 B_i \quad (i = 1, 2; k = 2, 3, \dots, 6). \quad (52)$$

Очевидно, что в качестве оценок $|\delta_k B_j|$ при $m = \sigma$ можно рассматривать соответствующие остаточные члены $\delta_k \tilde{B}$ мажорантного ряда (28), определяемые формулой

$$\delta_k \tilde{B} = \tilde{B}^{(6)} - \tilde{B}^{(k)} + \delta_6 \tilde{B} \quad (52^*)$$

и формулами (28), (44), (51).

Мы не будем пользоваться формулами (52*), а получим верхние границы $|\delta_k B_i|$ следующим образом.

Обозначим В ряд, получающийся после замены коэффициентов рядов B_i ($i = 1, 2$) при различных степенях m на их модули.

Из формул Хилла

¹ Здесь и в дальнейшем округление производилось с избытком.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{3}{16}m^2 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{7}{2^2 \cdot 3}m^4 + \frac{11}{2^2 \cdot 3^2}m^5 - \frac{30749}{2^{12} \cdot 3^3}m^6 + m^7(\dots), \\
b_{-1} &= -\frac{19}{16}m^2 - \frac{5}{3}m^3 - \frac{43}{2^2 \cdot 3^2}m^4 - \frac{14}{3^3}m^5 - \frac{7381}{2^{10} \cdot 3^4}m^6 + m^7(\dots), \\
b_2 &= \frac{25}{2^8}m^4 + \frac{803}{2^7 \cdot 3 \cdot 5}m^5 + \frac{6109}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2}m^6 + m^7(\dots), \\
b_{-2} &= \frac{23}{2^7 \cdot 5}m^5 + \frac{299}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2}m^6 + m^7(\dots), \\
b_3 &= \frac{833}{2^7 \cdot 3}m^6 + m^7(\dots), \\
b_{-3} &= \frac{1}{2^6 \cdot 3}m^6 + m^7(\dots), \\
b_i &= m^7(\dots) \quad (i = \pm 4, \pm 5, \dots)
\end{aligned}$$

получаем

$$\bar{B}^{(6)} = \frac{11}{8}m^2 + \frac{13}{6}m^3 + \frac{4321}{2304}m^4 + \frac{2761}{2160}m^5 + \frac{5\,860\,331}{4\,147\,200}m^6. \quad (53)$$

Обозначим

$$\delta_k^* B = \bar{B}^{(6)} - B^{(k)} + \delta_6 \tilde{B} \quad (k = 2, 3, 4, 5). \quad (54)$$

Так как коэффициенты ряда $\tilde{B}$ больше или равны коэффициентам ряда $\bar{B}$, то при $m = \sigma$ будем иметь

$$|\delta_k B_i| < \delta_k^* B < \delta_k \tilde{B}. \quad (55)$$

Таким образом, пользуясь формулой (54), можно получить лучшую оценку погрешности, чем оценка, даваемая формулой (52*).

Ниже приводятся результаты вычисления $B_i^{(k)}$ ($i = 1, 2; k = 2, 3, \dots, 6$) при $m = \sigma$ с точностью до m^7 . Вычисления производились с семью десятичными знаками. при $k = 2, 3, 4, 5, 6$ имеем

$$\begin{aligned}
B_1^{(k)} &= b_{-1}^{(k)} \cos \tau + (b_1^{(k)} + b_{-2}^{(k)}) \cos 3\tau + (b_2^{(k)} + b_{-3}^{(k)}) \cos 5\tau + b_3^{(k)} \cos 7\tau, \\
B_2^{(k)} &= -b_{-1}^{(k)} \sin \tau + (b_1^{(k)} - b_{-2}^{(k)}) \sin 3\tau + (b_2^{(k)} - b_{-3}^{(k)}) \sin 5\tau + b_3^{(k)} \sin 7\tau.
\end{aligned} \quad (56)$$

$B_i^{(6)}$ ($i = 1, 2$) после вычисления коэффициентов гармоник имеют вид

$$\begin{aligned}
B_1^{(6)} &= -0.0086958 \cos \tau + 0.0017403 \cos 3\tau + 0.0000059 \cos 5\tau, \\
B_2^{(6)} &= 0.0086958 \sin \tau + 0.0017398 \sin 3\tau + 0.0000059 \sin 5\tau.
\end{aligned} \quad (57)$$

В следующей таблице приведены значения коэффициентов гармоник в выражениях (56) для $k = 2, 3, 4, 5$.

k	$b_{-1}^{(k)}$	$b_1^{(k)} + b_{-2}^{(k)}$	$b_1^{(k)} - b_{-2}^{(k)}$	$b_2^{(k)} + b_{-3}^{(k)}$	$b_2^{(k)} - b_{-3}^{(k)}$	$b_3^{(k)}$
2	-0.0077622	0.0012256	0.0012256	—	—	—
3	-0.0086429	0.0014898	0.0014898	—	—	—
4	-0.0086940	0.0017391	0.0017391	0.0000042	0.0000042	—
5	-0.0086958	0.0017402	0.0017400	0.0000056	0.0000056	—

Из (28), (44) при $m = \sigma$ получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}^{(2)} &> 0.0089877, \\ \bar{B}^{(3)} &> 0.0101327, \\ \bar{B}^{(4)} &> 0.0102129, \\ \bar{B}^{(5)} &> 0.0102173, \\ 0.0102177 &< \bar{B}^{(6)} < 0.0102178 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Из (54), (51), (58) находим

$$\left. \begin{aligned} \delta_2^* B &< 0.0012325, \bar{B}^{(3)} - \bar{B}^{(2)} > 0.0012299, \\ \delta_3^* B &< 0.0000874, \bar{B}^{(6)} - \bar{B}^{(3)} > 0.0000849, \\ \delta_4^* B &< 0.0000073, \bar{B}^{(6)} - \bar{B}^{(4)} > 0.0000047, \\ 0.0000028 &< \delta_5^* B < 0.0000029, \bar{B}^{(6)} - \bar{B}^{(5)} > 0.0000005. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Формулы (59), (55) дают оценки погрешностей, имеющих место, если B_1, B_2 вычислять по формулам (56) при $k = 2, 3, 4, 5$, пользуясь при этом приведенной выше таблицей.

Сравнение чисел в каждой из строчек (59) дает некоторое представление о степени точности полученных оценок погрешностей. Рассматривая отношения разностей чисел первого и второго столбца к самим числам, видим, что первые две оценки можно считать довольно удовлетворительными. Последнюю же оценку, по-видимому, нельзя считать удовлетворительной.

Если в качестве приближенных значений B_1, B_2 принять выражения (57), то, согласно (51), погрешности не будут превышать 0.0000024.

Согласно § 1, полученные верхние границы $\delta_6 \tilde{B}$ и $\delta_k^* B$ ($k = 2, 3, 4, 5$), соответствующие $m = \sigma$ являются верхними границами $|\delta_k B_i|$ ($k = 2, 3, 4, 5, 6; i = 1, 2$) и при $|m| < \delta$.

§ 5. Оценка модулей погрешностей $\delta_k a_0, \Delta_k x, \Delta_k y$ ($k = 2, 3, 4, 5, 6$)

Получим сначала оценку $|\delta_6 a_0|$.

Используя формулы (44), из (31), (32) будем иметь

$$\gamma_0^{(6)} = 1 + \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{2125}{1152}m^4 + \frac{299}{144}m^5 + \frac{76795}{20736}m^6. \quad (60)$$

Обозначая $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0(\sigma)$ получим

$$\gamma_0^{(6)} > 1.00135260. \quad (61)$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_j &= \gamma_j^{(6)} + \delta_6 \gamma_j \quad (j = \pm 1), \\ \gamma &= \gamma^{(6)} + \delta_6 \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Из (44), (50), (62) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_{-1} &< 0.00869718, \\ \bar{\gamma}_1 &< 0.00151630, \\ \bar{\gamma}_j &< 0.000310923 \quad (j = \pm 2, \pm 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Тогда из (31), (32) следует

$$\bar{\gamma}_0 < 1.00135298. \quad (64)$$

Согласно (33) и § 1, имеем при $|m| \leq \sigma$

$$|\delta_6 a_0| \leq K(\bar{\gamma}_0 - \bar{\gamma}_0^{(6)}) \equiv K\delta_6 \bar{\gamma}_0. \quad (65)$$

Из (61), (64) получим

$$\delta_6 \bar{\gamma}_0 < 0.00000038. \quad (66)$$

Имеем

$$\delta_k a_0 = \sum_{i=k}^6 a_{0i} m^i + \delta_6 a_0 \quad (k = 2, 3, \dots, 6). \quad (67)$$

Из формулы Хилла (Hill, 1905, стр. 319)

$$a_0^{(7)} = K \left[1 - \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \frac{407}{2\,304} m^4 - \frac{67}{288} m^5 - \frac{45\,293}{41\,472} m^6 - \frac{8\,761}{6\,912} m^7 \right]. \quad (68)$$

Отсюда при $|m| \leq \sigma$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=3}^6 |a_{0i} m^i| &< 0.00018482K, \\ \sum_{i=4}^6 |a_{0i} m^i| &< 0.00000866K, \\ \sum_{i=5}^6 |a_{0i} m^i| &< 0.00000111K, \\ |a_{06} m^6| &< 0.00000031K. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Из (65), (66), (69) получаем при $|m| \leq \sigma$

$$\left. \begin{aligned} |\delta_2 a_0| &< 0.00018520K, \\ |\delta_3 a_0| &< 0.00000904K, \\ |\delta_4 a_0| &< 0.00000149K, \\ |\delta_5 a_0| &< 0.00000069K. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Из (68) при $|m| \leq \sigma$ будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=3}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00018484K, \\ \sum_{i=4}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00000868K, \\ \sum_{i=5}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00000113K, \\ \sum_{i=6}^7 |a_{0i} m^i| &< 0.00000032K, \\ |a_{07} m^7| &< 0.00000003K. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$$|a_{07} m^7| < 0.00000003K. \quad (72)$$

Из сравнения чисел в (70), (71) в строках одинакового номера, видим, что первые три оценки в (70) являются относительно удовлетворительными, в то время как четвертая оценка и оценка (64) [после сравнения с (72)] являются, по-видимому, грубыми оценками.

Если вычислять a_0 при $m = \sigma$ с точностью до m^7 с семью десятичными знаками, получим из (68)

$$a_0 = a_0^{(6)} = 0.9990932K. \quad (73)$$

Соответствующая погрешность, согласно (65), (66), будет меньше $0.0000004K$.

Найдем теперь верхние границы $\Delta_k x, \Delta_k u$ при $k=2, \dots, 6$, пользуясь (34), (35). Так как ряды

$$\tilde{\gamma}_0 = K \sum_{i=0}^k |a_{0i}| m^i + |\delta_k a_0|, B^* = \bar{B}^{(k)} + \delta_k^* B \quad (74)$$

мажорируют ряды a_0 и B_i ($i = 1, 2$), то справедливы формулы (34), (35). Тогда при $m = \sigma$

$$\left. \begin{aligned} |\Delta_k x| &\leq \Delta_k z, \\ |\Delta_k y| &\leq \Delta_k z, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где

$$\Delta_k z = z - z^{(k)}. \quad (76)$$

Обозначим

$$\tilde{\gamma}_0^{(k)} = K \sum_{i=0}^k |a_{0i}| m^i, \delta_k \tilde{\gamma}_0 = |\delta_k a_0|. \quad (77)$$

Представим $\delta_k z$ в виде

$$\delta_k z = \tilde{\gamma}_0^{(k)} \delta_k^* B + \bar{B}^{(k)} \delta_k \tilde{\gamma}_0 + \delta_k \tilde{\gamma}_0 (1 + \delta_k^* B). \quad (78)$$

Пользуясь формулой (68) и оценками (51), (58), (59), (66), (70), при $m = \sigma$ получим из (77), (78)

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 z &< 0.0001885K, \\ \Delta_3 z &< 0.0000092K, \\ \Delta_4 z &< 0.0000016K, \\ \Delta_5 z &< 0.0000007K, \\ \Delta_6 z &< 0.0000004K. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Таким образом, если в качестве приближенных значений x, y при $m = \sigma$ рассматривать выражения $a_0^{(6)} (1 + B_1^{(6)})$ и $a_0^{(6)} (1 + B_2^{(6)})$ [вместо формул (20)], даваемые формулами (57), (73), то соответствующие погрешности будут меньше $0.0000004 K$.

Согласно § 1, оценки $|\Delta_k x|, |\Delta_k y|$, даваемые неравенствами (75), (78), справедливы при $|m| \leq \sigma$.

§ 6. Оценка погрешностей $|\delta_p \xi|$ и $|\delta_p \eta|$ ($p = 1, 2, 3$)

Прежде всего построим ряды (36), (37), обладающие свойствами (36*), (37*).

Аналогично построению системы (27) можно построить мажорантную систему, определяющую ряды $\beta_{\pm 1}, \beta$.

Последнюю можно записать в общем виде

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= \tilde{A}_k + \tilde{B}_k \beta_{-1}^2 + \tilde{G}_k \beta_{-1} \beta + \tilde{D}_k \beta_{-1} \beta + \tilde{E}_k \beta_1 \beta + \tilde{G}_k \beta \\ \beta &= \tilde{C}_2 \beta_1 \beta_{-1} + \tilde{D}_2 \beta_{-1} \beta + \tilde{E}_2 \beta_1 \beta + \tilde{G}_2 \beta + \tilde{K}_2 \beta_1^2 + \tilde{E}_2 \beta_1, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

подразумевая под коэффициентами в правых частях функции $\lambda, m, \beta_{\pm 1}, \beta$.

Если проследить последовательно все операции по преобразованию правых частей уравнений (7) для получения системы (27) (Петровская, 1959), то легко видеть, что мажорантная система (79) может быть получена путем простой замены m^2 на λ в некоторых членах разложений A_k, B_k, C_k в ряды по степеням m — в соответствии с переходом от (7) к (15).

Очевидно, что если в правых частях полученной таким образом системы (79) сделать замену $\lambda = m^2$, то будут иметь место равенства (36*), причем $\beta_{\pm 1}$ будут 1-го, а β — 2-го порядка относительно λ .

Решая систему (79), можно получить β_k ($k = \pm 1$), β , в виде рядов по степеням λ . Подставляя эти ряды в правые части (79) и вычисляя последние с точностью до λ^3 мы должны положить

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_k &= \lambda A_k, \tilde{B}_k = \lambda m^{-2} B_k, \tilde{C}_k = \lambda m^{-2} C_k, \tilde{D}_k = D_k, \\ \tilde{E}_{-1} &= E_{-1} - \frac{m^2}{1944} (90 - 36m - 49m^2)(6 - 4m - m^2)^{-1}, \\ \tilde{E}_1 &= \frac{1}{8} (6 - m^2)(6 - 4m - m^2)^{-1}, \tilde{G}_k = \lambda m^{-1} G_k, (k = \pm 1), \\ \tilde{C}_2 &= C_2, \tilde{D}_2 = \frac{3}{400} (22950 + 1800m - 743m^2)(30 - 4m - m^2)^{-1}, \\ \tilde{E}_2 &= \frac{1}{400} (63450 + 10440m - 3129m^2)(30 - 4m - m^2)^{-1}, \tilde{G}_2 = \lambda m^{-1} G_2, \\ \tilde{K}_2 &= \lambda m^{-2} K_2, \tilde{H}_2 = \lambda m^{-1} H_2, \tilde{F}_k = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2). \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Обозначая $\beta_k^{(p)}, \beta^{(p)}$ частные суммы рядов β_k, β , по степеням λ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \beta_{-1}^{(3)} &= \tilde{A}_{-1} + \tilde{A}_{-1}^2 \tilde{B}_{-1} + \tilde{A}_{-1} \tilde{A}_1 \tilde{C}_{-1} + \tilde{A}_1 (\tilde{A}_{-1} \tilde{C}_2 + \tilde{H}_2) (\tilde{A}_{-1} \tilde{D}_{-1} + \tilde{A}_1 \tilde{E}_{-1} + \tilde{G}_{-1}), \\ \beta_1^{(3)} &= \tilde{A}_1 + \tilde{A}_{-1}^2 \tilde{B}_1 + \tilde{A}_{-1} \tilde{A}_1 \tilde{C}_1 + \tilde{A}_1 (\tilde{A}_{-1} \tilde{C}_2 + \tilde{H}_2) (\tilde{A}_{-1} \tilde{D}_1 + \tilde{A}_1 \tilde{E}_1 + \tilde{G}_1), \\ \beta^{(3)} &= \tilde{A}_1 (\tilde{C}_2 \tilde{A}_{-1} + \tilde{H}_2) (\tilde{D}_2 \tilde{A}_{-1} + \tilde{E}_2 \tilde{A}_1 + \tilde{G}_2) + \tilde{K}_2 \tilde{A}_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

причем $\tilde{A}_1, \tilde{A}_{-1}, \dots$ выражения (80).

Из (79), (80), (81) следует, что

$$\beta^{(1)} = \beta_{\pm 1}^{(2)} = 0. \quad (82)$$

Полагая в (79), (80) $\lambda = m^2, m = \sigma$, получим

$$\left. \begin{aligned} \beta_{-1}^{(1)} &> 0.008695808, & \beta_{-1}^{(3)} &> 0.008697102, \\ \beta_1^{(1)} &> 0.001515849, & \beta_1^{(3)} &> 0.001516275, \\ & & \beta^{(3)} &> 0.0003093682. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Обращаясь к (38), найдем $\xi^{(p)}, \eta^{(p)}$ ($p = 1, 2, 3$).

Деля в (32) замену (36*) и используя формулы (79), (80), а также выражения для $A_{\pm 1}$, приведенные в работе (Петровская, 1959) на стр. 462, 463, получим

$$\text{mag} l^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{4} (\beta_{-1} + \beta_1)^2 + \beta_{-1} \beta_1 + \dots = 1 + \frac{89}{128} \lambda^2 + \lambda^4(\dots). \quad (84)$$

Далее

$$\left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \beta_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2} m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{19}{32 \left(1 - 2m - \frac{1}{2} m^2 \right)} \lambda^2 + \lambda^4(\dots).$$

Тогда

$$\text{mag} l^{\frac{1}{3}} \times \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \beta_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2} m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{89}{128} \lambda^2 + \frac{19}{32 \left(1 - 2m - \frac{1}{2} m^2 \right)} \lambda^2 + \lambda^4(\dots), \quad (85)$$

Обозначим

$$\frac{89}{128} \lambda^2 + \frac{19}{32 \left(1 - 2m - \frac{1}{2} m^2 \right)} \lambda^2 = I_2. \quad (86)$$

Учитывая (85), получим

$$mag I^{\frac{1}{3}} \times \left[1 - \frac{\lambda \beta_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \left\{ \beta_{-1} + \beta_1 + \beta \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4} \right\} = I_1 \times I_2 + I_3 + \lambda^4(\dots), \quad (87)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \beta_{-1}^{(1)} + \beta_1^{(1)}, \\ I_3 &= \beta_{-1}^{(3)} + \beta_1^{(3)} + \beta^{(3)} \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq 0, \pm 1)}}^{+\infty} \frac{1}{i^4}. \end{aligned} \quad (88)$$

Теперь из (38), (85)-(87) получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi}^{(3)} &= I_2(1 + I_1) + I_3, \\ \tilde{\eta}^{(3)} &= I_1 I_2 + I_3. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Пользуясь (49), (83), (86), (88), при $\lambda = m^2, m = \sigma$ будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi}^{(3)} &> 0.01032477, \\ \tilde{\eta}^{(3)} &> 0.01026492. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Найдем верхние границы $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$. Из (28), (38), (36*) имеем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi} &= mag I^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \gamma_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} - 1 + \tilde{\eta}, \\ \tilde{\eta} &= mag I^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda \gamma_{-1}}{1 - 2m - \frac{1}{2}m^2} \right]^{-\frac{1}{3}} \times \tilde{B}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Используя неравенства (63) и формулы (28), (32), при $\lambda = m^2, m = \sigma$ получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi} &< 0.01032518, \\ \tilde{\eta} &< 0.01026528. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Из (90), (92) получим

$$\left. \begin{aligned} \delta_3 \tilde{\xi} &= \tilde{\xi} - \tilde{\xi}^{(3)} < 0.00000041 = \delta_3 \zeta, \\ \delta_3 \tilde{\eta} &= \tilde{\eta} - \tilde{\eta}^{(3)} < 0.00000036 < \delta_3 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Обращаясь к работе (Ляпунов, 1954), имеем при $m = \sigma$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &< \{|a_{2,0}| + |a_{2,2}| + |a_{2,-2}|\} \lambda^2 < 0.00003001, \\ \varepsilon_3 &< \{|a_{3,-3}| + |a_{1,-1}| + |a_{1,1}| + |a_{3,3}|\} \lambda^3 < 0.00000028, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

где ε_k ($k = 2, 3$) верхние границы модулей членов k -ой степени рядов по степеням λ , получающихся после подстановки (17) в (14).

Обозначим

$$\delta_k \zeta = \sum_{i=k+1}^3 \varepsilon_i + \delta_3 \zeta \quad (k = 1, 2). \quad (95)$$

Из (93), (94) получим

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \zeta &< 0.00003070, \\ \delta_2 \zeta &< 0.00000069. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

из (18), (39), (93) и § 1 следует, что при $|m| \leq \sigma$

$$\left. \begin{aligned} |\delta_3 \xi| &< \delta_3 \zeta, \\ |\delta_3 \eta| &< \delta_3 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

далее, из (95), (97)

$$\left. \begin{aligned} |\delta_k \xi| &< \delta_k \zeta, \\ |\delta_k \eta| &< \delta_k \zeta \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Для сравнения приводим оценки, полученные в работе (Ляпунов, 1954) ¹

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \zeta &= 0.0000315_{0(+)}^{1(-)}, \\ \delta_2 \zeta &= 0.0000015_{0(+)}^{1(-)}, \\ \delta_3 \zeta &= 0.0000012_{2(+)}^{3(-)}. \end{aligned} \right\}$$

ЛИТЕРАТУРА

- Ляпунов А. М. 1954. О рядах, предложенных Hill'em для представления движения Луны. Собр. соч., 1, изд. АН СССР, М.
 Мерман Г. А. 1952. О радиусе сходимости рядов Хилла. Бюлл. ИТА, 5, 4 (67).
 Петровская М. С. 1959. Новая оценка радиуса сходимости рядов Хилла. Бюлл. ИТА, 7, 6 (89).
 Brown E. W. 1899. Theory of the Motion of the Moon. Memoirs of the Royal Astr. Soc., LIII.
 Hill G. W. 1905. Researches in the Lunar Theory. The Collected Mathematical Works, 1, Memoir, 32.
 Wintner A. 1929. Über die konvergenzfragen der Mondtheorie. Math. Zeitschr., 30, 1—2.

Поступило в Редакцию
 12 января 1963 г.

¹ Знак $(-)$ указывает на то, что точное число по абсолютной величине меньше написанного, знак $(+)$ — больше написанного.