

Title: Efecto doppler en relatividad especial de campos

Abstract

El efecto doppler es la variación en frecuencia de una onda, que experimenta un receptor debido a su velocidad respecto al emisor. Como veremos, en la relatividad especial de campos también tendremos en cuenta otros efectos como el potencial.

Autor: Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Este proyecto precisa financiación, no dude en contactar para apoyarlo.

Málaga, 13 de Junio de 2025. Revisado a 30 de Agosto de 2025.

Table of Contents

Introducción.....	2
Efecto doppler.....	2
Rayos de luz rectilíneos.....	2
Rayos de luz curvos (tentativo).....	3
Caso de velocidad variable por efecto shapiro (tentativo).....	3
Efecto doppler relativista.....	5
Relatividad especial.....	5
Relatividad especial de campos.....	5
Expresiones completas.....	6
Anexo I: Ejemplo para rayos rectos.....	7
Caso aceleración paralela a la propagación de los rayos.....	8
Caso aceleración perpendicular a la propagación de los rayos.....	9
Rayos rectilíneos.....	9
Rayos curvos.....	10
Anexo II: Redshift lab.....	11
Lab horizontal.....	11
Aceleración: $v > 0$	11
Aceleración: $v < 0$	12
Frenado.....	12
Lab vertical.....	13
Aceleración.....	13
Frenado.....	13
Anexo III: Efecto doppler sobre ondas sonoras.....	14
Anexo IV: Repaso de los experimentos tipo Hafele-Keating.....	15
Experimento de Hafele-Keating.....	15
Experimento de los relojes de Maryland.....	16
Anexo V: Mecánica relativa.....	17
Anexo VI: Extensión del factor de Lorentz generalizado.....	18

Introducción

Como se ha indicado, el efecto doppler es el cambio en frecuencia de una onda que experimenta un receptor respecto a la frecuencia que emite una fuente. ‘Que experimenta’ hace referencia a que los fotones no sufren cambio real de su frecuencia (como sucede en el redshift gravitatorio), es un efecto que afecta al receptor únicamente.

Vamos a empezar por las ecuaciones clásicas de relatividad especial para ondas electromagnéticas y las extendemos para relatividad especial de campos a través de los factores de lorentz generalizados. También daremos alguna pincelada para el efecto doppler con ondas sonoras.

Para los ejemplos, vamos a realizar la reducción de la velocidad del receptor antes de comenzar el análisis, ver el ‘Anexo V: Mecánica relativa’ para una explicación de por qué hay que hacer esto. Hay más información sobre este requerimiento en la referencia [2].

Efecto doppler

Rayos de luz rectilíneos

La ecuación para el efecto doppler es,

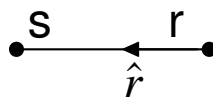
$$\frac{f_r}{f_s} = 1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}.$$

Donde,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s, \\ \vec{r} &= \vec{r}_s - \vec{r}_r, \\ \beta &= \frac{v}{c}.\end{aligned}$$

Esto es, el vector velocidad ‘v’ es la diferencia entre el vector velocidad del receptor en el instante de recepción, menos el vector velocidad de la fuente en el momento de la emisión. Para entrar a la fórmula, hay que normalizar el vector y hacerlo unitario; esto es, en la fórmula usamos el versor ‘v’.

Mientras que el vector ‘r’ es un vector que apunta del receptor a la fuente en el instante de emisión de la onda. Igualmente, usamos el versor para entrar a la fórmula.

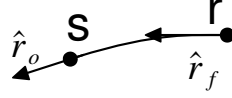


Beta es el cociente del módulo del vector velocidad, v, entre la velocidad de la luz c. Además, podemos decir,

$$\begin{aligned}\hat{v} \cdot \hat{r} &= +1 \rightarrow \text{blueshift}, \\ \hat{v} \cdot \hat{r} &= -1 \rightarrow \text{redshift}.\end{aligned}$$

Rayos de luz curvos (tentativo)

Para el caso de un rayo de luz curvo, la propuesta es extender la fórmula anterior definiendo el vector 'r' según la tangente a la curva que traza el rayo, diferenciando la tangente en receptor y fuente.



Quedando la ecuación,

$$\frac{f_r}{f_s} = 1 + \frac{1}{c} (\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o).$$

Nótese que si tenemos el versor que define la trayectoria de la luz (integrando un cuaternio, por ejemplo, entre t_o y t_f), los versores se definen como,

$$\begin{aligned}\hat{r}_f &= -\hat{r}_{\text{rayo}}(t=t_o), \\ \hat{r}_o &= -\hat{r}_{\text{rayo}}(t=t_f).\end{aligned}$$

Por llevar dirección contraria a la de la trayectoria del rayo de luz.

Caso de velocidad variable por efecto shapiro (tentativo)

En el análisis del efecto shapiro, obtuvimos que la velocidad de los fotones y la ecuación del tiempo propio del sistema que observa el fotón (τ) son,

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} &= \frac{1}{\gamma'}, \\ \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v}.\end{aligned}$$

Donde gamma prima es el factor de lorentz generalizado para los bosones (fotones en este caso),

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \exp\left(\frac{\Delta U'}{c_m^2}\right).$$

Donde,

$$\begin{aligned}c_m &= c/\sqrt{2}, \\ \Delta U' &= U_s - U_r.\end{aligned}$$

Vamos a expresar la ecuación de la velocidad en función el tiempo que realiza la medida,

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma' \vec{v}.$$

Tomando módulos en la ecuación, sustituyendo el factor de lorentz generalizado, ya en función a la velocidad de la luz, y llamando v_a a la velocidad aparente (en el primer miembro de la ecuación anterior),

$$v_a = \frac{c/\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \exp\left(\frac{2\Delta U'}{c^2}\right)},$$

o,

$$v_a = \frac{c}{1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp\left(\frac{2\Delta U'}{c^2}\right)\right)},$$

El potencial que modelamos es un potencial gravitatorio, para potenciales que derivan del principio de equivalencia, el raíz de dos queda como un 1, dando,

$$v_a = \frac{c}{2 - \exp\left(\frac{2\Delta U'}{c^2}\right)}.$$

Vamos a cambiar la definición del incremento de potencial para ajustarla a la referencia que se toma para el cálculo del redshift, donde el incremento de potencial se calcula justo al revés,

$$\Delta U = U_r - U_s.$$

Que simplemente introduce un signo menos en las expresiones anteriores.

La velocidad aparente sustituye a la velocidad de la luz, del lado de la fuente, en la expresión del apartado anterior, para dar las posibles ecuaciones,

$$\frac{f_r}{f_s} = 1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp\left(\frac{-2\Delta U}{c^2}\right) \right) \right) \right),$$

Para potenciales gravitatorios.

Donde el potencial de referencia se calcula en el receptor.

En el límite de incrementos de potencial pequeño, se tiene,

$$\frac{f_r}{f_s} = 1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(1 + \frac{2\sqrt{2}\Delta U}{c^2} \right) \right).$$

y, para rayos rectos,

$$\frac{f_r}{f_s} = 1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(1 + \frac{2\sqrt{2}\Delta U}{c^2} \right) \right).$$

Nótese que, efectivamente, puede definirse un índice de refracción,

$$n = \frac{c}{v_a} = 1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp\left(\frac{-2\Delta U}{c^2}\right) \right).$$

Que no implica cambio en la dirección espacial de los rayos.

Efecto doppler relativista

Relatividad especial

Para el efecto doppler relativista, empezamos por definir qué le pasa al tiempo de un observador respecto a una fuente, cuando se mueve a velocidad 'v' (en módulo) inferior a 'c',

$$v \leq c.$$

Sabemos que el tiempo pasa más despacio cuanto más rápido se mueve el receptor, el factor de lorentz es la relación de transformación entre tiempos. Esto lo describimos,

$$\begin{aligned} v_r > v_s \quad \frac{T_s}{T_r} &= \gamma \\ v_s > v_r \quad \frac{T_s}{T_r} &= \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Ya que el factor de lorentz es siempre mayor o igual a 1.

En estas expresiones hemos tomado como el tiempo, T, el período de la onda; por lo que podemos convertir la ecuación a frecuencias sabiendo que es la inversa del período. También puede expresarse en función a la longitud de onda, usando,

$$\frac{\lambda}{T} = c.$$

En frecuencias queda,

$$\begin{aligned} v_r > v_s \quad \frac{f_r}{f_s} &= \gamma \\ v_s > v_r \quad \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Nótese que el redshift se define, en base al cociente de frecuencias, como,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1}{1+z}.$$

A partir de las ecuaciones en frecuencia y suponiendo movimiento del rayo rectilíneo, por simplicidad, las ecuaciones para el efecto doppler relativista quedan,

$$\begin{aligned} v_r > v_s \quad \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}}{1/\gamma} \\ v_s > v_r \quad \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}}{\gamma} \end{aligned}$$

Relatividad especial de campos

En la referencia [1], se definieron los factores generalizados de lorentz para distintos casos; que tienen en cuenta tanto el efecto de la velocidad como de los potenciales. Para un sistema emisor-receptor fermiónico (de materia ordinaria), el factor de lorentz generalizado es,

$$\frac{T_s}{T_r} = \gamma' = \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)}.$$

El factor generalizado de lorentz lo notamos como gamma prima, y no tiene cota (contrariamente al factor de lorentz normal). Pero sí presenta la restricción (más fuerte) sobre el módulo de la velocidad 'v',

$$v \leq c/\sqrt{2}.$$

Y la referencia de potencial es la indicada previamente,

$$\Delta U = U_r - U_s.$$

Las expresiones completas quedan,

$$\begin{aligned} v_r > v_s \quad \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)} \\ v_s > v_r \quad \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}}{\gamma - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

Que son las del apartado anterior cuando la diferencia de potencial es nula. En la referencia [2] pueden verse algunos casos de uso.

Nótese que para velocidades nulas, ambas expresiones dan la relación con el redshift,

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)}.$$

O,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Que es la ecuación para el redshift debida al potencial, como se dedujo en la referencia [1].

Expresiones completas

Para tener en cuenta el efecto shapiro en potenciales gravitatorios, con rayos rectos,

$$\begin{aligned} v_r > v_s \quad \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp\left(\frac{-2\Delta U}{c^2}\right) \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)} \\ v_s > v_r \quad \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp\left(\frac{-2\Delta U}{c^2}\right) \right) \right) \right)}{\gamma - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

Mientras que con rayos curvados,

$$v_r > v_s \quad \frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)}$$

$$v_s > v_r \quad \frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right) \right)}{\gamma - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)}$$

Con,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s, \\ \vec{r} &= \vec{r}_s - \vec{r}_r, \\ \Delta U &= U_r - U_s. \end{aligned}$$

Mientras que para potenciales no gravitatorios con rayos rectos,

$$v_r > v_s \quad \frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)}$$

$$v_s > v_r \quad \frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right)}{\gamma - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)}$$

Y con rayos curvados,

$$v_r > v_s \quad \frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)}$$

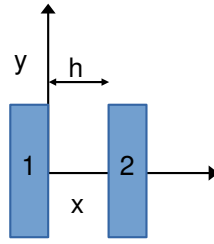
$$v_s > v_r \quad \frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right)}{\gamma - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)}$$

Es recomendable no aplicar infinitésimos nada mas que una vez para el resultado final.

Anexo I: Ejemplos

Vamos a analizar el sistema usado en el experimento de Pound&Rebka en la medida del redshift gravitacional. Recientemente se ha empleado un dispositivo similar para medida de redshift, ver

referencia [3]. El componente tiene un receptor-emisor separados por una distancia 'h', y se mueve como sólido rígido bajo una aceleración 'a'. Denominaremos a este experimento como 'redshift lab'.



La figura muestra el esquema del dispositivo (un optoacoplador) junto con las referencias que se van a utilizar. 1 hace las veces de emisor y 2 de receptor. El optoacoplador se sitúa sobre un altavoz que vibra a una frecuencia prefijada y sólo se usa para dar al dispositivo movimiento. Este esquema está pensado para emular el ensayo de Pound&Rebka sobre desplazamiento en frecuencia de origen gravitatorio para fotones.

Vamos a modelar el montaje en el instante inicial; la velocidad del receptor consideramos que es superior a la del emisor, porque en $t=0$ suponemos el dispositivo parado; y la velocidad del receptor, cuando llegan los fotones hasta él, no es cero debido a la propia aceleración del dispositivo.

Caso aceleración paralela a la propagación de los rayos

Los rayos realizan siempre un movimiento rectilíneo.

La aceleración se considera en la dirección del eje x, por lo que el principio de equivalencia nos permite definir el potencial,

$$U = -a x.$$

Vamos a definir las velocidades que hacen falta para calcular el efecto doppler,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \vec{0} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \frac{a h}{c} \hat{x} \end{aligned}$$

Realizando la reducción de velocidad en el receptor,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{-a h}{c} \hat{x} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \\ \vec{v} &= \frac{a h}{c} \hat{x} \rightarrow \hat{v} = \hat{x}, \\ \hat{r} &= -\hat{x}, \\ \beta &= \frac{a h}{c^2}, \\ \Delta U &= U_r - U_s = -a h. \end{aligned}$$

Por lo que la expresión del redshift es,

$$z = \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)}{1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}} - 1$$

Sustituyendo,

$$z = \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \exp(-\beta)}{1-\beta} - 1 \simeq \frac{-\beta^3}{6}.$$

Que representa un blueshift (los fotones ganan energía al desplazarse en la dirección de la fuerza de inercia), pero el término cuadrático se cancela debido al redshift doppler.

Mientras que si incluimos el efecto shapiro, la expresión del redshift es,

$$z = \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)}{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(2 - \exp\left(\frac{-2\Delta U}{c^2}\right) \right) \right)} - 1,$$

con,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{-ah}{c} \hat{x} \\ t &= \frac{h}{c} \quad \vec{v}_r = \vec{0} \\ \vec{v} &= \frac{ah}{c} \hat{x} \rightarrow \hat{v} = \hat{x}, \\ \hat{r} &= -\hat{x}, \\ \beta &= \frac{ah}{c^2}, \\ \frac{-1}{c} \hat{r} \cdot \vec{v}_s &= -(-\hat{x}) \cdot (-\beta \hat{x}) = -\beta, \\ \Delta U &= U_r - U_s = -ah. \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$z = \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \exp(-\beta)}{1 - \beta(2 - \exp(2\beta))} - 1 \simeq -2\beta^2.$$

Caso aceleración perpendicular a la propagación de los rayos

La aceleración se considera en la dirección del eje y, por lo que el principio de equivalencia nos permite definir el potencial,

$$U = -ay.$$

Rayos rectilíneos

Las velocidades,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \vec{0} \\ t &\simeq \frac{h}{c} \quad \vec{v}_r = \frac{ah}{c} \hat{y} \end{aligned}$$

Con la reducción,

$$\begin{aligned}
t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{-ah}{c} \hat{y} \\
t \simeq \frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \\
\vec{v} &= \frac{ah}{c} \hat{y} \rightarrow \hat{v} = \hat{y}, \\
\hat{r} &= -\hat{x}, \\
\beta &= \frac{ah}{c^2}, \\
y_f &= \frac{1}{2} a t^2 \simeq \frac{1}{2} a \left(\frac{h}{c} \right)^2, \\
\Delta U &= U_r - U_s = \frac{-1}{2} \left(\frac{ah}{c} \right)^2.
\end{aligned}$$

Por lo que la expresión del redshift es,

$$z = \sqrt{1 - \beta^2} - 2 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right).$$

Sustituyendo,

$$z = \sqrt{1 - \beta^2} - 2 + \exp\left(\frac{-\beta^2}{2}\right) \simeq -\beta^2.$$

Que es un blueshift debido a que los fotones ganan energía al curvarse la luz en la dirección de la aceleración. En este caso el efecto shapiro no aporta nada por anularse la parte doppler.

Rayos curvos

Las velocidades,

$$\begin{aligned}
t=0 \quad \vec{v}_s &= \vec{0} \\
t \simeq \frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \frac{ah}{c} \hat{y}
\end{aligned}$$

Con la reducción,

$$\begin{aligned}
t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{-ah}{c} \hat{y} \\
t \simeq \frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \\
\vec{v} &= \frac{ah}{c} \hat{y} \rightarrow \beta = \frac{ah}{c^2}, \\
\frac{\vec{v}_{rayo}}{c} &= \sqrt{1 - \beta^2} \hat{x} + \beta \hat{y}, \\
\hat{r}_o &= -\hat{x}, \\
\hat{r}_f &= -\sqrt{1 - \beta^2} \hat{x} - \beta \hat{y}, \\
\frac{-1}{c} (\vec{v}_s \cdot \hat{r}_o) &= 0, \\
y_f &= \frac{1}{2} a t^2 \simeq \frac{1}{2} a \left(\frac{h}{c} \right)^2, \\
\Delta U &= U_r - U_s = \frac{-1}{2} \left(\frac{ah}{c} \right)^2.
\end{aligned}$$

Por lo que la expresión del redshift,

$$z = \sqrt{1 - \beta^2} - 2 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right).$$

Sustituyendo,

$$z = \sqrt{1 - \beta^2} - 2 + \exp\left(\frac{-\beta^2}{2}\right) \simeq -\beta^2.$$

Que es un blueshift. Y donde el retardo shapiro sigue sin aportar nada.

Anexo II: Redshift lab

Hemos visto dos instantes particulares de este experimento, vamos a analizar los instantes en que el dispositivo pasa la mayor parte del tiempo, que son la aceleración y el frenado. Siempre se cumple que $v_r > v_s$.

Lab horizontal

La aceleración es paralela al eje x, y usamos expresiones para rayos rectos para calcular z.

$$z = \frac{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)}{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(2 - \exp\left(\frac{-2 \Delta U}{c^2}\right) \right) \right)} - 1,$$

haciendo la reducción de velocidad en el receptor.

Aceleración: $v > 0$

Las velocidades serían,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \vec{v}_o \hat{x} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \left(v_o + \frac{a h}{c} \right) \hat{x} \end{aligned}$$

Por lo que la reducción de velocidades sería,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{-a h}{c} \hat{x} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \\ \vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = \frac{a h}{c} \hat{x} \rightarrow \hat{v} = \hat{x}, \\ \hat{r} &= -\hat{x}, \\ \beta &= \frac{a h}{c^2}, \\ \frac{-1}{c} \hat{r} \cdot \vec{v}_s &= -(-\hat{x}) \cdot (-\beta \hat{x}) = -\beta, \\ \Delta U &= U_r - U_s = -a h \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-a h}{c^2} = -\beta. \end{aligned}$$

que, sustituyendo,

$$z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}-1+\exp(-\beta)}{1-\beta(2-\exp(2\beta))}-1 \simeq -2\beta^2.$$

Aceleración: $v < 0$

Las velocidades serían,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= -\vec{v}_o \hat{x} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \left(-v_o + \frac{ah}{c}\right) \hat{x} \end{aligned}$$

Por lo que la reducción de velocidades sería,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{-ah}{c} \hat{x} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \end{aligned}$$

que deja el resultado anterior invariable, por lo que no consideramos más el cambio de signo de v durante la aceleración o frenado.

Frenado

Las velocidades serían,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= -\vec{v}_o \hat{x} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= -\left(v_o + \frac{ah}{c}\right) \hat{x} \end{aligned}$$

Por lo que la reducción de velocidades sería,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{ah}{c} \hat{x} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{v}_r - \vec{v}_s &= \frac{-ah}{c} \hat{x} \rightarrow \hat{v} = -\hat{x}, \\ \hat{r} &= -\hat{x}, \\ \beta &= \frac{ah}{c^2}, \\ \frac{-1}{c} \hat{r} \cdot \vec{v}_s &= -(-\hat{x}) \cdot (\beta \hat{x}) = \beta, \\ \Delta U = U_r - U_s &= -ah \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-ah}{c^2} = -\beta. \end{aligned}$$

que, sustituyendo,

$$z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}-1+\exp(-\beta)}{1+\beta(2-\exp(2\beta))}-1 \simeq -2\beta+4\beta^2.$$

Lab vertical

La aceleración es paralela al eje y, y usamos expresiones para rayos curvos para calcular z.

$$z = \frac{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)}{1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(2 - \exp\left(\frac{-2 \Delta U}{c^2}\right) \right) \right)} - 1,$$

haciendo la reducción de velocidad en el receptor.

Aceleración

Las velocidades serían,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \vec{v}_o \hat{y} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \left(v_o + \frac{a h}{c} \right) \hat{y} \end{aligned}$$

Por lo que la reducción de velocidades sería,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{-a h}{c} \hat{y} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \\ \vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = \frac{a h}{c} \hat{y} \rightarrow \hat{v} = \hat{y}, \\ \hat{r}_o &= -\hat{x}, \\ \beta &= \frac{a h}{c^2}, \\ \frac{-1}{c} \hat{r}_o \cdot \vec{v}_s &= -(-\hat{x}) \cdot (-\beta \hat{y}) = 0, \\ \Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-\beta^2}{2}. \end{aligned}$$

que, sustituyendo,

$$z = \sqrt{1 - \beta^2} - 2 + \exp\left(\frac{-\beta^2}{2}\right) \simeq -\beta^2.$$

Frenado

Las velocidades serían,

$$\begin{aligned} t=0 \quad \vec{v}_s &= -\vec{v}_o \hat{y} \\ t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= -\left(v_o + \frac{a h}{c} \right) \hat{y} \end{aligned}$$

Por lo que la reducción de velocidades sería,

$$\begin{aligned}
t=0 \quad \vec{v}_s &= \frac{a h}{c} \hat{y} \\
t=\frac{h}{c} \quad \vec{v}_r &= \vec{0} \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = \frac{-a h}{c} \hat{y} \rightarrow \hat{v} = -\hat{y}, \\
\hat{r}_o &= -\hat{x}, \\
\beta &= \frac{a h}{c^2}, \\
\frac{-1}{c} \hat{r}_o \cdot \vec{v}_s &= -(-\hat{x}) \cdot (\beta \hat{y}) = 0, \\
\Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-\beta^2}{2}.
\end{aligned}$$

que, sustituyendo,

$$z = \sqrt{1 - \beta^2} - 2 + \exp\left(\frac{-\beta^2}{2}\right) \simeq -\beta^2.$$

Anexo III: Efecto doppler sobre ondas sonoras

La fórmula para el efecto doppler en ondas sonoras suele expresarse,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{c_m \pm v_r}{c_m \pm v_s},$$

Donde las velocidades se suponen referidas al medio que transporta la ondas, siendo c_m la velocidad de las ondas en ese medio. Y v_r es positiva cuando se acerca el receptor a la fuente, y v_s es positiva si la fuente se aleja del receptor.

Supongamos que se realiza el siguiente experimento: se sitúan dos barcos navegando sobre la misma línea y uno de ellos actúa como fuente (sonar) y otro como receptor. Se permite que la velocidad relativa entre ambos navíos varíe muy lentamente de forma lineal. Partamos también de que el fluido se encuentra en reposo.

Suponiendo que el receptor pudiera medir la frecuencia de las ondas que capta y que se hubiera pactado la frecuencia de emisión, el receptor sólo mirando si la evolución de la frecuencia es lineal o no lineal, podría deducir si es la fuente la que se mueve (tendencia no lineal -hiperbólica-) o es el receptor (tendencia lineal). Esto es lo que denominaría Newton detección de movimiento absoluto y lo prohibió hace tiempo. La única habilidad que se espera del receptor, mediante una ley física, es que sea capaz de decidir si la fuente se mueve respecto a él, sin poder concretar nada acerca del movimiento individual.

Como alternativa, vamos a proponer una ecuación análoga a la relativista,

$$\frac{f_r}{f_s} = 1 + \frac{\vec{v} \cdot \hat{r}}{c_m - \vec{v}_m \cdot \hat{r}}.$$

Donde las velocidades son las definidas previamente para el caso de ondas electromagnéticas; y se incluye en la ecuación la velocidad del medio (v_m) que debe proyectarse sobre el versor que va de receptor a fuente.

Curiosamente, no he sido capaz de localizar ningún experimento que pueda validar la ecuación.

Anexo IV: Repaso de los experimentos tipo Hafele-Keating

Vamos a reexponer las ecuaciones de los experimentos en base a las modificaciones que hemos introducido en los factores de Lorentz generalizados. Se analizan por orden cronológico.

Experimento de Hafele-Keating

A grandes rasgos, en este experimento se comparan dos relojes atómicos, uno fijo en tierra y el otro realizando un vuelo en avión por el globo terrestre. Se realiza el experimento dos veces introduciendo un cambio, en una ocasión el vuelo sigue el sentido de rotación de la tierra y en la otra es contrario.

El factor de Lorentz (habitual) se calcula como la velocidad relativa entre dos puntos A y B. En este experimento A podría ser la estación de tierra y B el avión en vuelo. La diferencia de velocidad da igual quien la mida porque es el módulo del vector diferencia de velocidades y al cuadrado,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_B - \vec{v}_A, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \Delta U' &= U_B - U_A.\end{aligned}$$

Donde hemos indicado ya, también, cómo va a medirse la diferencia de potencial.

El tiempo que mide la estación base A respecto a B es,

$$\frac{d\tau_B}{dt_A} = \frac{1}{\gamma'} = \exp\left(\frac{\Delta U'}{c^2}\right) - 1 + \frac{1}{\gamma}, \quad (1)$$

Que podríamos definir igualmente mediante el otro factor de Lorentz generalizado,

$$\frac{d\tau_B}{dt_A} = \frac{1}{\gamma'} = \exp\left(\frac{\Delta U'}{c^2}\right) - 1 + \gamma, \quad (2)$$

Esta ambigüedad es lo que se denominó en su momento la paradoja de los gemelos^[4], ya que cada observador podría argumentar que es el otro hermano el que se mueve a la velocidad de la luz y seleccionar el primer factor de Lorentz generalizado para los cálculos (para aquellos que se sientan decepcionados porque el artículo de wikipedia usa relatividad general, recordar que toda aceleración se puede escribir como un potencial en base al principio de equivalencia y proceder a hacer el cálculo como hemos hecho en los ejemplos de los anexos de este documento con el optoacoplador).

Este primer experimento es crucial para determinar un cierto sentido de absolutez del movimiento (lo siento Newton, no me tuerzas así la boca) Sólo una medición práctica es capaz de determinar el valor correcto de la relación entre las velocidades de A y B. Nótese que mientras el observador A ve a B alejarse y diría que tiene más velocidad y seleccionaría el primer factor de Lorentz generalizado, desde su punto de vista; es la rotación de la tierra la responsable final de quién va más rápido. Para el caso en el que el avión vuela en sentido contrario a la rotación de la tierra, el observador de tierra vería exactamente lo mismo, pero si el avión no supera cierta velocidad, siempre va a ir más despacio que el observador de tierra y hay que seleccionar el segundo factor de Lorentz

generalizado. Por lo tanto el cálculo tiene la capacidad de predecir movimiento absoluto, pero no podemos acceder al tiempo absoluto en un experimento por el hecho de que el tiempo puede ser negativo. El tiempo absoluto lo vería un observador libre de potenciales y con velocidad absoluta cero; también podríamos decir que aún no estando libre de potenciales podría ver el tiempo absoluto compensando el potencial con la velocidad, pero ello requiere conocer el potencial de manera exacta (imposible, sobre todo el potencial de inercia).

La tabla del experimento de Hafele-Keating^[5] la vamos a resumir,

Dirección	Velocidades	Tiempo (cinemático)	Expresión cinemática	Factor Lorentz Generalizado	Signo parte potencial	Signo parte cinemática
Este	$v_B > v_A$	$T_B < T_A$	$T_B \gamma = T_A$	primero	+	-
Oeste	$v_B < v_A$	$T_B > T_A$	$T_B = T_A \gamma$	segundo	+	+

Donde la parte potencial es bastante superior a la cinemática (aún no hay delorean operativo).

Experimento de los relojes de Maryland

El experimento de los relojes de Maryland es una versión más precisa del experimento de Hafele-Keating, pero el avión sólo se desplaza hacia el este (desde ‘patuxent river’ hacia ‘chesapeake bay’); por lo que la parte cinemática del tiempo es negativa y resta algo a la parte potencial del tiempo.

Para el cálculo se usa el factor de Lorentz generalizado (1). Siendo B el avión y A la estación de tierra.

Para llegar a la expresión que dimos en [1], hay que expresar el tiempo como diferencia y aplicar infinitésimos,

$$\begin{aligned}\frac{d \Delta t}{d t_A} &= \exp\left(\frac{\Delta U'}{c^2}\right) - 2 + \frac{1}{\gamma}, \\ \frac{d \Delta t}{d t_A} &= \frac{\Delta U'}{c^2} - \frac{\beta^2}{2}, \\ \frac{d \Delta t}{d t_A} &= \frac{g h}{c^2} - \frac{\beta^2}{2}.\end{aligned}$$

Con,

$$\begin{aligned}\Delta t &= \tau_B - t_A, \\ \vec{v} &= \vec{v}_B - \vec{v}_A, \\ \beta &= \frac{v}{c}, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \Delta U' &= U_B - U_A.\end{aligned}$$

Como hemos comentado, si el avión volara al oeste pero con velocidad superior a aproximadamente,

$$v_B = w_{earth} R_T \simeq 464 \text{ m/s},$$

el factor de Lorentz generalizado que habría que usar sería el mismo, porque seguiría teniendo más velocidad que la estación de tierra. En el experimento hacia el este, el avión se desplazaba a unos 138 m/s.

En la fórmula anterior, w_{earth} sería la velocidad de rotación de la tierra y R_T su radio. Nótese que la velocidad que desde tierra medirían para el avión sería superior a unos 928 m/s (casi Mach 3, el piloto tendría que tener muchas ganas de hacer el test).

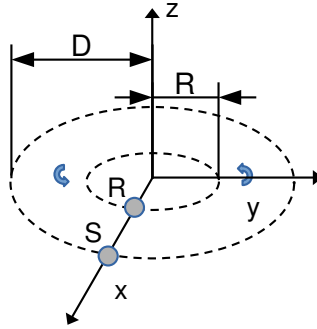
Anexo V: Mecánica relativa

En la referencia [1] se trata la precesión del perihelio de mercurio y se comenta que el 33% de la precesión asociada a relatividad general es debida a la inducción de campo gravitatorio (análogo a la ley de faraday pero para partícula puntual) En la deducción analizamos el movimiento relativo del sol y mercurio dado que conocíamos los vectores instantáneos del movimiento y sólo los restamos para conocer su movimiento relativo, ésto es aproximadamente correcto (y seguramente dependiente del período), pero fue suficiente para explicar la parte que faltaba de la precesión.

Esto se ve más fácilmente en caso de movimiento rectilíneo de partículas; si queremos conocer qué movimiento vería R respecto a S, nos basta con restar las velocidades,

$$\vec{v} = \vec{v}_S - \vec{v}_R.$$

Realmente lo que ve R en un sistema más complejo, pasa por restar la velocidad de R a todo el sistema. Vamos a repetir eso mismo para el caso de movimiento circular de R, pero con S estacionaria. Como en la figura,



Donde R se encuentra sobre el eje X, inicialmente, en el círculo interior de radio 'R' y S en el círculo exterior de radio 'D'. La dirección de giro de R es hacia el eje Z, rotando como indican las flechas.

Para este caso la posición de R y su rotación, en cualquier instante, son,

$$\begin{aligned}\vec{r}_R &= R(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}), \\ \vec{\omega} &= \omega \hat{z}.\end{aligned}$$

Calculamos la velocidad de rotación,

$$\vec{v}_R = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_R = R \omega (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}),$$

Si restamos ahora la velocidad de R al sistema, en este caso S, que está en reposo, la velocidad que verá R de S es (suponemos que R ignora su propio movimiento circular y el de S),

$$\vec{v}_S = \vec{0} - \vec{v}_R = -R \omega (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}),$$

Vamos a hacer un inciso para calcular la velocidad de S sometido a una rotación w' , como lo haría R si estuviera haciendo el cálculo, el vector de posición y rotación de S serían,

$$\vec{r}_S = D(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}),$$

$$\vec{w}' = w' \hat{z}.$$

que darán la velocidad,

$$\vec{v}_S = \vec{w}' \wedge \vec{r}_S = D w' (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}),$$

que al igualar a la velocidad de S respecto a R,

$$D w' (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) = -R w (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}),$$

identidad que sólo se cumple con,

$$w' = \frac{-w R}{D},$$

Que es equivalente a que R esté en reposo y S tenga una rotación w' , de dirección opuesta a la de R. El problema aparece cuando R mide el período de S, que sería,

$$T = \frac{2\pi}{w},$$

Pero el período que ha calculado es,

$$T = \frac{2\pi}{w'} = \frac{2\pi D}{w R}.$$

Por lo que es incorrecto en movimiento circular proceder como con movimiento rectilíneo. Lo correcto es aplicar a todo el sistema la rotación $-w$, para que el período no cambie al cambiar de observador. La igualdad en el período de todos los objetos celestes vistos desde la tierra es lo que evoca en el cerebro la ilusión de 'esfera celeste', donde todas las estrellas parecen estar a la misma distancia y se mueven al unísono.

Nótese que R ve la rotación inversa para todos los puntos exteriores; por lo que dos puntos que se encuentran alineados sobre la línea de visión de R permanecerán alineados en cualquier instante, y eso implica que la velocidad lineal que percibe R de los puntos exteriores depende de su distancia al origen (como se espera en una rotación). Y si estamos calculando un factor de lorentz generalizado, el valor del módulo de la velocidad relativa entre R y S va a ser función de la distancia al origen.

Nótese también que si hemos aplicado una rotación inversa sobre S para deducir qué movimiento percibe R, al calcular la trayectoria de fotones enviados desde S hasta R, necesitamos considerar las fuerzas de inercia derivadas de la rotación de R.

Anexo VI: Extensión del factor de Lorentz generalizado

Para el caso de fermiones (materia ordinaria), el factor de lorentz generalizado está limitado a la velocidad de los gravitones (que carecen de masa, dicho sea de paso),

$$v \leq c/\sqrt{2}.$$

Es de esperar que la forma del factor para velocidades mayores siga la generalización,

$$\gamma' = \frac{1}{\exp\left(\frac{\Delta U'}{c^2}\right) + f(\gamma)},$$

donde f es una función del factor de lorentz normal. Esto es debido a cómo se dedujo el redshift debido a potenciales, donde no había limitaciones de velocidad alguna (ver referencia [1]) y ese resultado se debe mantener para γ siendo la unidad.

Esta función podría determinarse con lecturas sobre el sistema solar, midiendo el redshift de planetas más allá de saturno (urano, neptuno, ...) cuando se encuentren a mas de 19.49UA (UA: unidad astronómica, útil dentro del sistema solar); con neptuno podríamos llegar a 1.14c aproximadamente. Mientras que para llegar a 2c necesitaríamos observar objetos a 55.11UA a los que pudiera medírseles el redshift por procedimientos no fotométricos.

Para medir el redshift con dependencia de la distancia hay que dejar sin compensar la rotación de la tierra sobre su eje únicamente (de todos modos es la rotación más importante y poco puede variar si el telescopio está en reposo, dada la magnitud de los valores que se medirán). La estrategia supongo que consistiría en anticipar el movimiento del cuerpo celeste lo suficiente para poder hacer una integración del redshift lo más cerca posible del centro del cuerpo.

Referencias

- [1] Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos.
<https://vixra.org/abs/2404.0013> versión 4.
- [2] Análisis del experimento del rotor mossbauer con relatividad especial de campos.
<https://vixra.org/abs/2404.0118> versión 2.
- [3] Einstein and Pound-Rebka in the Photocoupler. <https://vixra.org/abs/2204.0120>
- [4] https://wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_los_gemelos
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Hafele-Keating_experiment