

从 $F=ma$ 出发导出薛定谔方程

涂润生

ORCID: 0000-0001-5349-8007

【摘要】量子力学与经典力学是否兼容始终值得讨论。根据 $F=ma$ 可以导出薛定谔方程。从薛定谔方程中可以析出重要的经典物理学公式。薛定谔方程直观地含有质量 m 和与势能公式（这个质量 m 可以很大，而势能源于经典吸引力）。这三点决定了薛定谔方程是波函数与经典力学定律的有机结合体。据此可以预言“具有引力势能，可用于描述宏观客体的薛定谔方程”可以被建立起来。从“磁场中的电子衍射实验”中可以观察到“运动电子的波动性和粒子性可以同时呈现出来”的现象。该实验现象与上述的数理分析一起支持“牛顿第二定律在微观世界中仍然适用”的结论。可以将经典力学与量子力学结合起来使用。根据薛定谔方程可以证明：“以波动规律描述的运动粒子的能量与其动能的 2 倍是等价的”；宏观和微观（或经典与量子）之间没有绝对的界限，可以兼容。

关键词：薛定谔方程，量子力学，经典力学，等价，有机结合。

1. 引言

从数学的角度看，薛定谔方程中的质量 m 可以大到被描述客体是宏观客体。薛定谔方程直接使用了经典力学公式中与力有关的势能函数 $V=-\frac{Ze}{r}$ 或 $V=-\frac{GMm}{r}$ 。然而，量子力学科学家将量子力学与经典力学对立起来了（认为它们之间不兼容）。他们坚持的理由和信心的来源就是，忽略了薛定谔方程直接结合了经典势能函数和波函数的微分，以及薛方程中的质量 m 的可取值范围带来的“经典”与“量子”的兼容效果，而仅强调 $F=ma$ 在微观体系中不适用。但是，我们发现有多多个理由表明它们之间是可以兼容的（可以导出含有引力势能的，可以描述宏观客体的薛定谔方程。^{1,2,3,4,5} 量子力学与经典力学可以结合起来使用）。

理论上的理由是可以从薛定谔方程析出经典力学基本方程。反过来，从 $F=ma$ 出发可以导出薛定谔方程（这似乎可以摧毁正统量子力学家的信心）。还有，用数学方法不能为薛定谔方程中的质量 m 确定一个有限的上限。这个质量 m 是被薛定谔方程描述的客体的质量。它的值大到一定程度就是遵守经典力学规律的宏观物体。因此，薛定谔方程本身就是既可以描述微观粒子又可以描述宏观客体的波动力学基本方程。既然薛定谔方程不排斥 $F=ma$ 等经典力学公式，且薛定谔方程在量子力学中的应用非常成功，因此，我们可以预言 $F=ma$ 的规律在微观领域仍然适用。

通过磁场干扰下的电子衍射实验可以明确地观察到：衍射过程中的电子束可以在洛伦兹力的作用下移动一段距离而衍射图样变形但不消失。我们完全可以这样解释这种实验现象：在未发生量子退相干的情况下，电子的加速度与作用力成正比（作用在物体上的力可使该物体产生加速运动。这正是 $F=ma$ 的定性描述方式之一）。这也是用简单、详实而无歧义的实验方法证明了电子的波动性和粒子性可以同时保持和呈现（互补不是必须的）。这也是同时证明了描述波动性和描述粒子性的方法是可兼容的。关键是根据以上事实也可以作出其他预言。例如，可以将经典力学与量子力学结合起来使用。即使是在微观世界中，“量子力学理论和方法不是处于绝对的统治地位”。而我们又可以利用参考文献中一些计算事例验证这些预言^{6,7,8}（特别是可以联合使用量子力学和经典力学描述同一个客体的预言）。

如上所述，数学逻辑和实验事实联合证明了，薛定谔方程本身不能限制我们在微观领域使用经典力学公式。这里所说的“限制”源于量子力学解释，即，决定于主观因素。这种研究成果可以对现有的量子力学解释体系造成严重的冲击。这种冲击又将不可避免地波及到量子力学理论和方法。实际上，对量子力学（特别是量子力学解释）提出质疑的事件层出不穷。^{9,10,11} 这种现象支持本文的结论。本文虽然较短，但包含的创新力度和信息量却很大。估计能引起大师的学者的极大兴趣。

2. $F=ma$ 与薛定谔方程的相互转换

这种操作过程和结果可揭示薛定谔方程的本质和功能。本节是本文标题指称的问题的直观论证，特别是第 2.3 节。

现在大家都认为，在微观世界或在量子力学理论体系中量重要的经典力学定律 $F=ma$ 不适用。还有一条就是大家都认为“薛定谔方程是薛定谔根据直觉写出来的，不能被推导出来（即，不能根据公理或物理学基础原理推导出来）”。如果我们用逻辑推衍的方法而“以 $F=ma$ 为基础得到了薛定谔方程”（和/或者反过来，从薛定谔方程析出 $F=ma$ ，等经典力学方程），就一定会让所有的物理学家感到非常惊奇。

2.1. 从薛定谔方程中析出 $F=ma$ 等经典力学公式

我们先以薛定谔为出发点而导出 $F=ma$ 。薛定谔方程的一种简单形式为

$$\hat{H}\psi = E\psi. \quad (1)$$

在用算符处理薛定谔方程所使用的波函数时，下面的关系可用。

$$\langle \psi | \hat{H} | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}\psi | \hat{H} | \psi \rangle^*. \quad (2)$$

根据 (1) 式和 (2) 式可推得

$$\int \psi^* [\hat{H}, \hat{A}] \psi d\tau = E \int (\hat{A}\psi) \psi^* d\tau - E \int \psi^* \hat{A} \psi d\tau. \quad (3)$$

其中

$$\int \psi^* [\hat{H}, \hat{A}] \psi d\tau = 0. \quad (4)$$

对 (1) 式和 (2) 式中的 \hat{A} 取 $\sum_i \hat{q}_i \hat{p}_i = i\hbar \sum_i \hat{q}_i \frac{\partial}{\partial \hat{q}_i}$.

根据结合律和分配律,我们有

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

$$[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x. \quad (5)$$

$$[\hat{p}_x, \hat{H}] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}. \quad (6)$$

根据上面的关系可得

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \sum_i \hat{q}_i \hat{p}_i] &= \sum_i [\hat{H}, \hat{q}_i \hat{p}_i] \\ &= \sum_i \hat{q}_i [\hat{H}, \hat{p}_i] + \sum_i [\hat{H}, \hat{q}_i] \hat{p}_i \\ &= i\hbar \sum_i q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} - i\hbar \sum_i \frac{1}{m_i} \hat{p}_i^2 \\ &= i\hbar \sum_i q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} - 2i\hbar \hat{T}. \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式中的 \hat{T} 、 \hat{V} 分别是动能和势能的算符 (\hat{V} 与它的势能函数同形)。

再次考虑到 (4) 式，我们有

$$\langle \sum_i \psi | q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} | \psi \rangle = 2 \langle \psi | \hat{T} | \psi \rangle. \quad (8)$$

利用量 B 的平均值表，(8) 式可写为

$$\langle \sum_i q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \rangle = 2 \langle \hat{T} \rangle. \quad (9)$$

当我们用笛卡尔坐标表明势能 V 时，对于单电子体系就有

$$V = Ze^2 \sum \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}} + \sum_i \sum_{j>i} \frac{e^2}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}. \quad (10)$$

于是，可得 $\sum_i q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = V$ ，即，

$$2\langle T \rangle = \langle V \rangle. \quad (11)$$

(11) 式就是束缚态体系中的一种动能与势能的绝对值之间的关系。它的简单形式可以写成 $2|T|=|V|$ 、 $2T=|V|$ 。奇怪的是， $2T=-|V|$ 也是成立的，且能更准确地表示维里定理：符号关系——动能与势能的符号相反，大小关系——动能只有势能的一半儿。从推导过程可以看出，(11) 式只是考虑了动能与势能之间的大小关系。如果同时考虑大小关系和符号关系。维里定理必须写成

$$2T=-V. \quad (12)$$

所谓状态不随时间而变的定态，符合条件是匀速直线运动的客体或匀速圆周运动的客体。大家知道，在薛定谔方程描述的定态束缚体系中维里定理成立。保持匀速直线运动的客体不符合维里定理。因此，在理论上可以认为符合维里定理的被描述薛定谔方程描述的体系可以是作匀速圆周运动的客体。在这种情况下，不管可被薛定谔方程描述的微观体系是不是束缚态匀速圆周运动体系，定态都是指客体的能量状态和运动状态不随时间而变。在经典力学中，维里定理成立的体系是一个具有匀速圆周运动的束缚体系。从逻辑上看，承认了维里定理成立的体系一定是一个作匀速圆周运动的行星模型体系，且不受体系大小的影响（即，不论是宏观体系还是微观体系，情况都是这样）。否认这种认知就显得很不严谨（换言之，否定这种认知显得强词夺理而太主观了）。

在量子力学里，人们无条件地承认维里定理。也就不排斥这里的 T 和 V 的表达式（即，不排斥这两个能量表达式可以用维里定理联系起来）。反正在经典力学中和量子力学中，维里定理都成立，且动能和势能的表达式也都相同。它们是 $T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}$ and $V=-\frac{GMm}{r}$ 。我们使用维里定理没有任何思想负担。将 $T=\frac{1}{2}mv^2$

和 $V=-\frac{GMm}{r}$ 代入 (12) 式可得

$$mv^2 = \frac{GMm}{r}. \quad (14)$$

将 (14) 式两边同除以 r ，并考虑到 $a=m\frac{v^2}{r}$ 及 $|F|=\frac{GMm}{r^2}$ （在牛顿第二定律中， F 是一个合力，其方向和“由它引起的加速度”的方向都由 \vec{r} 决定。因此， $m\frac{v^2}{r}$ 与 $\frac{GMm}{r^2}$ 方向是一致的，可以取相同的符号），(14) 式变为

$$ma=F. \quad (15)$$

令 $G=\sum_i p_i \cdot r_i$ ，那么

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_i \dot{p}_i \cdot r_i + \sum_i \dot{r}_i \cdot p_i \\ &= \sum_i m_i V_i \cdot V_i + \sum_i F_i \cdot r_i \\ &= 2T + \sum_i F_i \cdot r_i. \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $G=\sum_i p_i \cdot r_i$ ， $\frac{dG}{dt} = E$ ， $V=\sum_i F_i \cdot r_i$ ， $T=-\frac{1}{2}\sum_i F_i \cdot r_i$ 。对于单粒子绕核运动的情况，上面的相关公式可简写为

$$T+V=E, \quad (17)$$

或 $2T=-V$ 。比较这两个表示维里定理的式子，可得

$$T=-E. \quad (18)$$

如上所述，我们至少可以说 $F=ma$ 、 $2T=-V$ 、 $T+V=E$ 、 $p=mv$ 、 $V=Fr$ 、 $T=\frac{1}{2}mv^2$ 都可以从包含德布罗意

关系的特定的薛定方程中析出。就算得到的不是 (15) 式而是 $F=-ma$ ，也具有非常重要的意义。

一般说来，数学推导过程的逆过程也成立。上述推导过程的逆过程就是从牛顿定律 $F=ma$ 导出薛定谔方程的过程。由于 $F=ma$ 是经典力学公式，因此，从它出发而引导出薛定方程的全过程中都可以使用经典力学方法。这使推导过程变得简单得多。不过，在这引导过程中，需要 $mv^2 = hv$ 的关系。我们不得不先推导出这种关系。薛定谔写出薛定谔方程的过程不叫做推导图。原因是，他不能说明为什么要使用波函数。其实，在数学上不需要说明这一点。我们只需要庆幸使用了波函数之后能得到正确的结果就行。

2.2. 一个运动粒子的波动能量与粒子能量的关系

一维的匀速运动粒子的波函数可以写为

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}. \quad (19)$$

薛定谔方程中有 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$ 这一项。我们用略有不同的种方法计算它的值。考虑到 (19) 式，这一项的计算

结果就是 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \frac{p^2}{2m} \psi = (\frac{1}{2}mv^2)\psi$ 。当 $p=mv$ 时， $\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = T$ 。将波函数写成 $\psi(x, t) = Ae^{-i2\pi(vt - x/\lambda)}$ 的

形式。再考虑到 $\lambda = h/p$ 和 $E = hv$ ，而计算 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$ 这一项。我们又可以得到 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \frac{(hv)^2}{2mv^2} \psi$ 。于是， $\frac{(hv)^2}{2mv^2}$

也等于 T 。(19) 式与 $\psi(x, t) = Ae^{-i2\pi(vt - x/\lambda)}$ 是同一个式子的两种不同的表达形式。因此， $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{(hv)^2}{2mv^2}$ 。整理这个关系式（整理时，平方根仅取正值），可得

$$mv^2 = hv. \quad (20)$$

使用 (20) 式的时候，用 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}hv$ 的形式能更直观地表示运动粒子的动能的大小是它的以波动规律表示的能量值的一半。

将德布罗意波关系 $\lambda = \frac{h}{mv}$ 代入 (20) 式，整理可得

$$v = \lambda v. \quad (21)$$

(式 (20) 的等号左边是用经典粒子规律表达的能量(它是 2 倍的动能)，右边是用波动规律表达的能量。这两种能量表达方式是针对同一个运动粒子的。如果 (19) 式是运动粒子的德布罗意波的波动方程，则在其中或其微分结果中都不能使用 $c = \lambda v$ 的关系。如果不认为 (19) 式是德布罗意波的波动方程，则薛定谔方程描述的德布罗意波与薛定谔方程中的波函数 ψ 的本体不一致，使用薛定谔方程就不能计算出运动粒子的正确的能量值。从这一点看（即，从物理学角度看），这两种波必须一致。上面的数学推导结果也支持这一点。令人奔溃的是，以前人们认为波函数的波是类电磁波，而德布罗意波是物质波。这两者组合在一起不符合逻辑。

(20) 是一个非常重要的关系式。左边是被描述客体的粒子性能量，而右边是被描述粒子的波动性能量。二者源于薛定谔方程中的同一个微分式。这表明了我们可以同时或分别用两种不同的方式（波动规律方式和粒子规律方式）表示一个运动粒子的能量，且在定量方面是等价的。这表明我们可以用两种不同的方式（波动定律和粒子定律）同时或分别表示运动粒子的能量，并且它们在数量上是等价的。这似乎表明，运动粒子的波动是粒子外部条件影响下编队（组队）的结果。可以分别用或同时用两种不同的形式表示一个运动粒表现出的能量。(20) 式还能表示，一个束缚态粒子的经典动能是其德布罗意波的波动能量的一半儿。虽然运动粒子的波动性和粒子性可以同时表现出来，但是，运动粒子的能量（即德布罗意波的能量不是粒子能量与波动能量之和。这个事实可以这样解释：运动粒子的波动特性是其粒子编队的结果（即，多粒子性行为的统计结果。通俗地说，运动粒子的单体是粒子，而群体具有波的特点。可以说它们既是粒子又是波，不是互补关系。图 2 所示的实验结果能直观地证明这一点。将 (21) 式代入相速度公式 $v = E/p$ 可得

$E=hv \neq \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$. 德布罗意波的相速度公式为

$$v = hv/p. \quad (22)$$

(22) 式可以直观地表示, 以速度 v 运动的粒子的德布罗意波的能量并不是该粒的总能量 (总能量即, “与静止质量相当的能量”与动能之和)。人为的以波动规律描述, 其能量可用 hv 的形式表示, 而人为地用粒子的规律描述, 其动能是 $(1/2)mv^2$ 。我们不能要求“人为选择两种不同表达形式的同一个粒子的能量”能表示“动能与波动能量相等”, 更不能要求它们可以相加。以上分析表明, 运动的基本粒子的德布罗意波不是波群而是单色波, 且相速度等于粒子的运动速度。静止的粒子不具有波-粒二象性而只有粒子性。

如上所述, 本节的一番简单的推导, 却得到了 5 个结论: (1) 运动粒子的波动规律表示的能量与粒子遵循的经典力学规律表示的能量是等价的(运动粒子的两种能量表达方式——波动能量表达方式和粒子能量表达方式——是等价的); (2) 运动粒子的波动特性是粒子编队的表现, 是单个粒子的感光表现的统计结果; (3) 运动粒的德布罗意波的波动能量是其粒子性动能的 2 倍; (4) 描述粒子的薛定谔方程中的波函数的本体就是其德布罗意波(二者一致); (5) 一个运动粒子 (特别是基本粒子) 的德布罗意波是单色波而不是波群。其相速度就是粒子的速度图 1、图 2 和视频 1 可验证结论 (1)。图 2 所示的实验可验证结论 (5)。

磁场干扰情况下的电子衍射实验, 表明, 衍射中的电子的粒子特性和波动特性是同时呈现的。其能量的两种表达方式可相互回转换, 而不能将两表达的值加起来。这就是两种能量表达方式得出的能量值是等价的。

2.3. 以 $F=ma$ 和经典力学方法为基础导出薛定谔方程

此举的目的和效果: 揭示薛定谔方程的组成、结构、本质和功能。是最直观的点题之作。

现在大家都认为, 在微观世界或在量子力学理论体系中最重要经典力学定律之一的 $F=ma$ 不适用。还有一条就是大家都认为“薛定谔方程是薛定谔根据直觉写出来的, 不能被推导出来 (不能根据公理或物理学基础原理推导出来)”。如果我们“以 $F=ma$ 为基础导出了薛定谔方程”, 一定会让所有的物理学家感到非常惊奇。

牛顿第二定律是给物体加速需要的力等于加速度与质量之积。用公式表示就是(15)式。不过, 通常写为 $F=ma$ 。在经典力学中, 对于一个匀速圆周运动体系, (17) 式是维里定理的一个推论。在经典力学中, 一个确定的匀速圆周体系在符合的维里定律的同时符合 $F=mv^2/r=ma$ 。这使我们联合使用 $T=\frac{p^2}{2m}$ 、(17) 式和 (15) 式。

经典力学中动能公式为 $T=\frac{p^2}{2m}$ 。对于匀速圆周运动的物体, (15) 式可写为 $F=mv^2/r$ 。将 $F=mv^2/r$ 两边同乘以 $(1/2)r$ 可得 $(1/2)Fr=(1/2)mv^2=T$ 。将 $(1/2)mv^2=T$ 代入 (17) 式可得 $(1/2)mv^2+V=E$, 我们还可以将势能写成 $V=Fr$ 。对于电磁力的引力, 式中的 Fr 分别为 $-Ze^2/r$ 和 $-GMm/r$ 。感觉势能用代号 V 表示更直观, 且能代表不同的势能, 因此, 我们将 $(1/2)mv^2+Fr=E$ 这个经典力学公式写为

$$\frac{p^2}{2m}+V=E. \quad (23)$$

(23)式的各项都乘以 ψ , 再考虑到 (20) 式。可得 $\frac{1}{2}hv\psi+V\psi=E\psi$, 或

$$\frac{p^2}{2m}\psi+V\psi=E\psi. \quad (24)$$

从 (23) 式到 (24) 式的过程就是让经典力学定律与波函数相结合的过程。 ψ 采用 (19) 的形式, 并令

$f(\hbar, m)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=\frac{p^2}{2m}\psi=\frac{mv^2}{2}\psi=\frac{1}{2}hv\psi$, 可得 $f(\hbar, m)=-\frac{\hbar^2}{2m}$ 。将 $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=\frac{p^2}{2m}\psi$ 代入 (24) 式可得

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V\psi = E\psi. \quad (25)$$

式中，势能 V 的算符和能量 E 算符可取为与它们的表达式相同的形式。因此，(25) 式就是一维定态薛定谔方程。到此，我们实现了以经典力学中的 $F=ma$ 为出发点，且以行星模型为例，量子力学的基本方程之一的薛定谔方程。

即使量子力学的出发点不是薛定谔方程而是 Hilbert 空间中状态么正演化的表达式，也不能否认上面的推导和论证。因为，使用薛定谔方程是量子力学中的最重要的基本方法，也是量子力学理论的重要组成部分。

3. 薛定方程具有“直接接纳经典力学”的组成和结构

上面介绍的是挖掘薛定谔方程中隐藏的可接纳经典力学公式的功能。这一节则是指出薛定谔方程的组成和结构决定了它可以直接接纳部分经典力学公式。从 (25) 式中我们还可以直观地看出，其中含有势能函数 V (可以是 $V=-(Ze)e/r$ 或 $V=-GMm/r$) 和被描述客体的质量 m 。势能不是原存在，它源于经典的力或场的作用。既然薛定谔方程不能抹除经典势能的表达式就不能完全排斥经典的力和势能的概念和规律。薛定谔方程本身不能否认其中的质量 m 的取值范围可以很大，以致允许它所描述的客体可以是妥妥的宏观物体。宏观体系服从经典力学规律 (可以描述宏观客体的理论不可能将宏观规律排斥在外，即量子力学不能与经典力学完全对立起来或分隔开)。在现实中，人们认为量子力学基本方程不能描述宏观体系 (或者说，在量子力学中不适合谈论经典力学规律)。这是被“量子”与“经典”不兼容的旧观念引导的主观选择。将薛定谔方程中的质量 m 限制在微观质量范围内也是一种主观选择 (是受量子与经典不兼容的主观意识的引导)。本节谈论的都是用比较直观的方法看得出来的“薛定谔方程本身不排斥经典力学公式”的理由。与前面挖掘出的隐藏的“同类理由”相互呼应。

4. 磁场中的电子衍射实验

这也可以叫做“在磁场干扰下的电子衍射实验”。目的是看磁场干扰电子衍射实验的后果，再根据这种干扰后果推测微观粒子遵循的规律 (例如，是否是不确定的？是否处于态叠加状态？是否会发生叠加态坍塌和量子退相干？)。让一块高强度永久磁铁靠近正在工作的电子衍射仪的荧光屏这一端，观察磁场对电子衍射图样的影响。观察到的现象是，已经穿过狭缝的电子射线在洛伦力的方向移动了一段距离 (衍射图样可以整体移动)，但衍射图样没有消失 (这表明量子退相干过程没有发生。详见图 1)。该实验现象证明了在未发生量子退相干的情况下，洛伦兹力使电子束产生了横向运动 (“力作用于物体可使物体沿力的方向产生加速度”这正是牛顿第二定律 $F=ma$ 的定性表述之一)。该实验现象支持“ $F=ma$ 在微观世界中仍然适用”的结论 (注意上：没有发生量子退相干，衍射特性还在发挥作用，表明电子束处于量子世界之中)。从该实验现象中可以直接观察到运动电子的粒子性和波动性可以同时呈现出来。换言之，在磁场干扰情况下的电子衍射实验表明，衍射过程中的电子的粒子特性和波动特性是同时呈现的 (与水的物质性和水波同时呈现类似)。运动粒子的能量的两种表达方式可相互转换。运动粒子的能量的两种表达方式可相互转换。就是说，对于一个运动粒子，用波动规律表达的能量与用粒子特性表达的能量是等价的。我们不能将两种表达方法得到的值加起来。这种情况与质量与能量相当极为类似。

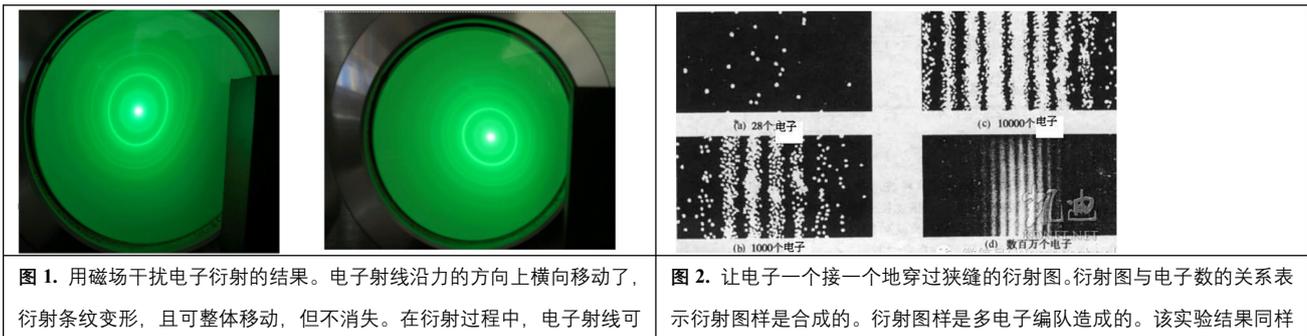


图 1. 用磁场干扰电子衍射的结果。电子射线沿力的方向上横向移动了，衍射条纹变形，且可整体移动，但不消失。在衍射过程中，电子射线可

图 2. 让电子一个接一个地穿过狭缝的衍射图。衍射图与电子数的关系表示衍射图样是合成的。衍射图样是多电子编队造成的。该实验结果同样

图 2 所示的实验是由前人完成的。图 1 所示的实验是本文作者完成的。有兴趣的读者几分钟内就完成重复实验。

5. 结论

如上所述，我的主要结论是，薛定谔方程是经典力学规律与波函数有机结合的产物。在微观领域， $F=ma$ 等经典力学定律仍然适用。描述同一个客体，可将量子力学与经典力学结合起来使用。

参考文献

- [1] Tu, R. (2024). Establishing the Schrödinger Equation for Macroscopic Objects and Changing Human Scientific Concepts. *Adv Theo Comp Phy*, 7(4), 01-03 (2024). <https://dx.doi.org/10.33140/ATCP.07.04.18>
- [2] Tu, R. Research Progress on the Schrödinger Equation of Gravitational Potential Energy. *Adv Theo Comp Phy*, 8(1), 01-07 (2025). <https://dx.doi.org/10.33140/ATCP.08.01.01>
- [3] Tu, R. (2025). Research Progress on the Schrödinger Equation of Gravitational Potential Energy. *Adv Theo Comp Phy*, 8(1), 01-07. <https://dx.doi.org/10.33140/ATCP.08.02.01>
- [4] Tu, R. Schrödinger-Tu Equation: A Bridge Between Classical Mechanics and Quantum Mechanics. *Int J Quantum Technol*, 1(1), 01-09 (2025). <https://www.primeopenaccess.com/scholarly-articles/schrodington-tu-equation-a-bridge-between-classical-mechanics-and-quantum-mechanics.pdf>
- [5] Runsheng Tu. Research Progress on the Schrödinger Equation that Can Describe the Earth's Revolution and its Applications, *London Journal of Research in Science: Natural & Formal*. 25(1) , 17-28 (2025). https://journalspress.com/LJRS_Volume25/Research-Progress-on-the-Schrodinger-Equation-that-Can-Describe-the-Earths-Revolution-and-its-Applications.pdf
- [6] Tu, R. A Review of Research Achievements and Their Applications on the Essence of Electron Spin. *Adv Theo Comp Phy*, 7(4), 01-19 (2024). <https://dx.doi.org/10.33140/ATCP.07.04.10>
- [7] Tu, R. Some Success Applications for Local-Realism Quantum Mechanics: Nature of Covalent-Bond Revealed and Quantitative Analysis of Mechanical Equilibrium for Several Molecules. *Journal of Modern Physics*. 5(6), 309-318 (2014). DOI: [10.4236/jmp.2014.56041](https://doi.org/10.4236/jmp.2014.56041)
- [8] Runsheng Tu. The principle and application of experimental method for measuring the interaction energy between electrons in atom. *International Journal of Scientific Reports*. 2(8), 187–200 (2016). DOI: [10.18203/issn.2454-2156.intjsci20162808](https://doi.org/10.18203/issn.2454-2156.intjsci20162808)
- [9] Sean Carroll. Why even physicists still don't understand quantum theory 100 years on. *Nature*. 638 , 31-34 (2025). doi: <https://doi.org/10.1038/d41586-025-00296-9>
- [10] Lee Billings. Quantum Physics Is on the Wrong Track, Says Breakthrough Prize Winner Gerard 't Hooft. Breakthrough Prize Winner Gerard 't Hooft Says Quantum Mechanics Is 'Nonsense'. *Scientific American*. 34(2), 104 (2025). <https://www.scientificamerican.com/article/breakthrough-prize-winner-gerard-t-hooft-says-quantum-mechanics-is-nonsense/>, doi:10.1038/scientificamerican062025-3ndxLHOdGJV2u6twkhWFzi
- [11] Gibney, E. Physicists disagree wildly on what quantum mechanics says about reality, Nature survey shows. *Nature* 643, 1175-1179 (2025). <https://doi.org/10.1038/d41586-025-02342-y>

Derivation of the Schrödinger equation from $F=ma$

Runsheng Tu

ORCID: 0000-0001-5349-8007

Abstract

The compatibility between quantum mechanics and classical mechanics is always worth discussing. According to $F=ma$, the Schrödinger equation can be derived. Important classical physics formulas can be derived from the Schrödinger equation. The Schrödinger equation intuitively contains the mass m and the potential energy formula (this mass can be very large, and the potential energy comes from classical attraction). These three points determine that the Schrödinger equation is an organic combination of wave functions and classical mechanical laws. Based on this, it can be predicted that the Schrödinger equation with gravitational potential energy, which can be used to describe macroscopic objects, can be established. It can be observed from the experiment of electron diffraction in a magnetic field that the volatility and property of moving electrons can be presented simultaneously. This experimental phenomenon, together with the mathematical analysis mentioned above, supports the conclusion that Newton's second law still applies in the microscopic world. According to the Schrödinger equation, it can be proven that "the energy of a moving particle described by the law of waves is equivalent to a multiple of its kinetic energy"; There is no absolute boundary between macro and micro.

Keywords: Schrödinger equation, Quantum mechanics, Classical mechanics, Organic combination, Electron diffraction experiment in magnetic field.