

Matrices périennes

**Sous-titre : Recherche de liens avec les opérateurs quantiques
anticommutatifs**

©Thierry PERIAT

2 septembre 2025

Perian matrices have been introduced in two previous works. The first one concerns the electromagnetic duality in vacuum, and the second one is a short note focusing attention on the three-generations problem in particles physics. Remarking that a perian matrix can formally be identified with the kern of the decomposition of a deformed cross product, this exploration loans ideas to the quantum theories and asks if these matrices can sometimes be the representations of anticommutative operators. The exploration concludes affirmatively when the three coefficients of a given matrix are pure imaginary quaternions. In that case, each coefficient can be associated with a vector characterized by three complex numbers. The three vectors associated with this given matrix must be a Jacobi's territory (synonym : they form a triplet equipped with a Lie algebra structure).

Keywords : matrices, operators, anti-comutativity.

Les matrices dites périennes ont été introduites au cours de deux précédentes études. L'une d'elle s'est intéressée à la dualité électromagnétique dans le vide et l'autre au problème des trois générations de particules en physique nucléaire. Puisque certaines matrices périennes peuvent formellement être identifiées au noyau d'une décomposition d'un produit vectoriel déformé et que cette décomposition est associée avec une polynomiale, cette exploration se laisse guider par les principes des théories quantiques et se demande si certaines de ces matrices peuvent servir d'opérateurs quantiques anticommutatifs. La réponse est affirmative si les coefficients de ces matrices sont des quaternions purement imaginaires et si l'ensemble des trois vecteurs à composantes complexes attachés à ces coefficients constituent un territoire de Jacobi (synonyme : forment des triplés de vecteurs équipés d'une structure d'algèbre de Lie.

Mots-clés : matrices, opérateurs quantiques, anticommutativité.

©Thierry PERIAT : Matrices périennes et opérateurs quantiques anticommutatifs.

Table des matières

1	Motivations	2
2	Outils indispensables à la discussion	3
2.1	Définitions	3
2.2	Quelques propriétés utiles	4
2.3	Les matrices périennes et les noyaux des décompositions des produits vectoriels déformés	5
3	Les relations canoniques caractérisant les opérateurs anti-commutatifs	8
3.1	Les relations canoniques proprement dites.	8
3.2	La première relation canonique	8
3.3	La seconde relation canonique	10
4	Les quaternions	12
4.1	Données importantes concernant les quaternions	12
4.2	Calculs usuels sur les quaternions	12
4.3	Au sujet de la nullité du carré d'un quaternion	13
5	Les matrices périennes anticommutatives	14
5.1	Le produit de deux matrices périennes	15
5.2	Les trois contraintes caractérisant l'anticommutativité des matrices périennes dans $\Pi(\mathbf{b})$	16
5.3	Le cas des quaternions purement imaginaires	18
5.4	Matrices périennes anticommutantes à coefficients purement imaginaires et algèbres de Lie	19
5.5	Matrices périennes anticommutantes à coefficients purement imaginaires et seconde relation canonique caractérisant les opérateurs anticommutatifs	23
5.6	Quand les quaternions sont quelconques	25
6	Conclusion	26
7	Annexes	26
7.1	Expression in extenso du Jacobiateur sur V	26
8	Bibliographie	32
8.1	Travaux personnels	32
8.2	Articles, Cours et Livres	33

1 Motivations

Cette exploration souhaite approfondir les connaissances concernant les matrices dites périennes (MPs). Elles avaient attiré l'attention dans [a] et [b]. Cet approfondissement a pour but essentiel de savoir si certaines d'entre elles peuvent servir d'opérateurs quantiques anticommutatif.

2 Outils indispensables à la discussion

2.1 Définitions

Définition 2.1. *Tables de Pythagore (TPs).*

Soit $M(n \times m, K)$ l'ensemble des matrices comprenant n ligne(s) et m colonne(s) ayant leur(s) entrée(s) dans K . Soit E_i pour $i = 1, 2$, deux ensembles quelconques et $P(E_i)$ l'ensemble des parties du i ème ensemble. Soit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ un élément de $P(E_1)$. Soit $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ un élément de $P(E_2)$. Soit $F((E_1)^m \times (E_2)^n; K)$ l'ensemble des fonctions faisant interagir un élément de $P(E_1)$ dont le cardinal vaut m avec un élément de $P(E_2)$ dont le cardinal vaut n pour obtenir un élément de K . Soit f un quelconque élément de cet ensemble de fonctions. Il est entendu que m et n sont deux entiers naturels et différents de zéro : $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit enfin, défini de manière générique, $\text{Ind}_m = \{1, 2, \dots, i, \dots, m\}$ l'ensemble des indices naturels compris entre 1 et m .

Par définition, une table de Pythagore bâtie sur f est un élément de $M(n \times m, K)$ dont les entrées sont les $f(x_i, y_j)$ et on la note par convention :

$$[f(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) & \dots & f(x_i, y_1) & \dots & f(x_m, y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_1, y_j) & \dots & f(x_i, y_j) & \dots & f(x_m, y_j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_1, y_n) & \dots & f(x_i, y_n) & \dots & f(x_m, y_n) \end{bmatrix} = T_2(f)(X, Y)$$

L'ensemble de ces tables est noté $\text{Pyth}(f; K)$.

Cette définition peut bien entendu être extrapolée et permettre ainsi la construction de cubes ou d'hyper-cubes. Une partie des hyper-cubes de dimension physique D sont des tables de Pythagore du genre $T_D(f)({}_1X, \dots, {}_DX)$ où f représente cette fois-ci un élément de $F((E_1)^{m(1)} \times \dots \times (E_D)^{m(D)}; K)$.

Définition 2.2. *Matrices périennes (MPs).*

Soit $E(3, K)$ un espace vectoriel (abréviation : e.v.) de dimension trois sur un corps K . Et soit $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ une paire d'éléments dans cet e.v. Pour mémoire, comme la dimension de $E(3, K)$ est finie, il existe un isomorphisme permettant de représenter ses éléments dans K^3 . Ainsi on choisira par convention de représenter le vecteur $\mathbf{a}$ par les composantes (α, β, χ) . Soit $M(3, K)$ l'ensemble des matrices carrées (3-3) ayant leurs entrées dans K .

Une matrice périenne construite à partir de la paire $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est un élément de $M(3, K)$ défini par la relation :

$$[M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] = \alpha \cdot \text{Id}_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \chi \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b})$$

Il convient d'y reconnaître la matrice identité Id_3 , une table de Pythagore qui est un élément de $\text{Pyth}(\otimes; K)$ et une matrice représentant une rotation axiale autour du vecteur $\mathbf{b}$.

2.2 Quelques propriétés utiles

Remarque 2.1. *Table de multiplication des matrices I, T, Φ à argument constant.*

Il est aisé de vérifier que :

$$\begin{array}{c} \forall \mathbf{b} \\ Id \\ T \\ \Phi \end{array} \begin{array}{c} Id \quad T \quad \Phi \\ \left[\begin{array}{ccc} Id & T & \Phi \\ T & ||\mathbf{b}||^2 \cdot T & [0] \\ \Phi & [0] & T - ||\mathbf{b}||^2 \cdot Id \end{array} \right] \end{array}$$

Le terme $||\mathbf{b}||^2$ désigne ici le produit scalaire euclidien du vecteur $\mathbf{b}$ par lui-même :

$$||\mathbf{b}||^2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_{Id_3} = (b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2$$

Le choix de K joue ici un rôle essentiel dans l'interprétation qui peut être faite de cette quantité.

Remarque 2.2. *Relations utiles.*

On prouve sans grande difficulté que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{N}) - T_2(\otimes)(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}, \mathbf{M})$$

$${}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M}, -\mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) + {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M})$$

$$=$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}, \mathbf{M}) - T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

$$=$$

$${}_{[J]}\Phi((\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \wedge \mathbf{M})$$

$$=$$

$$||\mathbf{M}||^2 \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) - \langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle_{Id_3} \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{M})$$

$${}_{[J]}\Phi^2(\mathbf{M}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) - ||\mathbf{M}||^2 \cdot Id_3$$

$$T_2^2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = ||\mathbf{M}||^2 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M})$$

2.3 Les matrices périennes et les noyaux des décompositions des produits vectoriels déformés

Remarque 2.3. *Le formalisme générique des noyaux des décompositions des produits vectoriels déformés.*

Soit l'étude des décompositions des produits vectoriels déformés par la matrice $[A]$ de $M(3, K)$ lorsque K est équipé d'une multiplication commutative (typiquement : $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) :

$$|[\mathbf{w}, \dots]_{[A]} \rangle = [P] \cdot |\dots \rangle + |\mathbf{z} \rangle$$

Elle a permis de constater que les parties principales (les matrices $[P]$) de ces décompositions étaient toujours le produit d'une matrice dépendant de la matrice déformante $[A]$ et d'un noyau matriciel. L'observation attentive du formalisme de ces noyaux permet de leur proposer un formalisme générique, quelle que soit la classe (I ou II) à laquelle ils appartiennent. Concrètement, on peut toujours les noter :

$$^{(3)}[N]_{|A|} = \frac{1}{2} \cdot [H] - \frac{1}{|A|} \cdot [J] \Phi(\mathbf{s}), |A| = \pm 1$$

En effet :

1. Dans le cas de la classe I, $[H]$ désigne la Hessienne non-dégénérée (c'est-à-dire telle que $|H| \neq 0$) de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{w})$ associée avec n'importe quelle décomposition du produit vectoriel déformé étudié tandis que $\mathbf{s}$ représente le vecteur singulier de cette polynomiale.
2. Dans le cas de la classe II, le noyau est toujours associé avec une paire de vecteurs dans $E(3, K)$ - par exemple $(\mathbf{h}, \mathbf{g})$ - et $[H]$ désigne la moitié de la somme $T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$ tandis que $\mathbf{s}$ représente la moitié du produit vectoriel classique $\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}$. On a prouvé dans [d] que ces noyaux appartiennent bien à la classe II puisque $|T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})| = 0$. Les polynomiales $\Lambda(\mathbf{w})$ dégénérées peuvent donc en particulier vérifier des relations du genre :

$$\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{w})}{\partial w^\alpha \partial w^\beta} = \frac{1}{2} \cdot (h^\alpha \cdot g^\beta + h^\beta \cdot g^\alpha)$$

Remarque 2.4. *Le distinguo indispensable entre les ensembles munis d'une multiplication commutative ou non.*

Il convient absolument de remarquer que la démonstration réalisée dans [d] ne peut pas être appliquée telle quelle aux discussions impliquant des éléments d'un ensemble K muni d'une multiplication non commutative, typiquement $K = \mathbb{H}$ (l'ensemble des quaternions) ou $K = \mathbb{O}$ (l'ensemble des octonions).

Remarque 2.5. *Les liens possibles entre une matrice périenne et l'expression formelle d'un noyau.*

Pour éviter momentanément les difficultés liées aux discussions tenues sur un ensemble K muni d'une multiplication non commutative, on peut se contenter

de se servir *a priori* de l'expression formelle des noyaux ainsi que de celle des matrices périennes. Il peut alors arriver que l'expression formelle d'un noyau coïncide avec celle d'une matrice périenne. C'est le cas chaque fois que les relations suivantes sont simultanément vraies et mathématiquement cohérentes :

$$[H] = \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b})$$

$$\mathbf{s} = |A| \cdot \chi \cdot \mathbf{b}$$

Si la troisième composante du vecteur $\mathbf{a}$ n'est pas nulle ($\chi \neq 0$), alors le noyau d'une décomposition est une MP du type suivant :

$$^{(3)}[N]_{|A|} = \alpha \cdot Id_3 + \frac{\beta}{\chi^2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{s}, \mathbf{s}) + \frac{1}{|A|} \cdot [J] \Phi(\mathbf{s}) = [M(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{s})]$$

Avec :

$$\hat{\mathbf{a}} : (\alpha, \frac{\beta}{\chi^2}, \frac{1}{|A|}), \chi \neq 0$$

Exemple 2.1. *Les relations de coincidence lorsque K est équipé d'une multiplication commutative.*

Typiquement, lorsque $K = \mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) ou $K = \mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes), ces relations peuvent concerner les noyaux de décompositions de produits vectoriels déformés. Elles impliquent alors clairement la continuité de la polynomiale Λ associée avec la décomposition envisagée puisque la matrice $[H]$ est systématiquement symétrique et qu'elle désigne une Hessienne (classe I) ou son équivalent (classe II). Par ailleurs, dans ce cas, le second argument de la matrice périenne coïncide soit avec le vecteur singulier de la polynomiale (classe I) ou avec la moitié du produit vectoriel des vecteurs définissant le noyau (classe II).

Remarque 2.6. *Le déterminant d'une matrice périenne lorsque K est équipé d'une multiplication commutative.*

Il est possible de constater que :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\in E^2(3, K) \\ |M(\mathbf{a}, \mathbf{b})| &= \\ |\alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \chi \cdot [J] \Phi(\mathbf{b})| &= \\ \begin{vmatrix} \alpha + \beta \cdot (b^1)^2 & \beta \cdot b^1 \cdot b^2 - \chi \cdot b^3 & \beta \cdot b^1 \cdot b^3 + \chi \cdot b^2 \\ \beta \cdot b^1 \cdot b^2 + \chi \cdot b^3 & \alpha + \beta \cdot (b^2)^2 & \beta \cdot b^2 \cdot b^3 - \chi \cdot b^1 \\ \beta \cdot b^1 \cdot b^3 - \chi \cdot b^2 & \beta \cdot b^2 \cdot b^3 + \chi \cdot b^1 & \alpha + \beta \cdot (b^3)^2 \end{vmatrix} &= \\ (\alpha + \beta \cdot (b^1)^2) \cdot (\alpha + \beta \cdot (b^2)^2) \cdot (\alpha + \beta \cdot (b^3)^2) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\alpha + \beta \cdot (b^1)^2) \cdot (\beta \cdot b^2 \cdot b^3 + \chi \cdot b^1) \cdot (\beta \cdot b^2 \cdot b^3 - \chi \cdot b^1) \\
& -(\beta \cdot b^1 \cdot b^2 - \chi \cdot b^3) \cdot (\beta \cdot b^1 \cdot b^2 + \chi \cdot b^3) \cdot (\alpha + \beta \cdot (b^3)^2) \\
& +(\beta \cdot b^1 \cdot b^2 - \chi \cdot b^3) \cdot (\beta \cdot b^1 \cdot b^3 - \chi \cdot b^2) \cdot (\beta \cdot b^2 \cdot b^3 - \chi \cdot b^1) \\
& +(\beta \cdot b^1 \cdot b^3 + \chi \cdot b^2) \cdot (\beta \cdot b^1 \cdot b^2 + \chi \cdot b^3) \cdot (\beta \cdot b^2 \cdot b^3 + \chi \cdot b^1) \\
& -(\beta \cdot b^1 \cdot b^3 + \chi \cdot b^2) \cdot (\beta \cdot b^1 \cdot b^3 - \chi \cdot b^2) \cdot (\alpha + \beta \cdot (b^2)^2) \\
& = \\
& (\alpha + \beta \cdot (b^1)^2) \cdot \{\alpha^2 + \alpha \cdot \beta \cdot (b^2)^2 + \alpha \cdot \beta \cdot (b^3)^2 + \beta^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^3)^2\} \\
& -(\alpha + \beta \cdot (b^1)^2) \cdot \{\beta^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^3)^2 - \chi^2 \cdot (b^1)^2\} \\
& -\{\beta^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 - \chi^2 \cdot (b^3)^2\} \cdot (\alpha + \beta \cdot (b^3)^2) \\
& +(\beta \cdot b^1 \cdot b^2 - \chi \cdot b^3) \cdot \{\beta^2 \cdot b^1 \cdot b^2 \cdot (b^3)^2 - \beta \cdot \chi \cdot (b^1)^2 \cdot b^3 - \chi \cdot \beta \cdot (b^2)^2 \cdot b^3 + \chi^2 \cdot b^1 \cdot b^2\} \\
& +(\beta \cdot b^1 \cdot b^3 + \chi \cdot b^2) \cdot \{\beta^2 \cdot b^1 \cdot (b^2)^2 \cdot b^3 + \beta \cdot \chi \cdot (b^1)^2 \cdot b^2 + \beta \cdot \chi \cdot b^2 \cdot (b^3)^2 + \chi^2 \cdot b^1 \cdot b^3\} \\
& -\{\beta^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^3)^2 - \chi^2 \cdot (b^2)^2\} \cdot (\alpha + \beta \cdot (b^2)^2) \\
& = \\
& +\alpha^3 + \alpha^2 \cdot \beta \cdot (b^2)^2 + \alpha^2 \cdot \beta \cdot (b^3)^2 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (b^1)^2 \\
& \alpha^2 \cdot \beta \cdot (b^1)^2 + \alpha \cdot \beta^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 + \alpha \cdot \beta^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^1)^4 \\
& -\alpha \cdot \beta^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (b^3)^2 - \beta^3 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^3)^4 \\
& +\beta^3 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^3)^2 - \beta^2 \cdot \chi \cdot (b^1)^3 \cdot b^2 \cdot b^3 - \beta^2 \cdot \chi \cdot b^1 \cdot (b^2)^3 \cdot b^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 \\
& -\beta^2 \cdot \chi \cdot b^1 \cdot b^2 \cdot (b^3)^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^3)^2 - \chi^3 \cdot b^1 \cdot b^2 \cdot b^3 \\
& +\beta^3 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^3)^2 + \beta^2 \cdot \chi \cdot (b^1)^3 \cdot b^2 \cdot b^3 + \beta^2 \cdot \chi \cdot b^1 \cdot b^2 \cdot (b^3)^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^3)^2 \\
& +\beta^2 \cdot \chi \cdot b^1 \cdot (b^2)^3 \cdot b^3 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^2)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^3)^2 + \chi^3 \cdot b^1 \cdot b^2 \cdot b^3 \\
& -\alpha \cdot \beta^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^3)^2 + \alpha \cdot \chi^2 \cdot (b^2)^2 - \beta^3 \cdot (b^2)^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (b^3)^2 + \beta \cdot \chi^2 \cdot (b^2)^4 \\
& = \\
& \alpha^3 + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \alpha^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \chi^2 \cdot \alpha + \beta \cdot \chi^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^4
\end{aligned}$$

Le déterminant d'une MP est une forme polynomiale :

1. de degré trois si on considère que ce déterminant dépend essentiellement de la composante α ;
2. de degré deux si on considère que ce déterminant dépend essentiellement de $\|\mathbf{b}\|^2$.

Ce calcul peut de tout façon être poussé plus loin pour finalement obtenir :

$$\begin{aligned}
& |M(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \\
& = \\
& \alpha^2 \cdot (\alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2) + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \chi^2 \cdot (\alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2) \\
& = \\
& (\alpha + \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2) \cdot (\alpha^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \chi^2)
\end{aligned}$$

Exemple 2.2. *Le cas d'une matrice périenne identifiable à un noyau lorsque K est équipé d'une multiplication commutative.*

Il est facile de constater que si K est équipé d'une multiplication commutative, alors :

$$||\mathbf{s}||^2 = \chi^2 \cdot ||\mathbf{b}||^2$$

Et (rappel : ici $\chi \neq 0$) :

$$|M(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{s})| = (\alpha + \frac{\beta}{\chi^2} \cdot ||\mathbf{s}||^2) \cdot (\alpha^2 + ||\mathbf{s}||^2)$$

3 Les relations canoniques caractérisant les opérateurs anti-commutatifs

3.1 Les relations canoniques proprement dites.

L'intérêt d'une identification éventuelle entre une matrice périenne et un noyau résultant de la décomposition d'un produit vectoriel déformé réside dans la possibilité d'associer une polynomiale (dégénérée ou non) à cette matrice périenne. Partant du principe que les fronts d'onde peuvent interagir entre eux, il devient légitime de se demander si ces matrices peuvent représenter des opérateurs quantiques anti-commutatifs. Elles le deviennent chaque fois qu'elles vérifient deux relations canoniques :

$$\forall \Lambda_1, \Lambda_2$$

$$\forall |A| = \pm 1 : N_{\Lambda_1}^{|A|} \cdot N_{\Lambda_2}^{|A|} + N_{\Lambda_2}^{|A|} \cdot N_{\Lambda_1}^{|A|} = [0]$$

$$\forall |A| = \pm 1 : N_{\Lambda_1}^{|A|} \cdot N_{\Lambda_2}^{t, |A|} + N_{\Lambda_2}^{t, |A|} \cdot N_{\Lambda_1}^{|A|} = \langle \Lambda_{1|A|}, \Lambda_{2|A|} \rangle \cdot Id_3$$

On supposera a priori que les noyaux ont le formalisme donné ci-dessus et que les matrices $[H]$ sont toujours symétriques.

$$\forall \Lambda, \forall |A| = \pm 1 : N_{\Lambda}^{|A|} = \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}] - |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda \mathbf{s})$$

3.2 La première relation canonique

Concernant la première relation, on constate que :

$$\forall \Lambda_1, \Lambda_2, \forall |A| = \pm 1$$

$$N_{\Lambda_1}^{|A|} \cdot N_{\Lambda_2}^{|A|} + N_{\Lambda_2}^{|A|} \cdot N_{\Lambda_1}^{|A|}$$

$$=$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_1}] - |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_2}] - |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_2}] - |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_1}] - |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \right\}$$

$$=$$

$$\frac{1}{4} \cdot \{[H_{\Lambda_1}] \cdot [H_{\Lambda_2}] + [H_{\Lambda_2}] \cdot [H_{\Lambda_1}]\} + \{[_{[J]} \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \cdot [_{[J]} \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) + [_{[J]} \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \cdot [_{[J]} \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s})]\}$$

$$- \frac{|A|}{2} \cdot \{[H_{\Lambda_1}] \cdot [_{[J]} \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) + [_{[J]} \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \cdot [H_{\Lambda_2}] + [H_{\Lambda_2}] \cdot [_{[J]} \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) + [_{[J]} \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \cdot [H_{\Lambda_1}]\}$$

Remarque 3.1. *Le carré d'un noyau.*

Ainsi, lorsque :

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$$

On peut montrer que :

$$(N_{\Lambda}^{|A|})^2 = \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}]^2 + 2 \cdot [_{[J]} \Phi^2(\Lambda \mathbf{s}) - |A| \cdot [_{[J]} \Phi(\mathbf{s}')$$

Avec :

$$|\mathbf{s}'\rangle = \{Tr[H_{\Lambda}] \cdot Id_3 - [H_{\Lambda}]\} \cdot |_{\Lambda} \mathbf{s} \rangle$$

Conclusion : Le formalisme du carré d'un noyau peut encore s'interpréter comme étant celui d'un noyau s'il existe une polynomiale Λ' dont la partie symétrique vaut :

$$[H_{\Lambda'}] = [H_{\Lambda}]^2 + 4 \cdot [_{[J]} \Phi^2(\Lambda \mathbf{s})$$

Et dont le vecteur qu'on dira spécial mais pas nécessairement singulier vaut $\mathbf{s}'$.

Remarque 3.2. *Les conditions de l'annulation du carré d'un noyau.*

Le carré d'un noyau s'annule lorsque ses parties, symétrique et anti-symétrique, s'annulent simultanément.

1. Concernant la partie symétrique, il faut que :

$$[H_{\Lambda}]^2 + 4 \cdot [_{[J]} \Phi^2(\Lambda \mathbf{s}) = [0]$$

2. Concernant la partie anti-symétrique, il existe deux familles de situations :

- (a) Le vecteur spécial est nul :

$$_{\Lambda} \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

Dans ce cas, la condition de nullité de la partie symétrique du carré du noyau devient :

$$[H_{\Lambda}]^2 = [0]$$

Autrement dit, le carré de la partie symétrique du noyau doit être nulle.

- (b) La partie symétrique du noyau est proportionnelle à la matrice identité, le coefficient de proportionnalité coïncidant avec la trace de cette partie symétrique :

$$[H_{\Lambda}] - Tr[H_{\Lambda}] \cdot Id_3 = [0]$$

Dans ce cas, la condition de nullité de la partie symétrique du carré du noyau devient :

$$(Tr^2[H_{\Lambda}] - ||2 \cdot _{\Lambda} \mathbf{s}||^2) \cdot Id_3 + T_2(\otimes)(2 \cdot _{\Lambda} \mathbf{s}, 2 \cdot _{\Lambda} \mathbf{s}) = [0]$$

3.3 La seconde relation canonique

Concernant la seconde relation, on constate que :

$$\begin{aligned}
 & \forall \Lambda_1, \Lambda_2, \forall |A| = \pm 1 \\
 & N_{\Lambda_1}^{|A|} \cdot N_{\Lambda_2}^{t, |A|} + N_{\Lambda_2}^{t, |A|} \cdot N_{\Lambda_1}^{|A|} \\
 & = \\
 & \left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_1}] - |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_2}] + |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \right\} \\
 & + \left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_2}] + |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda_1}] - |A| \cdot [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \right\} \\
 & = \\
 & \frac{1}{4} \cdot \{ [H_{\Lambda_1}] \cdot [H_{\Lambda_2}] + [H_{\Lambda_2}] \cdot [H_{\Lambda_1}] \} - \{ [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \cdot [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) + [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \cdot [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \} \\
 & + \frac{|A|}{2} \cdot \{ -[H_{\Lambda_1}] \cdot [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) + [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) \cdot [H_{\Lambda_2}] + [H_{\Lambda_2}] \cdot [J] \Phi(\Lambda_1 \mathbf{s}) - [J] \Phi(\Lambda_2 \mathbf{s}) \cdot [H_{\Lambda_1}] \}
 \end{aligned}$$

Lorsqu'en particulier :

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \forall \Lambda, \forall |A| = \pm 1 \\
 & N_{\Lambda}^{|A|} \cdot N_{\Lambda}^{t, |A|} + N_{\Lambda}^{t, |A|} \cdot N_{\Lambda}^{|A|} \\
 & = \\
 & \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}]^2 - 2 \cdot [J] \Phi^2(\Lambda \mathbf{s}) \\
 & =^1 \\
 & \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}]^2 - 2 \cdot \{ T_2(\otimes)(\Lambda \mathbf{s}, \Lambda \mathbf{s}) - \langle \Lambda \mathbf{s}, \Lambda \mathbf{s} \rangle_{Id_3} \cdot Id_3 \} \\
 & =^2 \\
 & \langle \Lambda, \Lambda \rangle_{Id_3} \cdot Id_3
 \end{aligned}$$

1. En effet, en application simple d'une des relations utiles de la remarque 2.2 :

$$[J] \Phi^2(\Lambda \mathbf{s}) = T_2(\otimes)(\Lambda \mathbf{s}, \Lambda \mathbf{s}) - \langle \Lambda \mathbf{s}, \Lambda \mathbf{s} \rangle_{Id_3} \cdot Id_3$$

2. En cas d'une transposition directe de [03 ; Equ.(2a.6), première relation] dans cette discussion.

Remarque 3.3. *Confrontation avec les conditions de l'annulation du carré d'un noyau.*

De deux choses l'une :

1. Soit le vecteur spécial est nul ($_{\Lambda}\mathbf{s} = \mathbf{0}$) :

$$\forall \Lambda, \forall |A| = \pm 1$$

$$N_{\Lambda}^{|A|} \cdot N_{\Lambda}^{t,|A|} + N_{\Lambda}^{t,|A|} \cdot N_{\Lambda}^{|A|} = \frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}]^2$$

Pour pouvoir transposer [03 ; Equ.(2a.6), première relation] dans cette discussion, il faut encore que le carré de la partie symétrique soit proportionnel à la matrice identité.

$$\frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}]^2 = \langle \Lambda, \Lambda \rangle \cdot Id_3$$

Mais on a vu au point 2(a) de la remarque 3.2 que la carré de la partie symétrique doit être nul dans le cas d'un vecteur spécial nul. Il en résulte ici l'obligation de poser :

$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle = 0$$

2. Soit la partie symétrique est proportionnelle à la matrice identité :

$$\forall \Lambda, \forall |A| = \pm 1$$

$$\begin{aligned} & N_{\Lambda}^{|A|} \cdot N_{\Lambda}^{t,|A|} + N_{\Lambda}^{t,|A|} \cdot N_{\Lambda}^{|A|} \\ &= \\ & \frac{1}{2} \cdot Tr^2[H_{\Lambda}] \cdot Id_3 - 2 \cdot \{T_2(\otimes)(_{\Lambda}\mathbf{s}, _{\Lambda}\mathbf{s}) - \langle _{\Lambda}\mathbf{s}, _{\Lambda}\mathbf{s} \rangle_{Id_3} \cdot Id_3\} \\ &= \\ & \frac{1}{2} \cdot Tr^2[H_{\Lambda}] \cdot Id_3 - \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(2 \cdot _{\Lambda}\mathbf{s}, 2 \cdot _{\Lambda}\mathbf{s}) - \langle 2 \cdot _{\Lambda}\mathbf{s}, 2 \cdot _{\Lambda}\mathbf{s} \rangle_{Id_3} \cdot Id_3\} \\ &=^3 \\ & [0] \end{aligned}$$

Ainsi, la transposition de [03 ; Equ.(2a.6), première relation] dans cette discussion ne commence à être envisageable qu'en posant :

$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle = 0$$

On en induit l'idée que la quantité $\langle \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle$ résultant de la transposition de la première relation de [03 ; Equ.(2a.6)] dans cette discussion représente une sorte *d'écart* entre les polynomiales implicitement associées à chaque noyau. Autrement dit lorsque deux polynomiales sont identiques, il n'y a pas d'écart entre elles ; ce qui entraîne bien logiquement l'annulation de cette quantité.

3. Remarque 3.2, point 2.(b)

4 Les quaternions

4.1 Données importantes concernant les quaternions

Avec l'aide de [02 ; p. 72] :

$$\begin{pmatrix} . & 1 & i & j & k \\ 1 & 1 & i & j & k \\ i & i & -1 & k & -j \\ j & j & -k & -1 & i \\ k & k & j & -i & -1 \end{pmatrix}$$

Et en introduisant deux quaternions quelconques :

$$q_1 = q_1^0 + i \cdot q_1^1 + j \cdot q_1^2 + k \cdot q_1^3 ; (q_1^0, q_1^1, q_1^2, q_1^3) \in \mathbb{R}^4 \equiv (q_1^0, {}^{(3)}\mathbf{q}_1)$$

$$q_2 = q_2^0 + i \cdot q_2^1 + j \cdot q_2^2 + k \cdot q_2^3 ; (q_2^0, q_2^1, q_2^2, q_2^3) \in \mathbb{R}^4 \equiv (q_2^0, {}^{(3)}\mathbf{q}_2)$$

On obtient toujours :

$$\begin{aligned} & \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H} : \\ & \frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot q_2 - q_2 \cdot q_1) \\ & = \\ & i \cdot ({}^{(3)}\mathbf{q}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{q}_2)^1 + j \cdot ({}^{(3)}\mathbf{q}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{q}_2)^2 + k \cdot ({}^{(3)}\mathbf{q}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{q}_2)^3 \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

De manière à simplifier toutes les futures équations, on introduit le vecteur $\mathbf{h}$ dont la représentation dans $\mathbb{H}^3$ est (i, j, k). Cette convention d'écriture permet par exemple la notation suivante :

$$\frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot q_2 - q_2 \cdot q_1) = \langle \mathbf{h}, {}^{(3)}\mathbf{q}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{q}_2 \rangle_{Id_3}$$

4.2 Calculs usuels sur les quaternions

Il est pertinent de calculer :

$$\begin{aligned} & q_1 \cdot q_2 \\ & = \\ & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{[\eta]} \\ & + (q_1^0 \cdot q_2^1 + q_1^1 \cdot q_2^0 + q_1^2 \cdot q_2^3 - q_1^3 \cdot q_2^2) \cdot i \\ & + (q_1^0 \cdot q_2^2 + q_1^2 \cdot q_2^0 + q_1^3 \cdot q_2^1 - q_1^1 \cdot q_2^3) \cdot j \\ & + (q_1^0 \cdot q_2^3 + q_1^3 \cdot q_2^0 + q_1^1 \cdot q_2^2 - q_1^2 \cdot q_2^1) \cdot k \end{aligned}$$

L'interversion des indices 1 et 2 fournit :

$$\begin{aligned} & q_2 \cdot q_1 \\ & = \\ & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 \rangle_{[\eta]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (q_2^0 \cdot q_1^1 + q_2^1 \cdot q_1^0 + q_2^2 \cdot q_1^3 - q_2^3 \cdot q_1^2) \cdot i \\
 & + (q_2^0 \cdot q_1^2 + q_2^2 \cdot q_1^0 + q_2^3 \cdot q_1^1 - q_2^1 \cdot q_1^3) \cdot j \\
 & + (q_2^0 \cdot q_1^3 + q_2^3 \cdot q_1^0 + q_2^1 \cdot q_1^2 - q_2^2 \cdot q_1^1) \cdot k
 \end{aligned}$$

La somme des deux expressions précédentes vaut donc (ici, tous les coefficients sont soit des nombres réels, soit des nombres complexes) :

$$\frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot q_2 + q_2 \cdot q_1)$$

=

$$< \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 >_{[\eta]} + (q_2^0 \cdot q_1^1 + q_2^1 \cdot q_1^0) \cdot i + (q_2^0 \cdot q_1^2 + q_2^2 \cdot q_1^0) \cdot j + (q_2^0 \cdot q_1^3 + q_2^3 \cdot q_1^0) \cdot k$$

Il devient évident que :

$$\frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot q_2 + q_2 \cdot q_1)$$

=

$$<^{(4)} \mathbf{q}_1, {}^{(4)} \mathbf{q}_2 >_{[\eta]} + q_1^0 \cdot <^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \mathbf{q}_2 >_{Id_3} + q_2^0 \cdot <^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \mathbf{q}_1 >_{Id_3}$$

4.3 Au sujet de la nullité du carré d'un quaternion

Pour discuter ensuite du carré d'un quaternion, on s'intéresse au produit de deux quaternions.

1. Soit les deux quaternions sont totalement quelconques avec des coefficients réels ou complexes :

$$q_1 \cdot q_2$$

=

$$<^{(4)} \mathbf{q}_1, {}^{(4)} \mathbf{q}_2 >_{[\eta]}$$

$$\begin{aligned}
 & + (q_1^0 \cdot q_2^1 + q_1^1 \cdot q_2^0 + q_1^2 \cdot q_2^3 - q_1^3 \cdot q_2^2) \cdot i \\
 & + (q_1^0 \cdot q_2^2 + q_1^2 \cdot q_2^0 + q_1^3 \cdot q_2^1 - q_1^1 \cdot q_2^3) \cdot j \\
 & + (q_1^0 \cdot q_2^3 + q_1^3 \cdot q_2^0 + q_1^1 \cdot q_2^2 - q_1^2 \cdot q_2^1) \cdot k
 \end{aligned}$$

=

$$<^{(4)} \mathbf{q}_1, {}^{(4)} \mathbf{q}_2 >_{[\eta]} + <^{(3)} \mathbf{h}, q_1^0 \cdot {}^{(3)} \mathbf{q}_2 + q_2^0 \cdot {}^{(3)} \mathbf{q}_1 + ({}^{(3)} \mathbf{q}_1 \wedge {}^{(3)} \mathbf{q}_2) >_{Id_3}$$

2. Soit les deux quaternions sont purement imaginaires et dans ce cas il convient de calculer :

$$<^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \mathbf{q}_1 >_{Id_3} \cdot <^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \mathbf{q}_2 >_{Id_3}$$

=

$$- <^{(3)} \mathbf{q}_1, {}^{(3)} \mathbf{q}_2 >_{Id_3} + <^{(3)} \mathbf{h}, ({}^{(3)} \mathbf{q}_1 \wedge {}^{(3)} \mathbf{q}_2) >_{Id_3}$$

Ainsi lorsque :

$$q_1 = q_2 = q$$

On doit distinguer deux opportunités logiques :

1. Soit on travaille avec n'importe quel quaternion et son carré vaut :

$$\begin{aligned}
 & q^2 \\
 & = \\
 & \langle {}^{(4)}\mathbf{q}, {}^{(4)}\mathbf{q} \rangle_{[\eta]} + \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, 2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{q} \rangle_{Id_3} \\
 & = \\
 & (q^0)^2 - \|{}^{(3)}\mathbf{q}\|^2 + \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, 2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{q} \rangle_{Id_3}
 \end{aligned}$$

Il s'annule lorsque, simultanément :

$$(q^0)^2 - \|{}^{(3)}\mathbf{q}\|^2 = 0, \quad {}^{(3)}\mathbf{q} = {}^{(3)}\mathbf{0}$$

Auquel cas, forcément :

$$q = 0_{\mathbb{H}}$$

... quelle que soit la nature du quaternion q is (réelle ou complexe).

2. Soit on travaille avec des quaternions purement imaginaires et dans ce cas le carré d'un tel quaternion de ce type vaut :

$$\begin{aligned}
 & (\langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\mathbf{q} \rangle_{Id_3})^2 \\
 & = \\
 & - \langle {}^{(3)}\mathbf{q}, {}^{(3)}\mathbf{q} \rangle_{Id_3} + \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\mathbf{q} \wedge {}^{(3)}\mathbf{q} \rangle_{Id_3} \\
 & = \\
 & -\|{}^{(3)}\mathbf{q}\|^2
 \end{aligned}$$

Il ne s'annule que lorsque le produit scalaire euclidien de la partie tridimensionnelle de ce quaternion purement imaginaire par elle-même est nul. Il devient alors clair que les quaternions purement imaginaires à coefficients réels doivent être nuls pour que leurs carrés respectifs s'annulent. En revanche, il devient tout aussi évident que les quaternions purement imaginaires à coefficients complexes (dans $\mathbb{C}$) ne doivent pas nécessairement être nuls pour que leurs carrés respectifs s'annulent. Ces quaternions-là ouvrent la discussion vers la théorie des spineurs d'E. Cartan [04].

5 Les matrices périennes anticommutatives

On cherche ici à découvrir des matrices périennes vérifiant la première relation canonique qui en ferait des opérateurs quantiques anti-commutatifs. Il est à parier que l'anti-commutativité forcera cette discussion à s'étendre à l'ensemble $K = \mathbb{H}$, le corps non-commutatifs des quaternions.

5.1 Le produit de deux matrices périennes

Soit une paire $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ d'éléments choisis arbitrairement dans $E(3, K)$ tels que les composantes du premier argument sont représentées par (α, β, χ) dans K^3 ; ces ingrédients permettent d'écrire une matrice périenne :

$$[M(\mathbf{a}^*, \mathbf{b})] = \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \chi \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}) \in M(3, K)$$

Soit une paire $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ d'éléments choisis arbitrairement dans $E(3, K)$ tels que les composantes du premier argument sont représentées par (α', β', χ') dans K^3 ; ces ingrédients permettent d'écrire une matrice périenne :

$$[M'(\mathbf{a}'^*, \mathbf{b}')] = \alpha' \cdot Id_3 + \beta' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}', \mathbf{b}') + \chi' \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}') \in M(3, K)$$

Le produit matriciel $[M].[M']$ vaut :

$$\begin{aligned} & [M(\mathbf{a}^*, \mathbf{b})] \cdot [M'(\mathbf{a}'^*, \mathbf{b}')] \\ &= \\ & \{ \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \chi \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}) \} \cdot \{ \alpha' \cdot Id_3 + \beta' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}', \mathbf{b}') + \chi' \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}') \} \\ &= \\ & (\alpha \cdot \alpha' - \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle_{Id_3} \cdot \chi \cdot \chi') \cdot Id_3 \\ & + \alpha \cdot \beta' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}', \mathbf{b}') + \beta \cdot \beta' \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle_{Id_3} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}', \mathbf{b}') + \beta \cdot \alpha' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ & + \beta \cdot \chi' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}', \mathbf{b}') + \chi \cdot \beta' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}', \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}') + \chi \cdot \chi' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \\ & + \alpha \cdot \chi' \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}') + \chi \cdot \alpha' \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Remarque 5.1. *Au sujet du produit de deux matrices périennes.*

Le produit de deux matrices périennes n'est, en général, plus une matrice périenne. Mais il existe des exceptions notables et intéressantes à cette règle.

Exemple 5.1. *Le second argument des paires définissant deux matrices périennes est le même et représenté dans $\mathbb{C}^3$.*

Lorsque le second argument des paires définissant deux matrices périennes est le même et que ces composantes sont des nombres complexes, le produit de ces matrices vaut :

$$\begin{aligned} & [M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})] \\ &= \\ & \{ \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \chi \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}) \} \cdot \{ \alpha' \cdot Id_3 + \beta' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \chi' \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{b}) \} \\ &= \\ & (\alpha \cdot \alpha' - \chi \cdot \chi' \cdot \|\mathbf{b}\|^2) \cdot Id_3 \\ & + \alpha \cdot \beta' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \beta \cdot \beta' \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \beta \cdot \alpha' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ & + \beta \cdot \chi' \cdot T_2(\otimes)(\underbrace{\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}}_{=0}, \mathbf{b}) + \chi \cdot \beta' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \underbrace{\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}}_{=0}) + \chi \cdot \chi' \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha \cdot \chi' \cdot [J] \Phi(\mathbf{b}) + \chi \cdot \alpha' \cdot [J] \Phi(\mathbf{b}) \\
 & = \\
 & (\alpha \cdot \alpha' - \chi \cdot \chi' \cdot \|\mathbf{b}\|^2) \cdot Id_3 \\
 & + (\alpha \cdot \beta' + \beta \cdot \beta' \cdot \|\mathbf{b}\|^2 + \beta \cdot \alpha' + \chi \cdot \chi') \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\
 & + (\alpha \cdot \chi' + \chi \cdot \alpha') \cdot [J] \Phi(\mathbf{b})
 \end{aligned}$$

Lemme 5.1. -

Soit $\Pi(\mathbf{b})$ l'ensemble des matrices périennes définies par une paire dont le second argument est le vecteur $\mathbf{b}$. Soit deux matrices périennes dans $\Pi(\mathbf{b})$ respectivement associées aux paires $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ et $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$. Lorsque les composantes du second argument sont dans un ensemble K doté d'une multiplication commutative (par exemple $\mathbb{C}$), on constate que :

1. Le produit $[M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})]$ est une opération interne réalisée dans $\Pi(\mathbf{b})$.

$$[M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})] \in \Pi(\mathbf{b}) \subset M(3, K)$$

2. Le résultat de ce produit peut être écrit :

$$[M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})] = [M(\mathbf{a}'', \mathbf{b})]$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha'' &= \alpha \cdot \alpha' - \chi \cdot \chi' \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \\
 \beta'' &= (\alpha \cdot \beta' + \beta \cdot \beta' \cdot \|\mathbf{b}\|^2) + \chi \cdot \chi' + \beta \cdot \alpha' \\
 \chi'' &= \alpha \cdot \chi' + \chi \cdot \alpha'
 \end{aligned}$$

5.2 Les trois contraintes caractérisant l'anticommutativité des matrices périennes dans $\Pi(\mathbf{b})$

Soit deux matrices périennes dans $\Pi(\mathbf{b})$ respectivement associées aux paires $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ et $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$. Lorsque le premier argument de chacune de ces paires est représenté dans $\mathbb{H}^3$ alors que le second l'est dans $\mathbb{C}^3$, on déduit de l'exemple précédent que la relation :

$$[M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})] + [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] = [0]$$

... est équivalente à la réalisation simultanée des trois relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot \alpha' - \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \chi \cdot \chi' + \alpha' \cdot \alpha - \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \chi' \cdot \chi &= 0 \\
 (\alpha \cdot \beta' + \beta \cdot \beta' \cdot \|\mathbf{b}\|^2) + \chi \cdot \chi' + \beta \cdot \alpha' + (\alpha' \cdot \beta + \beta' \cdot \beta \cdot \|\mathbf{b}\|^2) + \chi' \cdot \chi + \beta' \cdot \alpha &= 0 \\
 \alpha \cdot \chi' + \chi \cdot \alpha' + \alpha' \cdot \chi + \chi' \cdot \alpha &= 0
 \end{aligned}$$

Il n'y a aucune difficulté à en déduire le :

Lemme 5.2. *Sur la partie anticommutative de $\mathbb{H}$.*

Soit deux matrices périennes dans $\Pi(\mathbf{b})$ respectivement associées aux paires $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ et $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$. Lorsque les composantes du premier argument de chacune de ces paires sont dans la partie anti-commutative de $\mathbb{H}$ et que celles du second sont dans $\mathbb{C}^3$, ces deux matrices anti-commutent.

Les calculs réalisés dans une sous-section précédente permettent de préciser la condition d'appartenance d'une paire de quaternion à $\text{Anticom}_{\mathbb{H}}$; il s'agit de la relation :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot q_2 + q_2 \cdot q_1) \\ &= \\ & \langle^{(4)} \mathbf{q}_1, {}^{(4)} \mathbf{q}_2 \rangle_{[\eta]} + q_1^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \mathbf{q}_2 \rangle_{Id_3} + q_2^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \mathbf{q}_1 \rangle_{Id_3} \\ &= \\ & 0_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

Cette condition se scinde naturellement en deux sous-conditions devant être simultanément vraies :

$$\begin{aligned} \langle^{(4)} \mathbf{q}_1, {}^{(4)} \mathbf{q}_2 \rangle_{[\eta]} &= q_1^0 \cdot q_2^0 - \langle^{(3)} \mathbf{q}_1, {}^{(3)} \mathbf{q}_2 \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}} \\ q_1^0 \cdot {}^{(3)} \mathbf{q}_2 + q_2^0 \cdot {}^{(3)} \mathbf{q}_1 &= {}^{(3)} \mathbf{0} \end{aligned}$$

Si on part du principe que ces sous-conditions doivent s'appliquer à chaque quaternion dans $\text{Anticom}_{\mathbb{H}}$, alors tous les carrés des éléments d' $\text{Anticom}_{\mathbb{H}}$ sont nuls. Ce qui ramène peu ou prou la discussion vers les propos préliminaires tenus dans la sous-section 4.3. Ils obligent à considérer deux familles de situations :

- La partie scalaire du quaternion étudié est nulle : $q^0 = 0$. Ce quaternion est purement imaginaire (équivalamment : un élément d' $\text{Im}_{\mathbb{H}}$) et il appartient aussi à $\text{Anticom}_{\mathbb{H}}$ lorsque :

$$\langle^{(3)} \mathbf{q}, {}^{(3)} \mathbf{q} \rangle_{Id_3} = \|{}^{(3)} \mathbf{q}\|^2 = 0_{\mathbb{C}}$$

- Le quaternion q est quelconque. Il ne peut être un élément d' $\text{Anticom}_{\mathbb{H}}$ que s'il est dès le départ nul : $q = 0$. Ce qui ne présente aucun intérêt.

Concrètement, seuls les vecteurs isotropiques d'un espace complexe de dimension trois peuvent permettre de construire des éléments dans $\text{Im}_{\mathbb{H}}$ dont le carré s'annule. Ce qui signifie qu'il convient de travailler avec des matrices périennes dont le formalisme générique est du genre :

$$\begin{aligned} & [M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \\ &= \\ & \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha \rangle_{Id_3} \cdot Id_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\beta \rangle_{Id_3} \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})\} \\
 &+ \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{b})
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\|{}^{(3)}\alpha\|^2 = \|{}^{(3)}\beta\|^2 = \|{}^{(3)}\chi\|^2 = 0_{\mathbb{C}}$$

5.3 Le cas des quaternions purement imaginaires

Les quaternions purement imaginaires ont des propriétés remarquables dont on peut se demander si elles facilitent la découverte de matrices périennes anti-commutatives. Pour tenter de répondre à cette question on va traduire les trois contraintes de l'anticommutativité lorsqu'elles concernent de tels quaternions. On a vu plus haut que pour n'importe quelle paire de quaternions (q_1, q_2) :

$$\begin{aligned}
 &\langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\mathbf{q}_1 \rangle_{Id_3} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\mathbf{q}_2 \rangle_{Id_3} + \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\mathbf{q}_2 \rangle_{Id_3} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\mathbf{q}_1 \rangle_{Id_3} \\
 &= \\
 &-2 \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{q}_1, {}^{(3)}\mathbf{q}_2 \rangle_{Id_3}
 \end{aligned}$$

Comme les trois contraintes peuvent d'abord se réorganiser comme suit :

$$\begin{aligned}
 &(\alpha \cdot \alpha' + \alpha' \cdot \alpha) - \|\mathbf{b}\|^2 \cdot (\chi \cdot \chi' + \chi' \cdot \chi) = 0 \\
 &(\alpha \cdot \beta' + \beta' \cdot \alpha) + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot (\beta \cdot \beta' + \beta' \cdot \beta) + (\chi \cdot \chi' + \chi' \cdot \chi) + (\beta \cdot \alpha' + \alpha' \cdot \beta) = 0 \\
 &(\alpha \cdot \chi' + \chi' \cdot \alpha) + (\chi \cdot \alpha' + \alpha' \cdot \chi) = 0
 \end{aligned}$$

Chaque fois que :

$$\alpha, \beta, \chi, \alpha', \beta', \chi' \in Im_{\mathbb{H}}$$

Ces contraintes deviennent :

$$\begin{aligned}
 &\langle {}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\alpha' \rangle_{Id_3} - \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \langle {}^{(3)}\chi, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}} \\
 &\langle {}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\beta' \rangle_{Id_3} + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \langle {}^{(3)}\beta, {}^{(3)}\beta' \rangle_{Id_3} + \langle {}^{(3)}\chi, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} + \langle {}^{(3)}\beta, {}^{(3)}\alpha' \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}} \\
 &\langle {}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} + \langle {}^{(3)}\chi, {}^{(3)}\alpha' \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}}
 \end{aligned}$$

Comme une matrice périenne qui anti-commute doit anti-commuter avec elle-même, son carré est nul. Au contraintes s'appliquant aux matrices périennes dont les coefficients sont des quaternions purement imaginaires (voir le lemme 5.2 à la sous-section précédente) s'ajoutent donc les suivantes :

$$\langle {}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\beta \rangle_{Id_3} = \langle {}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}}$$

5.4 Matrices périennes anticommutantes à coefficients purement imaginaires et algèbres de Lie

Soit donc l'ensemble des matrices dont le représentant générique est :

$$\begin{aligned} & [M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \\ & = \\ & \quad \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\alpha \rangle_{Id_3} \cdot Id_3 \\ & + \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\beta \rangle_{Id_3} \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})\} \\ & \quad + \langle {}^{(3)}\mathbf{h}, {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} & \|{}^{(3)}\alpha\|^2 = \|{}^{(3)}\beta\|^2 = \|{}^{(3)}\chi\|^2 = 0_{\mathbb{C}} \\ & \langle {}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\beta \rangle_{Id_3} = \langle {}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Proposition 5.1. *Les triplés $({}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\beta, {}^{(3)}\chi)$ permettant de construire les éléments de l'ensemble des matrices périennes à coefficients purement imaginaires anticommutantes sont des éléments d'une famille d'algèbres de Lie.*

Démonstration.

Définition 5.1. *Algèbre de Lie (rappel)*

Soit V un espace vectoriel de dimension trois, bâti sur le corps commutatif des nombres complexes $\mathbb{C}$ et équipé d'un produit vectoriel déformé par la matrice $[A]$ de $M(3, \mathbb{C}) : [\dots, \dots]_{[A]}$. L'espace V est supposé être rapporté à sa base canonique Ω ; celle-ci peut aussi s'interpréter comme un élément de V^3 .

Pour que V soit équipé d'une structure d'algèbre de Lie, trois conditions doivent s'appliquer simultanément (voir définition par exemple dans [01 ; p. 9] ou [05 ; p.15, 257 et 283]) :

1. Un crochet de Lie doit y être défini ;
2. Le produit d'un élément quelconque de V par lui-même, via ce crochet de Lie, doit être nul :

$$\forall \mathbf{a} \in V : [\mathbf{a}, \mathbf{a}]_{[A]} = \mathbf{0}$$

3. La relation de Jacobi doit être validée pour tous les triplés d'éléments choisis arbitrairement dans V (Il revient au même de dire que le Jacobiateur est nul partout sur V) :

$$\begin{aligned} & \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V : \\ & \quad J_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ & = \\ & \quad [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]} \\ & = \\ & \quad \mathbf{0} \end{aligned}$$

Le produit vectoriel déformé est de facto un crochet agissant sur les éléments de V : voir sa définition dans [d]. Et de par sa définition ce crochet satisfait automatiquement la deuxième condition exigée pour l'obtention d'une structure d'algèbre de Lie. Il ne reste donc qu'à explorer ce qui se passe avec la relation de Jacobi.

Remarque 5.2. *Calcul du Jacobiateur*

On peut démontrer ([voir l'annexe](#)) que :

$$\begin{aligned} J_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ = \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle_{Id_3} \cdot \{ -[A] \cdot [J]^t \cdot [J] \Phi([A] \cdot |\mathbf{\Omega} \rangle) \}^{\oplus} \end{aligned}$$

Remarque 5.3. *Existence de deux familles d'algèbres de Lie*

Il existe une algèbre de Lie lorsque :

$$\begin{aligned} J_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ = \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle_{Id_3} \cdot \{ -[A] \cdot [J]^t \cdot [J] \Phi([A] \cdot |\mathbf{\Omega} \rangle) \}^{\oplus} \\ = \\ \mathbf{0} \end{aligned}$$

Cette relation définit visiblement deux grandes familles d'algèbres de Lie définissables sur V :

1. Celles qui contiennent des triplés d'éléments choisis dans V vérifiant simultanément les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle_{Id_3} &= 0_{\mathbb{C}} \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \rangle_{Id_3} &= 0_{\mathbb{C}} \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle_{Id_3} &= 0_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Ces algèbres de Lie dépendent directement des propriétés particulières de certains triplés d'éléments de V .

Définition 5.2. *Territoire de Jacobi.*

Par convention du langage, on nomme *territoire de Jacobi* un triplé de vecteurs choisis dans V tels que les trois relations ci-dessus sont simultanément vraies quelle que soit la matrice déformant le produit vectoriel classique défini sur V .

2. Celles pour lesquelles la matrice déformante permet de vérifier que :

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V : \{ [A] \cdot [J]^t \cdot [J] \Phi([A] \cdot |\mathbf{\Omega} \rangle) \}^{\oplus} = \mathbf{0}$$

Ces algèbres de Lie résultent directement des caractéristiques de la matrice déformante ; peu importe les éléments de V .

Remarque 5.4. *Les représentations spineurales des vecteurs isotropiques de V.*

La compréhension des propriétés particulières des triplés définissant des algèbre de Lie sur V exige de faire un détour par la théorie des spineurs due à E. Cartan. Dans son oeuvre traduite en américain [04], l'auteur donne un moyen de relier un vecteur isotropique de V aux deux composantes d'un spineur. Il est probable que cet exemple a pu s'inspirer des travaux de Weierstrass sur les représentations des surfaces minimales et qu'il n'est pas le seul lien possible entre un vecteur isotropique et les spineurs pouvant y être associés. On va donc supposer qu'un élément isotropique s de V peut toujours être relié de la manière suivante aux composantes η^1 et η^2 d'un spineur :

$$s^1(\eta^0, \eta^1) = a_{00}^1 \cdot (\eta^0)^2 + a_{01}^1 \cdot \eta^0 \cdot \eta^1 + a_{11}^1 \cdot (\eta^1)^2$$

$$s^2(\eta^0, \eta^1) = a_{00}^2 \cdot (\eta^0)^2 + a_{01}^2 \cdot \eta^0 \cdot \eta^1 + a_{11}^2 \cdot (\eta^1)^2$$

$$s^3(\eta^0, \eta^1) = a_{00}^3 \cdot (\eta^0)^2 + a_{01}^3 \cdot \eta^0 \cdot \eta^1 + a_{11}^3 \cdot (\eta^1)^2$$

Après quelques calculs consistant à poser $\|s\|^2 = \langle s, s \rangle = 0_{\mathbb{C}}$, on découvre un ensemble de cinq conditions :

$$(\eta^0)^4 : \{(a_{00}^1)^2 + (a_{00}^2)^2 + (a_{00}^3)^2\} = 0$$

$$(\eta^0)^3 \cdot (\eta^1) : a_{00}^1 \cdot a_{01}^1 + a_{00}^2 \cdot a_{01}^2 + a_{00}^3 \cdot a_{01}^3 = 0$$

$$(\eta^0)^2 \cdot (\eta^1)^2 : a_{00}^1 \cdot a_{11}^1 + a_{00}^2 \cdot a_{11}^2 + a_{00}^3 \cdot a_{11}^3 + \{(a_{01}^1)^2 + (a_{01}^2)^2 + (a_{01}^3)^2\} = 0$$

$$(\eta^0) \cdot (\eta^1)^3 : a_{01}^1 \cdot a_{11}^1 + a_{01}^2 \cdot a_{11}^2 + a_{01}^3 \cdot a_{11}^3 = 0$$

$$(\eta^1)^4 \text{ terms} : \{(a_{11}^1)^2 + (a_{11}^2)^2 + (a_{11}^3)^2\} = 0$$

Pour les condenser on introduit la matrice :

$$[W] = \begin{bmatrix} a_{00}^1 & a_{01}^1 & a_{11}^1 \\ a_{00}^2 & a_{01}^2 & a_{11}^2 \\ a_{00}^3 & a_{01}^3 & a_{11}^3 \end{bmatrix}$$

... qui peut se lire comme une ligne de trois vecteurs :

$$[W] = [|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle]$$

Leur introduction permet de reformuler les cinq conditions :

1.

$$(\eta^0)^4 : \|w_1\|^2 = 0$$

2.

$$(\eta^0)^3 \cdot (\eta^1) : \langle w_1, w_2 \rangle_{Id_3} = 0$$

3.

$$(\eta^0)^2 \cdot (\eta^1)^2 : \langle w_1, w_3 \rangle_{Id_3} + \|w_2\|^2 = 0$$

4.

$$(\eta^0) \cdot (\eta^1)^3 : \langle w_2, w_3 \rangle_{Id_3} = 0$$

5.

$$(\eta^1)^4 : ||\mathbf{w}_3||^2 = 0$$

Lemme 5.3. *Sur les représentations spineurales des vecteurs isotropiques.*

1. Chaque représentation spineurale d'un vecteur isotropique, ici $\mathbf{s}$, est associable avec un triplé $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ de vecteurs de V dont deux ($\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_3$) sont isotropiques et orthogonaux à un troisième ($\mathbf{w}_2$) chaque fois que :

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_{Id_3} + ||\mathbf{w}_2||^2 = 0$$

2. Chaque triplé $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ de vecteurs isotropiques et orthogonaux entre eux est associable à la représentation spineurale d'un quatrième vecteur isotropique, $\mathbf{s}$. En effet, on vérifie aisément que les cinq conditions ci-dessus sont satisfaites par n'importe quel triplé de vecteurs vérifiant les conditions :

$$||^{(3)}\mathbf{w}_1||^2 = ||^{(3)}\mathbf{w}_2||^2 = ||^{(3)}\mathbf{w}_3||^2 = 0_{\mathbb{C}}$$

$$\langle^{(3)}\mathbf{w}_1, ^{(3)}\mathbf{w}_2 \rangle_{Id_3} = \langle^{(3)}\mathbf{w}_2, ^{(3)}\mathbf{w}_3 \rangle_{Id_3} = \langle^{(3)}\mathbf{w}_1, ^{(3)}\mathbf{w}_3 \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}}$$

3. Lorsqu'on pose :

$$^{(3)}\mathbf{w}_1 = ^{(3)}\beta, ^{(3)}\mathbf{w}_2 = ^{(3)}\alpha, ^{(3)}\mathbf{w}_3 = ^{(3)}\chi$$

... on retrouve toutes les conditions devant être vérifiées par un triplé $\{^{(3)}\alpha, ^{(3)}\beta, ^{(3)}\chi\}$ permettant de construire une matrice périenne anticommutante dont les coefficients sont purement imaginaires en imposant :

$$||^{(3)}\mathbf{w}_2||^2 = ||^{(3)}\alpha||^2 = 0_{\mathbb{C}}$$

Il en résulte la contrainte optionnelle :

$$\langle^{(3)}\beta, ^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}}$$

Chaque triplé de vecteurs isotropiques et orthogonaux entre eux permet de construire une matrice périenne anticommutante dont les coefficients sont purement imaginaires.

Remarque 5.5. -

Soit trois éléments de V tels que :

$$\alpha \wedge \beta = \chi; \beta \wedge \chi = \alpha; \chi \wedge \alpha = \beta$$

Dans ce qui suit, on considère *a priori* que la notion d'orthogonalité entre les arguments d'un produit vectoriel et le résultat de ce produit vectoriel reste vraie bien que la discussion ait lieu avec des vecteurs dont les composantes sont des nombres complexes. En clair, les conditions données à l'instant contiennent aussi implicitement les suivantes :

$$\langle^{(3)}\alpha, ^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}}$$

5.5 Matrices périennes anticommutantes à coefficients purement imaginaires
et seconde relation canonique caractérisant les opérateurs anticommutatifs

$$\begin{aligned} \langle^{(3)} \beta, {}^{(3)} \chi \rangle_{Id_3} &= 0_{\mathbb{C}} \\ \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)} \beta \rangle_{Id_3} &= 0_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Si - en plus - ce triplé de vecteurs satisfait les conditions annulant le Jacobiateur, i.e. : $J_{[A]}({}^{(3)}\alpha, {}^{(3)}\beta, {}^{(3)}\chi) = \mathbf{0}$, alors il est un triplé de vecteurs isotropiques orthogonaux et il permet donc de construire une matrice périenne anticommutante dont les coefficients sont purement imaginaires. $\square$

5.5 Matrices périennes anticommutantes à coefficients purement imaginaires et seconde relation canonique caractérisant les opérateurs anticommutatifs

Soit les deux matrices suivantes :

$$\begin{aligned} &[M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \\ &= \\ &\langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha \rangle_{Id_3} \cdot Id_3 \\ &+ \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \beta \rangle_{Id_3} \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})\} \\ &+ \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi \rangle_{Id_3} \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \|{}^{(3)}\alpha\|^2 &= \|{}^{(3)}\beta\|^2 = \|{}^{(3)}\chi\|^2 = 0_{\mathbb{C}} \\ \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)} \beta \rangle_{Id_3} &= \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)} \chi \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} &[M(\mathbf{a}', \mathbf{b})]^t \\ &= \\ &\langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha' \rangle_{Id_3} \cdot Id_3 \\ &+ \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \beta' \rangle_{Id_3} \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{b}, {}^{(3)}\mathbf{b})\} \\ &- \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi' \rangle_{Id_3} \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \|{}^{(3)}\alpha'\|^2 &= \|{}^{(3)}\beta'\|^2 = \|{}^{(3)}\chi'\|^2 = 0_{\mathbb{C}} \\ \langle^{(3)} \alpha', {}^{(3)} \beta' \rangle_{Id_3} &= \langle^{(3)} \alpha', {}^{(3)} \chi' \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

On va d'abord calculer :

$$\begin{aligned} &[M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})]^t \\ &= \\ &\{\langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha' \rangle_{Id_3} + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi' \rangle_{Id_3}\} \cdot Id_3 \\ &+ \dots \\ &\{- \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi' \rangle_{Id_3} + \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha' \rangle_{Id_3}\} \cdot [J]\Phi(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
 & [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})]^t \cdot [M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \\
 & = \\
 & \{ \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\alpha' \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\alpha \rangle_{Id_3} + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} \} \cdot Id_3 \\
 & + \dots \\
 & \{ \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\alpha' \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} - \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)}\alpha \rangle_{Id_3} \} \cdot [J] \Phi(\mathbf{b})
 \end{aligned}$$

Avant d'additionner les deux produits. On trouve que :

$$\begin{aligned}
 & [M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \cdot [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})]^t + [M(\mathbf{a}', \mathbf{b})]^t \cdot [M(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \\
 & = \\
 & -2 \cdot \{ \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)}\alpha' \rangle_{Id_3} + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \langle^{(3)} \chi, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} \} \cdot Id_3 \\
 & + \dots \\
 & 2 \cdot \{ \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} - \langle^{(3)} \alpha', {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} \} \cdot [J] \Phi(\mathbf{b})
 \end{aligned}$$

Pour se trouver dans le cadre de la discussion générale exposée dans [03] et de son application proposée ci-dessus au niveau de la [section 3](#), il faut que le coefficient précédant la matrice identité s'identifie avec un *écart* noté symboliquement :

$$\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = -2 \cdot \{ \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)}\alpha' \rangle_{Id_3} + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \langle^{(3)} \chi, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} \}$$

Et il faut que les coefficients placés devant les matrices T et Φ s'annulent ; ce qui oblige à poser :

$$\begin{aligned}
 \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)}\beta' \rangle_{Id_3} + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \langle^{(3)} \beta, {}^{(3)}\beta' \rangle_{Id_3} + \langle^{(3)} \alpha', {}^{(3)}\beta \rangle_{Id_3} &= \langle^{(3)} \chi, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} \\
 \langle^{(3)} \alpha, {}^{(3)}\chi' \rangle_{Id_3} &= \langle^{(3)} \alpha', {}^{(3)}\chi \rangle_{Id_3}
 \end{aligned}$$

En injectant la contrainte sur le coefficient devant la matrice T dans la définition de l'écart, celui-ci s'écrit plus simplement :

$$\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = -2 \cdot \langle^{(3)} \alpha + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot {}^{(3)}\beta, {}^{(3)}\alpha' + \|\mathbf{b}\|^2 \cdot {}^{(3)}\beta' \rangle_{Id_3}$$

C'est une relation intéressante en ce sens qu'elle est bâtie sur un des facteurs du déterminant de chacune des matrices périennes ; voir la [remarque 2.6](#). Ce qui laisse penser que la nullité de l'écart entre deux matrices survient *en particulier* chaque fois qu'une des deux matrices a un déterminant nul.

5.6 Quand les quaternions sont quelconques

Remarque 5.6. *La possibilité d'introduire une représentation affine dans la discussion.*

Lorsque les composantes du premier argument de chacune de ces paires ne sont pas dans la partie anti-commutative de $\mathbb{H}$ mais tout simplement dans $\mathbb{H}$, il convient d'écrire en général :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \cdot (\alpha \cdot \alpha' + \alpha' \cdot \alpha) \\
 & = \\
 & \langle^{(4)} \alpha, {}^{(4)} \alpha' \rangle_{[\eta]} + \alpha^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha' \rangle_{Id_3} + \alpha'^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha \rangle_{Id_3} \\
 & \frac{1}{2} \cdot (\alpha \cdot \beta' + \beta' \cdot \alpha) \\
 & = \\
 & \langle^{(4)} \alpha, {}^{(4)} \beta' \rangle_{[\eta]} + \alpha^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \beta' \rangle_{Id_3} + \beta'^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha \rangle_{Id_3} \\
 & \frac{1}{2} \cdot (\alpha \cdot \chi' + \chi' \cdot \alpha) \\
 & = \\
 & \langle^{(4)} \alpha, {}^{(4)} \chi' \rangle_{[\eta]} + \alpha^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi' \rangle_{Id_3} + \chi'^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha \rangle_{Id_3} \\
 & \frac{1}{2} \cdot (\beta \cdot \alpha' + \alpha' \cdot \beta) \\
 & = \\
 & \langle^{(4)} \beta, {}^{(4)} \alpha' \rangle_{[\eta]} + \beta^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha' \rangle_{Id_3} + \alpha'^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \beta \rangle_{Id_3} \\
 & \frac{1}{2} \cdot (\beta \cdot \beta' + \beta' \cdot \beta) \\
 & = \\
 & \langle^{(4)} \beta, {}^{(4)} \beta' \rangle_{[\eta]} + \beta^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \beta' \rangle_{Id_3} + \beta'^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \beta \rangle_{Id_3} \\
 & \frac{1}{2} \cdot (\chi \cdot \alpha' + \alpha' \cdot \chi) \\
 & = \\
 & \langle^{(4)} \chi, {}^{(4)} \alpha' \rangle_{[\eta]} + \chi^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \alpha' \rangle_{Id_3} + \alpha'^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi \rangle_{Id_3} \\
 & \frac{1}{2} \cdot (\chi \cdot \chi' + \chi' \cdot \chi) \\
 & = \\
 & \langle^{(4)} \chi, {}^{(4)} \chi' \rangle_{[\eta]} + \chi^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi' \rangle_{Id_3} + \chi'^0 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{h}, {}^{(3)} \chi \rangle_{Id_3}
 \end{aligned}$$

... et de remplacer ces expressions dans les trois contraintes devant être simultanément vérifiées. Ce travail sera effectué ailleurs et plus tard.

6 Conclusion

Cette exploration a approfondi les connaissances concernant les matrices dites périennes (MPs). Elles avaient attiré l'attention dans [a] et [b]. Cet approfondissement a eu ici pour but essentiel de savoir si certaines d'entre elles pouvaient servir d'opérateurs quantiques. Les conditions nécessaires permettant de valider les relations canoniques caractérisant des opérateurs anti-commutatifs ont été énoncées. La quête a permis de découvrir un ensemble de matrices périennes validant ces deux relations. Leurs coefficients sont des quaternions purement imaginaires. Chemin faisant, on a également remarqué le lien possible entre les triplés $\{^{(3)}\alpha, ^{(3)}\beta, ^{(3)}\chi\}$ constitutifs des matrices validant les deux relations et l'existence d'une algèbre de Lie bâtie sur ces triplés si on ajoute la restriction :

$$\langle ^{(3)}\beta, ^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}}$$

... aux exigences déjà mentionnées dans ce document ; à savoir :

$$||^{(3)}\alpha||^2 = ||^{(3)}\beta||^2 = ||^{(3)}\chi||^2 = 0_{\mathbb{C}}$$

$$\langle ^{(3)}\alpha, ^{(3)}\beta \rangle_{Id_3} = \langle ^{(3)}\alpha, ^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} = 0_{\mathbb{C}}$$

Certaines d'entre elles peuvent s'identifier - *mais formellement seulement*- avec des noyaux de décompositions de produits vectoriels déformés en posant (voir la [remarque 2.5](#)) :

$$\frac{1}{2} \cdot [H_{\Lambda}] = \langle ^{(3)}\mathbf{h}, ^{(3)}\alpha \rangle_{Id_3} \cdot Id_3 + \langle ^{(3)}\mathbf{h}, ^{(3)}\beta \rangle_{Id_3} \cdot T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{b}, ^{(3)}\mathbf{b})$$

$$\frac{1}{|A|} \cdot \Lambda \mathbf{s} = \langle ^{(3)}\mathbf{h}, ^{(3)}\chi \rangle_{Id_3} \cdot ^{(3)}\mathbf{b}$$

Cette étude mérite peut-être d'être poursuivie dans plusieurs directions :

- En se demandant s'il existe d'autres ensembles de matrices périennes à coefficients quaternioniques remplissant le cahier des charges accompagnant la définition d'opérateurs quantiques anti-commutatifs.
- En l'appliquant à l'équation de Klein-Gordon.
- En approfondissant sur le plan mathématique la notion de table de Pythagore, les liens entre $\mathbb{C}^3$ et $\text{Im}_{\mathbb{H}}$, le concept de territoire de Jacobi et les connaissances sur la structure de $\Pi(\mathbf{b})$.

7 Annexes

7.1 Expression in extenso du Jacobiateur sur V

Proposition 7.1. *Le jacobiateur d'un triplé de vecteurs de V dépend de ce triplé et de la matrice déformante [A].*

Démonstration. Par définition :

$$J_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]} \\
 &= \\
 &[\mathbf{a}, A_{jk}^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) \cdot \mathbf{e}_n]_{[A]} \\
 &= \\
 &A_{mn}^i \cdot (a^m \cdot A_{jk}^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) - a^n \cdot A_{jk}^m \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j)) \cdot \mathbf{e}_i \\
 &\text{Avec l'aide de permutations cycliques :} \\
 &[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]} = A_{mn}^i \cdot (b^m \cdot A_{jk}^n \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) - b^n \cdot A_{jk}^m \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j)) \cdot \mathbf{e}_i \\
 &[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]} = A_{mn}^i \cdot (c^m \cdot A_{jk}^n \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j) - c^n \cdot A_{jk}^m \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)) \cdot \mathbf{e}_i \\
 &\text{Il vient :} \\
 &[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]} \\
 &= \\
 &\{A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot a^m \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) - A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot a^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &+ \{A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot b^m \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) - A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot b^n \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &+ \{A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot c^m \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j) - A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot c^n \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &= \\
 &A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot \{a^m \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^m \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^m \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &- A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot \{a^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^n \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^n \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &= \\
 &A_{mn}^i \cdot A_{12}^n \cdot \{a^m \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^m \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^m \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &+ \\
 &A_{mn}^i \cdot A_{23}^n \cdot \{a^m \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^m \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^m \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &+ \\
 &A_{mn}^i \cdot A_{13}^n \cdot \{a^m \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^m \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^m \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &- \\
 &A_{mn}^i \cdot A_{12}^m \cdot \{a^n \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^n \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^n \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &- \\
 &A_{mn}^i \cdot A_{23}^m \cdot \{a^n \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^n \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^n \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &- \\
 &A_{mn}^i \cdot A_{13}^m \cdot \{a^n \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^n \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^n \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &= \\
 &A_{12}^i \cdot A_{12}^2 \cdot \{a^1 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^1 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \\
& A_{12}^i \cdot A_{23}^2 \cdot \{a^1 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^1 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{12}^i \cdot A_{13}^2 \cdot \{a^1 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^1 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{12}^i \cdot A_{12}^1 \cdot \{a^2 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{12}^i \cdot A_{23}^1 \cdot \{a^2 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^2 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{12}^i \cdot A_{13}^1 \cdot \{a^2 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{23}^i \cdot A_{12}^3 \cdot \{a^2 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{23}^i \cdot A_{23}^3 \cdot \{a^2 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^2 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{23}^i \cdot A_{13}^3 \cdot \{a^2 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{23}^i \cdot A_{12}^2 \cdot \{a^3 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{23}^i \cdot A_{23}^2 \cdot \{a^3 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^3 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{23}^i \cdot A_{13}^2 \cdot \{a^3 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{13}^i \cdot A_{12}^3 \cdot \{a^1 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^1 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{13}^i \cdot A_{23}^3 \cdot \{a^1 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^1 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{13}^i \cdot A_{13}^3 \cdot \{a^1 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^1 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{13}^i \cdot A_{12}^1 \cdot \{a^3 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{13}^i \cdot A_{23}^1 \cdot \{a^3 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^3 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \\
& A_{13}^i \cdot A_{13}^1 \cdot \{a^3 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& = \\
& A_{12}^i \cdot A_{12}^2 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{12}^i \cdot A_{23}^2 \cdot \{a^1 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^1 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{12}^i \cdot A_{13}^2 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{12}^i \cdot A_{12}^1 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{12}^i \cdot A_{23}^1 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{12}^i \cdot A_{13}^1 \cdot \{a^2 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{23}^i \cdot A_{12}^3 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{23}^i \cdot A_{23}^3 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{23}^i \cdot A_{13}^3 \cdot \{a^2 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{23}^i \cdot A_{12}^2 \cdot \{a^3 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{23}^i \cdot A_{23}^2 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{23}^i \cdot A_{13}^2 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{13}^i \cdot A_{12}^3 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{13}^i \cdot A_{23}^3 \cdot \{a^1 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^1 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& + \\
& A_{13}^i \cdot A_{13}^3 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \\
& A_{13}^i \cdot A_{12}^1 \cdot \{a^3 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1)\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{13}^i \cdot A_{23}^1 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& - \\
& A_{13}^i \cdot A_{13}^1 \cdot \{0\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& = \\
& \{a^1 \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \\
& + \\
& a^2 \cdot b^3 \cdot c^1 \cdot \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \\
& + \\
& a^3 \cdot b^1 \cdot c^2 \cdot \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \\
& - \\
& a^3 \cdot b^2 \cdot c^1 \cdot \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \\
& - \\
& a^2 \cdot b^1 \cdot c^3 \cdot \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \\
& - \\
& a^1 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \} \cdot \mathbf{e}_i \\
& = \\
& \{a^1 \cdot b^2 \cdot c^3 + a^2 \cdot b^3 \cdot c^1 + a^3 \cdot b^1 \cdot c^2 - a^3 \cdot b^2 \cdot c^1 - a^2 \cdot b^1 \cdot c^3 - a^1 \cdot b^3 \cdot c^2\} \\
& \times \\
& \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \cdot \mathbf{e}_i \\
& = \\
& < \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} >_{Id_3} \cdot \{A_{12}^i \cdot A_{23}^2 + A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2 + A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1\} \cdot \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

On constate dès à présent la présence d'un terme indépendant de la matrice déformante et totalement lié au triplé des vecteurs impliqués dans ce calcul.

Concernant la partie vectorielle, le calcul peut se poursuivre avec :

$$\begin{aligned}
& \{A_{12}^1 \cdot A_{23}^2 + A_{12}^1 \cdot A_{13}^1 - A_{23}^1 \cdot A_{13}^3 - A_{23}^1 \cdot A_{12}^2 + A_{13}^1 \cdot A_{23}^3 - A_{13}^1 \cdot A_{12}^1\} \cdot \mathbf{e}_1 \\
& + \\
& \{A_{12}^2 \cdot A_{23}^2 + A_{12}^2 \cdot A_{13}^1 - A_{23}^2 \cdot A_{13}^3 - A_{23}^2 \cdot A_{12}^2 + A_{13}^2 \cdot A_{23}^3 - A_{13}^2 \cdot A_{12}^1\} \cdot \mathbf{e}_2 \\
& + \\
& \{A_{12}^3 \cdot A_{23}^2 + A_{12}^3 \cdot A_{13}^1 - A_{23}^3 \cdot A_{13}^3 - A_{23}^3 \cdot A_{12}^2 + A_{13}^3 \cdot A_{23}^3 - A_{13}^3 \cdot A_{12}^1\} \cdot \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

$$=$$

$$\mathbf{0}$$

Elle peut se synthétiser pour donner :

$$A_{12}^1 \cdot \{-A_{13}^i \cdot \mathbf{e}_i\} + A_{12}^2 \cdot \{-A_{23}^i \cdot \mathbf{e}_i\} + A_{12}^3 \cdot \{\mathbf{0}\}$$

$$+$$

$$A_{23}^1 \cdot \{\mathbf{0}\} + A_{23}^2 \cdot \{A_{12}^i \cdot \mathbf{e}_i\} + A_{23}^3 \cdot \{A_{13}^i \cdot \mathbf{e}_i\}$$

$$+$$

$$A_{13}^1 \cdot \{A_{12}^i \cdot \mathbf{e}_i\} + A_{13}^2 \cdot \{\mathbf{0}\} + A_{13}^3 \cdot \{-A_{23}^i \cdot \mathbf{e}_i\}$$

$$=$$

$$\mathbf{0}$$

Soit le vecteur :

$$|\mathbf{X}\rangle = [A] \cdot |\mathbf{\Omega}\rangle$$

Où $\mathbf{\Omega}$ représente les trois vecteurs de la base canonique de V. Le vecteur $\mathbf{X}$ est un élément de V^3 . Il devient ainsi possible décrire :

$$A_{12}^1 \cdot \{-\mathbf{X}^3\} + A_{12}^2 \cdot \{-\mathbf{X}^2\} + A_{12}^3 \cdot \{\mathbf{0}\}$$

$$+$$

$$A_{23}^1 \cdot \{\mathbf{0}\} + A_{23}^2 \cdot \{\mathbf{X}^1\} + A_{23}^3 \cdot \{\mathbf{X}^3\}$$

$$+$$

$$A_{13}^1 \cdot \{\mathbf{X}^1\} + A_{13}^2 \cdot \{\mathbf{0}\} + A_{13}^3 \cdot \{-\mathbf{X}^2\}$$

$$=$$

$$\mathbf{0}$$

Tout ceci se laisse encore regrouper de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \\ A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{X}^3 & \mathbf{0} & \mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^3 & -\mathbf{X}^2 \end{bmatrix} \right\}^{\oplus} = \mathbf{0}$$

Par convention, l'exposant $\oplus$ indique qu'il s'agit de la somme de tous les éléments présents dans la matrice de $M(3, E(3, \mathbb{C}))$. Cette convention permet de poursuivre avec :

$$[J]\Phi(\mathbf{X}) = [J]\Phi([A] \cdot |\mathbf{\Omega}\rangle) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{X}^3 & -\mathbf{0} & -\mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Un calcul permet de constater que :

$$-[J]^t \cdot [J]\Phi(\mathbf{X})$$

$$\begin{aligned}
&= \\
& - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{X}^3 & -\mathbf{0} & -\mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \\
& \begin{bmatrix} -\mathbf{X}^3 & \mathbf{0} & \mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^3 & -\mathbf{X}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent, à l'issue de ces longs calculs on déduit la formule :

$$\begin{aligned}
&J_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\
&= \\
&< \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} >_{Id_3} \cdot \{ -[A] \cdot [J]^t \cdot [J] \Phi([A] \cdot |\mathbf{\Omega} >) \}^\oplus
\end{aligned}$$

Elle comporte bien deux parties :

1. La première est un produit scalaire impliquant les arguments du triplé qu'on a sous la main ;
2. La seconde est une somme de vecteurs qui dépend des entrées de la matrice déformante $[A]$.

La proposition est démontrée sur V . □

©Thierry PERIAT, 2 septembre 2025.

Références

8 Bibliographie

8.1 Travaux personnels

- [a] The Electromagnetic Duality in a Quaternionic Vacuum ; vixra :2502.0099, 6 pages.
- [b] The Three-generation Problem in Particle Physics ; vixra :2502.0143, 17 pages.
- [c] The (E) Question in a Three-Dimensional Space - Subtitle : Analyzing a Subset of Linear Systems with the Intrinsic Method ; viXra :2503.0200, 32 pages.
- [d] Discussion sur les décompositions des produits vectoriels déformés ; viXra :2405.0054, 40 pages.

8.2 Articles, Cours et Livres

- [01] Chamber-Loir, A. : Introduction aux groupes et algèbres de Lie ; cours de Master 2, Université de Rennes I, (2004-2005).
- [02] Encyclopédie Bordas en 23 volumes ; Caratini, R. : les nombres et l'espace, ©Bordas Editeur 1972.
- [03] Generalized Hartree-Fock theory and the Hubbard model ; arXiv :cond-mat/9312044v1, 10 December 1993.
- [04] Cartan, E. : The theory of spinors ; Dover Books on Mathematics, Copyright by Hermann in Paris ©1966 ; ISBN 0-486-64070-1.
- [05] Bröcker, T. : Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker, zweite, korrigierte Auflage) ; ©2004 Birkhäuser Verlag, Basel, ISBN 3-7643-7144-7, 366 pages.