

Die viskose Kopplung rotierender Körper durch Gezeitenkräfte

-

Ein Vorschlag zur Erweiterung der Newton-Dynamik (END)

Thorsten Hilker

August 2025

Zusammenfassung

Um den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern ist eine Kraft erforderlich. So sorgt die Gravitationskraft dafür, dass die Planeten kontinuierlich ihre elliptischen Bahnen ziehen. In den Formeln von Kepler ist allerdings nicht vorgesehen, dass sich diese Ellipsen mit der Zeit spiralförmig ändern. Doch bei genauen Beobachtungen zeigt sich: Der Mond entfernt sich jährlich um $3.82 \pm 0.07 \text{ cm}$ von der Erde und die Erde entfernt sich jedes Jahr $15 \pm 4 \text{ cm}$ von der Sonne. Dieser Effekt lässt sich durch Gezeitenkräfte erklären, bei denen sich drehende Körper etwas verformen und eine kleine Kraft auf einen benachbarten Körper bewirken. Letztlich entsteht eine spiralförmige Bahn. Die exakte Beschreibung der Verformung der Körper durch gegenseitige Wechselwirkung und die entsprechende Berechnung der resultierenden Gezeitenkräfte ist nicht trivial. In dieser Abhandlung wird eine Formel entwickelt, mit der sich die durch Rotation entstehenden Gezeitenkräfte allgemein aus bekannten Körperdaten berechnen lassen. Für die Paarungen Erde/Mond, Erde/Sonne und Mars/Phobos wird dies exemplarisch basierend auf vorliegenden Parametern nachgerechnet. Die entwickelte Formel legt nahe, dass die Gravitationswirkung zwischen zwei Körpern eine zusätzliche geschwindigkeitsabhängige Komponente enthält, die die Bewegungen der Körper viskos koppelt. Basierend auf dieser Erkenntnis wird der gefundene Mechanismus auf die Bewegung von Galaxien angewendet. Es zeigt sich, dass sich die Rotationskurven der Galaxien ohne Zuhilfenahme von Dunkler Materie erklären ließe, wenn eine geringfügige viskose Kopplung über lange Zeit wirkt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Gezeitenkräfte	2
2.1	Gezeitenkräfte der Ozeane	2
2.2	Erdgezeiten	4
3	Allgemeine Betrachtung	7
3.1	Definition der viskosen Kopplung	7
3.2	Beispiele	8
3.2.1	Beispiel: Erde - Mond	8
3.2.2	Beispiel: Sonne - Erde	9
3.2.3	Zwischenfazit	10
3.2.4	Beispiel: Mars - Phobos	10
3.3	Zusammenfassung der Ergebnisse	12
4	Anwendung auf die Rotationskurven von Galaxien	12
5	Ausblick	15

1 Einleitung

Die Tatsache, dass der Mond sich langsam von der Erde entfernt, hat von Anfang an mein Interesse geweckt. Vielleicht war es Glück, dass die meisten Erklärungen warum dies passiert nicht stimmig waren. Ich machte mich auf den Weg, die wahre Ursache zu ergründen. Vielleicht wiederum zum Glück, bin ich erst spät auf die wahre Ursache gestoßen: Erdgezeiten. Hätte ich diese Erkenntnis früher gehabt, hätte ich mich nicht so tiefgreifend eingearbeitet und eine Formel gefunden, die die Entfernungsänderungen auch bei weiteren Paarungen von Himmelskörpern beschreibt. So mag es sich auf den ersten Blick zunächst einfach nur nützlich erweisen, unabhängig von genauen Kenntnissen zum exakten inneren Aufbau und der Rheologie der Himmelskörper eine Formel zu haben, die die Wirkung der Festkörpergezeiten beschreibt. Beim zweiten Blick offenbart sich jedoch eine Eigenschaft der Wirkungsweise, die das Potential hat, die klassische Newtonsche Physik entscheidend zu erweitern. Wie sich zeigen wird, enthält die Formel einen Anteil, der die Relativgeschwindigkeit sich drehender Körper berücksichtigt.

Zunächst wird in diesem Paper der Status-Quo der Erklärungen nachvollzogen. Basierend auf einem vereinfachten Differentialgleichungssystem wird die Kraft bestimmt, die nötig wäre, um die Bahn des Mondes wie beobachtet zu ändern.

Die von mir entwickelte Formel zur verallgemeinerten Berechnung von Gezeitenkräften rotierender Körper wird danach an den Beispielen Erde-Mond, Sonne-Erde und Mars-Phobos getestet. Wie erwähnt, beinhaltet diese Formel einen Term, der die Relativgeschwindigkeiten der beteiligten Körper berücksichtigt. Wenn sich dieses Konzept bestätigt, dann bietet es auch einen Ansatz, die Rotationskurve von Galaxien ohne dunkle Materie erklären zu können. Das Konzept hierzu wird im zweiten Hauptabschnitt dieser Abhandlung erläutert.

2 Gezeitenkräfte

Beim ersten Blick auf das Newtonsche Gravitationsgesetz erscheint eine kontinuierliche Entfernungszunahme zweier Körper nicht erklärbar.

$$\mathbf{F}_{m_1} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}_{m_2} \quad (1)$$

Das in Gleichung 1 beschriebene Gesetz besagt, dass auf zwei Körper an den Positionen x_i in Abhängigkeit von ihren Massen m_i und Ihrem Abstand $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ eine Kraft F_{mi} wirkt. Die Richtung wird durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ des Abstandsvektors $\mathbf{r}$ bestimmt.

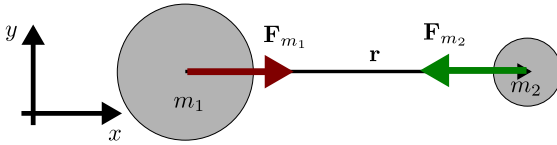


Abbildung 1: Gravitationskraft

Interessiert man sich für die Bahnkurve von m_2 relativ zu m_1 ergibt sich die Differentialgleichung zu

$$\mathbf{F}_{m_2} = m_2 \begin{bmatrix} \ddot{x}_{2,x} \\ \ddot{x}_{2,y} \end{bmatrix} = - \frac{G m_1 m_2}{\sqrt{(x_{2,x}^2 + x_{2,y}^2)}^3} \begin{bmatrix} x_{2,x} \\ x_{2,y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Bei der Lösung des Differentialgleichungssystems für beide Massen ergeben sich in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen elliptische Bahnen um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Dieser wird periodisch umlaufen. Nach einem Umlauf ist der Abstand wieder identisch. Es ergibt sich keine systematische Vergrößerung des Abstandes.

2.1 Gezeitenkräfte der Ozeane

Die gängige Erklärung der Entfernungsänderung des Mondes basiert auf den Gezeitenkräften (vgl. [LEIa]). Damit lässt sich ein Anteil errechnen, der beschleunigend auf den Mond wirkt.

Die Gezeiten werden durch die Gravitation von Sonne und Mond erzeugt. Sie bewirken in einem Wechselspiel von Zentifugal und Gravitationskraft letztlich zwei Wellenberge. Einen auf der Mond zugewandten und einen auf der Mond abgewandten Seite (vgl. [LEIb]). Die Wirkung der Sonne ist analog nur etwa ein Drittel so stark und in der Phase verschoben.

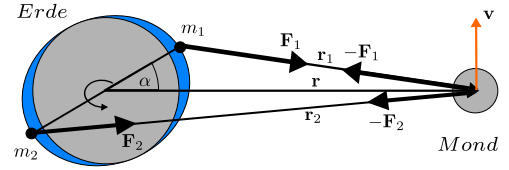


Abbildung 2: Wirkung der Gezeiten. Durch die unterschiedlichen Abstände der Wellenberge zum Mond ergibt sich eine Ungleichheit der Kräfte F_1 und F_2 .

Je nach Stellung von Mond zu Sonne überlagern sich die Wellenberge unterschiedlich stark und es kommt zu sogenannten Spring- und Nip-Tiden. Durch die Reibung der Ozeane an der Erdoberfläche sind die Wellenberge um ca. 10 bis 15 Grad verschoben, wie in Abbildung 2 dargestellt. Durch die unterschiedlichen Positionen der Wellenberge m_1 und m_2 ergeben sich für die Wellenberge unterschiedliche Gravitationskräfte F_1 und F_2 die in Summe auf den Mond wirken.

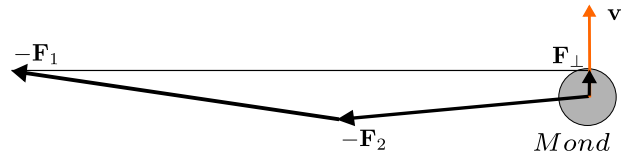


Abbildung 3: Kräfte auf den Mond. Der tangentielle Anteil $F_{\perp}$ hat eine beschleunigende Wirkung, die den Mond in eine höhere Umlaufbahn bringen kann

Interessant für die Beschleunigung des Mondes ist der Anteil $F_{\perp}$ orthogonal zu $\mathbf{r}$ und parallel zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Mondes wie in Abbildung 3 dargestellt.

Für eine quantitative Berechnung der Kräfte lassen sich die Massen der Wellenberge näherungsweise herleiten.

Die Höhe h des Wellenberges wird mit durchschnittlich $0.5m$ angenommen. Ferner wird beobachtet, dass der Gezeitenberg um einen Winkel α von etwa 15 Grad vorausseilt und der Wellenberg auf der abgewandten Seite im Mittel ca. 20 Prozent niedriger ist. Eine weitere Annäherung ist, dass die Erde als kugelförmig und der

Wellenberg als einfacher Ellipsoid angenähert wird. Damit nähere ich die Masse wie folgt an. Die Masse der Wellenberge ergibt sich vereinfacht als Differenz zwischen dem Ellipsoid und der Kugel.

Das Volumen der Kugel berechnet sich zu

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \quad (3)$$

und das Volumen des Ellipsoids mit den Wellenbergen zu

$$V_{Ellipsoid} = \frac{4}{3}\pi R_1^2 \cdot (R_1 + h) \quad (4)$$

R_0 sei der Radius der Erde und h die Höhe des Wellenberges. Das ergibt einen Volumenunterschied von etwa $8.501 \cdot 10^{13} m^3$. Mit einem Gewicht von etwa $1000 kg$ pro m^3 Wasser bestimmen sich die Massen bei Berücksichtigung der unterschiedlichen Höhen der Wellenberge zu

$$m_1 + m_2 = 8.501 \cdot 10^{13} kg \quad (5)$$

$$m_2 = 0.8m_1 \quad (6)$$

$$1.8m_1 = 8.501 \cdot 10^{13} kg \quad (7)$$

Damit sind die Massen zu

$$m_1 = 4.72278 \cdot 10^{13} kg \quad (8)$$

$$m_2 = 3.7782 \cdot 10^{13} kg \quad (9)$$

angenähert.

Mit $\cos(15^\circ) \approx 0.9659$ und $\sin(15^\circ) \approx 0.2588$, dem mittleren Abstand von Erde und Mond $r \approx 384400000m$ und dem Erdradius R_1 von $6371000m$ ergeben sich r_1 und r_2 gemäß Abbildung 2 zu:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 384400 - 0.9659 \cdot 6371 \\ 0.2588 \cdot 6371 \end{bmatrix} km = \begin{bmatrix} 3.78246E8 \\ 1.64894E6 \end{bmatrix} m \quad (10)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 384400 + 0.9659 \cdot 6371 \\ -0.2588 \cdot 6371 \end{bmatrix} km = \begin{bmatrix} 3.90554E8 \\ -1.64894E6 \end{bmatrix} m \quad (11)$$

Die aus den Flutbergen entstehenden Kräfte berechnen sich mit diesen Werten und Formel 1 zu

$$\mathbf{F}_1 = G \frac{m_1 m_{Mond}}{r_1^3} \begin{bmatrix} 3.78E8 \\ 1.649E6 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 1.62E9 \\ 7.06E6 \end{bmatrix} N \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_2 = G \frac{m_2 m_{Mond}}{r_2^3} \begin{bmatrix} 3.91E8 \\ -1.65E6 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 1.21E9 \\ -5.13E6 \end{bmatrix} N \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{Mond} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 2.8335E9 \\ 1.93484E6 \end{bmatrix} N \quad (14)$$

Entsprechend beträgt $F_\perp$ als y-Komponente:

$$F_\perp = F_y = 1.93484E6 N \quad (15)$$

Damit ist $F_\perp$ in Betrag und Richtung bestimmt. Die Wellenberge bewirken eine orthogonale Kraft auf den Mond in Höhe von ca. $1.93E6 Newton$. Auf der Erde entspräche das etwa der Gewichtskraft von fünf großen Lastkraftwagen.

Bei der Berechnung der entstehenden Entfernungsänderung wird angenommen, dass sich der Mond auf einer Kreisbahn mit dem mittleren Abstand $\mathbf{r} = 384400km$ bewege. Während eines Umlaufs steigt der Abstand, wie überhöht in Abbildung 4 skizziert.

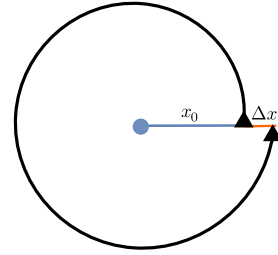


Abbildung 4: Skizze der spiralförmigen Bahn für einen Umlauf

Hierzu wird das in Gleichung 2 beschriebene Differentialgleichungssystem um die Komponente $\mathbf{F}_\perp$ erweitert

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \begin{bmatrix} \ddot{x}_{2,x} \\ \ddot{x}_{2,y} \end{bmatrix} = -\frac{Gm_1m_2}{\sqrt{(x_{2,x}^2 + x_{2,y}^2)^3}} \begin{bmatrix} x_{2,x} \\ x_{2,y} \end{bmatrix} + \frac{F_\perp}{\sqrt{(x_{2,x}^2 + x_{2,y}^2)}} \begin{bmatrix} -x_{2,y} \\ x_{2,x} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Mit dieser Definition ist gewährleistet, dass die Kraft während des Umlaufs der Masse m_2 um m_1 stets orthogonal zum Abstandsvektor $\mathbf{r}$ bleibt.

Zur Lösung dieser Differentialgleichung für die Mondbahn werden die Startbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ gemäß Tabelle 1 auf Seite 9 gewählt:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} r_{mean} \\ 0 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 384400000 \\ 0 \end{bmatrix} m \quad (17)$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{mean} \end{bmatrix} m/s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1022 \end{bmatrix} m/s \quad (18)$$

Es ergibt für den Mond über den Zeitverlauf eines Jahres eine kontinuierliche Entfernungsänderung, wie in Abbildung 5 dargestellt.

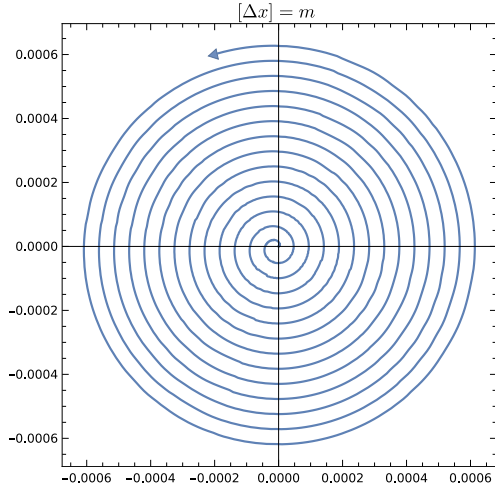


Abbildung 5: Abstandsänderung des Mondes durch Gezeitenkräfte der Ozeane über ein Jahr parametrisch dargestellt. $\Delta x(t)$ entspricht $x(t) - x_0$, d.h. der Anfangsabstand x_0 von 384400km ist herausgerechnet, um die Änderung sichtbar zu machen.

Bei einer Kraft von $F_{\perp} = 1.9E6N$ beträgt die jährliche Änderung nur 0.63mm. Dies ist etwa ein sechstel dessen, was beobachtet wird.

Auch wenn an einigen Stellen Vereinfachungen zur Berechnung vorgenommen wurden, ist diese Abweichung zu groß, um die Gezeitenberge der Ozeane als alleinige Ursache für die Abstandsvergrößerung des Mondes heranzuziehen. Zudem gibt es die zur Veranschaulichung herangezogenen *zwei* Wellenberge in dieser Form so nicht. Hervorgerufen durch geografische Eigenschaften des Meeresbodens mit unterschiedlichen Tiefen bilden sich teils umlaufende Wellenberge aus, wie Abbildung 6 dargestellt.

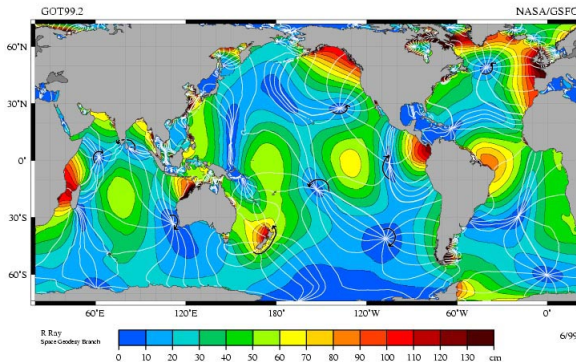


Abbildung 6: Amphidromie - es gibt nicht *die* zwei Gezeiten-Berge. Durch unterschiedliche Wassertiefen und Corioliskräfte bilden sich gebietsweise stehende Wellen und umlaufende Wirbel

2.2 Erdgezeiten

Es bedarf weiterer Ursachen, um die Entfernungsänderung des Mondes erklären zu können.

Mit den in Gleichung 16 beschriebenen Ansatz lässt sich die erforderliche Kraft ermitteln. Die Wirkung der Kraft skaliert über den relativ kurzen Betrachtungszeitraum in etwa linear. So ergibt sich die beobachtete Entfernungsänderung von jährlich $\Delta x = 3.8cm$ wenn man die Kraft $F_{\perp}$ durch geschicktes Probieren zu $120E6N$ wählt (vgl. Abb. 4).

Wie sich in den nachfolgenden Abschnitten zeigt, liegt eine Ursache, die eine Kraft in dieser Größenordnung generieren kann, in den Erdgezeiten.

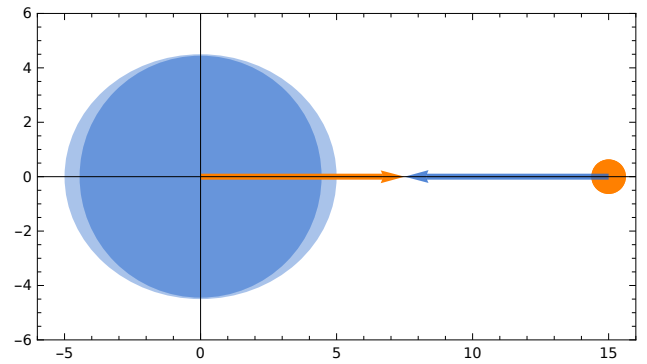


Abbildung 7: Gezeitenkräfte ohne Rotationsbewegung

Es sind nicht nur die Wassermassen der Ozeane, die sich verschieben und zu Wellenbergen formen. Der gesamte Erdkörper wird durch die Gezeitenkräfte verformt.

Die Masse lässt sich nicht vereinfacht im Zentrum der Wellenberge lokalisieren. Der gesamte Erdkörper wird gestreckt. Der hellblaue Bereich in Abbildung 7 markiert die Änderung durch die Verformung. Auch hier bildet sich näherungsweise ein Ellipsoid, der durch das Zusammenwirken von der Gravitationskraft des Mondes und den Zentripetalkräften durch die Drehung um den gemeinsamen Schwerpunkt entsteht. Die Anhebung der Erdoberfläche beträgt im Maximum etwa 40cm.

Die Erdgezeiten sind Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen, die mittels Präzisionspendeln und Präzisionswaagen Änderungen des Gravitationsfeldes hinsichtlich Betrag oder Richtung analysieren.

Hans-Georg Wenzel beschreibt in [WZW97] ab S.59ff die Methodik.

Ein Präzisionspendel, wie beispielsweise am Geowissenschaftlichen Gemeinschaftsobservatorium in Schil-tach, zeigt Auslenkungen von etwa $0,02''$ und Amplitudenschwankungen in der Größenordnung von $1\mu m/s^2$ in Auslenkungsrichtung [Spe25]. Abbildung 8 veranschaulicht das Prinzip. Während sich ein Beobachter auf der

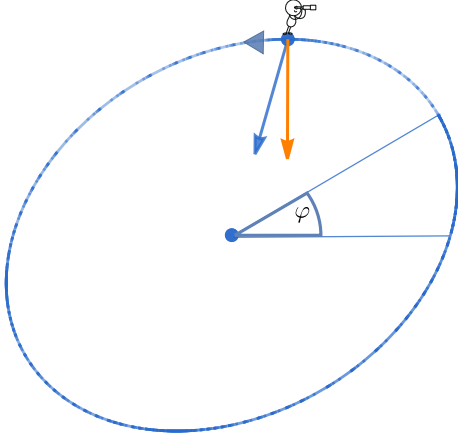


Abbildung 8: Erdgezeiten aus Sicht eines Beobachters auf der Erdoberfläche. Ein Pendel zeigt zum Schwerpunkt (blauer Pfeil), während die Referenz (orangefarbener Pfeil) senkrecht zur Erdoberfläche bleibt. Durch die Änderung des Abstandes zum Schwerpunkt ändern sich während eines Umlaufs der Betrag und die Richtung des beobachteten Gravitationsfeldes.

Erdoberfläche im Laufe eines Tages einmal um die Erde dreht, bleibt die elliptische Verformung aus Sicht des Mondes näherungsweise konstant. Der Beobachter an der Erdoberfläche sieht jedoch Auslenkungen des Pendels (blau) in Bezug auf seine Normale (orange).

Der Wirkmechanismus lässt sich wie folgt beschreiben.

1. Die erste Ursache liegt in der Gravitationskraft $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Sie bewirkt eine Streckung der Körper.
2. Die zweite Ursache liegt in der Rotation der Körper und deren Rheologie. Die viskoelastischen Eigenschaften der Erde bewirken, dass die Verformung der Erde dem Mond stets um einen Winkel φ vorausseilt. Die Massen fließen sozusagen kontinuierlich etwas verzögert zum Mond hin, während die Erde sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω dreht.
3. Die Wirkung, die sich aus den beiden Aspekten ergibt, ist eine Änderung des Gravitationsfeldes, sodass eine Kraft $\mathbf{F}_\perp$ orthogonal zu $\mathbf{r}$ entsteht.

Für die Wirkung der Erdgezeiten auf den Mond ist die Verdrehung des Ellipsoids um den Winkel φ von entscheidender Bedeutung. Durch die Streckung und Verdrehung des Erdkörpers (blau) entsteht die Kraft $\mathbf{F}_\perp$ in y-Richtung. Abbildung 9 veranschaulicht die Situation.

Die Ergebnisse der Messungen in Schiltach zeigen sehr genau die Wirkung anderer Himmelskörper auf die Erde. Mittels Frequenzanalyse lassen sich einzelne Komponenten hinsichtlich der lokalen Wirkung ermitteln. Für diese

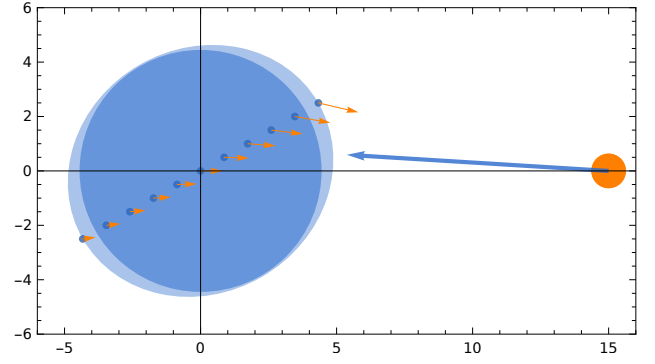


Abbildung 9: Grundprinzip der Erdgezeiten bei Rotationsbewegung. Für eine bessere Übersicht sind nur Massepunkte auf der Hauptachse dargestellt. Tatsächlich bringt jeder Massepunkt des Erdkörpers seinen Beitrag. Durch die Verdrehung des gestreckten Körpers entsteht eine Kraftkomponente in y-Richtung

einzelnen Komponenten gibt es detaillierte Gezeitenkataloge.

Was offen bleibt, ist der Rückschluss der Wirkung des verformten Erdkörpers auf andere Himmelskörper wie den Mond. Diese Wirkung lässt sich über eine Bestimmung des Gravitationsfeldes herleiten.

Ein Weg zur Bestimmung des Gravitationsfeldes $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ erfolgt über die partielle Ableitung des Gravitationspotentials $\Phi(\mathbf{r})$:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) \quad (19)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V G\rho(\mathbf{r})/r \, dV \quad (20)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = - \begin{bmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \partial\Phi/\partial y \\ \partial\Phi/\partial z \end{bmatrix} \quad (21)$$

Die Bestimmung des Gravitationspotentials eines homogenen Ellipsoids ist eine komplexe mathematische Aufgabe. Für die Bestimmung des Gravitationspotentials hinsichtlich der Wirkung auf den Mond kommen zwei weitere erschwerende Punkte hinzu. Zum einen ist die Erde nicht näherungsweise homogen. Die Dichte $\rho(\mathbf{r})$ variiert über r räumlich mindestens in den drei Hauptbereichen fester Erdkern, flüssiger Erdkern und Erdkruste. Zum anderen wird die Verteilung der Dichte $\rho(\mathbf{r})$ auch noch durch die viskoelastische Wechselwirkung mit dem Mond und anderen Himmelskörpern über die Zeit variant.

Für eine näherungsweise Bestätigung der Erdgezeiten als Ursache für die Entfernungänderung des Mondes sollen folgende Näherungen genügen.

Der Erdkörper wird als Ellipsoid E mit den Achsenparametern

$$a = 6378137.4m = b + \Delta a$$

$$b = 6378137m$$

$$c = 6356752m$$

modelliert, wie in Abbildung 10 veranschaulichend dargestellt.

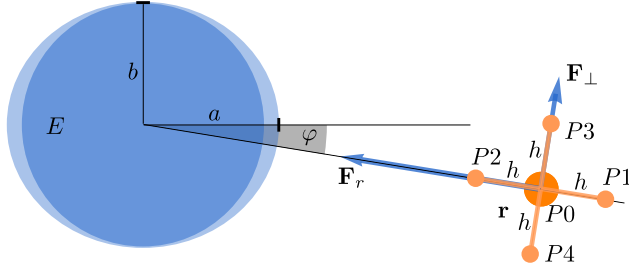


Abbildung 10: Skizze des als Ellipsoid modellierten Erdkörpers nebst Positionen P_i zur Bestimmung des Gravitationsfeldes und der daraus resultierenden Kraft $\mathbf{F}_\perp$ auf den Mond

Mit $\Delta a = a - b = 0.4m$ wird die Streckung der Hauptachse a um $0.4m$ beschrieben. Dieser Wert entspricht den mittleren maximalen Anhebungen der Erdoberfläche wie Analysen von GPS-Signalen ergeben. Der Wert passt zudem zu Beobachtungen der Änderung der Feldstärke der Gravitation von $1\mu ms^{-2}$ durch die Anhebung:

$$g(r) = \frac{GM_{Erde}}{r^2} \quad (22)$$

$$1\mu ms^{-2} \approx g(6378137m) - g(6378137.4m) \quad (23)$$

Die Massendichte ρ wird ebenfalls vereinfachend als konstant innerhalb des Ellipsoids angenommen:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 5510kg/m^3, & (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2) \leq 1 \\ 0kg/m^3, & \text{sonst} \end{cases} \quad (24)$$

so dass sich die Erdmasse zu $5.97 E24 kg$ ergibt.

Eine weitere Verfeinerung ergäbe sich durch die Modellierung der verschiedenen Erdschichten mit detaillierten Dichteverläufen vom Erdkern bis hin zur Erdkruste. Für eine erste Abschätzung erscheint die Vereinfachung $\rho = konst.$ als ausreichend, auch wenn die exakte Modellierung des Geoiden noch beliebig komplex gestaltet werden könnte.

In den nachfolgenden Listings sind konkrete Angaben zur Berechnung der Lösungen mit Mathematica angegeben.

Listing 1 beschreibt die Definition des Erdkörpers als implizite Region in Form eines Ellipsoids.

Listing 1: Beschreibung des Erdkörpers als Ellipsoid durch eine implizite Region

```
1 Erde :=
2 ImplicitRegion[x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 <= 1, {x, y, z}]
```

Listing 2: Berechnung des Potentials an einem Punkt $P(\mathbf{r})$ mit den Koordinaten x, y, z als Integral über den Erdkörper

```
1 Potential[x_, y_, z_] := Integrate[
2 G*rho/Sqrt[(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2],
3 {X, Y, Z} \[Element] Erde ]
```

Listing 3: Definition von Positionen zur Berechnung von $\mathbf{g}$ gemäß Formel 21

```
1 Positions := {
2 (* P0, Zentrum *)
3 {r Cos[phi], r Sin[phi], 0},
4 (* P1: *)
5 {(r + h) Cos[phi], (r + h) Sin[phi], 0},
6 (* P2: *)
7 {(r - h) Cos[phi], (r - h) Sin[phi], 0},
8 (* P3: *)
9 {r Cos[phi] - h Sin[phi], r Sin[phi] + h Cos[phi], 0},
10 (* P4: *)
11 {r Cos[phi] + h Sin[phi], r Sin[phi] - h Cos[phi], 0}
12 }
```

Listing 2 enthält die Formel zur Berechnung des Gravitationspotentials an einem Punkt P .

Die in Listing 3 definierten Positionen werden benötigt, um die partiellen Ableitungen zu berechnen.

Mit dem Abstand $r = 384400000m$ des Mondes von der Erde, $\varphi = 1.7^\circ$, $h = 10^{-6}m$ und den weiteren bereits benannten Parametern lässt sich zunächst das Gravitationspotential gemäß Listing 2 an den Positionen P_i bestimmen:

$$\Phi_{P_0} = 1.036300279846759208226344344684085396E6$$

$$\Phi_{P_1} = 1.036300279846756512334924332825638700E6$$

$$\Phi_{P_2} = 1.036300279846761904117764356556558590E6$$

$$\Phi_{P_3} = 1.036300279846759208226344343072397858E6$$

$$\Phi_{P_4} = 1.036300279846759208226344346288759688E6$$

Das Gravitationsfeld lässt sich nun als partielle Ableitung des Potentials bestimmen:

$$\mathbf{g}_{P_0} = \begin{bmatrix} g_r \\ g_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi_{P_1} - \Phi_{P_2})/(2h) \\ (\Phi_{P_4} - \Phi_{P_3})/(2h) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \begin{bmatrix} 2.677 \cdot 10^{-3} \\ 1.603 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad (26)$$

Bei einer Masse des Mondes von $m_{Mond} = 7.36E22kg$ ergibt sich die gesuchte Kraft $F_\perp$ bei P_0 :

$$\mathbf{F}_{P_0} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\perp \end{bmatrix} = m_{Mond} \cdot \mathbf{g}_{P_0} = \begin{bmatrix} -1.97 \cdot 10^{20} \\ 1.18 \cdot 10^8 \end{bmatrix} N \quad (27)$$

Der Wert von $118 E6 N$ passt gut mit dem gesuchten Wert von $120 E6 N$ überein. Für eine erste Abschätzung soll daher dieses Ergebnis genügen. Es zeigt, dass die Verformungen des Erdkörpers durch die Gezeitenwirkung geeignet sind, um Kräfte in der passenden Größenordnung zu generieren.

Eine genauere Angabe erübrigt sich hier, da es mir nur um eine prinzipielle Abschätzung geht. Die Werte für die Gravitationspotentiale an den Positionen P_i sind nur so präzise angegeben, um ein Ergebnis erhalten zu können. Wären dort nur 26 Nachkommastellen notiert, wäre die Differenz zwischen Φ_{P_3} und Φ_{P_4} identisch Null und die Kraft $F_\perp$ verschwunden.

Die Größe der Kraft $F_\perp$ wird im Wesentlichen durch den Winkel φ und die Streckung Δa beeinflusst.

Die Verformung wird in Realität noch durch lokale Dichte und Festigkeitsschwankungen des Erdkörpers, die Neigung der Drehachse der Erde gegen die Ekliptik und andere Himmelskörper verändert.

Die Einflussgrößen auf die Verformung lassen sich hier auf der Erde mit aufwändigen Messungen ermitteln. Bei anderen Planeten oder Sternen stehen keine Präzensionspendel zur Verfügung, mit denen ein Phasenwinkel φ bestimmt werden könnte.

Daher und wegen des hohen Aufwandes für die Berechnungen habe ich mich gefragt, ob es nicht eine einfachere Formel gibt, die die Wirkung der Gezeitenkräfte mit weniger Rechenaufwand nachbildet.

Nachfolgend möchte ich daher zunächst meinen Ansatz erläutern und anschließend an drei Beispielen testen.

3 Allgemeine Betrachtung

Anhand des auf Seite 3 beschriebenen Wirkmechanismus war der Grundgedanke, dass die langfristige Entfernungsänderung des Mondes etwas mit der Umdrehungsgeschwindigkeit ω der Erde, wie auch mit der Umlaufgeschwindigkeit des Mondes, zu tun haben muss. Desweiteren sollte die Formel auch für die Erklärung anderer Beobachtungen, wie die Entfernungsänderung der Erde bezogen auf die Sonne, geeignet sein.

Angefangen bin ich bei einem Entwurf, der dem Gravitationsgesetz von Newton prinzipiell ähnelt, da auch die Gravitationskraft in dem Wirkmechanismus enthalten ist.

$$\mathbf{F}_{\text{gravitation}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Delta \hat{\mathbf{x}} \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_{\text{viskos}} = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{R_1 r^2} \Delta \mathbf{v} \quad (29)$$

Hierbei ist $\mathcal{G}$ eine noch zu ermittelnde Konstante. Die

Größe R_1 beschreibt den Radius des als kugelförmig angenommenen Körpers mit der Masse m_1 .

3.1 Definition der viskosen Kopplung

Die von mir als *viskos* bezeichnete Kraft entsteht, wenn man zusätzlich zur Betrachtung des Abstands r zweier Körper m_1 und m_2 mit $\mathbf{r} = \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ noch eine Differenzgeschwindigkeit $\Delta \mathbf{v}$ betrachtet. $\Delta \mathbf{v}$ berücksichtigt hierbei auch die Rotationsgeschwindigkeit ω_1 des ersten Körpers:

$$\Delta \mathbf{v} = \underbrace{(2\pi \omega_1 \times \mathbf{r})}_{\text{Rotation}} + \underbrace{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}_{\text{Translation}} \quad (30)$$

In späteren Berechnungen wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die jeweiligen Hauptwerte r_{mean} für r und v_{mean} für v verwendet werden können. D.h. es wird anstelle der elliptischen Bahnen eine gemittelte Kreisbahn betrachtet.

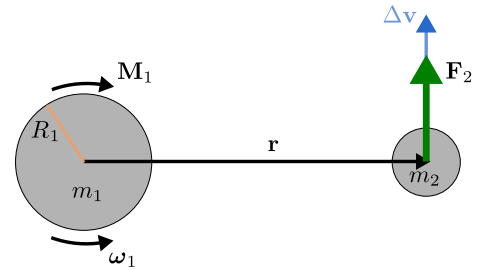


Abbildung 11: Wirkprinzip bei Drehung. Dreht sich m_1 mit einer Winkelgeschwindigkeit von ω_1 , so bewirkt dies eine Kraft $\mathbf{F}_2$ auf die zweite Masse m_2 . Als *reactio* bewirkt $-\mathbf{F}_2$ über den Hebel $\mathbf{r}$ ein Drehmoment $\mathbf{M}_1$ in m_1 gemäß $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times -\mathbf{F}_2$

Abbildung 11 soll das angedachte Wirkprinzip veranschaulichen. Die Drehung der Masse m_1 bewirkt eine Kraft $\mathbf{F}_2$ auf die Masse m_2 . Als Reaktion entsteht ein Gegenmoment $\mathbf{M}_1$ welches wiederum die Drehgeschwindigkeit ω_1 beeinflusst.

Das Gesamtsystem wird dann beschrieben durch die Differentialgleichung

$$m_2 \begin{bmatrix} \ddot{x}_{2,x} \\ \ddot{x}_{2,y} \end{bmatrix} = - \frac{G m_1 m_2}{\sqrt{(x_{2,x}^2 + x_{2,y}^2)}^3} \begin{bmatrix} x_{2,x} \\ x_{2,y} \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{\text{viskos}} \quad (31)$$

Aus der Definition der Kraft lässt sich entsprechend eine Felddarstellung herleiten. Das Feld $\mathbf{f}_{\text{viskos}}(\mathbf{r})$ zu einer Masse m_1 an einem Punkt im Abstand $\mathbf{r}$ ergibt sich aus $\mathbf{F}_{\text{viskos}}$ dividiert durch m_2 zu

$$\mathbf{f}_{\text{viskos}}(\mathbf{r}) = \mathcal{G} \frac{m_1}{R_1 r^2} \Delta \mathbf{v} \quad (32)$$

Zur Veranschaulichung werden die einzelnen Komponenten von $\Delta \mathbf{v}$ nachfolgend separat dargestellt. Abbildung 12 stellt skizzenhaft das Feld eines sich drehenden Körpers ohne Translationsbewegung dar. Ein sich radial nähernder zweiter Körper würde hierdurch tendenziell um den Körper herumgelenkt.

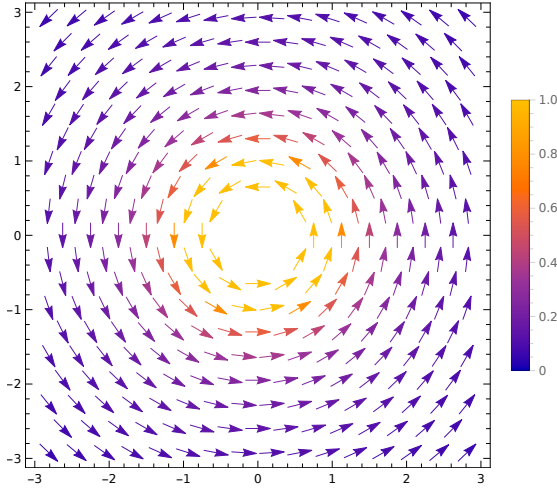


Abbildung 12: Skizze des Feldes $\mathbf{f}_{viskos}$ bei Rotation ($\omega_1 > 0$ und $v_1 - v_2 = 0$).

Anders verhält es sich, wenn sich der Körper nicht dreht, sondern eine reine Translationsbewegung stattfindet. Abbildung 13 stellt das Feld $\mathbf{f}_{viskos}$ in diesem Falle dar. Ein in der Nähe befindlicher Körper würde tendenziell mitgerissen.

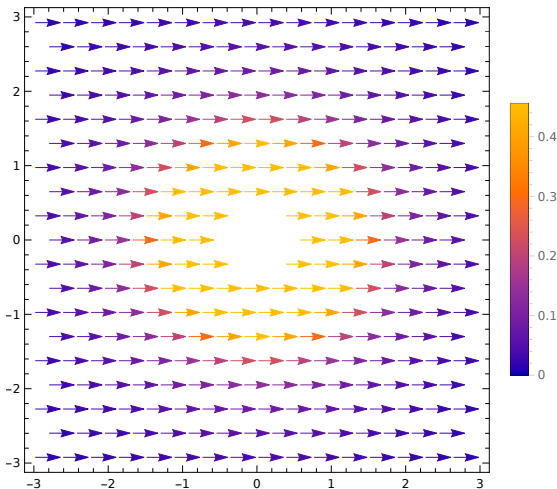


Abbildung 13: Skizze des Feldes $\mathbf{f}_{viskos}$ bei Translation ($v_1 > v_2$ und $\omega_1 = 0$).

Real wird es diese puren Situationen allerdings nicht geben. Die Zustände ändern sich durch die Wechselwirkung über Kraft und Moment kontinuierlich. Im ersten

Fall bewirkt die Kraft eine Änderung der Translationsbewegung des zweiten Körpers. Im zweiten Fall bewirkt die Translation von m_2 ein Drehmoment auf m_1 und somit eine Drehbeschleunigung.

3.2 Beispiele

Ich habe bisher in Summe drei Beispiele identifiziert, bei denen eine Entfernungsänderung zwischen Himmelskörpern hinreichend genau angegeben ist. Desweiteren sind auch die restlichen Parameter hinreichend genau vorhanden, um die von mir gefundene Formel weiter zu verifizieren. Es wird wieder das bereits in Formel 16 beschriebene System betrachtet:

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \begin{bmatrix} \ddot{x}_{2,x} \\ \ddot{x}_{2,y} \end{bmatrix} = - \frac{Gm_1m_2}{\sqrt{(x_{2,x}^2 + x_{2,y}^2)^3}} \begin{bmatrix} x_{2,x} \\ x_{2,y} \end{bmatrix} + \frac{F_{\perp}}{\sqrt{(x_{2,x}^2 + x_{2,y}^2)}} \begin{bmatrix} -x_{2,y} \\ x_{2,x} \end{bmatrix}$$

Bei einer senkrecht zum Abstand wirkenden Kraft $F_{\perp}$ stellt sich eine Abstandsänderung Δx ein, wie in Abbildung 4 auf Seite 3 dargestellt.

Für die nachfolgenden Beispiele gab es in den Fact-Sheets der NASA ([NAS]) hinreichend Daten, um die Erweiterungsformel testen zu können. Für eine Bestätigung des Ansatzes wird ermittelt, welche Kraft $F_{\perp}$ erforderlich ist, um die beobachtete jährliche Entfernungsänderung innerhalb der Toleranzgrenzen zu bewirken.

Dazu wird jeweils betrachtet, welcher Wert von $\mathcal{G}$ erforderlich ist, damit $\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F}_{viskos}$ gilt:

$$\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F}_{viskos} = \mathcal{G} \frac{m_1m_2}{R_1r^2} \Delta \mathbf{v} \quad (33)$$

Durch Variation der ermittelten Kraft $F_{\perp}$ lässt sich die Entfernungsänderung auf die Grenzen des Toleranzbandes einstellen und so auch ein Toleranzband für $\mathcal{G}$ ermitteln.

Für $\mathcal{G}$ ergibt sich dann über den Toleranzbereich der Entfernungsänderung ein entsprechender Wertebereich.

Die verwendeten Werte für die ersten beiden Beispiele mit Sonne, Erde und Mond sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Die Werte für die Parung Mars-Phobos sind Tabelle 2 auf Seite 11 zu entnehmen.

3.2.1 Beispiel: Erde - Mond

Die Beobachtungsdaten liefern eine jährliche Abstandszunahme Δx von $3.82 \pm 0.07 \text{ cm}$.

Nach den ersten Versuchen aus dem vorherigen Abschnitt zu den Erdzeiten lässt sich die erforderliche Kraft $F_{\perp}$ zu etwa $1.20 \text{ E}8 \text{ N}$ ermitteln.

Parameter	Erde	Mond	Sonne
Masse m [$10^{24}kg$]	5.9724	0.07346	1988500
mittlerer Radius R_1 [km]	6371	1737	695700
Siderische Rotationsperiode [hrs]	23.9345	655.72	609.12
Winkelgeschwindigkeit ω [$10^{-5}/s$]	1.1606	0.0423	0.0456
Neigung ω gegen Ekliptik [$^\circ$]	23.44	1.542	7
mittlere Geschwindigkeit v_{mean} [km/s]	29.78	1.022	n.a.
mittlere Entfernung r_{mean} [10^9m]	149.598	0.3844	n.a.
Entfernungsrate Δx [m/a]	0.15	0.0382	n.a.

Tabelle 1: Parameter zur Bestimmung von $\mathcal{G}$ bei der Entfernungsänderung Erde-Mond sowie Erde-Sonne. Aus "Planetary fact sheets" der NASA:[NAS]

Nach einem Jahr und etwa 13 Umläufen ändert sich der Abstand, wie in Abbildung 14 dargestellt. Im Gegensatz zu dem in Abbildung 5 auf Seite 4 ist hier die Abstandsänderung den Beobachtungen entsprechend.

Folgende Vereinfachungen gehen in die Bestimmung der Konstanten $\mathcal{G}$ ein:

- Es werden keine Bahnstörungen berücksichtigt.
- Der Erdkörper wird nicht als Ellipsoid sondern als Kugel mit dem mittleren Radius R_1 betrachtet.
- Die Bahn des Mondes wird durch die mittlere Entfernung r_{mean} sowie durch die mittlere Bahngeschwindigkeit v_{mean} beschrieben. So wird letztlich die Ellipsenbahn durch eine Kreisbahn angenähert.
- Die Bahnneigung des Mondes gegenüber der Drehachse der Erde beträgt vereinfachend konstant 23.44° . Die zusätzliche Schwankung von 5.15° um diesen Wert durch die Bahnneigung des Mondes zur Ekliptik wird herausgemittelt.
- Das rückwirkende Moment M_1 , das langfristig zu einer Verlangsamung der Drehgeschwindigkeit der Erde führt wird hier nicht berücksichtigt. Für den Zeitraum eines Jahres wird ω als konstant angenommen.

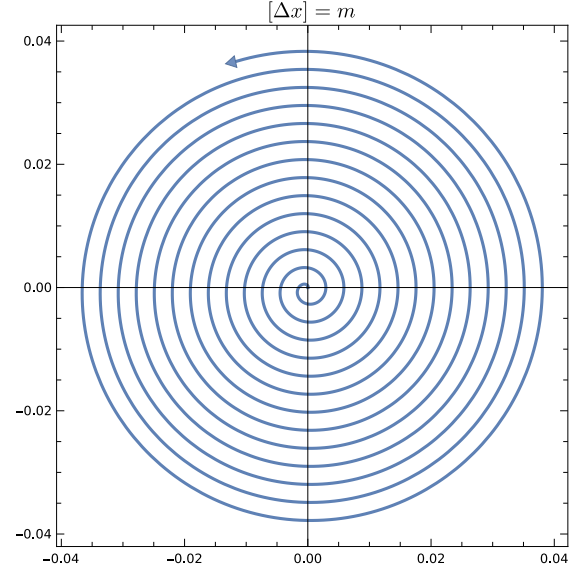


Abbildung 14: Abstandsänderung des Mondes während der ca. dreizehn Umläufe innerhalb eines Jahres parametrisch dargestellt. $\Delta x(t)$ entspricht $x(t) - x_0$, damit die Abstandsänderung erkennbar wird

Für das ω aus Abbildung 11 ergibt sich durch die Neigung zur Bahnebene des Mondes über ein Jahr gemittelt ein effektives ω^* zu

$$\omega_1^* = \omega_1 \cdot \cos(23.44^\circ)$$

Entsprechend beträgt Δv dann

$$\begin{aligned} \Delta v &= (2\pi\omega_1^* \cdot r_{mean}) + (0 - v_{2,mean}) \\ &= (2 \cdot \pi \cdot 0.917 \cdot 1.16 \cdot 10^{-5} \cdot 384400 - 1.002) \frac{km}{s} \\ &= 79.8 \frac{km}{s} \end{aligned}$$

Mit den weiteren Parametern m_1, m_2, R_1 lässt sich die Konstante $\mathcal{G}$ bestimmen, um die Kraft von $1.2E8 N$ zu erhalten, die die gewünschte Entfernungsänderung bewirkt.

Über den Toleranzbereich von Δx

$$\Delta x \in [0.0375m, ..., 0.0392m]$$

ergibt sich so ein möglicher Wertebereich zur Abschätzung von $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \in \left[0.982 \cdot 10^{-20} \frac{m^3}{kg s}, ..., 1.027 \cdot 10^{-20} \frac{m^3}{kg s} \right]$$

3.2.2 Beispiel: Sonne - Erde

Die Beobachtungsdaten für dieses Beispiel liefern eine jährliche Abstands Zunahme der Erde zur Sonne von $15 \pm 4cm$ [Miu+09].

Löst man das bereits vorher benutzte DGL-System aus Formel 16 mit den Parametern gemäß Tabelle 1, so ergibt sich mit etwas Probieren eine Kraft von $3.58E9\text{ N}$, bei der sich eine Entfernungsänderung von 0.15m einstellt (vgl. Abbildung 15).

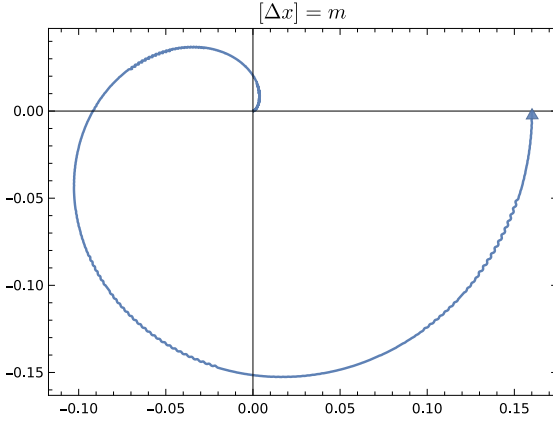


Abbildung 15: Abstandsänderung der Erde zur Sonne über ein Jahr parametrisch dargestellt. $\Delta x(t)$ entspricht $x(t) - x_0$, damit die Abstandsänderung erkennbar wird.

Über den Toleranzbereich von Δx

$$\Delta x \in [0.11\text{m}, \dots, 0.19\text{m}]$$

ergibt sich mit den Rechenschritten wie im vorherigen Beispiel ein größerer Wertebereich zur Abschätzung von $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \in \left[0.68 \cdot 10^{-20} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}}, \dots, 1.175 \cdot 10^{-20} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}} \right]$$

3.2.3 Zwischenfazit

Wenn man die Ursache betrachtet, ergibt sich ein eigentlich überraschendes Bild. Auf Grund des stark unterschiedlichen Aufbaus der Sonne (Gasriese) und der Erde (Gesteinsplanet) war eigentlich nicht zu erwarten, dass sich die Wirkung der viskoelastischen Verformung durch Gezeitenkräfte durch eine verhältnismäßig einfache Formel ausdrücken lässt.

Auch wenn sich auf Grund der vorhandenen Toleranzen bei den Entfernungsänderungen die Konstante $\mathcal{G}$ nur relativ ungenau bestimmen lässt: Für $\mathcal{G} \approx 10^{-20}$ findet sich ein Wert, bei dem die Formel passende Kräfte liefert.

Dass eine gewisse Abhängigkeit von der Rheologie des sich drehenden Himmelskörpers vorhanden ist - und somit auch ein größerer Einfluss des Aufbaus - zeigt das nächste Beispiel.

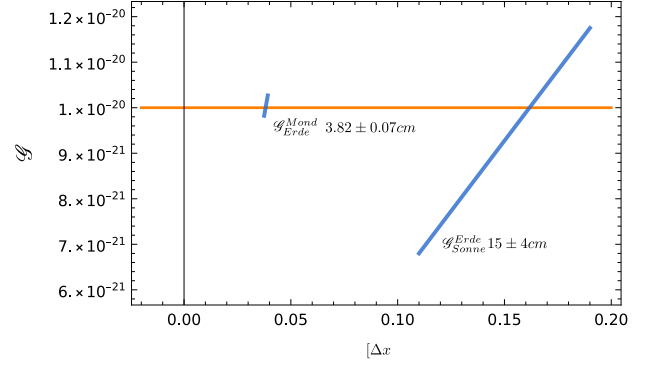


Abbildung 16: Mögliche Wertebereiche von $\mathcal{G}$. Bei einem Wert um $\mathcal{G} \approx 10^{-20}$ finden sich Kräfte auf die beteiligten Himmelskörper, die je eine Abstandsänderung innerhalb der Beobachtungstoleranzen bewirken.

3.2.4 Beispiel: Mars - Phobos

Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen ist hier die relative Bahngeschwindigkeit höher als die Umdrehungsgeschwindigkeit. Erwartungsgemäß wirkt eine Kraft entgegengesetzt zur Richtung der Geschwindigkeit und der Abstand zwischen Mars und Phobos nimmt kontinuierlich ab.

Die Beobachtungsdaten liefern eine jährliche Abstandsabnahme von 1.8cm [EL07].

Ein Umlauf von Phobos dauert lediglich $7\text{h}39\text{m}12\text{s}$. Das entspricht in etwa 1145 Umläufen pro Jahr.

Das System aus Gleichung 16 zeigt bei einer Kraft $\mathbf{F}_\perp = -718\text{ N}$ die gewünschte jährliche Entfernungsänderung von -0.018m .

In Abbildung 17 ist zur besseren Übersichtlichkeit nur ein auf ein Jahr skaliertes Umlauf dargestellt.

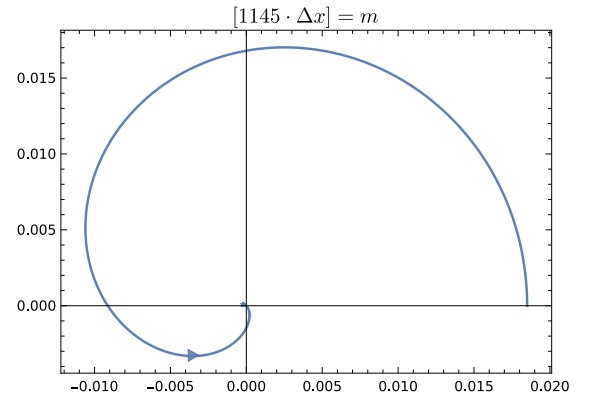


Abbildung 17: Abstandsabnahme des Marsmondes Phobos über einen Umlauf hochgerechnet auf die 1145 Umläufe eines Jahres in parametrischer Darstellung. $\Delta x(t)$ entspricht $(x(t) - x_0 + 0.018)$

Die Parameter für die in diesem Beispiel betrachtete Paarung sind in Tabelle 2 angegeben.

Parameter	Mars	Phobos
Masse m [kg]	$6.4169 \cdot 10^{23}$	$10.6 \cdot 10^{15}$
mittlerer Radius R_1 [km]	3389.5	13
Siderische Rotationsperiode [hrs]	24.6229	0.31891
Winkelgeschwindigkeit ω [$10^{-5}/s$]	1.128	87.102
Neigung ω gegen Ekliptik [°]	25.19	1.08
mittlere Geschwindigkeit v_{mean} [km/s]	24.08	2.139
mittlere Entfernung r_{mean} [km]	n.a.	9378
Entfernungsrate $\Delta \mathbf{x}$ [m/a]	n.a.	-0.018

Tabelle 2: Parameter zur Bestimmung von $\mathcal{G}$ bei der Entfernungsänderung Mars-Phobos. Aus “*Planetary fact sheets*“ der NASA:[NAS]

Es ist keine Korrektur der Drehgeschwindigkeit ω erforderlich, da die Bahn von Phobos in der Dreh-Ebene von Mars liegt.

Die Werte, die sich für $\mathcal{G}$ ergeben sind höher als in den vorherigen Beispielen. Für Entfernungsänderungen von $\Delta x \in [-0.019, \dots, -0.017] m$ ist ein $\mathcal{G} \in [1.93, \dots, 2.17] \frac{m^3}{kg s}$ erforderlich.

Auch wenn der Wert für $\mathcal{G}$ für die Paarung Mars-Phobos nicht um Größenordnungen abweicht, ist eine weitere Betrachtung möglicher Ursachen angebracht.

Hier kommen aufgrund des Wirkmechanismus zwei naheliegende Möglichkeiten in Betracht:

1. Die Rheologie des Körpers ist durch einen passenden Rheologiefaktor zu berücksichtigen.
2. Die Gestalt des Feldes ist im Nahbereich anders und es ist eine Nahfeldkorrektur zu berücksichtigen.

Mit den vorliegenden Daten wird hier keine abschließende Klärung der Gültigkeit möglich sein. Dennoch seien beide Ansätze kurz dargestellt.

Rheologiefaktor In [Bre] wird der Mars aufgrund der niedrigeren Temperaturen als deutlich viskoser als die Erde beschrieben. Es wäre also naheliegend, dass sich hier ein anderer Phasenversatz φ einstellt.

Wegen des relevanten Einflusses der Rheologie der Körper erscheint es grundsätzlich legitim einen Rheologiefaktor μ_r zu definieren.

$$\mu_r = \begin{cases} 0, & \text{vollkommen starrer Himmelskörper} \\ 1, & \text{bei Erde/Mond und Sonne/Erde} \\ 2, & \text{bei Mars/Phobos} \end{cases}$$

Für die Beispiele ergibt sich mit diesen Werten ein konsistentes $\mathcal{G}$ mit einem Wert um $1.0 \cdot 10^{-20} \frac{m^3}{kg s}$.

Die Formel für die viskose Kraft sähe mit dieser Ergänzung wie folgt aus:

$$\mathbf{F}_{\text{viskos}} = \mu_r \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{R_1 r^2} \Delta \mathbf{v} \quad (34)$$

Nahfeldkorrektur Bei unterschiedlichen Quellen gibt es beim Magnetfeld grundsätzlich auch mögliche Unterschiede im Nahfeld, selbst wenn das Fernfeld der verschiedenen Quellen gleich ist. Abbildung 18 zeigt hier eine mögliche Analogie.

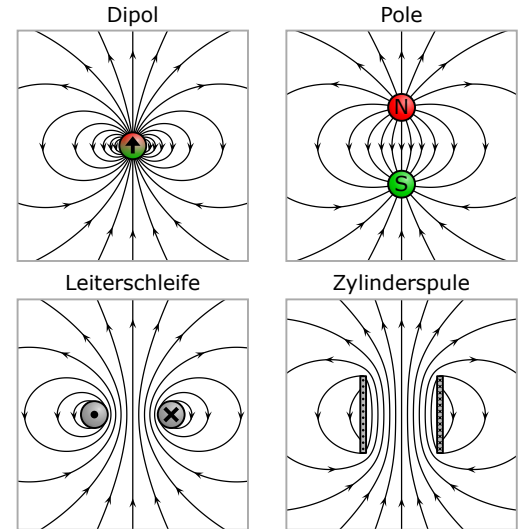


Abbildung 18: Analogie zum Magnetfeld. Unterschiedliche Nahfelder bei gleichem Fernfeld (vgl. [Gee], [Wika])

Auch ohne weitere Kenntnis der genauen Feldgeometrie im Nahfeld ließe sich ein Korrekturfaktor κ in Abhängigkeit von r_{mean} und R_1 definieren, der die idealisierten Darstellungen in den Abbildungen 12 und 13 der Realität annähert.

Gesucht ist eine Formel für den Korrekturfaktor, damit dieser bei $r_{mean} \gg R_1$ gegen 1 strebt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \kappa(r_{mean}, R_1) = 1$$

und in den Beispielen zu einem konsistenten Wert von $\mathcal{G}$ führt. Exemplarisch seien hier drei Möglichkeiten angeführt, die diese Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= ((r_{mean} + 2R_1)/(r_{mean} + R_1))^3 \\ \kappa_2 &= (r_{mean} + R_1)/(r_{mean} - R_1) \\ \kappa_3 &= ((r_{mean} + R_1)/(r_{mean}))^2\end{aligned}$$

Die sich für die Beispiele ergebenden Korrekturfaktoren sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

Faktor	Sonne	Erde	Mars
κ_1	1.014	1.0497	2.02
κ_2	1.0093	1.0337	2.13
κ_3	1.0093	1.0334	1.85

Tabelle 3: Werte der vorgeschlagenen κ_i für die Systeme aus den Beispielen

Entscheidend für große Distanzen ist das Fernfeld. Dieses ist dann auch relevanter für Betrachtungen im galaktischen Maßstab. Desweiteren wäre der Einfluss der Zentralgestirne für die Wirkung außerhalb der Sonnensysteme dominant.

Welche Korrekturfunktion $\kappa(r_{mean}, R_1)$ aus den genannten Beispielen letztlich relevant ist, oder ob noch ein anderer Zusammenhang gefunden werden müsste, lässt sich anhand der wenigen vorliegenden Beispiele nicht bestimmen.

Die Formel für die viskose Kraft wäre bei Bestätigung eines Nahfeldeinflusses:

$$\mathbf{F}_{viskos} = \kappa \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{R_1 r^2} \Delta \mathbf{v} \quad (35)$$

3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Allen Beispielen ist gemein, dass sich die Wechselwirkung der Körper als viskose Kraft darstellen lässt.

Es bildet sich eine Wechselwirkung. Diese lässt sich als Funktion der Differenzgeschwindigkeit darstellen.

Für einen ersten Schritt in Richtung einer grundsätzlichen Erweiterung der Bewegungsgleichungen betrachte ich es als unerheblich, ob ein κ für eine Nahfeldnäherung oder ein Kategoriefaktor μ_r für unterschiedliche Eigenschaften bezüglich der Rheologie erforderlich ist.

Das grundsätzliche Konzept zur Abbildung der Gezeitenkräfte durch eine einfache Formel erscheint vielversprechend, um die Wechselwirkung einer rotierenden, viskoelastischen Masseansammlung mit anderen Massenkörpern abzuschätzen.

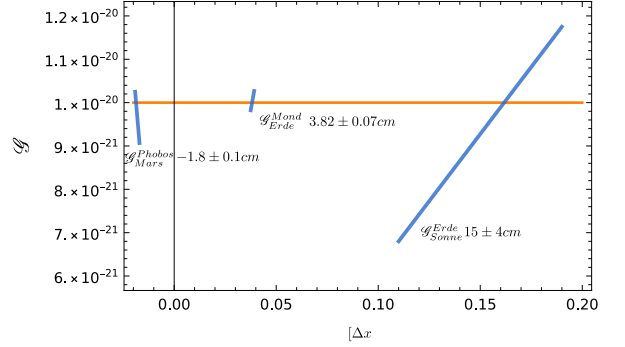


Abbildung 19: Mögliche Wertebereiche von $\mathcal{G}$ unter Berücksichtigung von μ_r . Für $\mathcal{G} = 10^{-20} \frac{m^3}{kg s}$ finden sich Kräfte auf die beteiligten Himmelskörper, die je eine Abstandsänderung innerhalb der Beobachtungstoleranzen bewirken.

Wie in Abbildung 19 dargestellt, ergeben sich relativ engbandige Toleranzbereiche für eine Konstante $\mathcal{G}$.

Mit all den beschriebenen Ungenauigkeiten würde ich folgenden ersten vorläufigen Wert für $\mathcal{G}$ angeben:

$$\mathcal{G} \approx 10^{-20} \frac{m^3}{kg s} \quad (36)$$

Das lässt sich auch als Vielfaches von G/c ausdrücken:

$$\mathcal{G} \approx \frac{4}{9\pi^2} \frac{G}{c} \quad (37)$$

Das Wichtigste bis hierhin ist, dass sich überhaupt ein konsistenter Wert für $\mathcal{G}$ ergibt. Es ist insoweit gelungen, mein Modell an den Beispielen zu bestätigen. Das heißt natürlich nicht, dass das Modell schon zu 100% vollständig ist, was sich insbesondere an der Nahfeldvariation bzw. der Einführung eines Rheologiefaktors bei Phobos zeigt. Für eine erste Bestätigung des Grundkonzepts reicht es mir dennoch.

Wenn sich dieser Ansatz im Rahmen weiterer Analysen bestätigt, dann kann das weitreichenden Einfluss auf das Verständnis unseres Universums haben.

4 Anwendung auf die Rotationskurven von Galaxien

Die Rotationskurve von Galaxien ist aktuell nur durch die Hinzunahme von Dunkler Materie erklärbar. Die Geschwindigkeit in den Randbereichen ist viel zu hoch.

Die Dunkle Materie wurde bisher jedoch noch nirgends nachgewiesen. Trotz intensiver Suche ist bisher kein Nachweis der tatsächlichen Existenz gelungen. Ich fand es daher spannend herauszufinden, ob es mit meinem Ansatz prinzipiell möglich ist, diese Eigenschaft der Galaxien zu erklären.

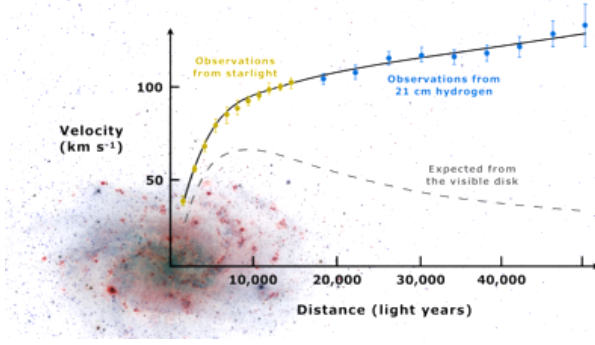


Abbildung 20: Rotationskurve von Messier 33, (zur besseren Lesbarkeit invertierte Version von Mario De Leo, License CC BY-SA 4.0 Wikimedia Commons)

Abbildung 20 zeigt schematisch den Geschwindigkeitsverlauf vom Inneren bis zum Rand. Die Galaxie M33 ist hier ein typisches Beispiel. Ähnliche Geschwindigkeitsverläufe zeigen sich auch bei anderen Galaxien. Die Beobachtung zeigt in den Randbereichen der Galaxie höhere Geschwindigkeiten, als aus den klassischen Modellen erwartet wird.

Aus dieser Beobachtung stammt die Theorie, dass Dunkle Materie vorhanden sein muss, um diesen Geschwindigkeitsverlauf erklären zu können. [Wikb].

Neben den äußeren Bereichen gibt es auch im inneren Bereich der Galaxien ein interessantes Verhalten. Die Geschwindigkeit v steigt proportional mit r . Ein solches Verhalten erwartet man eher von einem rotierenden Festkörper. Bei gegebener konstanter Winkelgeschwindigkeit ω nimmt die Geschwindigkeit eines Massepunktes des Festkörpers linear mit dem Abstand zu gemäß $v(r) = \omega \cdot r$.

Im Folgenden betrachte ich einen Ansatz, mit dem der Geschwindigkeitsverlauf der Galaxien ohne Dunkle Materie erklärbar wäre. An Stelle der Dunklen Materie setze ich die viskose Wechselwirkung, die sich im vorherigen Abschnitt als verallgemeinerte Darstellung der Gezeitenkräfte rotierender Körper ergeben hat.

Eine Beispielgalaxie wird hierzu als ein System aus Ringen variabler Dichte vereinfacht. Die einzelnen Ringe sind in Abbildung 21 dargestellt.

Der Dichteverlauf $\rho(r)$ wird durch

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r^2} \quad (38)$$

angenähert und ergibt eine Massenverteilung gemäß

$$m(r) = \int_0^r \rho(r) dV. \quad (39)$$

Für jeden Ring i mit einem inneren Radius r_i und einen äußeren Radius r_{i+1} erhalten wir eine Masse m_i

$$m_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \rho(r) dV \quad (40)$$

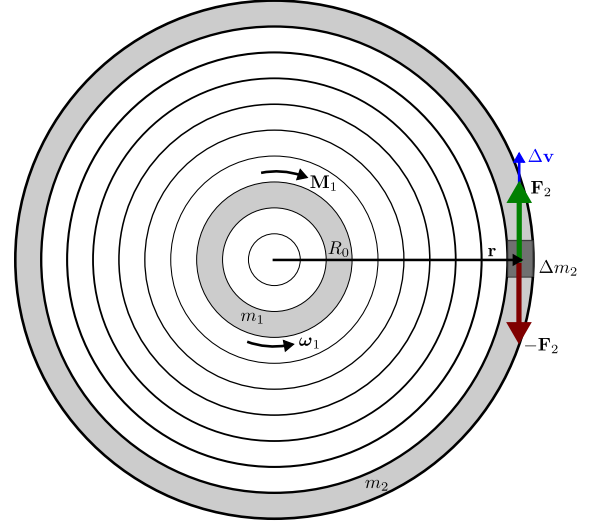


Abbildung 21: Galaxie angenähert durch Ringe mit der Höhe h und $r_{i+1} - r_i = \text{const}$. Der zugehörige Dichteverlauf der Ringe ist in Abbildung 22 dargestellt

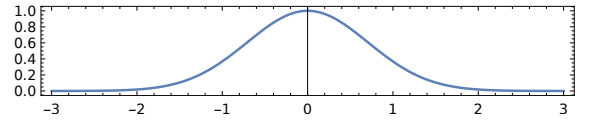


Abbildung 22: Skizze des angenäherten Dichteverlaufs $\rho(r)$ mit der höchsten Dichte im Zentrum der Galaxie

mit einem Volumen V_i

$$V_i = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2)h \quad (41)$$

Setzt man $\rho_i = m_i/V_i$ als mittlere Dichte eines Ringes, ergibt sich das Trägheitsmoment Θ_i für jeden Ring i zu

$$\Theta_i = \frac{1}{2} \rho_i \pi h (r_{i+1}^2 - r_i^2) (r_{i+1}^2 + r_i^2) \quad (42)$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta \mathbf{v}$ zweier Scheiben beträgt

$$\Delta \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} - \mathbf{v}_2 \quad (43)$$

und die Geschwindigkeit v_2 eines Segments Δm_2 (vgl. Abbildung 21) ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}. \quad (44)$$

Die einzelnen Kräfte aller Elemente des zweiten Rings integrieren sich zu

$$\mathbf{F}_2 = \mathcal{G} \frac{1}{R_0} \frac{m_1 m_2}{r_2^2} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_2 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2), \quad (45)$$

mit

$$R_0 = |\mathbf{r}_1|. \quad (46)$$

Eine Vereinfachung des Kreuzproduktes ergibt sich, wenn man nur die Ebene $\omega \perp r$ betrachtet und den räumlichen Aspekt vernachlässigt:

$$F_2 = \mathcal{G} \frac{m_1}{r_1} \frac{m_2}{r_2} (\omega_1 - \omega_2). \quad (47)$$

Das Drehmoment M wird entsprechend berechnet durch

$$M_1 = -F_2 \cdot r_2 \quad (48)$$

womit sich dann die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1(t_1) = \omega_1(t_0) + \dot{\omega}_1 \cdot \Delta t$ bestimmen lassen.

Listing 4: Simulationsschritt mit Javascript

```

1 // Werte initialisieren
2 for (var i = 0; i < DiskArray.length-1; i++)
3 {
4   DiskArray[i].M = 0;
5 }
6 // Kraft und Moment zwischen allen Ringelementen (DiskArray[i])
  bestimmen
7 for (var i = 0; i < DiskArray.length-1; i++)
8 {
9   for (var j = i+1; j < DiskArray.length; j++)
10  {
11    var ri = DiskArray[i].r ;
12    var rj = DiskArray[j].r ;
13    var wi = DiskArray[i].w ;
14    var wj = DiskArray[j].w ;
15    var F = Gm_konst*m[i]*m[j]*(rj*wi - rj*wj)/ri/rj;
16    DiskArray[i].M -= F * rj;
17    DiskArray[j].M += F * rj;
18  }
19 }
20 // je Ringelement aktualisieren
21 for (var i = 0; i < DiskArray.length; i++)
22 {
23   // Winkelbeschleunigung bestimmen
24   DiskArray[i].wDot = DiskArray[i].M / Theta[i] ;
25   // Winkelgeschwindigkeit integrieren
26   DiskArray[i].w += DiskArray[i].wDot * deltaT ;
27   w[i] = DiskArray[i].w[2] ;
28   v[i] = w[i] * r[i+1] ;
29 }

```

Simuliert man dieses Ringsystem numerisch wie in Listing 4 dargestellt, ergibt sich ein interessantes Bild.

Abbildung 23 zeigt den Zustand des Ringsystems bezüglich $v_i = (\omega_i \cdot r_i)$ zu verschiedenen Zeitpunkten.

Nach wenigen Simulationsschritten hat sich eine initiale Drehbewegung des innersten Rings über die viskose Kopplung auf die ganze Scheibe verteilt.

Der im Bild mit *early* gekennzeichnete Bereich zeigt einen Verlauf von $v(r)$, wie er eigentlich erwartet wird.

Mit zunehmender Simulationsdauer verschleifen sich die Bewegungen der Ringe zunehmend zu einem $v(r)$ im Bereich von *later* wie es regelmäßig bei Galaxien beobachtet wird [Sof+99].

Nachdem sich die Ringe weitestgehend angeglichen haben, zeigt sich im inneren Bereich eine Geschwindigkeit $v \propto r$ wie bei einem drehenden Festkörper und annähernd $v \approx \text{const}$ am Rande der Galaxie.

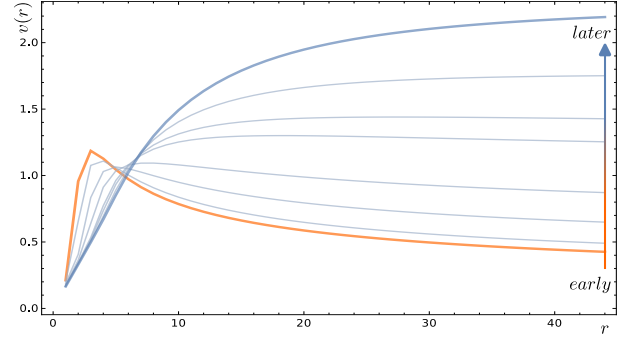


Abbildung 23: Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils $v(r)$ der rotierenden Ringe über lange Zeit. Eine initiale Drehgeschwindigkeit ω_0 im Zentrum der Scheibe verteilt sich im Laufe der Zeit, wenn die Geschwindigkeiten der Ringe viskos gekoppelt werden.

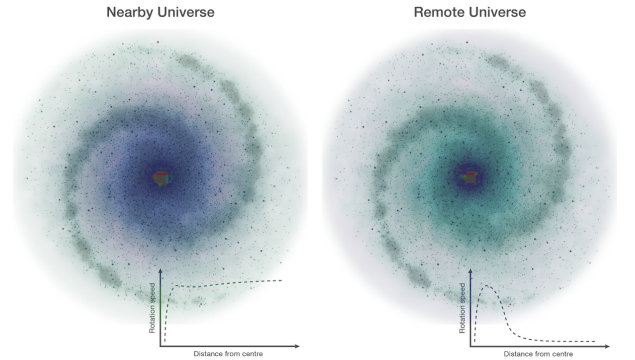


Abbildung 24: Der Unterschied in den Geschwindigkeitsverläufen von nahen und fernen Galaxien wird mit einem Mangel an Dunkler Materie in jungen Galaxien begründet. Wie Abbildung 23 zeigt, liegt der Unterschied möglicherweise nur in der fehlenden Zeit. ([Hee] Bild-Quelle: ESO, ImageId eso1709b, Bild wurde zur besseren Lesbarkeit invertiert)

In diesem einfachen Model reichen also die Kraft über die viskose Kopplung und das entsprechende Gegenmoment aus, um das Rotationsverhalten von Galaxien ohne Hinzunahme von Dunkler Materie zu erklären.

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, dass es jungen Galaxien gemäß neuesten Beobachtungen an Dunkler Materie zu fehlen scheint. So ist jedenfalls die Interpretation gemäß der Darstellung in [Hee].

Mit der viskosen Kopplung braucht es keine zusätzliche Erklärung. Junge Galaxien sind halt jung. Selbst wenn die viskose Kraft auch im Verhältnis zur Gravitationskraft sehr klein sein mag: Über lange Zeiten ist das Integral der Beschleunigung bestimmend für die Geschwindigkeit.

Eine Situation, wie sie in Abbildung 24 dargestellt ist, ist bereits im Simulationsverlauf der Abbildung 23 ent-

halten. Die viskose Kopplung hilft also dabei gleich zwei Eigenschaften der Rotationskurven von Galaxien besser zu erklären.

5 Ausblick

Insgesamt erscheint der Ansatz vielversprechend hinsichtlich einer vereinfachten Simulation von Gezeitenkräften. Die äußerst komplexe Berechnung der Integrale zur Bestimmung des Gravitationspotentials für die Ermittlung der Gezeitenkräfte reduziert sich wesentlich.

Zudem ergibt sich ein Erklärungsansatz, wie sich die Scheibenform der Galaxien schon zu viel früher als erwartet bilden kann [Nep+24].

Selbst wenn sich eine allgemeinere Gültigkeit der Formel nicht final bestätigen sollte, erscheint mir die viskose Wechselwirkung über Gezeitenkräfte bei rotierenden Himmelskörpern ein vielversprechender Ansatz zur Lösung des Rätsels um die mit der Rotationskurve von Galaxien verbundene Dunkle Materie.

Desweiteren kann mein Modell zu einem besseren Verständnis verschiedener Phänomene beitragen:

- Entfernungsänderung des Mondes versus Erde
- Entfernungsänderung der Erde versus Sonne
- Entfernungsänderung des Phobos versus Mars
- Gebundene Rotation im Allgemeinen
- Die Bildung von Ringsystemen um Gasriesen (vgl. Abbildung 25)
- Die Rotationskurve von Galaxien
- Den anscheinenden Mangel an Dunkler Materie in jungen Galaxien (verg. [Hee])

Ein Modell ist so gut, wie es die Welt beschreibt. Die vereinfachte Berechnung von Gezeitenkräften drehender Körper durch eine viskose Kopplung ist zumindest hilfreich. Durch die Vereinfachung der Berechnung der Wirkung der Gezeitenkräfte kann die Simulation von komplexen Mehrkörpersystemen erheblich vereinfacht werden.

Desweiteren zeigt die Formel gewisse Ähnlichkeit zu den Maxwellgleichungen. Die Massedichte ist Quelle des Gravitationsfeldes analog zum Gaußschen Gesetz:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Bewegte Massen entsprechen dann dem Verschiebungsstrom bewegter Ladungen. Durch die gegenseitige Wechselwirkung der Massen entsteht zudem ein Rotationsfeld analog zum erweiterten Durchflutungsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Wenn sich das Modell der viskosen Kopplung bewegter Massen zukünftig weitergehend bestätigt, wäre der zusätzliche geschwindigkeitsabhängige Term eine Komplettierung der Gravitation.

Das wäre eine Erweiterung der Newton-Dynamik (**END**).

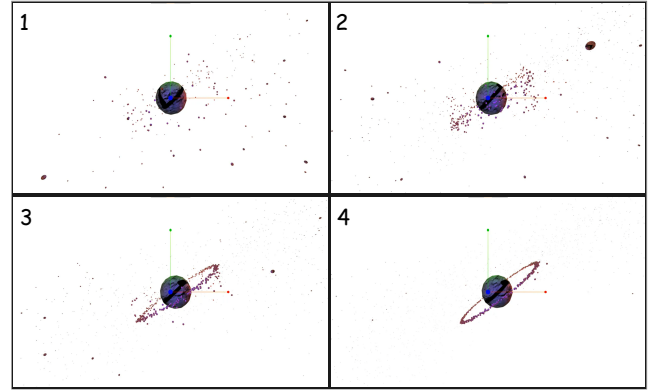


Abbildung 25: Simulationsbeispiel: Bei Ergänzung der viskosen Kopplung formt eine rotierende Masse einen Ring aus umgebenden Partikeln. Der Ring befindet sich in einer Ebene ϵ mit $\omega \perp \epsilon$

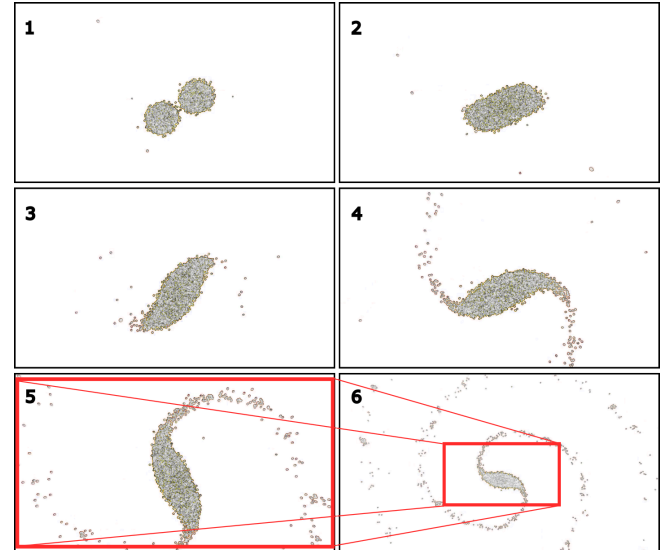


Abbildung 26: Simulationsbeispiel: Skizze der Entstehung einer spiralförmigen Struktur, die bei der Simulation eines Mehrkörpersystems unter Berücksichtigung der viskosen Kopplung entsteht. In diesem Beispiel ähnelt die Struktur einer Balkengalaxie

Literaturnachweise

- [LEIa] LEIFIphysik. *Wirkungen der Gezeitenkraft auf die Erde*. URL: <https://www.leifiphysik.de/astronomie/planetensystem/ausblick/wirkungen-der-gezeitenkraft-auf-die-erde>.
- [LEIb] LEIFIphysik. *Erklärung der Gezeiten*. URL: <https://www.leifiphysik.de/astronomie/planetensystem/ausblick/erklarung-der-gezeiten>.
- [WZW97] Helmut Wilhelm, Walter Zürn und Hans-Georg Wenzel. *Tidal Phenomena*. Bd. 66. Lecture Notes in Earth Sciences. Springer Berlin, Heidelberg, 1997. ISBN: 978-3-540-62833-0. DOI: 10.1007/BFb0011453.
- [Spe25] Akademischer Verlag Spektrum. *Erdgezeiten - Lexikon der Geowissenschaften*. Zugriff am 04. Juni 2025. 2025. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/geowissenschaften/erdgezeiten/4239>.
- [NAS] NASA. *Planetary Fact Sheets*. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html>.
- [Miu+09] Takaho Miura u. a. „Secular Increase of the Astronomical Unit: a Possible Explanation in Terms of the Total Angular-Momentum Conservation Law“. In: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 61.6 (Dez. 2009), S. 1247–1250. ISSN: 0004-6264. DOI: 10.1093/pasj/61.6.1247. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/pasj/61.6.1247>.
- [EL07] Michael Efroimsky und Valéry Lainey. „Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution“. In: *Journal of Geophysical Research: Planets* 112.E12 (Dez. 2007). ISSN: 0148-0227. DOI: 10.1029/2007je002908. URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2007JE002908>.
- [Bre] Prof. Dr. Doris Breuer. *Die noerdliche Eiskappe des Mars ist jung – mit einem kalten, starren Mantel darunter*. URL: <https://www.dlr.de/de/aktuelles/nachrichten/2025/die-noerdliche-eiskappe-des-mars-ist-jung-mit-einem-kalten-starren-mantel-darunter> (besucht am 26.02.2025).
- [Gee] Geek3. *Magnetischer Dipol*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Magnetischer_Dipol#/media/Datei:VFPT_dipoles_magnetic.svg.
- [Wika] Wikipedia. *Phobos (Mond)*. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Phobos_\(Mond\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Phobos_(Mond)).
- [Hee] Paul Heeren. *Kaum Dunkle Materie in frühen Galaxien*. URL: <https://www.spektrum.de/news/nur-wenig-dunkle-materie-in-fruehen-galaxien/1441360>.
- [Wikb] Wikipedia. *Galaxy rotation curve*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Galaxy_rotation_curve.
- [Sof+99] Y. Sofue u. a. „Central Rotation Curves of Spiral Galaxies“. In: *The Astrophysical Journal* 523.1 (Sep. 1999), S. 136–146. DOI: 10.1086/307731. URL: <https://doi.org/10.1086/307731>.
- [Nep+24] S. Nepal u. a. „Discovery of the local counterpart of disc galaxies at z greater than 4: The oldest thin disc of the Milky Way using Gaia-RVS“. In: *Astronomy and Astrophysics* 688 (Aug. 2024), A167. ISSN: 1432-0746. DOI: 10.1051/0004-6361/202449445. URL: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202449445>.