

# On Search For The Largest Prime Island

Marcin Barylski

Created: October 4, 2024

The last update: November 16, 2025

## Abstract

There are several interesting ways to depict distribution of primes like Ulam Spiral [1], Klauber Triangle [2] or the Sacks Number Spiral [3]. In all cases, Prime Number Theorem describes the asymptotic distribution of such numbers among the positive integers. This work is devoted to illustration of primes of form  $p \times q \pm C$  in a way that allows to search for clusters (so called islands of primes). The direct goal of this experimental work is to locate islands with the largest surface area and potentially discover some further patterns in distribution of primes.

## 1 Introduction

Work presented in this paper consists of three major parts: illustration of primes with detection of interesting clusters, formulation of patterns and examination of correctness of formulated patterns in spirit of finding new primes.

Experiments are planned against various sequences of form  $p \times q \pm C$ , where  $p$  and  $q$  are integer variables ( $p, q > 0$ ) and  $C$  is constant. Primes in the sequences are depicted as a non-zero values in X-Y graph, creating a single tile of coordinates  $(p, q)$ . If two tiles are adjacent to each other on both sides, they form an island of size 2. Discovery of big islands (at least of size 4) is the first goal of this work, depicting co-located primes.

For clarity, the following definitions are in charge in this work:

**Definition 1.** A prime tile is a location of coordinates  $(x, y)$  on X-Y graph with prime tile value. Primality of tile is result of a function:  $\text{isprime}(F(x, y, C))$  where  $F()$  is a function of form  $x \times y \pm C$ .

**Definition 2.** A prime island is an area composed of at least two prime tiles that have a common side.

**Lemma 3.** Formula  $p \times q + C$  does not produce prime islands if  $C$  is even and positive ( $p, q > 1$ ).

*Proof.* From lemma assumption  $C$  is even and  $C > 0$ . If either  $p$  or  $q$  is even, then  $p \times q + C$  is also even. If  $p = q = 2$  (the smallest possible values), also from lemma assumption:  $C \geq 2$  (the smallest  $C = 2$ ), then  $p \times q + 2 = 6 > 2$ , thus cannot be prime (because 2 is the only even prime)). If neither  $p$  nor  $q$  is even, then both  $p + 1$  and  $q + 1$  are even, thus  $(p + 1) \times (q + 1) + C$  is even (and  $> 2$  because  $(p + 1) \times (q + 1) + C > p \times q + C > 2$ ) and cannot be prime either. As a result  $p$  and  $q$  are building lattice with empty rows and columns around remaining cases when  $p \times q + C$  is odd and prime.  $\square$

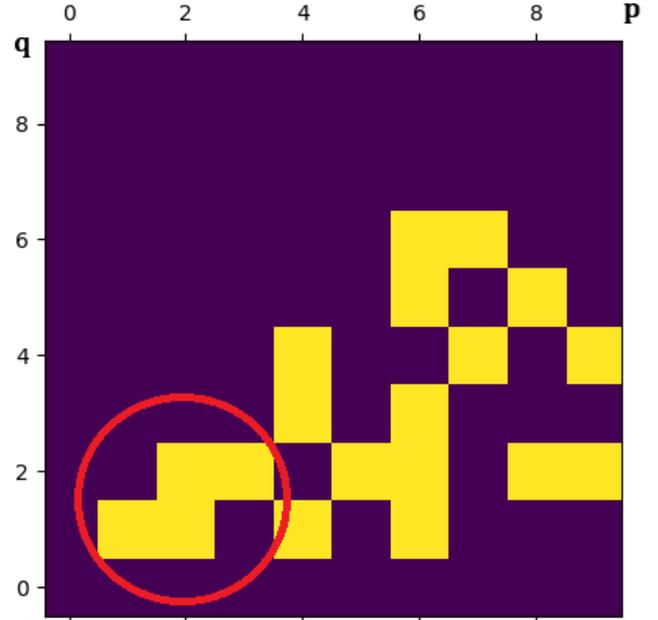


Figure 1: Illustration of prime tiles ( prime islands of size 4 marked with red circle) for formula  $p \times q + 1, p \geq q$ .

**Lemma 4.** Formula  $p \times q + C$  does not produce prime islands if  $C$  is 0 ( $p, q > 1$ ).

*Proof.* If  $C = 0$  then  $p \times q + 0 = p \times q$  cannot be prime by definition (because neither  $p$  nor  $q$  is 1 and  $p \times q$  is always a complex number).  $\square$

In further work  $C$  is odd - this allows to focus on the most interesting findings. Framework [4] is used in all experiments. Also to simplify further calculations, notation:  $p \times q \pm C$  where  $p \geq q$  will be denoted as:  $S_{\pm C}$ .

Figure 1 depicts sample prime islands found for sequence  $S_{+1}$ , found for the first values of  $p$  and  $q$ . For the first island we have the following set of contiguous primes/tiles/formula:

- $2/(1, 1)/1 \times 1 + 1$
- $3/(1, 2)/1 \times 2 + 1$
- $5/(2, 2), 2 \times 2 + 1$
- $7/(2, 3)/2 \times 3 + 1$

$\square$  The island is marked with a red circle and its size is 4.

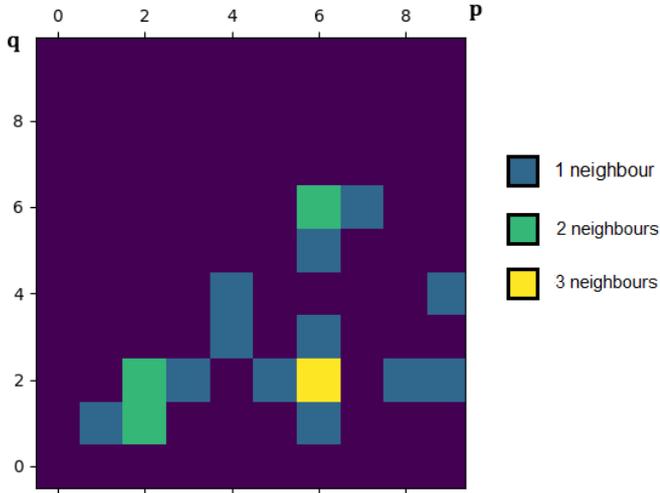


Figure 2: Illustration of prime tiles (skipping single tiles to reinforce prime islands) for  $S_{+1}$ . Additional coloring added to the picture, reflecting number of prime neighbours.

## 2 Search for prime islands (methodology)

Two methods to create X-Y matrices were considered and tested out.

**Method A.** Method faster. Each consecutive iteration equals study to one consecutive prime and its possible representation as a form of  $S_{\pm C}$ . For instance, if examined formula  $F()$  is  $p \times q + 1$  and we check 19 (the 8th prime), then 19 has two possible representations ( $19 = 2 \times 9 + 1 = 3 \times 6 + 1$ ), meaning that 19 brings two prime tiles of coordinates (2, 9) and (3, 6) to the global picture.

**Method B.** Method slower but after acceptance tests was found as more accurate/reliable (mainly because we do not add new points to already examined area). In this approach we check every combination of  $p$  and  $q$ , where  $p \geq q$ , one-by-one.

## 3 Results of experiments and conclusions

Table 1 presents sample results for few formulas - a list of prime islands found with Method A. Generally, there are cases where there is just one example of largest island (ex. check of first  $10k$  iterations for  $S_{-983}$  results in 1 islands of size 11) in the given set but there are also cases that largest prime island's surface is low and such list is long (ex. check of first  $10k$  iterations for  $S_{-999}$  results in 13456 islands of size 3). Table 2 depicts how many islands of the given size were found for few selected values of  $C$ .

Executed experiments allowed to gather interesting observations. The largest prime island found was of size 16 and was located with Method B for  $S_{+197}$  - [(420, 2520), (421, 2520), (422, 2520), (423, 2520), (424, 2520), (425, 2520), (426, 2520), (427, 2520), (428, 2520), (429, 2520), (424, 2519), (422, 2521), (420, 2521), (420, 2522), (421, 2522), (420, 2523)] (Figure 8).

The initially first but eventually second largest prime island found was of size 15 and was located with Method B for the three formulas: the first island is for:  $S_{-293}$  - [(2, 148), (3, 148), (2, 149), (2, 150), (3, 150), (4, 150), (5, 150), (6, 150), (7, 150), (8, 150), (6, 149), (6, 151), (6, 152), (5, 152),

Table 1: Number of prime islands of given size for each formula  $p \times q + C$ , results after  $100k$  iterations, method A.

Size of island	-1	+1	-7	-9
3	1987	1920	1693	1541
4	207	179	212	1
5	42	29	43	0
6	9	4	10	0
7	7	0	3	0
8	0	1	2	0
9	0	0	1	0

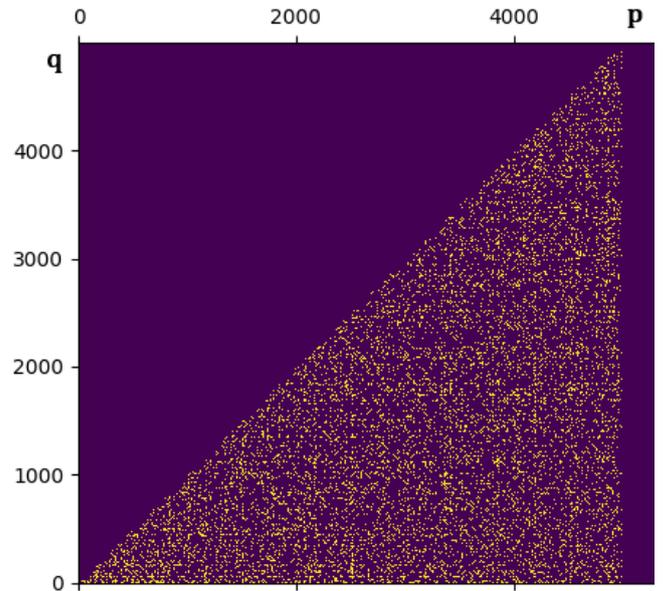


Figure 3: Prime tiles for  $S_{-293}$ ,  $10k$  iterations, method B in use.

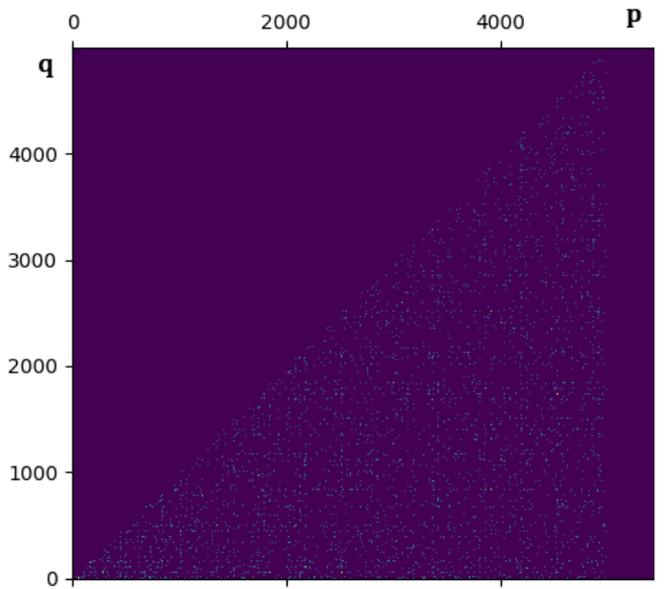


Figure 4: Prime islands for  $S_{-293}$ ,  $10k$  iterations, method B in use; this figure is result of post-processing of Figure 3 (single prime tiles were removed, all other prime tiles were colored, depending on number of prime neighbours).



9				1057			
8	q		899	907	915		
7			750	757	764	771	
6		595	601	607	613	619	625
5			452	457	462	467	472
4		299	303	307	311	315	
3	148	151	154	157	180		
2	1	3	5	7	9		
1		-145	-144	-143			
							p
	147	148	149	150	151	152	153

Figure 9: Big prime island found  
(of size 15,  $S_{-641}$ ).

14					2299		
13				2717	2089	2102	
12	q		1855	1867	1879	1891	
11				1659	1669	1680	
10				1449	1459	1469	
9				1240	1249	1258	
8			1023	1031	1039	1047	
7		808	815	822	829	836	
6	595	601	607	613	619	625	
5		394	399	404	409	414	
4				195	199	203	
3					-11		
							p
	206	207	208	209	210	211	

Figure 10: Big prime island found  
(of size 15,  $S_{-293}$ ).

842	q			920315				925987					
841		918700	917541	918382	918229	920064	920905	921746	922587	923428	924269	925110	
840		914771	915611	916451	917291	918131	918971	919811	920651	921491	922331	923171	924011
839			914522	915361	916200	917039	917878	918717	919556	920395	921234	922073	922912
838				915109		915947	916785					920715	
837					914855								
		1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099
													p

Figure 11: Big prime island found  
(of size 15,  $S_{+851}$ ).

## References

- [1] Weisstein, Eric W., *Prime Spiral*. From MathWorld – A Wolfram Resource. <https://mathworld.wolfram.com/PrimeSpiral.html>
- [2] *The Klauber Triangle*, accessed at 07/19/2025. <https://scipython.com/blog/the-klauber-triangle/>
- [3] *The Sacks Number Spiral*, accessed at 07/19/2025. <https://www.naturalnumbers.org/sparticle.html>
- [4] *Library for various operations on primes*. <https://github.com/mbarylsk/primes>

Table 2: Formulas  $S$  subjected to experiments, results after  $100k$  iterations - example results, method A.

i	$S$	List of largest prime islands found.
1	$S_{+1}$	[(5, 6872), (6, 6872), (6, 6871), (6, 6870), (5, 6870), (4, 6870), (3, 6870), (7, 6870)]
2	$S_{-1}$	[(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (4, 5), (2, 7)], [(2, 120), (3, 120), (4, 120), (5, 120), (6, 120), (7, 120), (2, 121)], [(3, 18), (4, 18), (5, 18), (6, 18), (6, 17), (6, 19), (4, 17)], [(3, 798), (4, 798), (5, 798), (6, 798), (6, 799), (6, 800), (4, 797)], [(4, 587), (4, 588), (5, 588), (6, 588), (6, 589), (6, 590), (7, 590)], [(4, 4452), (5, 4452), (6, 4452), (6, 4453), (6, 4454), (7, 4454), (6, 4455)], [(4, 9300), (5, 9300), (6, 9300), (7, 9300), (6, 9299), (6, 9298), (5, 9298)]
3	$S_{-3}$	[(1, 5), (2, 5), (2, 4), (2, 3), (1, 6)]
4	$S_{+3}$	A lot (one of examples: [(1093, 1120), (1094, 1120), (1094, 1121)])
5	$S_{-5}$	[(2, 4), (3, 4), (4, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (4, 7)]
6	$S_{-7}$	[(1, 60), (2, 60), (3, 60), (4, 60), (5, 60), (6, 60), (6, 59), (6, 61), (4, 59)]
7	$S_{-9}$	[(1, 11), (2, 11), (2, 10), (1, 12)]

Table 3: Experiments with various  $C$  to check presence of periodic prime islands of size 3, method B,  $10k$  iterations

Experiments	List of largest prime islands found.
$C = +2001 \dots + 2009$	<b>2001: (3, 12178)</b> , 2003: (11, 3), 2005: (9, 1), <b>2007: (3, 14027)</b> , 2009: (11, 1)
$C = +9999 \dots + 10011$	<b>9999: (3, 11276)</b> , 10001: (11, 1), 10003: (10, 1), <b>10005: (3, 8158)</b> , 10007: (11, 1), 10009: (10, 3), <b>10011: (3, 12781)</b>
$C = +49999 \dots + 50007$	49999: (11, 1), <b>50001: (3, 10232)</b> , 50003: (10, 2), 50005: (8, 7), <b>50007: (3, 13242)</b>
$C = +99999 \dots + 100011$	<b>99999: (3, 12272)</b> , 100001: (12, 1), 100003: (12, 1), <b>100005: (3, 7988)</b> , 100007: (11, 1), 100009: (9, 3), <b>100011: (3, 11369)</b>

## A

### Set of results from $C = -1001$ to $C = 1001$ (step 2), method B

Set is of form of:  $\{ C : (\text{greatest size of prime island found, number of such islands found}, \dots) \}$ . Calculations performed for the first  $10k$  iterations of  $p \times q + C$  ( $p \geq q$ ) with method B. Bolded the greatest ever islands found.

$\{-1001 : (10, 3), -999 : (3, 13456), -997 : (11, 2), -995 : (8, 6), -993 : (4, 1), -991 : (11, 3), -989 : (10, 2), -987 : (4, 2), -985 : (8, 11), -983 : (11, 1), -981 : (3, 13586), -979 : (10, 4), -977 : (12, 1), -975 : (3, 8124), -973 : (10, 2), -971 : (10, 3), -969 : (4, 1), -967 : (11, 1), -965 : (8, 9), -963 : (3, 13271), -961 : (11, 1), -959 : (11, 1), -957 : (4, 3), -955 : (9, 1), -953 : (10, 3), -951 : (3, 13430), -949 : (12, 1), -947 : (10, 2), -945 : (3, 7073), -943 : (12, 1), -941 : (11, 1), -939 : (4, 1), -937 : (11, 2), -935 : (9, 3), -933 : (4, 1), -931 : (11, 1), -929 : (11, 2), -927 : (4, 1), -925 : (8, 8), -923 : (11, 2), -921 : (4, 2), -919 : (12, 1), -917 : (11, 1), -915 : (3, 8776), -913 : (11, 1), -911 : (13, 1), -909 : (4, 2), -907 : (10, 2), -905 : (8, 11), -903 : (3, 10613), -901 : (13, 1), -899 : (11, 2), -897 : (4, 2), -895 : (8, 7), -893 : (12, 1), -891 : (3, 12019), -889 : (11, 1), -887 : (12, 2), -885 : (3, 8439), -883 : (12, 1), -881 : (11, 1), -879 : (4, 1), -877 : (10, 5), -875 : (8, 3), -873 : (4, 1), -871 : (10, 4), -869 : (10, 5), -867 : (4, 1), -865 : (9, 1), -863 : (11, 1), -861 : (4, 1), -859 : (11, 1), -857 : (11, 1), -855 : (4, 1), -853 : (11, 1), -851 : (13, 1), -849 : (3, 13824), -847 : (11, 1), -845 : (9, 1), -843 : (4, 1), -841 : (13, 1), -839 : (10, 9), -837 : (4, 2), -835 : (9, 2), -833 : (10, 1), -831 : (3, 13527), -829 : (11, 3), -827 : (13, 1), -825 : (4, 1), -823 : (11, 1), -821 : (11, 2), -819 : (4, 1), -817 : (13, 1), -815 : (8, 14), -813 : (4, 1), -811 : (10, 4), -809 : (11, 2), -807 : (4, 1), -805 : (9, 2), -803 : (10, 1), -801 : (4, 1), -799 : (13, 1), -797 : (11, 1), -795 : (4, 1), -793 : (10, 6), -791 : (10, 1), -789 : (4, 1), -787 : (11, 1), -785 : (8, 15), -783 : (3, 13581), -781 : (13, 1), -779 : (10, 4), -777 : (4, 2), -775 : (9, 2), -773 : (11, 1), -771 : (3, 13511), -769 : (10, 6), -767 : (12, 1), -765 : (3, 8460), -763 : (10, 1), -761 : (12, 1), -759 : (3, 10696), -757 : (11, 1), -755 : (9, 1), -753 : (4, 1), -751 : (11, 1), -749 : (10, 3), -747 : (4, 2), -745 : (10, 1), -743 : (13, 1), -741 : (4, 1), -739 : (12, 1), -737 : (11, 2), -735 : (3, 7130), -733 : (10, 1), -731 : (11, 2), -729 : (4, 1), -727 : (11, 1), -725 : (9, 2), -723 : (3, 13877), -721 : (10, 3), -719 : (10, 3), -717 : (4, 5), -715 : (10, 1), -713 : (10, 4), -711 : (4, 1), -709 : (12, 1), -707 : (11, 1), -705 : (3, 8764), -703 : (11, 3), -701 : (11, 2), -699 : (3, 13488), -697 : (10, 2), -695 : (9, 1), -693 : (3, 9562), -691 : (11, 4), -689 : (10, 3), -687 : (4, 2), -685 : (8, 10), -683 : (11, 2), -681 : (4, 2), -679 : (10, 5), -677 : (11, 4), -675 : (3, 8651), -673 : (13, 1), -671 : (11, 1), -669 : (4, 1), -667 : (12, 1), -665 : (9, 1), -663 : (3, 11769), -661 : (12, 1), -659 : (10, 3), -657 : (4, 3), -655 : (9, 2), -653 : (12, 1), -651 : (3, 10210), -649 : (12, 1), -647 : (11, 4), -645 : (3, 8603), -643 : (12, 1), **-641: (15, 1)**, -639 : (4, 1), -637 : (10, 2), -635 : (8, 12), -633 : (4, 1), -631 : (12, 1), -629 : (10, 2), -627 : (3, 11096), -625 : (10, 1), -623 : (9, 8), -621 : (3, 13070), -619 : (11, 1), -617 : (12, 1), -615 : (4, 1), -613 : (13, 1), -611 : (11, 1), -609 : (4, 1), -607 : (10, 9), -605 : (9, 1), -603 : (3, 13893), -601 : (13, 1), -599 : (11, 2), -597 : (4, 5), -595 : (8, 2), -593 : (11, 2), -591 : (3, 13023), -589 : (11, 2), -587 : (12, 1), -585 : (4, 2), -583 :$

(11, 2), -581 : (10, 1), -579 : (3, 13464), -577 : (11, 2), -575 : (8, 5), -573 : (4, 1), -571 : (12, 1), -569 : (10, 7), -567 : (4, 3), -565 : (9, 2), -563 : (10, 2), -561 : (4, 2), -559 : (10, 4), -557 : (11, 2), -555 : (3, 9060), -553 : (10, 1), -551 : (11, 1), -549 : (4, 1), -547 : (12, 1), -545 : (8, 9), -543 : (3, 13093), -541 : (11, 1), -539 : (11, 1), -537 : (4, 1), -535 : (9, 1), -533 : (11, 1), -531 : (3, 13258), -529 : (12, 1), -527 : (10, 3), -525 : (3, 6852), -523 : (13, 1), -521 : (11, 2), -519 : (4, 1), -517 : (11, 1), -515 : (9, 2), -513 : (4, 1), -511 : (11, 1), -509 : (10, 5), -507 : (4, 1), -505 : (9, 3), -503 : (11, 3), -501 : (4, 2), -499 : (13, 1), -497 : (10, 2), -495 : (3, 8065), -493 : (14, 1), -491 : (11, 1), -489 : (4, 2), -487 : (11, 1), -485 : (9, 2), -483 : (3, 10341), -481 : (14, 1), -479 : (11, 1), -477 : (4, 3), -475 : (9, 1), -473 : (11, 1), -471 : (3, 13659), -469 : (11, 2), -467 : (12, 1), -465 : (3, 8324), -463 : (11, 1), -461 : (12, 1), -459 : (4, 1), -457 : (11, 2), -455 : (9, 1), -453 : (4, 1), -451 : (12, 1), -449 : (10, 3), -447 : (4, 2), -445 : (8, 8), -443 : (12, 1), -441 : (3, 10525), -439 : (13, 1), -437 : (11, 1), -435 : (3, 8701), -433 : (11, 1), -431 : (11, 2), -429 : (4, 1), -427 : (12, 1), -425 : (9, 1), -423 : (3, 13092), -421 : (10, 2), -419 : (11, 1), -417 : (4, 4), -415 : (10, 1), -413 : (10, 1), -411 : (3, 13331), -409 : (13, 1), -407 : (11, 2), -405 : (4, 1), -403 : (10, 5), -401 : (13, 1), -399 : (3, 9816), -397 : (10, 4), -395 : (8, 11), -393 : (4, 1), -391 : (11, 2), -389 : (11, 1), -387 : (4, 1), -385 : (8, 5), -383 : (10, 2), -381 : (4, 2), -379 : (11, 2), -377 : (11, 2), -375 : (4, 1), -373 : (11, 1), -371 : (10, 1), -369 : (4, 2), -367 : (10, 2), -365 : (9, 1), -363 : (3, 12152), -361 : (12, 1), -359 : (11, 1), -357 : (4, 3), -355 : (9, 1), -353 : (11, 2), -351 : (3, 12056), -349 : (12, 1), -347 : (11, 2), -345 : (4, 1), -343 : (10, 2), -341 : (11, 2), -339 : (4, 1), -337 : (11, 1), -335 : (9, 2), -333 : (4, 3), -331 : (11, 1), -329 : (9, 13), -327 : (4, 2), -325 : (9, 1), -323 : (11, 4), -321 : (4, 1), -319 : (12, 1), -317 : (10, 6), -315 : (3, 7067), -313 : (11, 1), -311 : (11, 1), -309 : (4, 2), -307 : (12, 1), -305 : (9, 1), -303 : (4, 1), -301 : (11, 1), -299 : (11, 2), -297 : (4, 2), -295 : (8, 14), **-293: (15, 1)**, -291 : (4, 1), -289 : (12, 1), -287 : (11, 1), -285 : (3, 8548), -283 : (11, 2), -281 : (12, 1), -279 : (4, 2), -277 : (11, 2), -275 : (9, 1), -273 : (3, 9868), -271 : (12, 1), -269 : (10, 2), -267 : (4, 2), -265 : (8, 10), -263 : (10, 3), -261 : (4, 1), -259 : (11, 2), -257 : (13, 1), -255 : (3, 8062), -253 : (11, 2), -251 : (11, 1), -249 : (4, 3), -247 : (12, 1), -245 : (8, 8), -243 : (3, 14228), -241 : (11, 1), -239 : (10, 1), -237 : (4, 4), -235 : (9, 3), -233 : (11, 2), -231 : (3, 9032), -229 : (12, 1), -227 : (11, 2), -225 : (4, 2), -223 : (12, 2), -221 : (14, 1), -219 : (3, 13404), -217 : (10, 2), -215 : (9, 1), -213 : (4, 1), -211 : (10, 1), -209 : (11, 2), -207 : (3, 12991), -205 : (10, 1), -203 : (10, 3), -201 : (4, 3), -199 : (12, 1), -197 : (11, 1), -195 : (4, 1), -193 : (11, 4), -191 : (11, 3), -189 : (4, 3), -187 : (11, 1), -185 : (8, 13), -183 : (3, 13692), -181 : (11, 2), -179 : (11, 2), -177 : (5, 1), -175 : (8, 8), -173 : (11, 2), -171 : (3, 12024), -169 : (12, 2), -167 : (11, 1), -165 : (4, 1), -163 : (13, 1), -161 : (10, 2), -159 : (3, 13427), -157 : (11, 2), -155 : (9, 1), -153 : (4, 1), -151 : (9, 12), -149 : (12, 1), -147 : (4, 2), -145 : (9, 4), -143 : (11, 2), -141 : (3, 13252), -139 : (13, 1), -137 : (12, 1), -135 : (4, 1), -133 : (11, 1), -131 : (10, 7), -129 : (4, 1), -127 : (11, 3), -125 : (8, 13), -123 : (4, 1), -121 : (10, 3), -119 : (10, 1), -117 : (4, 4), -115 : (9, 1), -113 : (12, 1), -111 : (4, 1), -109 : (14, 1), -107 : (12, 1), -105 : (4, 1), -103 : (12, 1), -101 : (10, 5), -99 : (4, 2), -97 : (11, 1), -95 : (9, 1), -93 : (4, 2), -91 : (10, 2), -89 : (12, 1), -87 : (3, 13001), -85 : (9, 1), -83 : (11, 1), -81 : (4, 2), -79 : (11, 3), -77 : (10, 4), -75 : (3, 9199), -73 : (11, 2), -71 : (14, 1), -69 : (4, 2), -67 : (14, 1), -65 : (9, 1), -63 : (3, 10757), -61 : (10, 6), -59 : (10, 7), -57 : (4, 4), -55 : (10, 1), -53 : (11, 3), -51 : (3, 12567), -49 : (10, 2), -47 : (11, 1), -45 : (3, 8811), -43 : (13, 1), -41 : (11, 1), -39 : (4, 2), -37 : (12, 1), -35 : (9, 2), -33 : (4, 1), -31 : (11, 2), -29 : (10, 1), -27 : (4, 2), -25 : (9, 1), -23 : (11, 1), -21 : (5, 1), -19 : (11, 1), -17 : (10, 3), -15 : (4, 1), -13 : (12, 1), -11 : (11, 1), -9 : (4, 1), -7 : (10, 2), -5 : (8, 9), -3 : (5, 1), -1 : (10, 5), 1 : (12, 1), 3 : (3, 13323), 5 : (8, 7), 7 : (11, 1), 9 : (3, 13691), 11 : (13, 1), 13 : (11, 2), 15 : (3, 8857), 17 : (12, 1), 19 : (12, 1), 21 : (3, 10617), 23 : (11, 2), 25 : (8, 8), 27 : (3, 13895), 29 : (10, 1), 31 : (10, 3), 33 : (3, 12466), 35 : (9, 1), 37 : (11, 2), 39 : (3, 12015), 41 : (11, 2), 43 : (11, 1), 45 : (3, 8765), 47 : (11, 2), 49 : (10, 3), 51 : (3, 12565), 53 : (11, 2), 55 : (9, 1), 57 : (3, 12995), 59 : (10, 3), 61 : (10, 4), 63 : (3, 10957), 65 : (9, 1), 67 : (12, 1), 69 : (3, 12641), 71 : (11, 1), 73 : (13, 1), 75 : (3, 9276), 77 : (11, 1), 79 : (11, 1), 81 : (3, 12900), 83 : (12, 1), 85 : (8, 8), 87 : (3, 13010), 89 : (11, 1), 91 : (11, 2), 93 : (3, 13846), 95 : (8, 10), 97 : (10, 4), 99 : (3, 11836), 101 : (11, 1), 103 : (11, 1), 105 : (3, 6943), 107 : (10, 5), 109 : (11, 1), 111 : (3, 13132), 113 : (10, 2), 115 : (9, 1), 117 : (3, 12633), 119 : (11, 2), 121 : (11, 1), 123 : (3, 13377), 125 : (9, 2), 127 : (12, 2), 129 : (3, 12616), 131 : (12, 1), 133 : (11, 1), 135 : (3, 8977), 137 : (12, 1), 139 : (12, 1), 141 : (3, 13292), 143 : (10, 4), 145 : (9, 1), 147 : (3, 10656), 149 : (11, 1), 151 : (12, 1), 153 : (3, 12912), 155 : (8, 10), 157 : (11, 2), 159 : (3, 13427), 161 : (12, 1), 163 : (11, 2), 165 : (3, 7667), 167 : (11, 1), 169 : (10, 2), 171 : (3, 12164), 173 : (12, 1), 175 : (8, 10), 177 : (3, 13713), 179 : (11, 1), 181 : (11, 1), 183 : (3, 13526), 185 : (9, 1), 187 : (11, 2), 189 : (3, 10694), 191 : (12, 1), 193 : (10, 3), 195 : (3, 8101), **197: (16, 1)**, 199 : (13, 1), 201 : (3, 13481), 203 : (11, 1), 205 : (9, 1), 207 : (3, 12848), 209 : (12, 1), 211 : (10, 3), 213 : (3, 13125), 215 : (9, 3), 217 : (11, 1), 219 : (3, 13490), 221 : (12, 1), 223 : (11, 1), 225 : (3, 8908), 227 : (10, 3), 229 : (11, 2), 231 : (3, 9177), 233 : (11, 1), 235 : (8, 13), 237 : (3, 13668), 239 : (11, 2), 241 : (11, 1), 243 : (3, 14413), 245 : (8, 7), 247 : (10, 4), 249 : (3, 12598), 251 : (11, 1), 253 : (11, 1), 255 : (3, 8171), 257 : (12, 1), 259 : (10, 4), 261 : (3, 13004), 263 : (10, 5), 265 : (8, 9), 267 : (3, 13885), 269 : (11, 1), 271 : (10, 4), 273 : (3, 10023), 275 : (9, 1), 277 : (10, 3), 279 : (3, 12762), 281 : (11, 1), 283 : (11, 5), 285 : (3, 8525), 287 : (10, 1), 289 : (12, 1), 291 : (3, 12538), 293 : (11, 3), 295 : (9, 2), 297 : (3, 11876), 299 : (11, 3), 301 : (10, 2), 303 : (3, 14154), 305 : (9, 2), 307 : (11, 1), 309 : (3, 13158), 311 : (10, 3), 313 : (11, 2), 315 : (3, 6717), 317 : (11, 1), 319 : (11, 2), 321 : (3, 13521), 323 : (11, 1), 325 : (9, 2), 327 : (3, 13856), 329 : (11, 1), 331 : (11, 1), 333 : (3, 12829), 335 : (9, 1), 337 : (11, 2), 339 : (3, 12845), 341 : (10, 4), 343 : (10, 3), 345 : (3, 8811), 347 : (11, 1), 349 : (11, 1), 351 : (3, 12084), 353 : (11, 1), 355 : (9, 2), 357 : (3, 10141), 359 : (11, 1), 361 : (11, 1), 363 : (3, 12467), 365 : (9, 1), 367 : (13, 1), 369 : (3, 13331), 371 : (10, 1), 373 : (12, 1), 375 : (3, 8721), 377 : (11, 2), 379 : (14, 1), 381 : (3, 12545), 383 : (11, 1), 385 : (9, 3), 387 : (3, 13649), 389 : (11, 1), 391 : (10, 5), 393 : (3, 13688), 395 : (8, 8), 397 : (11, 1), 399 : (3, 9693), 401 : (13, 1), 403 : (13, 1), 405 : (3, 9107), 407 : (13, 1), 409 : (12, 2), 411 : (3, 13067), 413 : (10, 2), 415 : (8, 11), 417 : (3, 13592), 419 : (11, 1), 421 : (11, 2), 423 : (3, 13263), 425 : (9, 1), 427 : (12, 1), 429 : (3, 10865), 431 : (12, 1), 433 :

(13, 1), 435 : (3, 8850), 437 : (12, 1), 439 : (11, 1), 441 : (3, 10562), 443 : (10, 8), 445 : (8, 9), 447 : (3, 13668), 449 :  
 (11, 2), 451 : (10, 2), 453 : (3, 14098), 455 : (9, 1), 457 : (10, 5), 459 : (3, 12042), 461 : (11, 1), 463 : (12, 1), 465 :  
 (3, 8361), 467 : (10, 3), 469 : (12, 1), 471 : (3, 13712), 473 : (12, 1), 475 : (9, 1), 477 : (3, 13383), 479 : (10, 2), 481 :  
 (11, 2), 483 : (3, 10236), 485 : (8, 12), 487 : (11, 1), 489 : (3, 13146), 491 : (11, 2), 493 : (11, 1), 495 : (3, 8052), 497 :  
 (10, 2), 499 : (10, 2), 501 : (3, 12880), 503 : (11, 1), 505 : (8, 12), 507 : (3, 12067), 509 : (11, 2), 511 : (10, 1), 513 :  
 (3, 13342), 515 : (9, 2), 517 : (12, 1), 519 : (3, 13584), 521 : (12, 1), 523 : (11, 1), 525 : (3, 6914), 527 : (13, 1), 529 :  
 (10, 3), 531 : (3, 13243), 533 : (11, 1), 535 : (8, 13), 537 : (3, 13987), 539 : (9, 5), 541 : (11, 1), 543 : (3, 13009), 545 :  
 (8, 6), 547 : (13, 1), 549 : (3, 12913), 551 : (10, 2), 553 : (10, 2), 555 : (3, 9006), 557 : (10, 5), 559 : (12, 1), 561 :  
 (3, 10966), 563 : (12, 1), 565 : (8, 13), 567 : (3, 10912), 569 : (11, 2), 571 : (11, 1), 573 : (3, 13729), 575 : (8, 7), 577 :  
 (11, 2), 579 : (3, 13325), 581 : (10, 1), 583 : (12, 1), 585 : (3, 7910), 587 : (11, 2), 589 : (11, 2), 591 : (3, 12883), 593 :  
 (11, 3), 595 : (9, 1), 597 : (3, 13865), 599 : (12, 1), 601 : (10, 4), 603 : (3, 13868), 605 : (8, 7), 607 : (13, 1), 609 :  
 (3, 9945), 611 : (10, 2), 613 : (11, 1), 615 : (3, 8708), 617 : (11, 1), 619 : (10, 5), 621 : (3, 12943), 623 : (10, 4), 625 :  
 (9, 2), 627 : (3, 11202), 629 : (11, 1), 631 : (12, 1), 633 : (3, 13569), 635 : (9, 1), 637 : (10, 1), 639 : (3, 13332), 641 :  
 (10, 3), 643 : (10, 4), 645 : (3, 8461), 647 : (10, 4), 649 : (13, 1), 651 : (3, 10206), 653 : (12, 1), 655 : (8, 8), 657 :  
 (3, 13817), 659 : (11, 4), 661 : (9, 16), 663 : (3, 11933), 665 : (8, 4), 667 : (10, 4), 669 : (3, 13110), 671 : (11, 1), 673 :  
 (12, 1), 675 : (3, 8523), 677 : (11, 1), 679 : (11, 1), 681 : (3, 13328), 683 : (10, 4), 685 : (9, 2), 687 : (3, 13873), 689 :  
 (10, 2), 691 : (10, 2), 693 : (3, 9621), 695 : (8, 11), 697 : (10, 5), 699 : (3, 13335), 701 : (11, 1), 703 : (11, 4), 705 :  
 (3, 8808), 707 : (10, 3), 709 : (10, 3), 711 : (3, 12836), 713 : (12, 1), 715 : (9, 1), 717 : (3, 13576), 719 : (13, 1), 721 :  
 (10, 4), 723 : (3, 13965), 725 : (9, 1), 727 : (10, 2), 729 : (3, 13381), 731 : (11, 2), 733 : (10, 7), 735 : (3, 7102), 737 :  
 (12, 1), 739 : (11, 2), 741 : (3, 11214), 743 : (10, 2), 745 : (9, 1), 747 : (3, 14173), 749 : (11, 1), 751 : (10, 4), 753 :  
 (3, 13565), 755 : (8, 6), 757 : (11, 1), 759 : (3, 10781), 761 : (11, 1), 763 : (11, 1), 765 : (3, 8567), 767 : (11, 3), 769 :  
 (10, 3), 771 : (3, 13443), 773 : (12, 1), 775 : (9, 1), 777 : (3, 10455), 779 : (11, 2), 781 : (12, 1), 783 : (3, 13542), 785 :  
 (9, 2), 787 : (10, 3), 789 : (3, 13581), 791 : (10, 3), 793 : (12, 1), 795 : (3, 8316), 797 : (10, 2), 799 : (13, 1), 801 :  
 (3, 12679), 803 : (12, 1), 805 : (8, 5), 807 : (3, 13860), 809 : (11, 1), 811 : (11, 2), 813 : (3, 14110), 815 : (8, 15), 817 :  
 (10, 1), 819 : (3, 9365), 821 : (11, 1), 823 : (10, 5), 825 : (3, 7871), 827 : (10, 3), 829 : (10, 4), 831 : (3, 13780), 833 :  
 (10, 1), 835 : (9, 1), 837 : (3, 12984), 839 : (12, 1), 841 : (12, 1), 843 : (3, 13188), 845 : (9, 1), 847 : (10, 2), 849 :  
 (3, 13605), **851: (15, 1)**, 853 : (12, 1), 855 : (3, 8395), 857 : (12, 1), 859 : (11, 2), 861 : (3, 9931), 863 : (12, 1), 865 :  
 (9, 1), 867 : (3, 13045), 869 : (11, 2), 871 : (10, 3), 873 : (3, 13866), 875 : (8, 6), 877 : (10, 7), 879 : (3, 12928), 881 :  
 (9, 16), 883 : (11, 1), 885 : (3, 8525), 887 : (10, 6), 889 : (10, 2), 891 : (3, 12166), 893 : (11, 1), 895 : (8, 5), 897 :  
 (3, 11972), 899 : (11, 1), 901 : (10, 3), 903 : (3, 10766), 905 : (8, 4), 907 : (11, 1), 909 : (3, 13049), 911 : (12, 1), 913 :  
 (11, 1), 915 : (3, 9113), 917 : (10, 4), 919 : (9, 13), 921 : (3, 12768), 923 : (11, 1), 925 : (8, 7), 927 : (3, 13227), 929 :  
 (10, 2), 931 : (10, 1), 933 : (3, 14111), 935 : (8, 2), 937 : (11, 2), 939 : (3, 13084), 941 : (11, 1), 943 : (11, 1), 945 :  
 (3, 7041), 947 : (10, 2), 949 : (10, 4), 951 : (3, 13353), 953 : (11, 1), 955 : (9, 1), 957 : (3, 11932), 959 : (10, 2), 961 :  
 (11, 1), 963 : (3, 13449), 965 : (9, 1), 967 : (12, 1), 969 : (3, 11319), 971 : (11, 1), 973 : (10, 3), 975 : (3, 7957), 977 :  
 (11, 2), 979 : (10, 4), 981 : (3, 13330), 983 : (11, 1), 985 : (9, 2), 987 : (3, 10702), 989 : (12, 1), 991 : (10, 1), 993 :  
 (3, 13430), 995 : (9, 1), 997 : (10, 5), 999 : (3, 13378), 1001 : (10, 3)}