THÉORÈME DE LINDEMANN-WEIERSTRASS POUR LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE THAKUR

DAVID ADAM AND LAURENT DENIS

RÉSUMÉ. En 1995, Thakur a introduit des analogues des fonctions hypergéométriques pour $\mathbb{F}_q[T]$. Dans cet article, nous montrons que l'ensemble exceptionnel d'une telle fonction est trivial. Ceci confirme une conjecture énoncée par Thakur et ses coauteurs en 2008. De plus, nous montrons un théorème de type Lindemann-Weierstrass pour une classe indénombrable de fonctions contenant les fonctions hypergéométriques. La méthode utilisée permet d'obtenir les premières mesures de transcendance (de qualité comparable à celle de la caractéristique 0) pour les valeurs en des arguments algébriques de ces fonctions. Enfin, dans une dernière partie, nous exhibons les premières familles infinies de fonctions hypergéométriques dont on peut montrer que leur ensemble exceptionnel est trivial dans le domaine P -adique.

1. INTRODUCTION

Soit θ un entier naturel non nul et p un nombre premier. On pose $q = p^\theta$. Notons Ω le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ pour la valuation $-\deg$. On note encore $-\deg$ le prolongement de la valuation $-\deg$ à Ω . En 1931, dans [8], Carlitz introduit un analogue de la fonction exponentielle pour Ω . Rappelons sa construction (à un facteur de normalisation près). Posons $[0] = D_0 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul

$$[n] = T^{q^n} - T \text{ et } D_n = [n]D_{n-1}^q.$$

La fonction

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{q^n}}{D_n}$$

est définie pour tout $z \in \Omega$ et est maintenant appelée *exponentielle de Carlitz*. Le problème de la nature arithmétique des valeurs prises par l'exponentielle de Carlitz s'est rapidement posé. En 1941, Wade montre un analogue du théorème de Lindemann (pour l'exponentielle de Carlitz (voir [35]) : l'ensemble exceptionnel de $\exp_{\mathbb{C}}$ est réduit à $\{0\}$). Rappelons que l'ensemble *exceptionnel* d'une fonction f est l'ensemble des éléments α de la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de $\mathbb{F}_q(T)$ dans Ω tels que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$. En 1960 dans [9], Carlitz définit un analogue des fonctions de Bessel pour Ω (appelées fonctions de Bessel-Carlitz) : pour un entier naturel, la m -ème fonction de Bessel-Carlitz est la fonction (toujours à un facteur de normalisation près)

$$J_m(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{q^{n+m}}}{D_{n+m} D_n^{q^m}}.$$

En 1978, Geijssels [18] prouve la transcendance d'au moins un des deux éléments $J_m(\alpha)$ et $J_m(T\alpha)$ pour $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$. Le second auteur obtient la transcendance de ces deux éléments, dans un premier temps pour $\alpha \in \mathbb{F}_q(T) \setminus \{0\}$ dans [13] puis dans le cas général dans [14]. Comme les fonctions hypergéométriques généralisent la fonction exponentielle et les fonctions de Bessel, il est naturel d'essayer de définir des analogues des fonctions hypergéométriques pour Ω . Cela a été réalisé en 1995 par Thakur (voir [32] et [33]). Pour un entier naturel a non nul, on pose $(a)_n = D_{n+a-1}^{q^{1-a}}$. Dans Ω , $(a)_n$ peut être considéré comme un analogue du symbole de Pochhammer $(a)_n = a(a-1) \cdots (a-n+1)$ dans $\mathbb{C}$ (voir [31]).

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 11J93.

Key words and phrases. Fonctions hypergéométriques, transcendance, caractéristique positive.

Définition 1. Soit r et s deux entiers naturels, $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_r)$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, \dots, b_s)$ deux suites d'entiers naturels non nuls, on appelle *fonction hypergéométrique de Thakur de type I de paramètres $(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$* la fonction

$${}_rF_sT^I(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1)_n \cdots (a_r)_n}{D_n(b_1)_n \cdots (b_s)_n} z^{qn}.$$

On notera ${}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^I$ l'ensemble des fonctions hypergéométriques de Thakur de type I dont les paramètres $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{b}}$ sont de longueurs respectives r et s . Li a étendu le résultat de Geijsel aux cas des fonctions hypergéométriques de Thakur de type I dans les cas où la suite $\underline{\mathbf{a}}$ est vide [27, Theorem 1] : pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul, au moins un des ${}_rF_sT^I(-, \underline{\mathbf{b}}; T^i\alpha)$ ($0 \leq i \leq s$) est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Conjecture (conjecture **TWYZ**). En 2008, Thakur, Wen, Yao, Zhao [34], en analogie avec le cas de la caractéristique nulle, conjecturent que l'ensemble exceptionnel d'une fonction hypergéométrique de Thakur de type I entière (c'est-à-dire définie sur Ω) est réduit à $\{0\}$.

Remarque 2. La condition que $f \in {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^I$ est entière est équivalente au fait que $r \leq s$.

En utilisant un critère de transcendance de Yao [38, Théorème 1], les auteurs de [34] montrent le résultat suivant qui est une réponse partielle à leur conjecture : si $r \leq s$ et α est algébrique non nul de degré inférieur à $q - 1$ sur $\mathbb{F}_q(T)$, alors pour tout $f \in {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^I$, $f(\alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$ (voir [34, Theorem 2], corrigé dans [37]).

Dans [20], Harada s'est intéressé au cas balancé, c'est-à-dire $s = r + 1$. En utilisant une généralisation de Chang (voir [10]) du critère d'indépendance linéaire d'Anderson, Brownawell et Papanikolas (le maintenant dénommé critère **ABP** prouvé dans [1]) et en conjonction avec [34, Theorem 4], Harada montre que l'ensemble exceptionnel d'une fonction ${}_{s+1}\mathcal{F}_s\mathcal{T}^I$ est trivial si et seulement si elle est transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)(z)$ [20, Theorem 3.6].

Dans [9], Carlitz étend la définition de D_n à certains arguments fractionnaires. Pour tout $a \in \frac{1}{\theta}\mathbb{N}$, on pose $D_{\theta,a} = \prod_{j=0}^{[a]-1} (T^{q^a} - T^{q^j})$, où $[a]$ désigne le plus petit entier supérieur à a . Clairement, $D_{\theta,a}$ est un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$. Pour un entier naturel n , on pose $(a)_{\theta,n} = D_{\theta,n+a-1}^{q^{a-1}}$. Dans [38], Yao définit des fonctions hypergéométriques de manière analogue à celles de Thakur de type I , relatives aux $D_{\theta,n}$.

Définition 3. Soit r et s deux entiers naturels, $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_r)$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, \dots, b_s)$ deux suites de relatifs de $\frac{1}{\theta}\mathbb{N}$. On appelle *fonction hypergéométrique de Yao de paramètres $(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$* la fonction

$${}_rF_sY(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1)_{\theta,n} \cdots (a_r)_{\theta,n}}{D_n(b_1)_{\theta,n} \cdots (b_s)_{\theta,n}} z^{qn}.$$

On notera ${}_r\mathcal{F}_s\mathcal{Y}$ l'ensemble des fonctions hypergéométriques de Yao dont les paramètres $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{b}}$ sont de longueurs respectives r et s .

Remarque 4. Clairement, une fonction hypergéométrique de Thakur de type I est une fonction hypergéométrique de Yao.

Dans [38], Yao prouve une généralisation de [34, Theorem 2] (voir [38, Théorème 2]). Cependant, le théorème de Yao ne permet pas de conclure que l'ensemble exceptionnel de ${}_rF_sY(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z)$ est réduit à $\{0\}$.

Il est bien connu que les fonctions hypergéométriques en caractéristique nulle sont solutions d'équations différentielles linéaires [30, §2.1.2]. En se basant sur l'analogie entre équations différentielles en caractéristique nulle et équations aux différences de Carlitz en caractéristique positive, dans [23], Kochubei construit un nouveau type de fonctions hypergéométriques dont maintenant les paramètres sont des éléments de Ω et non plus des rationnels.

Définition 5. (1) Soit $a \in \Omega$ et $m \in \mathbb{N}$, le symbole de de Kochubei-Pochhammer $\langle a \rangle_m$ est défini par

$$\langle a \rangle_m = \prod_{j=1}^m ([m-j] - a)^{q^j}.$$

- (2) Soit r, s deux entiers naturels, $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_r)$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, \dots, b_s)$ deux suites de $\Omega \setminus \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$. La fonction

$${}_r F K_s(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\langle a_1 \rangle_n \cdots \langle a_r \rangle_n}{D_n \langle b_1 \rangle_n \cdots \langle b_s \rangle_n} z^{q^n}$$

est appelée *fonction hypergéométrique de Kochubei* de paramètres $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{b}}$.

On notera ${}_r \mathcal{F}_s \mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions hypergéométriques de Kochubei dont les paramètres $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{b}}$ sont de longueurs respectives r et s . A un facteur de normalisation près, les fonctions hypergéométriques de Thakur de type I sont aussi des cas particuliers de fonctions hypergéométriques de Kochubei (voir [23]).

Thakur fut le premier à considérer des fonctions hypergéométriques à paramètres dans Ω . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$e_n(X) = \prod_{\substack{h \in \mathbb{F}_q[T] \\ \deg(h) < n}} (X - h).$$

Définition 6 ([32]). Soit $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_r)$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, \dots, b_s)$ deux suites de $\Omega \setminus \mathbb{F}_q[T]$. La fonction

$${}_r F_s T^{II}(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{e_n(a_1) \cdots e_n(a_r)}{D_n e_n(b_1) \cdots e_n(b_s)} z^{q^n}.$$

est appelée *fonction hypergéométrique de Thakur de type II* de paramètres $(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$.

On notera ${}_r \mathcal{F}_s \mathcal{T}^{II}$ l'ensemble des fonctions hypergéométriques de Thakur de type II dont les paramètres $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{b}}$ sont des suites de $\mathbb{F}_q(T) \setminus \mathbb{F}_q[T]$ de longueurs respectives r et s . Peu est connu à propos des valeurs des fonctions de ${}_r \mathcal{F}_s \mathcal{T}^{II}$ [34, §4 remarks]. L'ensemble de toutes les fonctions hypergéométriques de paramètres de longueurs r et s est noté ${}_r \mathcal{F}_s$:

$${}_r \mathcal{F}_s = {}_r \mathcal{F}_s \mathcal{T}^{II} \cup {}_r \mathcal{F}_s \mathcal{Y} \cup {}_r \mathcal{F}_s \mathcal{K}.$$

Le but principal de cet article est de montrer que la conjecture **TWYZ** est vraie pour les fonctions de ${}_r \mathcal{F}_s$. Pour ce faire, nous introduisons une classe de fonctions, notée HF_q et qui contient ${}_r \mathcal{F}_s$, dont on montrera que leur ensemble exceptionnel est trivial. La preuve repose sur une variante non explicite de la méthode originelle de Hermite [21] pour la démonstration de la transcendance de e . Contrairement aux méthodes fonctionnelles (critère **ABP**, théorème du T -sous-module de Yu [42], théorème de Siegel-Shidlovski [29], etc.), qui par construction ne peuvent amener à des résultats de transcendance que pour un nombre dénombrable de fonctions, la simplicité et la flexibilité de la méthode d'Hermite permet d'obtenir des résultats de transcendance pour des classes indénombrables de fonctions, comme l'est la classe HF_q .

Dans la deuxième partie, grâce aux bonnes approximations obtenues, nous donnerons les premières mesures de transcendance des valeurs de fonctions hypergéométriques en caractéristique finie. Ces mesures de transcendance seront vues être de qualité comparable à celles obtenues par Mahler et Lang dans le cas de la caractéristique 0. En particulier, dans le cas de l'exponentielle de Carlitz, nous obtenons une mesure de transcendance de $\exp_C(1)$ qui améliore celle de Bundschuh obtenue en 1974 d'un facteur logarithmique.

Dans la troisième partie, nous introduisons une sous-classe indénombrable de HF_q , notée HFR_q pour laquelle l'analogie du théorème de Lindemann-Weierstrass est satisfait :

Théorème 7 (Théorème **L-W** linéaire). *Soit f une fonction de HFR_q et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Alors la famille $\{1, f(\alpha_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ est $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ -linéairement indépendante si et seulement si la famille $\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ est $\mathbb{F}_q$ -linéairement indépendante.*

En dehors de théorèmes de type **L-W** obtenu par applications directe du théorème de Thue-Siegel-Roth, le Théorème 7 semble être le premier théorème de type **L-W** démontré pour une classe indénombrable de fonctions. Dans le cas cité, Harada [20, Theorem 3.9] obtient aussi grâce au critère **ABP** une condition suffisante sur la famille $\{\alpha_i\}$ pour que la famille $\{1, f(\alpha_i)\}$ soit $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ -linéairement indépendante. A la vue du Théorème 7, il est vraisemblable que cette condition ne soit pas nécessaire.

Dans la dernière partie, nous nous intéressons aux fonctions hypergéométriques considérées comme fonctions dans Ω_P , où Ω_P désigne le complété d'une clôture algébrique de

$\mathbb{F}_q(T)_P$, le complété de $\mathbb{F}_q(T)$ pour la valuation induite par un polynôme P de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q[T]}$, l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_q[T]$. Nous démontrons pour la première fois que l'ensemble exceptionnel d'une classe infinie de fonctions hypergéométrique est trivial (voir les Théorèmes 38, 39 et 41). Un tel résultat n'est actuellement pas connu dans le cas de la caractéristique nulle. Pour ce faire, nous montrons un résultat de type Schneider-Lang-Adams en caractéristique positive (Théorème 34) qui a certainement son propre intérêt.

Soit τ le $\mathbb{F}_q$ -Frobenius défini sur Ω et K un extension algébrique finie de $\mathbb{F}_q(T)$. On rappelle qu'un $\mathbb{F}_q[T]$ -module Drinfeld de rang r est un homomorphisme injectif d'anneaux ρ de $\mathbb{F}_q[T]$ dans $\text{End}(\mathbb{G}_a(K)) \simeq K\{\tau\}$ défini par $\rho T = T + \sum_{i=1}^r A_i \tau^i$ où les A_i ($1 \leq i \leq r$) sont des éléments de K et $A_r \neq 0$. L'exponentielle de ρ est l'unique fonction $e_\rho(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{q^n}$ avec $a_0 = 1$ telle que pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$, $e_\rho(az) = \rho_a(e_\rho(z))$. Nous montrerons en cours de route que si ρ est de rang inférieur à 2, alors $\exp_\rho$ est une fonction $HF\mathbb{R}_q$ ce qui permettra de montrer un théorème **L-W** pour ρ .

2. TRANSCENDANCE DE LA FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE EN UN POINT ALGÈBRE

Pour un extension algébrique $K/\mathbb{F}_q(T)$, on note H_K l'ensemble des $\mathbb{F}_q(T)$ -morphisms de K dans Ω . Rappelons que si α est un élément de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$, on appelle *maison* de α , qu'on note $|\overline{\alpha}|$, le réel

$$|\overline{\alpha}| = \max_{\sigma \in H_{\overline{\mathbb{F}_q(T)}(\alpha)}} \deg(\sigma(\alpha)).$$

Pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$, on a les majorations triviales

$$|\overline{\alpha + \beta}| \leq \max(|\overline{\alpha}|, |\overline{\beta}|) \text{ et } |\overline{\alpha\beta}| \leq |\overline{\alpha}| + |\overline{\beta}|.$$

L'ensemble $\mathcal{O}_K$ des entiers de K (sur $\mathbb{F}_q(T)$) est la clôture intégrale de $\mathbb{F}_q[T]$ dans K . On dit que $\omega \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ est un *dénominateur commun* dans K d'une famille $\mathcal{F}$ d'éléments de K si pour tout $x \in \mathcal{F}$, ωx appartient à $\mathcal{O}_K$. Dans le cas où $\mathcal{F}$ ne contient qu'un élément x , on dit que ω est un *dénominateur* dans K de x . Rappelons l'une des formes de l'inégalité de Liouville.

Proposition 8 (Inégalité de Liouville [40]). *Soit α et ω deux éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nuls et K une extension de $\mathbb{F}_q(T)$ contenant α et ω . On suppose que $\omega\alpha$ est entier sur $\mathbb{F}_q[T]$. Alors,*

$$\deg(\alpha) \geq -(\sigma - 1)|\overline{\alpha}| - \sigma|\overline{\omega}|,$$

où $\sigma = [K : \mathbb{F}_q(T)]_s$.

On déduit de l'inégalité de Liouville une majoration de la maison d'un entier algébrique. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ entier sur $\mathbb{F}_q[T]$ et K une extension algébrique finie de $\mathbb{F}_q(T)$ contenant α . Alors,

$$\left| \frac{1}{\alpha} \right| \leq [K : \mathbb{F}_q(T)] |\overline{\alpha}|. \quad (1)$$

Définition 9. Une fonction $f(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^{q^n}$ de $\Omega[[z]]$ est appelée *fonction $HF\mathbb{F}_q$* si on a les propriétés suivantes :

$(HF_q^{(1)})$ il existe une extension finie $K/\mathbb{F}_q(T)$ qui contient tous les T_n ($n \in \mathbb{N}$).

Il existe un entier naturel n_0 tel que

$(HF_q^{(2)})$ il existe un réel h ayant la propriété que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $|\overline{T_n}| \leq hq^n$;

$(HF_q^{(3)})$ il existe un réel $\beta < 0$ et des réels Λ et Ξ tels que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $\deg(T_n) \leq (\beta n + \Lambda)q^n + \Xi$ et il existe une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ de $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\deg(T_{n_k}) = (\beta n_k + \Lambda)q^{n_k} + \Xi$;

$(HF_q^{(4)})$ il existe une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq k + n_0$, il existe $M_{n,k} \in K$ tel que pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ $M_{n,k} T_{n-j}^{q^j}$ est un entier de K de maison inférieure à $g(k)q^n$;

$(HF_q^{(5)})$ il existe un réel positif A tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_{i-l}^{q^l} \mid 0 \leq l \leq i \leq n)$ admet un dénominateur commun dans K de maison inférieure à Anq^n ;

L'hypothèse $(HF_q^{(2)})$ implique que toute fonction HF_q est entière sur Ω . On considère une fonction $f(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^q$ qui est HF_q . Dans la suite de ce paragraphe, nous gardons les notations présentées ci-dessus. On note k un entier naturel supérieur à n_0 .

Notations : Pour tout entier n supérieur à $k + 1$, on pose

$$\Delta^{(n,k)} = \left| T_{i-j}^{q^j} \right|_{\substack{0 \leq i \leq n+k \\ 0 \leq j \leq k-1}}$$

et pour tout $u \in \llbracket 0, k \rrbracket$

$$\gamma_u^{(n,k)} = \begin{vmatrix} T_n & T_{n-1}^q & \cdots & T_{n-(u-1)}^{q^{u-1}} & T_{n-k}^{q^k} & T_{n-(u+1)}^{q^{u+1}} & \cdots & T_{n-k+1}^{q^{k-1}} \\ T_{n+1} & T_n^q & \cdots & T_{n+1-(u-1)}^{q^{u-1}} & T_{n+1-k}^{q^k} & T_{n+1-(u+1)}^{q^{u+1}} & \cdots & T_{n-k+2}^{q^{k-1}} \\ \vdots & \vdots \\ T_{n+k-1} & T_{n+k-2}^q & \cdots & T_{n+k-1-(u-1)}^{q^{u-1}} & T_{n-1}^{q^k} & T_{n+k-1-(u+1)}^{q^{u+1}} & \cdots & T_n^{q^{k-1}} \end{vmatrix}.$$

Les éléments $\Delta_{n,k}$ et $\gamma_u^{(n,k)}$ ($u \in \llbracket 0, k \rrbracket$) sont des éléments de K . Le lemme suivant donne une estimation de leurs degrés et la taille de leurs dénominateurs.

Lemme 10. *Soit j un entier naturel.*

a) *On a*

$$\deg(\Delta^{(n_j,k)}) = ((\beta n_j + \Lambda)q^{n_j} + \Xi) \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

et pour tout $u \in \llbracket 0, k \rrbracket$,

$$\deg(\gamma_u^{(n_j,k)}) \leq \deg(\Delta^{(n_j,k)}) - \beta q^{n_j} \frac{q^k - q^u}{q - 1} + (q^k - q^u)\Xi.$$

b) *Il existe un réel B_k tel que $(\prod_{i=n_j}^{n_j+k-1} M_{i,k}) \Delta^{(n_j,k)}$ et $(\prod_{i=n_j}^{n_j+k-1} M_{i,k}) \gamma^{(n_j,k)}$ ($u \in \llbracket 0, k \rrbracket$) soient des entiers de K de maison inférieure à $B_k q^{n_j}$.*

Démonstration. a) Soit $(l_i)_{n_j \leq i < n_j+k}$ une suite d'entiers distincts de $\llbracket 0, k \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_j}^{n_j+k-1} \deg(T_{i-l_i}^{q^{l_i}}) &\leq \sum_{i=n_j}^{n_j+k-1} q^{l_i} ((\beta(i-l_i) + \Lambda)q^{i-l_i} + \Xi) \\ &\leq q^{n_j} \left(\sum_{i=0}^{k-1} (\beta(n_j+i) + \Lambda)q^i - \beta \sum_{i=0}^{k-1} v_i q^i \right) + \frac{q^k - 1}{q - 1} \Xi \end{aligned} \quad (2)$$

où l'on a posé $v_i = l_{n_j+i}$. L'unique maximum de $\sum_{i=0}^{k-1} v_i q^i$ est atteint pour la suite $v_i = i$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Comme

$$\sum_{i=n_j}^{n_j+k-1} \deg(T_{i-(i-n_j)}^{q^{i-n_j}}) = \sum_{i=n_j}^{n_j+k-1} \deg(T_{n_j}^{q^{i-n_j}}) = \sum_{i=0}^{k-1} q^i ((\beta n_j + \Lambda)q^{n_j} + \Xi),$$

par la formule de Leibniz pour le déterminant, on a

$$\deg(\Delta^{(n_j,k)}) = ((\beta n_j + \Lambda)q^{n_j} + \Xi) \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

De même, soit $(m_i)_{n_j \leq i < n_j+k}$ une suite d'entiers distincts de $\llbracket 0, k \rrbracket \setminus \{u\}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_j}^{n_j+k-1} \deg(T_{i-m_i}^{q^{m_i}}) &\leq \sum_{i=n_j}^{n_j+k-1} q^{m_i} ((\beta(i-m_i) + \Lambda)q^{i-m_i} + \Xi) \\ &\leq q^{n_j} \left(\sum_{i=0}^{k-1} (\beta(n_j+i) + \Lambda)q^i - \beta \sum_{i=0}^{k-1} w_i q^i \right) + \left(\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} - q^u \right) \Xi, \end{aligned}$$

où l'on a posé $w_i = m_{n_j+i}$. Le minimum de $\sum_{i=0}^{k-1} w_i q^i$ est atteint pour la suite $(w_i)_{0 \leq i < k}$ définie par $w_i = i$ si $i \in \llbracket 0, u \llbracket$ et $w_i = i + 1$ si $i \in \llbracket u, k \llbracket$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \deg(\gamma_u^{(n_j, k)}) &\leq q^{n_j} \left(\sum_{i=0}^{k-1} q^i (\beta(n_j + i) + \Lambda) - \beta \left(\sum_{i=0}^{u-1} i q^i + \sum_{i=u}^{k-1} (i+1) q^i \right) \right) + \left(\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} - q^u \right) \Xi \\ &\leq \deg(\Delta^{(n_j, k)}) - \beta q^{n_j} \frac{q^k - q^u}{q - 1} + (q^k - q^u) \Xi. \end{aligned}$$

b) D'après la propriété $(HF_q^{(4)})$, les éléments $(\prod_{i=n_j}^{n_j+k-1} M_{i,k}) \Delta^{(n_j, k)}$ et $(\prod_{i=n_j}^{n_j+k-1} M_{i,k}) \gamma_u^{(n_j, k)}$ ($u \in \llbracket 0, k \llbracket$) sont des d'entiers de K de maison inférieure à $\sum_{i=n_j}^{n_j+k-1} g(k) q^i = \frac{q^k - 1}{q - 1} g(k) q^{n_j}$. $\square$

Proposition 11. *Il existe des réels C_1, C_2, C_3 et un entier naturel j_1 (ne dépendant que de k et f) tels que pour tout entier $j \geq j_1$, il existe des suites d'éléments $(c_i^{(j, k)})_{0 \leq i \leq k}$, $(q_i^{(j, k)})_{0 \leq i < n_j}$ et $(d_l^{(j, k)})_{l \geq n_j + k}$ de K ayant les propriétés suivantes :*

- a) $c_k^{(j, k)} = 1$;
- b) dans $\Omega[[Z]]$, on a l'égalité

$$\sum_{i=0}^k c_i^{(j, k)} f^{q^i}(Z) - \sum_{i=0}^{n_j-1} q_i^{(j, k)} Z^{q^i} = \sum_{i \geq n_j + k} d_i^{(j, k)} Z^{q^i} ;$$

c) il existe un dénominateur commun dans K aux $c_u^{(j, k)}$ ($u \in \llbracket 0, k \llbracket$) de maison inférieure à $C_1 q^{n_j}$;

d) pour tout $i \in \llbracket 0, k \llbracket$, on a $\deg(c_i^{(j, k)}) \leq -\beta q^{n_j} \frac{q^k - q^i}{q - 1} + (q^k - q^i) \Xi$ et $\lceil c_i^{(j, k)} \rceil \leq C_3 q^{n_j}$;

e) pour tout $i \in \llbracket 0, k \llbracket$, on a $\lceil q_i^{(j, k)} \rceil \leq C_2 q^{n_j}$;

f) il existe un dénominateur commun dans K aux $q_i^{(j, k)}$ ($i \in \llbracket 0, n_j \llbracket$) de maison inférieure à $(A n_j + C_1) q^{n_j}$;

g) pour tout entier $l > n_j + k$ $\deg(d_l^{(j, k)}) \leq (\beta(l - k) + \Lambda) q^l + \Xi q^k$;

h) $\deg(d_{n_j+k}^{(j, k)}) = (\beta n_j + \Lambda) q^{n_j+k} + \Xi q^k$.

Démonstration. a-b) Posons $c_k^{(j, k)} = 1$. On a

$$\sum_{i=0}^k c_i^{(j, k)} f^{q^i}(Z) - \sum_{i=0}^n q_i^{(j, k)} Z^{q^i} = \sum_{l \geq 0} d_l^{(j, k)} Z^{q^l}$$

où

$$d_l = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min(l, k)} c_i^{(j, k)} T_{l-i}^{q^i} - q_l^{(j, k)} & \text{pour } 0 \leq l < n_j \\ \sum_{i=0}^k c_i^{(j, k)} T_{l-i}^{q^i} & \text{pour } l \geq n_j. \end{cases} \quad (3)$$

On considère le système (S) de $n_j + k$ équations en les $n_j + k$ inconnues $(c_i^{(j, k)})_{0 \leq i < k}$ et $(q_i^{(j, k)})_{0 \leq i < n_j}$:

$$(S) : \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min(l, k)} c_i^{(j, k)} T_{l-i}^{q^i} - q_l^{(j, k)} = 0 & (0 \leq l < n_j) \\ \sum_{i=0}^k c_i^{(j, k)} T_{l-i}^{q^i} = 0 & (n_j \leq l < n_j + k) \end{cases}$$

Le Lemme 10 implique qu'il existe un $j_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq j_1$ $\Delta^{(n_j, k)} \neq 0$. En considérant les équations de (S) pour $l \in \llbracket n_j, n_j + k \llbracket$, les formules de Cramer impliquent que pour tout $i \in \llbracket 0, k \llbracket$, $c_i^{(j, k)} = \frac{\gamma_i^{(n_j, k)}}{\Delta^{(n_j, k)}}$. Par conséquent, (S) admet pour unique solution

$$\begin{cases} c_i^{(j, k)} = \frac{\gamma_i^{(n_j, k)}}{\Delta^{(n_j, k)}} & \text{pour } i \in \llbracket 0, k \llbracket \\ q_i^{(j, k)} = \sum_{l=0}^{\min(i, k)} c_l^{(j, k)} T_{i-l}^{q^l} & \text{pour } i \in \llbracket 0, n_j \llbracket. \end{cases}$$

Les $c_i^{(j, k)}$ ($0 \leq i \leq k$) et les $q_i^{(j, k)}$ ($0 \leq i < n_j$) sont dans K .

c) L'égalité

$$c_i^{(j,k)} = \gamma_i^{(n_j,k)} \prod_{u=n_j}^{n_j+k-1} M_{u,k} \left/ \left(\Delta^{(n_j,k)} \prod_{u=n_j}^{n_j+k-1} M_{u,k} \right) \right.$$

et la seconde partie du Lemme 10 montrent que les $c_i^{(j,k)}$ ($i \in \llbracket 0, k \rrbracket$) admettent un dénominateur commun dans K de maison inférieur à $B_k q^{n_j}$.

d) La première partie de l'assertion est une reformulation de la propriété Lemme 10.a). On a

$$\begin{aligned} \overline{c_i^{(j,k)}} &\leq \overline{\gamma_i^{(n_j,k)} \prod_{u=n_j}^{n_j+k-1} M_{u,k}} + [K : \mathbb{F}_q(T)] \overline{\Delta^{(n_j,k)} \prod_{u=n_j}^{n_j+k-1} M_{u,k}} \\ &\leq (1 + [K : \mathbb{F}_q(T)]) B_k q^{n_j}, \end{aligned}$$

par la deuxième partie du Lemme 10 et l'inégalité (1).

e) D'après la propriété $(HF_q^{(2)})$, on a pour tout $i \in \llbracket 0, n_j \rrbracket$ et pour tout $l \in \llbracket 0, \min(i, k) \rrbracket$

$$\overline{c_i^{(j,k)} T_{i-l}^{q^l}} \leq \overline{c_i^{(j,k)}} + \overline{T_{i-l}^{q^l}} \leq (C_3 + h) q^{n_j},$$

ce qui mène à la majoration souhaitée de la maison de $q_i^{(j,k)}$.

f) Ceci est une conséquence immédiate de la propriété $(HF_q^{(5)})$ et la partie c) de cette proposition.

g) Pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a

$$\deg(c_i^{(j,k)} T_{l-i}^{q^i}) \leq \beta \left(\frac{q^{n_j+i}}{q-1} - i q^l \right) - \frac{\beta q^{n_j+k}}{q-1} + (\beta l + \Lambda) q^l + \Xi q^k.$$

Puisque $l \geq n_j + k$, la suite $\left(\beta \left(\frac{q^{n_j+i}}{q-1} - i q^l \right) \right)_{0 \leq i \leq k}$ est strictement croissante. Elle atteint son unique maximum en $i = k$. On obtient que $\deg(d_l^{(j,k)}) \leq (\beta(l-k) + \Lambda) q^l + \Xi q^k$.

h) On a $\deg(c_k^{(j,k)} T_{n_j}^{q^k}) = (\beta n_j + \Lambda) q^{n_j+k} + \Xi q^k$. De plus, la preuve précédente montre que pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a $\deg(c_i^{(j,k)} T_{n_j+k-i}^{q^i}) < (\beta n_j + \Lambda) q^{n_j+k} + \Xi q^k$. Ceci prouve que $\deg(d_{n_j+k}^{(j,k)}) = (\beta n_j + \Lambda) q^{n_j+k} + \Xi q^k$. $\square$

Théorème 12. Soit f une fonction HF_q et $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul. Alors $f(\alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(\alpha)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. On note $\tilde{K} = K(\alpha, f(\alpha))$, δ le degré de l'extension $\tilde{K}/\mathbb{F}_q(T)$ et $L = \max\{0, \lceil \alpha \rceil, \lceil f(\alpha) \rceil\}$. Utilisons les notations et les propriétés de la Proposition 11. On note pour tout entier $j \geq j_1$, $U^{(j,k)} = \sum_{i=0}^k c_i^{(j,k)} f^{q^i}(\alpha) - \sum_{i=0}^{n_j-1} q_i^{(j,k)} \alpha^{q^i}$ et $R^{(j,k)} = \sum_{l \geq n_j+k} d_l^{(j,k)} \alpha^{q^l}$. Il vient de la Proposition 11.g) que la suite $\left(\deg(d_l^{(j,k)} \alpha^{q^l}) \right)_{l \geq n_j+k}$ tend vers $-\infty$. Ainsi, la série $R^{(j,k)}$ converge. Comme la suite $(\beta(l-k) + \Lambda + \deg(\alpha)) q^l$ $l \in \mathbb{N}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang, par la Proposition 11.g) et la Proposition 11.h), il existe un entier $j_2 \geq j_1$ tel que pour tout $j \geq j_2$, $\deg(R^{(j,k)}) = \mathfrak{S}^{(j,k)}$, où l'on a noté $\mathfrak{S}^{(j,k)} = (\beta n_j + \Lambda + \deg(\alpha)) q^{n_j+k} + \Xi q^k$. Puisque $U^{(j,k)} = R^{(j,k)}$, on obtient que

$$\deg(U^{(j,k)}) = \mathfrak{S}^{(j,k)}. \quad (4)$$

En particulier, $U^{(j,k)}$ est non nul. Par les Proposition 11.d) et Proposition 11.e), on a l'estimation $\overline{U^{(j,k)}} \leq C_4 q^{n_j}$ avec $C_4 = L + \max(C_2, C_3)$. Soit $\mathcal{D}$ un dénominateur commun dans $\mathbb{F}_q(T)$ de α et $f(\alpha)$. D'après la Proposition 11.c), il existe $\omega \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}$ de maison inférieur à $(An_j + 2C_1 + \deg(\mathcal{D})) q^{n_j}$ tel que $\omega U^{(j,k)}$ appartient à $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$. Notons s le degré

de séparabilité de $\omega U^{(j,k)}$ sur $\mathbb{F}_q(T)$. Comme $U^{(j,k)}$ est un élément de $\tilde{K}$ non nul, d'après l'inégalité de Liouville, il existe un entier $j_3 \geq j_2$ tel que pour tout entier $j \geq j_3$, on a

$$\begin{aligned} \deg(U^{(j,k)}) &\geq -s\omega - (s-1)\overline{|U^{(j,k)}|} \\ &\geq -s((A+1)n_j + 2C_1 + \deg(\mathcal{D}))q^{n_j} - C_4(s-1)q^{n_j} \\ &\geq -(A+2)\delta n_j q^{n_j}. \end{aligned} \quad (5)$$

Pour k vérifiant l'inégalité $\beta q^k < -(A+2)\delta$, comme $\mathfrak{S}^{(j,k)} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \beta q^k n_j q^{n_j}$, les inégalités (4) et (5) sont mutuellement contradictoires pour j assez grand. Ceci montre que $f(\alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$. $\square$

Pour la suite, il est utile d'introduire une sous-classe de l'ensemble des fonctions HFR_q .

Définition 13. Une fonction $f(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^{q^n}$ de $\Omega[[z]]$ est appelée fonction HFR_q si elle vérifie les propriétés $(HFR_q^{(1)})$, $(HFR_q^{(2)})$, $(HFR_q^{(4)})$ et $(HFR_q^{(5)})$ de la Définition 9 et la propriété $(HFR_q^{(3)})$ est remplacée par la propriété :

$(HFR_q^{(3)})$ il existe un réel $\beta < 0$ et des réels Λ et Ξ tels que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $\deg(T_n) = (\beta n + \Lambda)q^n + \Xi$.

Proposition 14. Soit K une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$ et $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de K . On suppose que a_0 est non nul et qu'il existe un réel ν tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n admet un dénominateur dans K de maison inférieure à νq^n . De plus, on suppose qu'il existe un entier naturel J et des réels μ , τ et r , avec $r < 0$, tels que pour tout entier $j \geq J$, on ait $|\overline{a_j}| \leq \mu$ et $\deg(a_j) = r q^j + \tau$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = a_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n u_{n-1}^q$. La fonction $F(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^{q^n}$ est une fonction HFR_q .

Démonstration. Une récurrence immédiate montre que la suite $\mathbf{a}$ est bien définie et tous ses termes sont non nuls. De plus, pour tout entier naturel n , a_n appartient à K et si n est supérieur à J , on a

$$a_n = a_J^{q^{n-J}} \prod_{j=0}^{n-J-1} a_{n-j}^{q^j}.$$

On en déduit que

$$|\overline{a_n}| \leq q^{n-J|\overline{a_J}|} + \mu \frac{q^{n-J} - 1}{q-1} \quad \text{et} \quad (6)$$

$$\deg(a_n) = r n q^n + \left(\frac{\tau q^{-J}}{q-1} - J r + q^{-J} \deg(a_J) - r J \right) q^n - \frac{\tau}{q-1}. \quad (7)$$

Ainsi F vérifie les propriétés $(HFR_q^{(1)})$, $(HFR_q^{(2)})$ et $(HFR_q^{(3)})$. Soit d_n un dénominateur dans K de a_n de maison inférieure à νq^n . Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq l \leq k$ et $n \geq J+k$, on a

$$\left(\prod_{j=0}^{k-1} (d_{n-j} a_{n-j})^{q^j} \times \frac{1}{u_n} \right) u_{n-l}^{q^l} = \prod_{j=l}^{k-1} (d_{n-j} a_{n-j})^{q^j} \prod_{j=0}^{l-1} d_{n-j}^{q^j}.$$

Ainsi, il existe un entier $J_2 \geq J$ tel que $\left(\prod_{j=0}^{k-1} (d_{n-j} a_{n-j})^{q^j} \times \frac{1}{u_n} \right) \times u_{n-l}^{q^l}$ est un entier de K de maison inférieure à $k(\nu+1)q^n$ pour un tout entier $n \geq J_2$. La propriété $(HFR_q^{(4)})$ est satisfaite. La propriété $(HFR_q^{(5)})$ se montre de même en considérant pour tous les entiers i et l tels que $0 \leq l \leq i \leq n$ l'égalité

$$\left(\prod_{j=0}^n d_{n-j}^{q^j} \right) u_{i-l}^{q^l} = \prod_{j=l}^i \left(d_{i-j}^{q^{n-i+j}} a_{i-j}^{q^j} \right) \prod_{j=0}^{n-i+l-1} d_{n-j}^{q^j}.$$

$\square$

En appliquant ce théorème aux fonctions hypergéométriques de Kochubei, de Yao et de Thakur de type I , on obtient la

Proposition 15. Soit r et s deux entiers naturels tels que $r \leq s$.

- (1) Pour toutes suites $\underline{\mathbf{a}} = (a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_i)_{1 \leq i \leq s}$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{[m] \mid m \in \mathbb{N}\}$, ${}_r F K_s(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z)$ est une fonction HFR_q .
- (2) Pour toutes suites $\underline{\mathbf{a}} = (a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_i)_{1 \leq i \leq s}$ d'entiers naturels, ${}_r F_s Y(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z)$ est une fonction HFR_q .
- (3) Pour toutes suites $\underline{\mathbf{a}} = (a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_i)_{1 \leq i \leq s}$ d'entiers naturels, ${}_r F_s T^I(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z)$ est une fonction HFR_q .

Démonstration. Posons $\sigma_m = \frac{\prod_{i=1}^r (a_i)_m}{D_m \prod_{i=1}^s (b_i)_m}$ dans le premier cas, $\sigma_m = \frac{\prod_{i=1}^r (a_i)_{\theta_i m}}{D_m \prod_{i=1}^s (b_i)_{\theta_i m}}$ dans le deuxième. On constate immédiatement que la suite $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la proposition précédente. Le dernier cas est un cas particulier du deuxième. $\square$

Nous montrons maintenant que l'exponentielle associée à un module de Drinfeld de rang inférieur à 2 défini sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ est une fonction HFR_q .

Théorème 16. *Soit ρ un module de Drinfeld de rang inférieur à 2 défini sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. La fonction exponentielle associée à ρ est une fonction HFR_q .*

Démonstration. Notons $e_\rho(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{q^n}$ avec $a_0 = 1$. Si ρ est de rang 1, il existe une extension finie $K/\mathbb{F}_q(T)$ et $A \in K^*$ tel que $\rho_T = T + A\tau^q$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (voir [40, §3])

$$(T^{q^n} - T)a_n = Aa_{n-1}^q.$$

Par le Théorème 14, e_ρ est une fonction HFR_q . Dans le cas où ρ est de rang 2, le degré de a_n a été obtenu par Chen et Lee (voir [11]). On conclut avec [40]. $\square$

Le cas des fonctions hypergéométriques de Thakur de type II se traite de manière similaire. On commence par déterminer le degré de $e_n(z)$ pour un $z \in \Omega \setminus \mathbb{F}_q[T]$.

Proposition 17. *Soit $z \in \Omega \setminus \mathbb{F}_q[T]$ et $m_z = \min_{h \in \mathbb{F}_q[T]} \deg(z - h)$. Pour tout entier naturel $n > m_z$, on a*

$$\deg(e_n(z)) = (n - \frac{q}{q-1})q^n + C_z$$

avec $C_z = m_z + \frac{q}{q-1}$ si $m_z < 0$ et $C_z = (m_z + \frac{1}{q-1} - [m_z])q^{[m_z]+1}$ si $m_z \geq 0$.

Démonstration. Posons $u = -1$ si $m_z < 0$ ou $u = [m_z]$ si $m_z \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} \deg(e_n(z)) &= \sum_{\substack{h \in \mathbb{F}_q[T] \\ \deg(h) \leq u}} \deg(z - h) + \sum_{\substack{h \in \mathbb{F}_q[T] \\ u < \deg(h) < n}} \deg(z - h) \\ &= m_z q^{u+1} + \sum_{j=u+1}^{n-1} (q-1)j q^j = (n - \frac{q}{q-1})q^n + (m_z + \frac{1}{q-1} - u)q^{u+1} \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 18. *Soit $z \in \mathbb{F}_q(T) \setminus \mathbb{F}_q[T]$ et U un dénominateur de z dans $\mathbb{F}_q(T)$. Pour tout entier naturel n , $U^{2q^n} e_n(z)/D_n$ est un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$.*

Démonstration. Soit H un élément de $\mathbb{F}_q[T]$ qui divise U . On a

$$v_H(U^{2q^n} e_n(z)/D_n) = 2q^n v_H(U) - v_H(U)q^n - v_H(D_n) \geq 0,$$

puisque $v_H(U) \geq 1$ et $v_H(D_n) \leq q^n$ (voir [19, Theorem 9.1.1]). De plus, $e_n(z)/D_n \in \bigcap_{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q[T]}} \mathbb{F}_q(T)_P$, où $\mathbb{F}_q(T)_P$ désigne le localisé de $\mathbb{F}_q(T)$ en P car $e_n(X)/D_n$ appartient à $\text{Int}(\mathbb{F}_q[T])$, l'anneau des polynômes à valeurs entières sur $\mathbb{F}_q[T]$ (voir [9] ou [7]). $\square$

Nous prouvons maintenant le

Théorème 19. *Soit $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tels que $r \leq s$ et $\underline{\mathbf{a}} = (a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $\underline{\mathbf{b}} = (b_i)_{1 \leq i \leq s}$ deux suites de $\mathbb{F}_q(T) \setminus \mathbb{F}_q[T]$. Alors, ${}_r F_s T^{II}(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}; z)$ est une fonction HFR_q .*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $T_n = \frac{e_n(a_1) \cdots e_n(a_r)}{D_n e_n(b_1) \cdots e_n(b_s)}$. Clairement, u_n appartient à $\mathbb{F}_q(T)$ et par la Proposition 17, il existe $J \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq J$, on ait $\deg(T_n) = \left((r-s-1)n - \frac{q(r-s)}{q-1} \right) q^n + C$. Par conséquent, $(HF_q^{(1)})$, $(HF_q^{(2)})$ et $(HFR_q^{(3)})$ sont satisfaites. Notons U un dénominateur commun dans $\mathbb{F}_q(T)$ de la famille $\{a_i, b_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$. Soit k et l des entiers tels que $l \leq k$ et $n \geq J+k$. L'égalité

$$D_n^{s+1-r} U^{2(r+ks)q^n} \prod_{j=1}^s \prod_{m=0}^k \left(\frac{e_{n-m}(b_j)}{D_{n-m}} \right)^{q^m} T_{n-l}^{q^l} = \left(\frac{D_n}{D_{n-l}^{q^l}} \right)^{s-r} \prod_{j=1}^r \left(U^{2q^{(n-l)}} \frac{e_{n-l}(a_j)}{D_{n-l}} \right)^{q^l} \times \prod_{j=1}^s \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq l}}^k \left(U^{2q^{n-m}} \frac{e_{n-m}(b_j)}{D_{n-m}} \right)^{q^m}$$

et le Lemme 18 montrent que $D_n^{s+1-r} U^{2(r+ks)q^n} \prod_{j=1}^s \prod_{m=0}^k \left(\frac{e_{n-m}(b_j)}{D_{n-m}} \right)^{q^m} T_{n-l}^{q^l}$ est un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$. Le Lemme 17 assure l'existence d'un entier $J_2 \geq J$ tel que pour tout entier $n \geq J_2$,

$$\deg \left(D_n^{s+1-r} U^{2(r+ks)q^n} \prod_{j=1}^s \prod_{m=0}^k \left(\frac{e_{n-m}(b_j)}{D_{n-m}} \right)^{q^m} T_{n-l}^{q^l} \right) \leq (k(s+1-r) + \frac{q(s-r)}{q-1} + C) q^n.$$

Ainsi $(HF_q^{(4)})$ est vérifiée. De manière analogue, pour tous les entiers i et l tels que $0 \leq l \leq i \leq n$, l'égalité

$$D_n U^{(r+2s(n+1))q^n} \prod_{j=1}^s \prod_{m=0}^n \left(\frac{e_m(b_j)}{D_m} \right)^{q^{n-m}} T_{i-l}^{q^l} = U^{(s+r)(q^n - q^i)} \prod_{j=1}^r \left(U^{q^{i-l}} e_{i-l}(a_j) \right)^{q^l} \times \prod_{j=1}^s \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i-l}}^n \left(U^{2q^m} \frac{e_m(b_j)}{D_m} \right)^{q^{n-m}} \prod_{j=1}^s \left(U^{2q^{i-l}} \frac{e_{i-l}(b_j)}{D_{i-l}} \right)^{q^l} \times \left(U^{q^{i-l}} e_{i-l}(b_j) \right)^{q^{n-i+l-q^l}}$$

montre qu'il existe un entier $J_3 \geq J_2$ tel que pour tout entier $n \geq J_3$,

$$D_n U^{(r+2s(n+1))q^n} \prod_{j=1}^s \prod_{m=0}^n \left(\frac{e_m(b_j)}{D_m} \right)^{q^{n-m}} T_{i-l}^{q^l}$$

est un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré inférieur à $s(2 \deg(U) + 1) n q^n$, ce qui prouve $(HF_q^{(5)})$. $\square$

La preuve ci-dessus repose sur le fait que les coefficients de ${}_r F_s T^{II}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z)$ admettent de « gros » facteurs communs. Dans le cas où les paramètres sont seulement algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$, le nombre de facteurs en commun ne semble pas permettre d'appliquer le théorème 12.

Problème. La conclusion du Théorème 19 est-elle encore valable dans les cas où tous les paramètres sont algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$?

Les Théorèmes 15 et 19 permettent d'obtenir la forme définitive des résultats partiels obtenus dans [34] et [37]. En particulier, nous obtenons une preuve de la conjecture **TWYZ**.

Théorème 20. *Soit r et s des entiers naturels tels que $r \leq s$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul. Pour toute fonction $f \in {}_r \mathcal{F}_s$, $f(\alpha)$ est transcendant.*

Comme conséquence, on retrouve ou améliore certains résultats classiques de transcendance de fonctions spéciales en caractéristique positive. Par exemple, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul, les nombres $\exp_C(\alpha)$, $J_m(\alpha)$ et $\exp_C^{[l]}(\alpha)$ ($l \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$) (voir [35], [14], [15]) sont transcendants. On en déduit aussi le

Corollaire 21. *Tout zéro non nul d'une fonction hypergéométrique considérée dans le Théorème 20 est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

□

Nous montrons maintenant que dans certains cas, les dénominateurs obtenus dans la partie précédentes peuvent être améliorés.

Lemme 24. *Soit m, n deux entiers naturels avec $m \leq n$ et $f = \sum_{n \geq 0} T_n z^{q^n}$ une fonction de ${}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^I \cup {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^{II} \cup {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{Y}$. Alors la famille $\{D_n^{s+r-1}T_{n-i}^{q^i} \mid i \in \llbracket 0, m \rrbracket\}$ admet un dénominateur dans K de maison dominée par q^n .*

Démonstration. Supposons que $T_n = \frac{(a_1)_{n \dots} (a_r)_n}{D_n (b_1)_{n \dots} (b_s)_n}$ (les autres cas se traitant de même). Posons $b_0 = 1$. On a pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$,

$$D_n^{s+1-r} T_{n-i}^{q^i} = \prod_{j=1}^r \frac{(a_j)_{n-i}^{q^i}}{(b_{j-1})_{n-i}^{q^i}} \prod_{j=r}^s \frac{(b_0)_{n-i}^{q^i}}{(b_j)_{n-i}^{q^i}}.$$

Il suffit alors de remarquer que pour tout $a, b, k, l \in \mathbb{N}$ ($a \geq b, l \leq k$),

$$\frac{(a)_{k-l}^{q^l}}{(b)_{k-l}^{q^l}} = \prod_{i=b}^{a-1} (T^{q^k} - T^{q^{l-i}}).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de présenter une mesure de transcendance pour les valeurs prises en un argument algébrique non nul d'une fonction de ${}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^I \cup {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^{II} \cup {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{Y}$.

Théorème 25. *Soit r, s des entiers naturels tel que $r \leq s$, f une fonction hypergéométrique de ${}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^{II} \cup {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{Y}$, $\alpha \in \mathbb{F}_q(T)$ non nul, δ le degré de séparabilité de $\mathbb{F}_q(T)(\alpha)$ sur $\mathbb{F}_q(T)$, ε un réel strictement positif et d un entier naturel non nul. Il existe un entier B_0 tels que pour tout polynôme $B \in \mathbb{F}_q[T][X]$ de degré d et de hauteur inférieure à B_0 , on ait*

$$\deg(B(f(\alpha))) \geq (1 - \varepsilon - 4qd(\delta + 1)^2) H(B).$$

Démonstration. Notons $f = \sum_{n \geq 0} T_n z^{q^n}$, $\beta = s+1-r$ et $K = \mathbb{F}_q(T)(\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha\})$. On a $[K : \mathbb{F}_q(T)]_s = [\mathbb{F}_q(T)(\alpha) : \mathbb{F}_q(T)]_s$. Les fonctions f_i de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ apparaissant au cours de cette preuve ne dépendent que de f et sont toutes négligeables devant l'identité. Considérons les entiers m et n tels que $q^{m-1} \leq 2d(\delta + 1) < q^m$ et $nq^n \leq \frac{2(\delta+1)}{\beta} H(B) < (n+1)q^{n+1}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons $n_j = j$. Notons $\tilde{A}(X)$ le polynôme $\sum_{i=0}^m c_i^{(j+1, m)} X^{q^i} + \sum_{i=0}^n q_i^{(j+1, m)} \alpha^{q^i}$ introduit dans la Proposition 11. Puisque pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $D_n^{s+1-r} T_{n-i}^{q^i}$ a un dénominateur dans K dominé par q^n , les estimations vues précédemment montre qu'il existe un élément ω de K tel que le polynôme $A = \omega \tilde{A}$ appartient à $\mathcal{O}_K[X]$, est de degré q^m et ses coefficients sont de maison inférieure à $\beta nq^n + f_0(nq^n)$, ayant la propriété qu'il existe un entier B_1 tel que pour si $H(B) \geq B_1$, on a

$$\deg(A(f(\alpha))) = -\beta nq^{n+m+1} + \beta nq^n + f_1(nq^n).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \deg(\text{Res}(A, B)) &\leq q^m H(B) + d\beta nq^n + f_2(H(B)) \\ \deg(P(f(\alpha))) &\leq (d-1)\beta nq^n + q^m H(B) + f_3(H(B)) \\ \deg(Q(f(\alpha))) &\leq d\beta nq^n + (q^m - 1)H(B) + f_4(H(B)) \end{aligned}$$

Supposons que B est irréductible et ne divise pas A . Comme $\text{Res}(A, B) \neq 0$, par l'inégalité de Liouville, on a

$$\deg(\text{Res}(A, B)) \geq -\delta(q^m H(B) + d\beta nq^n + f_2(H(B))).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \deg(P(f(\alpha))A(f(\alpha))) - \deg(\text{Res}(A, B)) &\leq (\delta + 1)(d\beta nq^n + q^m H(B)) - \beta nq^{n+m+1} + f_5(H(B)) \\ &\leq (\delta + 1)(2d(\delta + 1) - q^m)H(B) + f_5(H(B)). \end{aligned}$$

Comme $2d(\delta + 1) - q^m < 0$, il existe un entier $B_0 \geq B_1$ tel que si $H(B) \geq B_0$, alors $\deg(P(f(\alpha))A(f(\alpha))) < \deg(\text{Res}(A, B))$. On en déduit que $\deg(B(f(\alpha))Q(f(\alpha))) = \deg(\text{Res}(A, B))$. Ainsi

$$\begin{aligned} \deg(B(f(\alpha))) &= \deg(\text{Res}(A, B)) - \deg(Q(f(\alpha))) \\ &\geq -\delta(q^m H(B) + d\beta nq^n) - (d\beta nq^n + (q^m - 1)H(B)) + f_6(H(B)) \\ &\geq (1 - 2(q + 1)d(\delta + 1)^2) H(B) + f_6(H(B)). \end{aligned}$$

Supposons que B divise A . Il existe $D \in K[X]$ tel que $A = BD$. Puisque $H(D) = H(A) - H(B)$ (voir [18, Lemma 9.5]), il vient que

$$\begin{aligned} \deg(B(f(\alpha))) &\geq -\beta nq^{n+m+1} + \beta nq^n - (H(A) - H(B)) + f_7(H(B)) \\ &\geq -\beta nq^{n+m+1} + H(B) + f_7(H(B)) \\ &\geq (1 - 4qd(\delta + 1)^2) H(B) + f_7(H(B)). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a

$$\deg(B(f(\alpha))) \geq (1 - 4qd(\delta + 1)^2) H(B) + f_8(H(B)).$$

Supposons maintenant que B se décompose en un produit de facteurs irréductibles

$$B = B_1 B_2 \cdots B_w.$$

Par les cas précédents,

$$\deg(B(f(\alpha))) \geq (1 - 4qd(\delta + 1)^2) H(B) + \sum_{i=1}^w f_9(H(B_i))$$

Comme $w \leq d$, $\sum_{i=1}^w f_9(H(B_i))$ est négligeable devant $H(B)$. On en conclut que

$$\deg(B(f(\alpha))) \geq (1 - 4qd(\delta + 1)^2) H(B) + f_{10}(H(B)).$$

□

Remarque 26. (1) La mesure de transcendance obtenue est de qualité analogue à celle obtenue par Lang [26] et Mahler [28] dans le cas de la caractéristique nulle.

(2) Puisque toutes les estimations en jeu peuvent être totalement rendues explicites, il est certainement possible d'obtenir une mesure de transcendance qui est explicite en la dépendance sur le degré d . Nous n'avons pas cherché à déterminer cette dépendance. Naturellement il serait très intéressant de s'y consacrer.

(3) On constate que la mesure de transcendance présentée ici appliquée au cas $\exp_{\mathcal{C}}(1)$ améliore d'un facteur logarithmique celle obtenue par Bunduschuh dans [6, Satz 1].

Dans le cas d'une fonction hypergéométrique de Kochubei générale, il ne semble pas y avoir de simplification apparente comme dans le Lemme 24. La même méthode que précédemment mène à une mesure de transcendance moins bonne que celle obtenue dans le cas des autres fonctions hypergéométriques.

Théorème 27. Soit r, s des entiers naturels tel que $r \leq s$, $f = \sum_{n \geq 0} T_n z^{\alpha n}$ une fonction hypergéométrique de ${}_r\mathcal{F}_s\mathcal{K}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}(T)$ non nul, δ le degré de séparabilité de $\mathbb{F}_q(T)$ ($\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha\}$) sur $\mathbb{F}_q(T)$, ε un réel strictement positif et d un entier naturel non nul. Il existe un entier B_0 tels que pour tout polynôme $B \in \mathbb{F}_q[T][X]$ de degré d et de hauteur inférieur à B_0 , on ait

$$\deg(B(f(\alpha))) \geq \left(1 - \varepsilon - \frac{d(s+1)(\delta+1)}{\beta^2} \left(q\beta + \sqrt{q\beta(\delta+1)}\right) \left(\delta + 1 + \sqrt{q\beta(\delta+1)}\right)\right) H(B),$$

où l'on a posé $\beta = s + 1 - r$.

Démonstration. En reprenant les notations du théorème précédent, il suffit d'adapter la preuve en considérant les entiers m et n tels que $nq^n \leq \frac{\delta+1+\sqrt{q\beta(\delta+1)}}{\beta} < (n+1)q^{n+1}$ et $q^{m-1} \leq \frac{d(s+1)(\delta+1)(q\beta+\sqrt{q\beta(\delta+1)})}{q\beta^2} < q^m$ et en remarquant qu'il existe $\omega \in K$ tel que le

polynôme $\omega\tilde{A}(X)$ est à coefficients entiers sur $\mathbb{F}_q(T)$ de maison inférieure à $(s+1)nq^n + f_0(nq^n)$ $\square$

On en déduit une mesure d'approximation des valeurs d'une fonction hypergéométrique en des arguments algébriques. Rappelons que la hauteur $H(\alpha)$ d'un élément α de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ est la hauteur du polynôme non nul (à un multiple d'un élément de $\mathbb{F}_q^\times$ près) de $\mathbb{F}_q[T][X]$ de degré minimal et de hauteur minimale annulant α .

Théorème 28. *Soit d, r, s trois entiers naturels tels que $d > 0$ et $r \leq s$, $f = \sum_{n \geq 0} T_n z^{qn}$ une fonction de ${}_r\mathcal{F}_s$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier B tel que pour tout $\phi \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ de degré d sur $\mathbb{F}_q(T)$ et de hauteur inférieure à B , on ait*

$$\deg(f(\alpha) - \phi) \geq \min(0, (d-1) \max(\deg(f(\alpha)), 0) - \tau_\varepsilon) B$$

où, en posant $\beta = s+1-r$ et $\delta = [\mathbb{F}_q(T)(\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha\}) : \mathbb{F}_q(T)]_s$,

$$\tau_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon + 4qd(\delta+1)^2 & \text{si } f \in {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{Y} \cup {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{T}^{II}, \\ \varepsilon + \frac{d(s+1)(\delta+1)}{\beta^2} (q\beta + \sqrt{q\beta(\delta+1)}) (\delta+1 + \sqrt{q\beta(\delta+1)}) & \text{si } f \in {}_r\mathcal{F}_s\mathcal{K}. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^d p_k X^k$ le polynôme minimal de ϕ sur $\mathbb{F}_q(T)$. On a

$$P(f(\alpha)) - P(\phi) = (f(\alpha) - \phi) \sum_{k=1}^d p_k \sum_{u=0}^{k-1} f^u(\alpha) \phi^{k-1-u}$$

Supposons que $\deg(f(\alpha) - \phi) \leq 0$. Il s'ensuit que $\deg(\phi) \leq \max(0, \deg(f(\alpha)))$. On en déduit que

$$\deg(P(f(\alpha)) - P(\phi)) \leq \deg(f(\alpha) - \phi) + B + \max_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 0 \leq u < k}} u \deg(f(\alpha)) + (k-1-u) \deg(\phi)$$

$$\deg(P(f(\alpha))) \leq \deg(f(\alpha) - \phi) + B + (d-1) \max(0, \deg(f(\alpha))).$$

On conclut alors grâce aux Théorèmes 25 et 27. $\square$

4. THÉORÈME DE LINDEMANN-WEIERSTRASS

Dans cette partie, nous montrons que toute fonction de type HFR_q satisfait à un analogue du théorème de Lindemann-Weierstrass. Dans le cas de l'exponentielle classique, ce fut la version originale obtenue par Weierstrass [36]. Dans le cas des fonctions hypergéométriques, la version du théorème de Lindemann-Weierstrass n'a été obtenue qu'en 2022 par Delaigue [12]. Les auteurs insistent sur le fait, comme précisé dans l'introduction, que le théorème présenté ci-dessous concernant une classe indénombrable de fonctions, est beaucoup plus fort que le résultat de Delaigue en caractéristique nulle qui, par la nature de sa preuve d'origine fonctionnelle, ne peut s'appliquer qu'à un nombre dénombrable de fonctions.

Théorème 29. *Soit f une fonction HFR_q et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Alors la famille $(1, f(\alpha_i))_{1 \leq i \leq s}$ est $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ -linéairement dépendante si et seulement si la famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq s}$ est $\mathbb{F}_q$ -linéairement dépendante.*

Démonstration. Par la $\mathbb{F}_q$ -linéarité de la fonction f , une relation de $\mathbb{F}_q$ -dépendance linéaire pour la famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq s}$ mène à une relation de $\mathbb{F}_q$ (et donc $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$) relation de dépendance linéaire pour la famille $(1, f(\alpha_i))_{1 \leq i \leq s}$. Supposons qu'il existe une famille $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ qui est $\mathbb{F}_q$ -linéairement indépendante telle que la famille $\{1, f(\alpha_i) \mid 1 \leq i \leq s\}$ est $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ -linéairement dépendante. On peut supposer que $\mathcal{F}$ est de cardinal minimal (minimalité (M^*)). Il existe des éléments $b_0, \dots, b_s$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ tels que

$$b_0 + \sum_{i=1}^s b_i f(\alpha_i) = 0. \quad (8)$$

En particulier, $\sum_{i=1}^s b_i f(\alpha_i)$ est algébrique. Par minimalité, tous les b_i ($1 \leq i \leq s$) sont non nuls. Considérons la fonction

$$F(z) := \sum_{i=1}^s b_i f(\alpha_i z) = \sum_{n \geq 0} S_n T_n z^{qn},$$

où l'on a posé $S_n = \sum_{i=1}^s b_i \alpha_i^{q^n}$. On munit l'ensemble $\{(b_i, \alpha_i) \mid 1 \leq i \leq s\}$ de la relation de préordre $\preceq$ définie par : $(b_i, \alpha_i) \preceq (b_l, \alpha_l)$ si et seulement si $\deg(\alpha_i) < \deg(\alpha_l)$ ou $(\deg(\alpha_i) = \deg(\alpha_l) \text{ et } \deg(b_i) \leq \deg(b_l))$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que les couples (b_i, α_i) ($1 \leq i \leq s$) sont rangés par ordre croissant pour $\preceq$. Clairement, pour tout entier naturel n , on a $\deg(S_n) \leq \deg(b_s \alpha_s^{q^n})$. Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg(S_{u_n}) = \deg(b_s \alpha_s^{q^{u_n}}),$$

On vérifie alors facilement que F est une fonction HF_q . Par la Proposition 12, $F(1)$ est transcendant, ce qui contredit le fait que $\sum_{i=1}^s b_i f(\alpha_i)$ est algébrique. Ainsi, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\deg(S_n) < \deg(b_s \alpha_s^{q^n})$. On peut supposer que $\mathcal{F}$ a un nombre minimal de termes maximaux pour l'ordre $\preceq$ (minimalité $(M * *)$). Considérons le plus petit entier $v \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que pour tout $c \in \llbracket v, s \rrbracket$, (b_c, α_c) est un élément maximal de $\mathcal{F}$. Par le cas précédent, on a $v \leq s - 1$. Nécessairement, pour tout entier $n \geq n_0$, $\deg(\sum_{i=v}^s b_i \alpha_i^{q^n}) < \deg(b_s \alpha_s^{q^n})$ et $\deg(\sum_{i=1}^{v-1} b_i \alpha_i^{q^n}) < \deg(b_s \alpha_s^{q^n})$. Notons Ω_0 l'anneau $\{z \in \Omega \mid \deg(z) \leq 0\}$ et $\mathcal{M}$ son idéal maximal. Dans $\Omega_0/\mathcal{M}$, on obtient les relations non triviales : pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{i=v}^s \overline{b_i / b_s \cdot \alpha_i / \alpha_s}^{q^n} = 0.$$

On en déduit que le déterminant de Moore $\Delta_{s-v+1} \left(\left(\overline{\alpha_v / \alpha_s} \right)^{q^{n_0}}, \dots, \left(\overline{\alpha_s / \alpha_s} \right)^{q^{n_0}} \right)$ (voir [19, Definition 1.3.2]) est nul. Par [19, Lemma 1.3.3], la famille $\left(\left(\overline{\alpha_i / \alpha_s} \right)^{q^{n_0}} \right)_{i \in \llbracket v, s \rrbracket}$ est $\mathbb{F}_q$ -linéairement dépendante. Il en est donc de même pour la famille $(\overline{\alpha_i / \alpha_s})_{i \in \llbracket v, s \rrbracket}$. Ainsi, il existe $R \in \mathcal{M}$ et des éléments de $\mathbb{F}_q$ non tous nuls $\lambda_v, \dots, \lambda_s$ tels que

$$\sum_{i=v}^s \lambda_i \alpha_i = \alpha_s R. \quad (9)$$

On note l le plus grand entier de $\llbracket v, s \rrbracket$ tel que $\lambda_l \neq 0$. L'égalité (8) se réécrit sous la forme

$$b_0 + \sum_{i=1}^{v-1} b_i f(\alpha_i) + \sum_{i=v}^{l-1} \left(b_i - \frac{b_l}{\lambda_l} \lambda_i \right) f(\alpha_i) + \sum_{i=l+1}^s b_i f(\alpha_i) + \frac{b_l}{\lambda_l} f(\alpha_s R) = 0.$$

Si $l < s$, par minimalité $(M * *)$, la famille $(R \alpha_s, \alpha_i)_{i \in \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{l\}}$ est $\mathbb{F}_q$ -linéairement dépendante. Si $l = s$, cette conclusion est encore valide par minimalité $(M * *)$ s'il existe $i_0 \in \llbracket v, l \rrbracket$ avec $b_{i_0} - \frac{b_l}{\lambda_l} \lambda_{i_0} \neq 0$ et par minimalité $(M *)$ dans le cas contraire. Par indépendance $\mathbb{F}_q$ -linéaire des α_i ($i \in \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{l\}$), il existe des éléments μ_i ($i \in \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{l\}$) de $\mathbb{F}_q$ non tous nuls tels que $\alpha_s R = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^s \mu_i \alpha_i$. En comparant avec l'égalité (9), on obtient que

$$\lambda_l \alpha_l = \sum_{i=v}^{l-1} \lambda_i \alpha_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^s \mu_i \alpha_i.$$

Comme λ_l est non nul, ceci est une relation de dépendance $\mathbb{F}_q$ -linéaire pour les α_i ($i \in \llbracket 1, s \rrbracket$). Cela est impossible et termine la preuve du théorème. $\square$

Par les Théorèmes 15 et 19, on obtient un théorème de Lindemann-Weierstrass pour les fonctions hypergéométriques considérées dans cet article.

Théorème 30. *Soit r et s des entiers naturels tels que $r \leq s$, $f \in {}_r\mathcal{F}_s$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des éléments de $\mathbb{F}_q(T)$. Alors, la famille $(1, f(\alpha_i))_{1 \leq i \leq s}$ est $\mathbb{F}_q(T)$ -linéairement dépendante si et seulement si la famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq s}$ est $\mathbb{F}_q$ -linéairement dépendante.*

Dans le cas des $\mathbb{F}_q[T]$ -modules de Drinfeld de rang 1, on a le

Théorème 31. *Soit ρ un module de Drinfeld de rang inférieur à 2 défini sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$, e_ρ sa fonction exponentielle et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des éléments de $\mathbb{F}_q(T)$. Alors, la famille $(1, e_\rho(\alpha_i))_{1 \leq i \leq s}$ est $\mathbb{F}_q(T)$ -linéairement dépendante si et seulement si la famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq s}$ est $\mathbb{F}_q$ -linéairement dépendante.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des Théorèmes 16 et 29. $\square$

Remarque 32. Le Théorème 31 est une réponse dans le cas des modules de Drinfeld de rang inférieur à 2 à une question posée par Töpfer en 1997 (voir [17]). Nous laissons le soin au lecteur de modifier les Théorèmes 14 et 29 pour montrer que le Théorème 31 est encore valide si on considère un $\mathbb{F}_q[T]$ -module de Drinfeld ρ de rang $r \geq 1$ de la forme $\rho_T = T + A\tau^r$ ($A \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}^*$). Vraisemblablement, il faudrait d'autres idées pour montrer le cas général.

5. LE CAS P -ADIQUE

Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré p_0 . On note v_P la valuation de $\mathbb{F}_q(T)$ associée et Ω_P le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)_P$, le complété de $\mathbb{F}_q(T)$ pour la valuation v_P . On note encore v_P l'unique prolongement de v_P à Ω_P .

Pour une série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa k -ème dérivée de Hasse, que l'on note $\delta_{z,k}(f)$, par :

$$\delta_{z,k}(f)(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} a_n z^{n-k}.$$

On note pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_\theta = \{z \in \Omega_P \mid v_P(z) > \theta\}$.

Définition 33. On dit qu'une fonction F analytique sur $\mathcal{D}_\theta$ est une K_q -fonction si F admet un développement en série entière au voisinage 0 de la forme $F(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^{q^n}$ où les b_n sont des éléments d'une extension finie K de $\mathbb{F}_q(T)$ et tels qu'il existe un réel positif A vérifiant les propriétés suivantes :

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{b_n} \leq Anq^n$;
- ii) il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{F}_q[T]$ telle que
  - a) pour tout $m \leq n$, $\gamma_n b_m$ est entier sur $\mathbb{F}_q[T]$,
  - b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(\gamma_n) \leq Anq^n$,
  - c) pour des entiers naturels $h_1, \dots, h_s$ tels que $q^{h_1} + \dots + q^{h_s} \leq q^n$, on a $\gamma_{h_1} \cdots \gamma_{h_s}$ divise γ_n .

Nous commençons par énoncer un théorème à la Schneider-Lang-Adams P -adique pour les K_q -fonctions bien adapté pour les fonctions hypergéométriques.

Théorème 34. Soit F une K_q -fonction sur un disque $\mathcal{D}_\theta$. On suppose qu'il existe une extension algébrique $L/\mathbb{F}_q(T)$ de degré fini et une suite convergente $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}_\theta \cap L$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées : il existe un réel v tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\max(\overline{z_n}, \overline{F(z_n)}, [\mathbb{F}_q(T)(\{F(z_i) \mid i \leq n\}) : \mathbb{F}_q(T)]) \leq vn.$$

Si la suite $([\mathbb{F}_q(T)(F(z_n)) : \mathbb{F}_q(T)]_s)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si l'ensemble $\{z_n, F(z_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ admet un dénominateur commun dans $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$, alors F est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(z)$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que L contient les coefficients de F . La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $(v_P(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante (disons égale à $V \in \mathbb{Q}$). Quitte à considérer la fonction $F(P^V z)$ et la suite $(P^{-V}(z_n))_n$, on peut supposer que $\theta < V = 0$. Soit $C \in \mathbb{N}$. On pose $I = 18C$. Dans cette preuve, les constantes c_i qui sont introduites ne dépendent pas de C . Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble $\llbracket 0, q^I \rrbracket \times \llbracket 0, q^I \rrbracket \times \llbracket 0, q^{21C} \rrbracket$ et $\tilde{L}$ le corps $L(\{F(z_i) \mid 0 \leq i < q^C\})$. Soit $(i, j, k) \in \mathcal{S}$. Puisque $\delta_{z,0}(F) = F$, $\delta_{z,q^l}(F) = b_l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\delta_{z,i}(F) = 0$ si $i \notin \{0\} \cup \{q^l \mid l \in \mathbb{N}\}$, l'égalité (voir [22])

$$\delta_{z,k}(z^i F^j)(z) = \sum_{l=0}^k \binom{i}{l} z^{i-l} \sum_{l_1 + \dots + l_j = k-l} \delta_{l_1}(F)(z) \cdots \delta_{l_j}(F)(z),$$

se simplifie en

$$\delta_{z,k}(z^i F^j)(z) = \sum_{l=0}^k \binom{i}{l} z^{i-l} \sum_{\substack{u \leq j \\ q^{l_1} + \dots + q^{l_u} = k-l}} b_{l_1} \cdots b_{l_u} F^{j-u}(z).$$

En particulier, pour tout $n \in \llbracket 0, q^C \rrbracket$, $\delta_{z,k}(z^i F^j)(z_n)$ appartient à $\tilde{L}$ et sa maison est majorée par :

$$\begin{aligned} |\overline{\delta_{z,k}(z^i F^j)(z_n)}| &\leq q^I |\overline{z_n}| + q^I |\overline{F(z_n)}| + A(21C)q^{21C} \\ &\leq c_1 C q^{21C}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\{\delta_{z,k}(z^i F^j)(z_n) \mid n \in \llbracket 0, q^C \rrbracket\}$ admet $\mathcal{G} := E^{2q^I} \gamma_{21C}$ comme dénominateur dans $\tilde{L}$, où E est un dénominateur commun dans $\mathbb{F}_q(T)$ de l'ensemble $\{z_n, F(z_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Un lemme de Siegel ([16, Lemme 5] ou [3, Lemma 4.1]) implique qu'il existe des éléments $a_{i,j}$ ($0 \leq i, j < I$) de $\mathbb{F}_q[T]$ non tous nuls tels que la fonction $H(z) := \sum_{i=0}^{q^I-1} \sum_{j=0}^{q^I-1} a_{i,j} z^i F^j(z)$ s'annule sur $\{z_n \mid 0 \leq n < q^C\}$ ainsi que ses q^{21C} premières dérivées de Hasse et

$$\begin{aligned} \deg(a_{i,j}) &\leq \frac{q^{22C} [\tilde{L} : \mathbb{F}_q(T)]}{q^{2I} - q^{22C} [\tilde{L} : \mathbb{F}_q(T)]} \left(\max_{(u,v,k,n) \in \mathcal{S} \times \llbracket 0, q^C \rrbracket} |\overline{\delta_k(z^u F^v)(z_n)}| + \deg(\mathcal{G}) \right) \\ &\leq c_2 C q^{8C}. \end{aligned}$$

Supposons H non nulle. Puisque la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il existe un entier naturel n tel que $H(z_n)$ est non nul. Notons n_0 le plus petit entier naturel tel qu'il existe $k_0 \in \llbracket 0, q^{21C} \rrbracket$ avec la propriété que $\delta_{z,k_0}(H(z_{n_0})) \neq 0$. On a évidemment $n_0 \geq q^C$. On majore la maison de $\delta_{z,k_0}(H(z_{n_0}))$:

$$\begin{aligned} |\overline{\delta_{z,k_0}(H(z_{n_0}))}| &\leq \max_{0 \leq i,j < q^I} \deg(a_{i,j}) + \max_{0 \leq i,j < q^I} |\overline{\delta_{k_0}(z^i F^j)(z_{n_0})}| \\ &\leq \max_{0 \leq i,j < q^I} \deg(a_{i,j}) + q^I |\overline{z_{n_0}}| + q^I |\overline{F(z_{n_0})}| + A(21C)q^{21C} \\ &\leq c_3 n_0 q^{18C} + c_4 C q^{21C}. \end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{G}$ est un dénominateur de $\delta_{z,k_0}(H(z_{n_0}))$. La majoration

$$[\mathbb{F}_q(T)(H(z_{n_0})) : \mathbb{F}_q(T)]_s \leq \max_{n \in \mathbb{N}} [\mathbb{F}_q(T)(F(z_n)) : \mathbb{F}_q(T)]_s$$

et l'inégalité de Liouville v_P -adique ([41, Lemma 4.2]) conduisent à

$$v_P(\delta_{z,k_0}(H(z_{n_0}))) \leq c_5 \left(|\overline{\delta_{z,k_0}(H(z_{n_0}))}| + \deg(\mathcal{G}) \right) \leq c_6 C q^{21C} + c_7 n_0 q^{18C}. \quad (10)$$

Soit ε un réel tel que $\theta < \varepsilon < 0$. Grâce au lemme de Schwarz ([41, Lemma 4.3]), on obtient que

$$- \inf_{z \in \mathcal{D}_\varepsilon} v_P(H(z)) + \varepsilon n_0 q^{21C} \leq - \inf_{z \in \mathcal{D}_{2\varepsilon}} v_P(H(z)),$$

c'est-à-dire

$$\inf_{z \in \mathcal{D}_\varepsilon} v_P(H(z)) \geq -\varepsilon n_0 q^{21C} + \inf_{z \in \mathcal{D}_{2\varepsilon}} v_P(H(z)).$$

L'inégalité

$$\inf_{z \in \mathcal{D}_{2\varepsilon}} v(H(z)) \geq q^I (2\varepsilon + \inf_{z \in \mathcal{D}_{2\varepsilon}} v(F(z)))$$

et l'ingalité de Cauchy [2, Théorème 2bis] impliquent que

$$v_P(\delta_{z,k_0}(H(z_{n_0}))) \geq -\varepsilon n_0 q^{21C} + q^I (2\varepsilon + \inf_{z \in \mathcal{D}_{2\varepsilon}} v(F(z))). \quad (11)$$

Comme $n_0 \geq q^C$, pour C assez grand, les inégalités (10) et (11) sont contradictoires. Ainsi, H est nulle. Autrement dit, F est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(z)$. $\square$

Remarque 35. Les conditions du Théorème 34 ne sont certainement pas optimales. Elles seront néanmoins suffisantes pour les applications en vue.

Nous reprenons les notations de la section 2. Comme pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$v_P(D_h) = q^\delta \left(\frac{q^{ep_0} - 1}{q^{p_0} - 1} \right) \quad (h = ep_0 + \delta, \quad (e, \delta) \in \mathbb{N}^2, \quad \delta < p_0) \quad (\text{voir [40]}),$$

la fonction ${}_r F_s T^I(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s;)$ définit une fonction analytique sur l'ouvert $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\frac{s+1-r}{q^{p_0}-1}}$. Nous décrivons maintenant des familles de fonctions hypergéométriques pour lesquelles il est possible de montrer que leur ensemble exceptionnel est réduit à $\{0\}$. Soit

r et s deux entiers naturels tels que $s + 1 < r < p$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(b_i)_{0 \leq i \leq s}$ deux suites d'entiers tels que $1 = b_0 \leq \dots \leq b_s < a_1 \leq \dots \leq a_r$. On considère un élément non nul α de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de degré Δ sur $\mathbb{F}_q(T)$ et h_0 un entier naturel tel que $\alpha^{q^{h_0}}$ est séparable sur $\mathbb{F}_q(T)$. Il est bien connu que la dérivation sur $\mathbb{F}_q(T)_P$ se prolonge de manière unique sur $\mathbb{F}_q(T)_P(\alpha^{q^{h_0}})$ (voir [4, Chapitre 5] par exemple) et évidemment ce prolongement est continu.

Lemme 36. *Si ${}_rF_sT^I(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s; \alpha)$ est algébrique, alors il en est de même pour ${}_rF_sT^I(a_1, \dots, a_1, b_1, \dots, b_s; \alpha)$.*

Démonstration. On note $v_1 < \dots < v_l$ l'ensemble des valeurs distinctes prises par la suite $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$. On pose pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, $w_i = \text{Card}(\{m \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid v_i = a_m\})$ et $\sigma_i = \sum_{t=i}^l w_t$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = \sum_{m \geq h_0} \left(\frac{(a_1)_m \dots (a_r)_m}{(b_1)_m \dots (b_s)_m} \right)^{q^{v_l-1}} \alpha^{q^{m+v_l-1}}$ et pour tout $n \in \llbracket 1, v_l - v_1 \rrbracket$, $u_n = \sqrt[q^{v_l-1}]{(u_{n-1})^{(\sigma_t)}}$ si $n \in \llbracket v_l - v_t, v_l - v_{t-1} \rrbracket$ avec $t \in \llbracket 2, l \rrbracket$. On constate que u_0 est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Puisque $\alpha^{q^{h_0}}$ est séparable sur $\mathbb{F}_q(T)$ et que pour tout $m \geq h_0$, $\left(\frac{(a_1)_m \dots (a_r)_m}{(b_1)_m \dots (b_s)_m} \right)^{q^{v_l-1}}$ appartient à $\mathbb{F}_q(T)$, la continuité de la dérivée implique que u_1 est bien défini. De plus u_1 est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(u_0)$ donc sur $\mathbb{F}_q(T)$. Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \llbracket 1, v_l - v_1 \rrbracket$, u_n est bien défini, que

$$u_n = \sum_{m \geq h_0} \frac{D_{m+v_1-1}^{w_1 q^{v_l-1}} \dots D_{m+v_{l-1}-1}^{\sigma_{l-1} q^{v_l-1}} D_{m+v_l-n-1}^{\sigma_l}}{(D_m(b_1)_m \dots (b_s)_m)^{q^{v_l-1-n}}} \alpha^{q^{m+v_l-n-1}}$$

et enfin que u_n est algébrique. Au final, on obtient que ${}_rF_sT^I(a_1, \dots, a_1, b_1, \dots, b_s; \alpha)$ est algébrique puisque $u_{v_l-v_1} = \sum_{m \geq h_0} \frac{D_{m+v_1-1}^{\sigma_1}}{(D_m(b_1)_m \dots (b_s)_m)^{q^{v_1-1}}} \alpha^{q^{m+v_1-1}}$ l'est. $\square$

Dans [8], Carlitz introduit pour un entier naturel a l'opérateur Δ_a défini sur $\Omega_P[[z]]$ par : pour tout $f \in \Omega_P[[z]]$,

$$\Delta_a(f)(z) = f(Tz) - T^{q^{-a}} f(z).$$

Pour des entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_n$, par itération, on a pour tout $f \in \Omega_P[[z]]$

$$\Delta_{m_1} \dots \Delta_{m_n}(f)(z) = \sum_{i=0}^n (-1)^i v_{n-i} f(T^i z), \quad (12)$$

où $v_i = \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_i \leq n} T^{q^{-m_{l_1} + \dots + q^{-m_{l_i}}}}$.

Notations :

- (1) Pour simplifier les notations, on pose $\Phi = {}_rF_sT^I(a_1, \dots, a_1, b_1, \dots, b_s; z)$ et $\Psi = \Phi(\alpha)$.
- (2) Pour tout $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$, on note H_i la fonction analytique sur $\mathcal{D}$ définie par : pour tout $z \in \mathcal{D}$

$$H_i(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{u_n(z)}{[n + a_1 - 1]^i},$$

$$\text{avec } u_n(z) = \frac{D_{n+a_1-1}^r}{(D_n(b_1)_n \dots (b_s)_n)^{q^{a_1-1}}} z^{n+a_1-1}.$$

Remarquons que $H_0 = \Phi^{q^{a_1-1}}$ et que

$$H_r(Z) = \tilde{\Phi}^{q^{a_1-1}}(Z) - \frac{D_{a_1-2}^r}{((b_1)_0 \dots (b_s)_0)^{q^{a_1-1}}} Z^{q^{a_1-2}},$$

où $\tilde{\Phi}$ est la fonction hypergéométrique ${}_rF_sT^I(a_1 - 1, a_1 - 1 \dots, a_1 - 1, b_1, \dots, b_s; z)$. Les séries entières H_i sont à coefficients dans $\mathbb{F}_q(T)$. De plus, elles satisfont aux relations de récurrence : pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$

$$\Delta_0(H_i) = H_{i-1}. \quad (13)$$

Puisque pour tout $(n, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 0, r \rrbracket$, on a $(D_n^r)^{(j)} = (-1)^j \frac{r!}{(r-j)!} \frac{D_n^r}{[n]^j}$, de nouveau la continuité de la dérivée implique que

$$\left(H_0(\alpha) - \sum_{n=0}^{h_0} u_n(\alpha) \right)^{(j)} = (-1)^j \frac{r!}{j!} \left(H_j(\alpha) - \sum_{n=0}^{h_0} \frac{u_n(\alpha)}{[n+a_1-1]^i} \right) \quad (14)$$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, **on supposera que Ψ est algébrique (sur $\mathbb{F}_q(T)$)**. Il en résulte que $H_0(\alpha)$ l'est aussi. Celle des $H_i(\alpha)$ ($i \in \llbracket 1, r \rrbracket$) résulte de l'égalité (14). Enfin, l'égalité (13) implique que pour tout $j \in \llbracket 0, i \rrbracket$, $H_i(T^j \alpha)$ est aussi algébrique. Il en est donc de même pour les $\tilde{\Phi}(T^j \alpha)$. On désigne par E un dénominateur commun aux $\tilde{\Phi}(T^i \alpha)$ ($i \in \llbracket 0, r \rrbracket$) et par δ le degré d'une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$ qui les contient.

Proposition 37. *Soit $j \in \mathbb{N}$. Alors, il existe réel κ tel que pour tout $Q \in \mathbb{F}_q[T]$ avec $\deg \leq j$, $\tilde{\Phi}(Q\alpha)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ de degré inférieur à $q^j \delta$ et $|\overline{\tilde{\Phi}(Q\alpha)}| \leq jr + \kappa$. De plus, pour tout $Q \in \mathbb{F}_q[T]$, E est un dénominateur de $\tilde{\Phi}(Q\alpha)$.*

Démonstration. Par $\mathbb{F}_q$ -linéarité de $\tilde{\Phi}$, il suffit de montrer le lemme pour $\tilde{\Phi}(T^j \alpha)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \Omega_P$. Par [32] et la formule (12), on a

$$\sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} T^{(r-i)q^{1-a_1}} \tilde{\Phi}^q(T^i z) = \sum_{i=0}^s (-1)^{s-i} \nu_i \tilde{\Phi}(T^i z),$$

où $\nu_i = \sum_{0 \leq l_0 < l_1 < \dots < l_{s-i} \leq s} T^{q^{1-b_{l_0} + \dots + q^{1-b_{l_{s-i}}}}$. Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}$, ($i \geq r$), $\tilde{\Phi}(T^i \alpha)$ est racine d'un polynôme binomial $X^q - \gamma_i$ avec

$$\gamma_i = \sum_{i=0}^s (-1)^{s-i} \nu_i \tilde{\Phi}(T^i z) - \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} T^{(r-i)q^{1-a_1}} \tilde{\Phi}^q(T^i z).$$

Une récurrence immédiate sur i montre que E est un dénominateur de $\tilde{\Phi}(T^i \alpha)$, que $[\mathbb{F}_q(T)(\tilde{\Phi}(T^i))/\mathbb{F}_q(T)]_s$ est majoré par δ et que $[\mathbb{F}_q(T)(\{\tilde{\Phi}(T^j \alpha) \mid j \in \llbracket 0, i \rrbracket\}) : \mathbb{F}_q(T)]$ est majoré par $q^j \delta$. Notons $M_i = \max\{|\overline{\tilde{\Phi}(T^j \alpha)}| \mid j \in \llbracket 0, i \rrbracket\}$. Pour estimer la maison de $\tilde{\Phi}(T^i \alpha)$, on remarque que pour tout $j \in \llbracket 0, s \rrbracket$, on a $\deg(\nu_j) \leq s - j + 1$ et

$$|\overline{\tilde{\Phi}(T^i \alpha)}| \leq \max(r + M_i, \frac{M_i}{q} + s).$$

La suite $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ étant croissante, si elle n'est pas majorée, on a $M_{i+1} \leq r + M_i$ à partir d'un certain rang ce qui entraîne qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $M_i \leq r(i-1) + \kappa$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $|\overline{\tilde{\Phi}(T^i \alpha)}| \leq ri + \kappa$. $\square$

On en déduit le

Théorème 38. *Soit r et s deux entiers naturels tels que $s+1 < r < p$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(b_i)_{0 \leq i \leq s}$ deux suites d'entiers tels que $1 = b_0 \leq \dots \leq b_s < a_1 \leq \dots \leq a_r$. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}$ non nul, ${}_r F_s T^I(\alpha_1, \dots, \alpha_r, b_1, \dots, b_s; \alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Démonstration. Par le Théorème 34, H_r est algébrique sur $\Omega_P[z]$. On remarque que le rayon de convergence de H_r , considérée comme série entière de $\mathbb{F}_q(T)[[z]] \subset \Omega[[z]]$ est nul. Il est bien connu qu'alors H_r est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)[z]$. $\square$

Les théorèmes suivants décrivent deux autres familles de fonctions hypergéométriques pour lesquelles nous montrons que leur ensemble exceptionnel est réduit à $\{0\}$. Les preuves étant très similaires, nous n'indiquons que les modifications substantielles à effectuer. Pour un entier naturel j , on note $\tilde{\delta}_j$ la j -ème dérivée de Hasse définie sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}_P^{\text{sep}}$ (voir [5, Appendice]). Par [5, Appendice et Appendice Lemma 1], pour tout $(j, n) \in \llbracket 0, r \rrbracket \times \mathbb{N}^*$, on a $\tilde{\delta}_j(D_n^{r-1}) = (-1)^j \binom{r-1}{j} \frac{D_n^{r-1}}{[n]^j}$.

Théorème 39. *Soit $r \in \llbracket 2, q \rrbracket$ et $a_1 = 1, \dots, a_r$ des entiers naturels. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}$ non nul, ${}_r F_0 T^I(a_1, \dots, a_r, -; \alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Démonstration. Supposons que ${}_rF_0T^I(a_1, \dots, a_r, -; \alpha)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Par une preuve identique à celle du Lemme 36, il en est de même pour ${}_rF_0T^I(1, \dots, 1, -; \alpha)$. Soit $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$. Posons

$$H_i(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{D_n^{r-1}}{[n]^i} z^{q^n}.$$

Comme dans (14), $(-1)^{\binom{r}{i}} H_j(\alpha) \in \mathbb{F}_q(T)(\alpha, H_0(\alpha))$. Ceci implique, par les relations (13), que pour tout $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 0, i \rrbracket$ tel que $\binom{r-1}{i} \neq 0$, $H_i(T^j \alpha)$ appartient à $\mathbb{F}_q(T)(\alpha, H_0(\alpha))$. On remarque de plus que $H_{r-1}(z) = z + H_0^q(z)$. Puisque

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-1-i} \binom{r-1}{i} T^{(r-1-i)} H_0^q(T^i z) = H_0(z),$$

il vient que H_r satisfait à la relation de récurrence :

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-1-i} \binom{r-1}{i} T^{q(r-1-i)} (H_{r-1}(T^i z) - T^i z)^q = H_{r-1}(z) - z.$$

On termine alors la preuve comme dans celle du Théorème 38. $\square$

Remarque 40. La fonction ${}_2F_0T^I((1, 1), -; z) = \sum_{n \geq 0} D_n z^{q^n}$ est un analogue de la série p -adique d'Euler $\mathcal{E}(z) := \sum_{n \geq 0} n! z^n$ qui est définie sur $\{z \in \mathbb{C}_p \mid v_p(z) > -\frac{1}{p-1}\}$. Pour celle-ci, il n'est même pas connu si $\mathcal{E}(1)$ est irrationnel.

Dans les cas des fonctions hypergéométriques de Yao ou Kochubei, il est aussi possible de donner des résultats de transcendance dans le cas P -adique. Donnons en un exemple.

Théorème 41. *Soit r et s deux entiers naturels tels que $1 \leq s+1 < r < q$. Pour toutes suites $\mathbf{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $\mathbf{b} = (b_i)_{1 \leq i \leq s}$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}^{\text{sep}} \setminus \{[m] \mid m \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble exceptionnel de ${}_rF_k K_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z)$ est réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. Il suffit d'adapter les preuves précédentes en notant que pour $(j, n) \in \llbracket 0, q \rrbracket \times \mathbb{N}^*$, $\tilde{\delta}_j \left(\frac{1}{D_n} \right) = \frac{1}{[n]^j D_n}$. $\square$

RÉFÉRENCES

- [1] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special Γ -values*, Ann. Math. **160.2** (2004), 237–313.
- [2] Y. Amice, *Formules intégrales de Cauchy dans un corps p -adique*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, Tome 4 exp. no8 (1962-1963), 1–7.
- [3] V. Bosser, A. Galateau, *Lower bounds for the canonical height on Drinfeld modules*, International Mathematics Research Notices **2019.1**, 165–200.
- [4] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques : Algèbre Chapitre 4 à 7*, (2007) Springer Berlin, Heidelberg.
- [5] D. Brownawell, L. Denis, *Linear independence and divided derivatives of a Drinfeld module II*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1581–1593.
- [6] P. Bundschuh, *Transzendenzmasse in Körpern formaler Laurentreihen*, J. Reine Angew. Math. **299-300** (1978), 411–432.
- [7] P.J. Cahen and J.L. Chabert, *What you should know about integer-valued polynomials*, The American Mathematical Monthly, **123.4** (2016), 311–337.
- [8] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Mathematical Journal, **1** (1935), 137–168.
- [9] L. Carlitz, *A set of polynomials*, Duke Mathematical Journal, **6.2** (1940), 486–504.
- [10] C.-Y. Chang, *A note on a refined version of Anderson-Brownawell-Papanikolas criterion*, J. Number Theory **129.3** (2009), 729–738.
- [11] I. Chen, Y. Lee, *Coefficients of exponential functions attached to Drinfeld modules of rank 2*, Manuscripta Mathematica **139** (2021), 123–136.
- [12] É. Delaigue, *A Lindemann-Weierstrass theorem for E -functions*, J. Reine Angew. Math. **820** (2025), 75–85.
- [13] L. Denis, *Un critère de transcendance en caractéristique finie*, J. Algebra **182** (1996), 522–533.
- [14] L. Denis, *Valeurs transcendantes des fonctions de Bessel-Carlitz*, Ark. Mat. **36.1** (1998), 73–85.
- [15] L. Denis, *Transcendance et dérivées de l'exponentielle de Carlitz*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1991–92, Progr. Math. **116** (1993), 1–21.
- [16] L. Denis, *Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld*, Math. Ann. **294** (1992), 213–223.
- [17] L. Denis, *Irrationalité de valeurs associées à l'exponentielle de Carlitz*, Monatshefte für Mathematik **123** (1997), 43–51.

- [18] J.M. Geijssels, *Transcendence in fields of positive characteristic*, Acad. Proefsch., Amsterdam, (1978).
- [19] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **35**, Springer Berlin (1996).
- [20] R. Harada, *t -motivic interpretations for special values of Thakur hypergeometric functions and Kochubei multiple polylogarithms*, à paraître.
- [21] C. Hermite, *Sur la fonction exponentielle*, Comptes-rendus de l'Académie des sciences, Paris **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
- [22] S. Jeong, *Calculus in characteristic p* , J. Number Theo. **131** (2011), 1089–1104.
- [23] A.N. Kochubei, *Evolution equations and functions of hypergeometric type over fields of positive characteristic*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **14.5** (2007), 947–959.
- [24] J.F. Koksmas, J. Popken, *Zur Transzendenz von e^π* , J. Reine Angew. Math. **168** (1932), 211–230.
- [25] S. Lang, *Algèbre*, Dunod (2020).
- [26] S. Lang, *A transcendence measure for E -functions*, Mathematika **9** (1962), 157–161.
- [27] M.S. Li, *Some hypergeometric functions in positive characteristic and transcendence*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **37** (2019), 317–322.
- [28] K. Mahler, *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **166** (1932), 118–136.
- [29] A. Shidlovski, *Transcendental numbers*, Studies in Mathematics **12**, De Gruyter Studies in Mathematics.
- [30] L. Slater, *Generalized hypergéométric functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [31] D. Thakur, *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2004.
- [32] D. Thakur, *Hypergeometric functions for function fields*, Finite Fields Appl. **1** (1995), 219–231.
- [33] D. Thakur, *Hypergeometric functions for function fields II*, J. Ramanujan Math. Soc. **15** (2000), 43–52.
- [34] D. Thakur, Z.-Y. Wen, J.-Y. Yao, L. Zhao, *Transcendence in positive characteristic and special values of hypergeometric functions*, J. Reine Angew. Math. **657** (2011), 135–171.
- [35] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$* , Duke Math. J. **8.4** (1941), 701–720.
- [36] K. W. Weierstrass, *Zu Lindemann's Abhandlung : „Über die Ludolph'sche Zahl“*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. **5** (1885), 1067–1085.
- [37] J.Y. Yao, *Valeurs spéciales des fonctions hypergéométriques fractionnaires pour les corps de fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **350**, Issues **17–18** (Septembre 2012), 801–806.
- [38] J.Y. Yao, *Un critère de transcendance en caractéristique positive et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **343** (2006), 699–704.
- [39] J. Yu, *Transcendence theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517–527.
- [40] J. Yu, *Transcendence and Drinfeld modules*, Inventiones Mathematicae **83.3** (1986), 507–517.
- [41] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p* , Annals Math. **134.1** (1991), 1–23.
- [42] J. Yu, *Analytic homomorphisms into Drinfeld modules*, Ann. of Math. **145.2** (1997), 215–233

TAHITI (FRANCE)

LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ, CNRS UMR 8524, VILLENEUVE D'ASCQ (FRANCE)
 Email address: david.adam.tahiti@outlook.fr
 Email address: laurent.denis@univ-lille.fr