

La Masse Noire est de l'Énergie Potentielle

Nicolas Poupart, Chercheur Indépendant (2025)
99 Chemin Scraire, Mille-Isles, Québec, Canada (J0R 1A0)
(450) 939-2167
nicolas.poupart@yahoo.fr

Résumé — Cet article démontre que l'énergie potentielle gravitationnelle ($E = -GmM / d$) explique le phénomène communément attribué à la matière noire, en appliquant la relation d'équivalence masse-énergie ($E = mc^2$). Aucune hypothèse supplémentaire n'est formulée au-delà du principe de conservation du volume, garantissant que le champ gravitationnel reste conservatif et non influencé par des forces autres que la gravité. Nous développons une équation et un algorithme simples pour calculer avec précision l'énergie potentielle d'un système stellaire. Les implications théoriques de ce modèle sont explorées concernant la production d'énergie par divers types d'étoiles et de trous noirs dans les galaxies. Le modèle est testé empiriquement par rapport à la base de données SPARC comprenant 175 galaxies afin d'évaluer sa validité. Nous déduisons les conséquences logiques de l'énergie potentielle emmagasinée dans le champ gravitationnel, une affirmation validée par les données SPARC. La conséquence finale étant la production de l'énergie noire et la reproduction de la cosmologie Λ CDM. Nous concluons en démontrant que l'adéquation expérimentale de notre modèle est de 7.5σ .

Introduction

Depuis que Vera Rubin a postulé l'existence d'une masse sombre galactique pour expliquer l'aplatissement des courbes de rotation galactique (1; 2; 3), aucune explication convaincante n'a été fournie quant à la nature de cette masse. Les tentatives d'attribuer la masse manquante à de la matière baryonique indétectable ont été largement réfutées par les programmes AGAPE (4), MACHO (5) et EROS (6). Des explications similaires impliquant des particules non baryoniques ou exotiques n'ont pas non plus permis d'expliquer cette divergence. De nombreux efforts de détection, notamment ceux des collaborations LUX (7), PICASSO (8), PICO (9) et SuperCDMS (10), ont jusqu'à présent échoué. De même, les résultats du dernier accélérateur du CERN suggèrent que la physique reste cohérente avec le Modèle standard, ce qui rend l'existence de particules exotiques de plus en plus improbable. Il reste également extrêmement difficile d'expliquer ce phénomène à l'aide de la théorie gravitationnelle actuelle, qu'il s'agisse de la gravitation newtonienne ou de la relativité générale.

En cosmologie, le cadre dominant est le modèle Λ CDM, qui postule l'existence d'une matière noire froide. Pour la plupart des physiciens, le concept de masse reste indissociable de celui de matière. De plus, le terme « matière noire » est souvent utilisé de manière catégorique, bien qu'il désigne plus précisément la « masse noire ». Une alternative à l'existence d'une véritable masse noire consiste à modifier la gravitation à l'échelle galactique. Cependant, de tels efforts sont remis en question par la remarquable adéquation empirique de la relativité générale à la description des phénomènes observés et de la présence inférée de masse noire (11; 12; 13).

L'explication proposée dans cet article adopte une approche fondamentalement différente. La masse sombre n'est ni une forme de matière réelle ni le résultat d'une gravitation modifiée. Il s'agit plutôt d'un effet secondaire inhérent à la formulation actuelle de la théorie gravitationnelle, plus précisément à l'énergie potentielle gravitationnelle stockée dans le champ gravitationnel. Les seuls axiomes utilisés sont $E = -GmM / d$ et $E = mc^2$. Ainsi, l'explication repose uniquement sur une application judicieuse de la physique classique.

L'énergie potentielle gravitationnelle utile

Si l'on considère l'équation newtonienne de la force gravitationnelle, $F = GmM / d^2$, on obtient, en intégrant de d à l'infini, la formule de l'énergie potentielle $E_p = -GmM / d$. Bien que cette formulation produise une énergie potentielle négative utilisable pour calculer le mouvement des corps célestes, elle est inadaptée à l'évaluation de l'énergie potentielle physique totale d'un système.

Pour déterminer l'énergie potentielle physiquement significative, il faut calculer la différence d'énergie entre deux états du système, comme si l'on soulevait une masse m de la position d d'une hauteur h . Dans ce cas $\Delta E_p = E_p(d+h) - E_p(d) = GmMh / (d^2 + dh)$. Cette expression représente la forme utilisable de l'énergie potentielle gravitationnelle. Le concept d'énergie négative absolue E_p n'est pas directement interprétable en termes physiques.

Cependant, cette formulation devient impraticable pour les systèmes impliquant deux corps célestes (par exemple, des planètes, des étoiles ou des galaxies), car la distance de référence initiale d est indéfinie ou ambiguë. Pour résoudre ce problème, nous calculons la différence d'énergie entre un état compact – une masse sphérique solide unique $M_t = m + M$ – et une configuration de deux corps sphériques distincts, m et M , séparés par une distance d .

Soient les deux corps de rayons r et R , et de volumes $v = 4\pi r^3/3$ et $V = 4\pi R^3/3$, de masses volumiques correspondantes m/v et M/V . Le volume total de la sphère solide est $V_t = V + v = 4\pi/3 (R^3 + r^3)$, et son rayon $R_t = (R^3 + r^3)^{1/3}$. En supposant des masses volumiques égales, $m/v = M/V$, celle de la sphère compacte sera identique $m/v = M/V = M_t/V_t$; sinon, on suppose une masse volumique moyenne pondérée par les contributions de m et M .

L'énergie potentielle gravitationnelle d'une sphère homogène est donnée par $E_p = -3GM^2 / 5R$. L'énergie potentielle gravitationnelle du système peut être évaluée en comparant l'état initial (masse compacte), l'état final (masses séparées), et leur différence :

$$E_i = -\frac{3GM_t^2}{5R_t}$$

$$E_f = -\frac{3GM^2}{5R} - \frac{3Gm^2}{5r} - \frac{GMm}{d}$$

$$\Delta E_p = E_f - E_i = \left(-\frac{3GM^2}{5R} - \frac{3Gm^2}{5r} - \frac{GMm}{d} \right) + \frac{3GM_t^2}{5R_t}$$

Cette expression quantifie la variation d'énergie d'une configuration compacte à un système de deux masses séparées. Elle représente une redistribution de la matière qui préserve les densités initiales des composants, garantissant ainsi que la transformation n'implique que des forces gravitationnelles.

L'énergie potentielle gravitationnelle est massive

L'énergie potentielle gravitationnelle peut être exprimée par $E_p = m_p c^2$, ce qui indique qu'elle doit être stockée sous forme de masse au sein du système. Cette affirmation est facilement illustrée par une expérience de pensée simple. Considérons un réacteur nucléaire qui convertit une masse m_n en énergie électrique, laquelle est ensuite utilisée pour élever une masse m à une hauteur h . Il ne devrait y avoir aucun débat sur la question de savoir si la masse de la Terre reste inchangée avant et après la transformation. Étant donné la conservation de la masse-énergie m_n au sein du système terrestre, la relativité générale garantit que son champ gravitationnel reste inchangé. La question de savoir si cela constitue une masse « réelle » est dénuée de sens, puisque la masse est définie par ses effets gravitationnels ou inertiels mesurables. Cependant cette nouvelle masse ne génère pas à son tour de l'énergie potentielle ad infinitum ; si un tel principe d'auto-induction existe dans le champ, le calcul newtonien est simplement la somme limite.

De plus, l'équivalence entre masse inertielle et masse gravitationnelle n'ayant jamais été violée empiriquement (14), nous pouvons, pour l'instant, considérer l'énergie potentielle gravitationnelle comme pleinement équivalente à sa représentation massique.

Calcul de l'énergie potentielle de corps célestes

	m (kg)	M (kg)	r (m)	R (m)	d (m)	R_t (m)
Lune + Terre	7.348E+22	5.972E+24	1.738E+06	6.378E+06	3.844E+08	6.421E+06
Terre + Soleil	5.972E+24	1.989E+30	6.378E+06	6.963E+08	1.496E+11	6.963E+08
Jupiter + Soleil	1.898E+27	1.989E+30	6.991E+07	6.963E+08	7.780E+11	6.966E+08
Soleil + M80	1.989E+30	9.985E+35	6.963E+08	5.534217E+10	4.541E+17	5.534221E+10
Soleil + Galaxie	1.989E+30	5.000E+40	6.963E+08	2.040E+12	5.000E+20	2.040E+12

Ce tableau contient les valeurs standard pour les corps célestes considérés, à l'exception des rayons de l'amas globulaire M80 et d'une galaxie représentative (indiqués par des cases grises). Nous avons modélisé l'état initial comme une sphère solide de masse $M + m$, en supposant une densité solaire. L'état final est le Soleil à une distance d d'une masse M de densité solaire. Pour le couple Soleil-galaxie, les valeurs utilisées sont : $R = 2.03985712710655 \times 10^{12}$ et $R_t = 2.03985712713359 \times 10^{12}$. La logique de cette construction sera abordée dans une section ultérieure. Dans les deux cas, le rayon est calculé à l'aide de la relation $R_t = (R^3 + r^3)^{1/3}$.

	E_i (j)	E_f (j)	ΔE_p (j)	ΔE_p (kg)	$m / \Delta E_p$
Lune + Terre	-2.2795E+32	-2.2413E+32	3.8176E+30	4.2477E+13	0.000000001
Terre + Soleil	-2.2751E+41	-2.2751E+41	1.3024E+36	1.4491E+19	0.00002427
Jupiter + Soleil	-2.2787E+41	-2.2751E+41	3.5519E+38	3.9520E+21	0.00002082
Soleil + M80	-7.2141E+50	-7.2141E+50	2.3949E+45	2.6647E+28	0.013396966
Soleil + Galaxie	-4.9079E+58	-4.9079E+58	3.2540E+48	3.6206E+31	18.20

Le tableau présente les différences d'énergie potentielle gravitationnelle entre les configurations physiques actuelles et leur fusion hypothétique en une seule masse. À titre d'exemple, l'annihilation complète d'un kilogramme de matière produit une énergie approximativement équivalente à celle d'une bombe à hydrogène. Par exemple, la fusion de 2 kg de deutérium avec 3 kg de tritium entraîne une perte de masse d'environ 1 kg, comparable à l'énergie libérée par la Tsar Bomba.

Sur la base de cette équivalence, la fusion de la Lune avec la Terre libérerait une énergie équivalente à environ 40 000 milliards de bombes à hydrogène. Cette énergie potentielle correspond à une masse d'environ 40 milliards de tonnes, une valeur loin d'être négligeable.

Si l'on considère l'énergie libérée par la fusion de la Terre avec le Soleil, l'énergie résultante correspondrait à plus de 14 millions de milliards de tonnes. Cependant, cette valeur reste inférieure à la masse que le Soleil perd chaque heure en raison de la fusion nucléaire. Selon sa distribution spatiale, cette masse-énergie pourrait, en principe, être mesurable. Si l'on examine le rapport $m/\Delta E_p$, qui représente la masse du plus petit corps par rapport à l'énergie potentielle du système, on constate qu'il est négligeable dans la plupart des cas, sauf à l'échelle galactique, où il approche l'ordre de grandeur du rapport de masse sombre observé.

L'énergie potentielle des systèmes célestes

La première observation est que le terme $-GmM/d$ de ΔE_p est négligeable à toutes les échelles pertinentes, où $d \gg R \gg r$. Ce résultat est intuitif d'un point de vue physique, modifier la distance entre deux corps célestes, comme la Terre et la Lune, entraîne des variations minimales de l'énergie gravitationnelle par rapport à l'énergie libérée par leur fusion hypothétique. Cette approximation est valable pour tous les systèmes célestes.

L'expression de l'énergie se simplifie donc ainsi :

$$\Delta E_p = \frac{3G}{5} \left(\frac{M_t^2}{R_t} - \frac{M^2}{R} - \frac{m^2}{r} \right)$$

Cela implique que la disposition spatiale des corps les uns par rapport aux autres est sans importance pour le calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle totale. Si l'on considère un système de n masses m_i de rayons r_i , fusionnées séquentiellement, on obtient les expressions suivantes $M_i = \sum_{j \leq i} m_j$, $R_i = (R_{i-1}^3 + r_i^3)^{1/3}$ et

$$\Delta E_i = \frac{3G}{5} \left(\frac{M_i^2}{R_i} - \frac{M_{i-1}^2}{R_{i-1}} - \frac{m_i^2}{r_i} \right), \Delta E_p = \sum_{i \leq n} \Delta E_i$$

Il est important de noter que l'ordre des fusions n'est pas pertinent, car le champ gravitationnel est conservatif.

Calcul simplifié avec masse et rayon identiques

En supposant une masse m et un rayon r identiques pour chacun des n corps, le calcul est considérablement simplifié. Dans ce cas, la masse cumulée à la $i^{\text{ème}}$ étape de fusion est $M_i = im$, et le rayon correspondant est :

$$\frac{M_i}{V_i} = \frac{m}{v} \Rightarrow R_i = \left(\frac{M_i r^3}{m} \right)^{1/3}$$

puisque M_i conserve la même densité que le corps d'origine de masse m .

La variation de l'énergie potentielle gravitationnelle à chaque étape est donnée par :

$$\Delta E_i = \frac{3G}{5} \left(\frac{M_i^2}{R_i} - \frac{M_{i-1}^2}{R_{i-1}} - \frac{m^2}{r} \right), \Delta E_p = \sum_{i \leq n} \Delta E_i$$

En raison de l'annulation des termes intermédiaires, la somme télescopique se simplifie en :

$$\Delta E_p = \frac{3G}{5} \left(\frac{M_n^2}{R_n} - n \frac{m^2}{r} \right)$$

Puisque $M_n = nm$, on trouve :

$$M_n^2 = n^2 m^2 \quad \text{et} \quad R_n = \left(\frac{M_n r^3}{m} \right)^{1/3} = n^{1/3} r$$

En remplaçant dans l'équation :

$$\Delta E_p = \frac{3G}{5} \left(\frac{n^2 m^2}{n^{1/3} r} - \frac{n m^2}{r} \right) = \frac{3G}{5} (n^{5/3} - n) \frac{m^2}{r}$$

Cette expression finale montre que l'énergie potentielle gravitationnelle totale du système dépend uniquement de la masse, du rayon et du nombre de corps individuels. Par conséquent, un faible rayon et une masse importante – c'est-à-dire une densité élevée – des sphères solides qui le composent augmentent significativement l'énergie potentielle totale du système.

Estimation pratique à partir d'un histogramme de population stellaire

En pratique, la population stellaire d'une galaxie est généralement connue grâce à un histogramme de distribution de masse. La masse stellaire totale M peut être divisée en k intervalles de masse discrets, chacun étant noté par un triplet (M_i, m_i, r_i) , $M_i = n_i m_i$ représentant respectivement la masse cumulée, la masse stellaire individuelle et le rayon stellaire. La première étape consiste à calculer la contribution de chaque intervalle comme suit :

$$\Delta E_{pa} = \sum_{i \leq k} \frac{3G}{5} \left(\frac{M_i^2}{R_i} - n_i \frac{m_i^2}{r_i} \right), R_i = \left(\frac{M_i r_i^3}{m_i} \right)^{1/3}$$

où R_i est le rayon associé à la masse M_i , et n_i est le nombre d'étoiles de masse m_i dans l'intervalle i .

Ensuite, nous calculons l'énergie potentielle résiduelle ΔE_{pb} en fusionnant les k boules compactes (M_i, R_i) . L'énergie potentielle gravitationnelle totale du système est alors :

$$\Delta E_p = \Delta E_{pa} + \Delta E_{pb}$$

Alternativement, ce processus peut être formalisé par une fonction $f(m, r, M, M_i, R_i) \mapsto (\Delta E_p, M_t, R_t)$ qui prend en entrée la masse m , le rayon r et la masse totale M des unités stellaires, ainsi qu'une configuration compacte optionnelle (M_i, R_i) pouvant être initialisée à zéro. La fonction renvoie l'énergie potentielle totale pour l'intervalle ΔE_{pi} , ainsi que la masse totale M_t et le rayon R_t mis à jour, $\Delta E_p = \Delta E_p + \Delta E_{pi}$. L'algorithme est simplement :

$$\begin{aligned} f(m, r, M, M_i, R_i) &\mapsto (\Delta E_{pi}, M_t, R_t) : \\ n &= M / m \\ M_t &= M + M_i \\ R &= n^{1/3} r \\ R_t &= (R^3 + R_i^3)^{1/3} \\ \Delta E_{pi} &= (3G/5) [M_t^2 / R_t - n m^2 / r] \end{aligned}$$

Calcul hiérarchique de l'énergie potentielle gravitationnelle

Pour calculer l'énergie potentielle gravitationnelle ΔE_p de structures de grande échelle, telles que les amas ou les superamas de galaxies, chaque galaxie constitutive doit d'abord être réduite à une configuration compacte en utilisant la méthode décrite précédemment. Ce processus fournit trois quantités clés pour chaque galaxie : l'énergie potentielle ΔE_p , la masse totale M_t et le rayon R_t . La masse totale de l'objet compact résultant est alors donnée par $M = M_t + \Delta E_p / c^2$, où $\Delta E_p / c^2$ représente l'équivalent en masse de l'énergie potentielle gravitationnelle stockée. Le rayon de cet objet composite est maintenant celui de la galaxie avec la masse distribuée dans le champ gravitationnel.

Cette procédure de fusion peut ensuite être réappliquée à l'échelle hiérarchique suivante, en considérant chaque galaxie comme une unité unique au sein d'un système gravitationnel plus vaste, qu'il s'agisse d'un amas ou d'un superamas. Comme il sera démontré dans la section sur l'énergie noire, seule la densité compte donc le rayon galactique doit simplement être sélectionné pour respecter la masse volumique galactique.

Traitement du gaz galactique dans les calculs d'énergie potentielle gravitationnelle

Le gaz galactique pose un défi particulier en matière de modélisation, car il ne forme pas d'objets compacts distincts, ce qui rend les calculs de fusion gravitationnelle directe inapplicables en l'état. Néanmoins, il est bien établi que le gaz détient une énergie potentielle gravitationnelle au moins équivalente à celle de la composante stellaire, puisqu'il constitue la matière première des processus d'effondrement gravitationnel menant à la formation des étoiles.

En raison de sa très faible densité, il est possible de considérer chaque molécule de gaz de masse m comme étant pratiquement isolée, ce qui revient à supposer que la distance moyenne entre les molécules tend vers l'infini. Si l'on modélise l'effondrement de ce gaz vers une configuration stellaire compacte de masse M_i , le transport conservatif des molécules dans cette configuration doit respecter la conservation du volume. On a alors :

$$\frac{M_i}{V_i} = \frac{m}{v} \Rightarrow R_i = \left(\frac{M_i r^3}{m} \right)^{1/3}$$

Puisque le champ est conservatif et que l'ordre de fusion peut être quelconque et que le système doit respecter le principe de réversibilité, la seule possibilité est de considérer que la masse volumique est respectée et donc que le gaz possède dans l'état initial, la même densité que la configuration stellaire. Par conséquent, le gaz doit être considéré comme contribuant de manière indiscernable à la distribution de masse stellaire. Cette hypothèse de modélisation est corroborée par nos tests numériques et est nécessaire pour minimiser les erreurs d'interprétation des données d'observation.

Le problème de la boule compacte initiale

Nous définissons la configuration compacte initiale comme une sphère solide qui conserve le volume total des corps qu'elle remplace. Cette stricte conservation du volume assure la cohérence physique de l'état de la matière avant et après compaction. Soit la différence d'énergie potentielle entre un état dilué final et un état compact initial, il est possible de simplifier cette expression :

$$\Delta E_p = \frac{3G}{5} \left(\frac{M_n^2}{R_n} - n \frac{m^2}{r} \right)$$

Puisque $M_n = nm$, on trouve :

$$M_n^2 = n^2 m^2 \quad \text{et} \quad R_n = \left(\frac{M_n r^3}{m} \right)^{1/3} = n^{1/3} r$$

En remplaçant dans l'équation :

$$\Delta E_p = \frac{3G}{5} \left(\frac{n^2 m^2}{n^{1/3} r} - \frac{n m^2}{r} \right) = \frac{3G}{5} (n^{5/3} - n) \frac{m^2}{r}$$

Le comportement asymptotique montre que pour $n \gg 1$, le terme $n^{5/3}$ domine très largement devant n , justifiant rigoureusement l'approximation :

$$\Delta E_p \approx \frac{3G}{5} \cdot \frac{M_n^2}{R_n}$$

Par conséquent, l'énergie potentielle de la structure diluée est strictement équivalente à celle de la structure compacte. Ainsi, si la boule compacte M_n , ou un système dilué correspondant, s'effondre dans un trou noir, son énergie potentielle ΔE_p sera totalement émise en radiation. En effet, le trou noir final de masse M_n ne possède aucune énergie potentielle au sens classique et il est entièrement défini par sa masse et son spin. Le passage de la boule compacte au trou noir nécessite donc la perte de son énergie potentielle. Nous pouvons donc distinguer deux types de régime énergétique, ceux dont la masse critique poussera nécessairement à s'effondrer en trou noir et les autres. Ainsi le ratio $E_{rad} / \Delta E_p$ de l'émission de radiation d'un kilo de sable s'effondrant en une boule compacte sera pratiquement nulle alors que celle de l'effondrement hypothétique d'une galaxie strictement égale à un.

La sphère solide compacte, conservant les volumes, est l'état d'entropie maximale d'énergie maximale alors que le trou noir est l'état d'entropie maximale d'énergie minimale.

Le fait que la boule compacte conservant les volumes correspond à l'état d'énergie potentielle maximale totale est simplement la conséquence du principe d'action-réaction et de la conservation de l'énergie.

Il s'agit de l'état le plus compact qui n'introduit pas de forces répulsives supplémentaires, telles que la pression de dégénérescence ou la pression de radiation, qui n'existaient pas dans l'état dilué initial. Il suffit d'imaginer cette boule compacte comme étant simplement, par exemple, la totalité des étoiles d'une galaxie placées côte à côte. Dans une telle configuration, toutes les forces initiales sont conservées. Cette conservation des forces est strictement nécessaire pour conserver l'énergie totale du système intacte.

Modèle théorique

Nous appliquons notre théorie de l'énergie potentielle gravitationnelle pour générer des modèles théoriques sous forme de courbes représentant le rapport de masse sombre produit par des galaxies comportant un nombre variable d'étoiles. Chaque courbe correspond à une taille de galaxie différente (Figures 1 et 2).

L'axe des abscisses représente la masse stellaire M_s , exprimée en masses solaires, des étoiles de la galaxie. Les rayons stellaires sont déterminés à l'aide de la relation standard masse-rayon pour les étoiles de la séquence principale ($R \propto M^{0.8}$ si $M < M_\odot$, $R \propto M^{0.57}$ sinon). L'axe des ordonnées indique le rapport entre la masse sombre totale induite par la gravitation M_G et la masse stellaire baryonique totale M_B , soit M_G / M_B .

Par exemple, une galaxie de 100 milliards d'étoiles (ligne pointillée fine) présente un rapport de masse sombre d'environ 28 lorsque toutes les étoiles sont à $1 M_\odot$ et $1 R_\odot$. Une population de 200 milliards d'étoiles présente un rapport de 45, et 300 milliards d'étoiles un rapport de 60. Ces valeurs dépassent le rapport communément admis d'environ 20 pour la Voie lactée.

Néanmoins, l'ordre de grandeur est cohérent, malgré la simplification extrême de cette analyse. Ce résultat renforce l'hypothèse centrale selon laquelle la masse sombre n'est pas une forme distincte de matière, mais émerge plutôt de l'énergie potentielle gravitationnelle du système.

Impact des variations de densité stellaire sur la production de masse sombre

L'inclusion d'étoiles moins denses, telles que les géantes rouges, réduit significativement la production modélisée de masse sombre induite par la gravitation (Figures 3 et 4). Ce scénario repose sur la même population stellaire que celle utilisée dans les cas précédents, composée principalement d'étoiles de $1 M_\odot$ et $1 R_\odot$, à laquelle est ajoutée une fraction variable de géantes rouges, chacune de $4 M_\odot$ et $100 R_\odot$. La diminution de la densité stellaire moyenne qui en résulte diminue l'énergie potentielle gravitationnelle totale du système et, par conséquent, le rapport de masse sombre.

Inversement, l'ajout de restes stellaires denses, tels que les naines blanches ($0.6 M_\odot$, $0.0085 R_\odot$) et les étoiles à neutrons ($1.35 M_\odot$, 10.8 km), entraîne une augmentation spectaculaire de la production de masse sombre (Figures 5 et 6). Les densités extrêmement élevées de ces objets augmentent considérablement l'énergie potentielle totale

du système. Cependant, dans les populations stellaires réelles, cette augmentation est modérée par la présence d'étoiles de faible densité (par exemple, les géantes rouges) et de trous noirs.

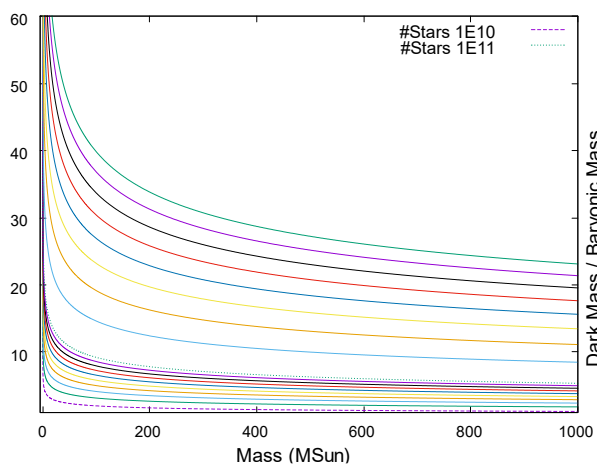


Figure 1

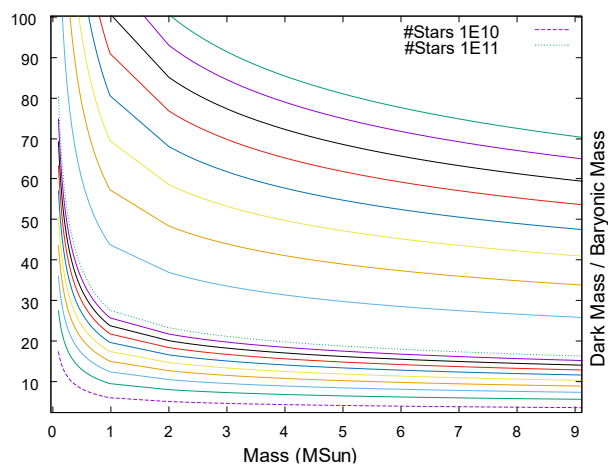


Figure 2

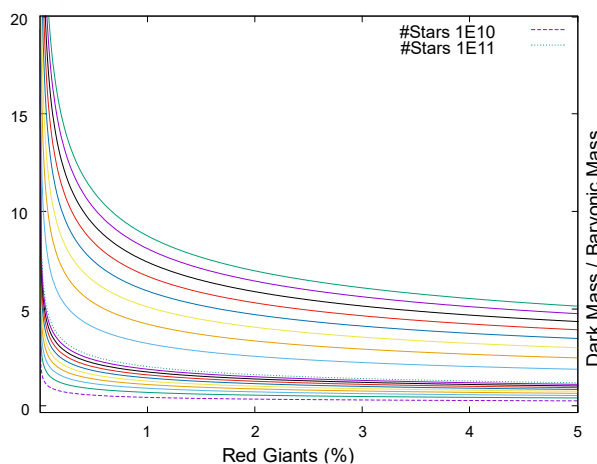


Figure 3

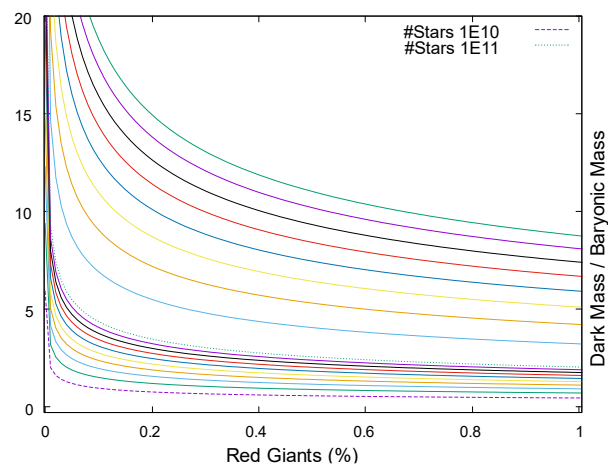


Figure 4

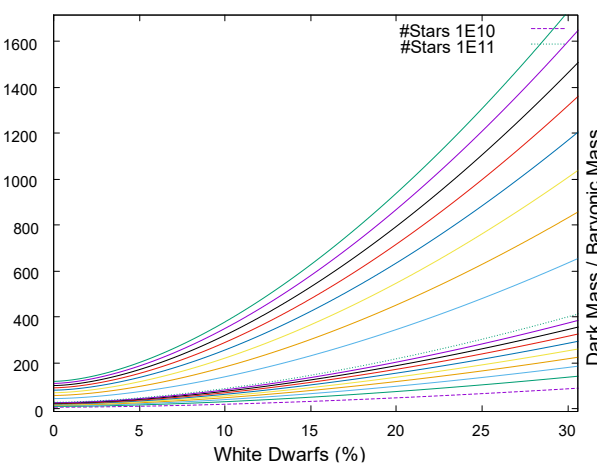


Figure 5

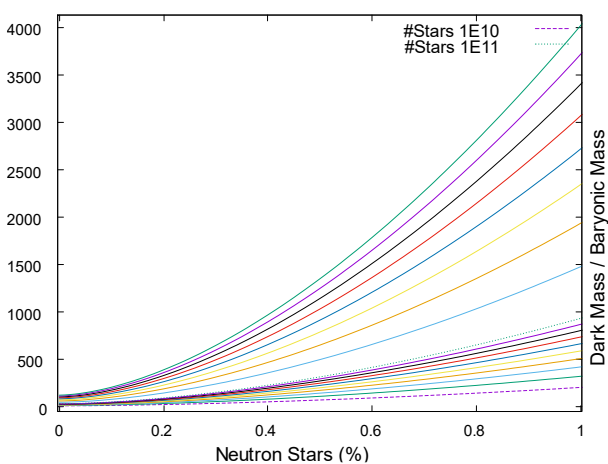


Figure 6

Les trous noirs

Bien que l'énergie potentielle des systèmes stellaires puisse désormais être calculée à l'aide des méthodes décrites précédemment, étendre l'analyse aux trous noirs introduit une complexité supplémentaire. Cependant, le principe sous-jacent reste le même, l'énergie potentielle gravitationnelle est définie comme la différence entre deux configurations ; le trou noir initial fusionné et l'état final constitué de deux trous noirs distincts.

Comme dans le cas stellaire, la quantité pertinente est l'énergie libérée lors de la fusion. Selon la relativité générale (voir références (15; 16)), la masse finale M_f du trou noir rémanent est donnée par :

$$M_f = (M + m)(1 - \eta \varepsilon_{\text{rad}}(q, \chi))$$

où :

$$\eta = \frac{Mm}{(M + m)^2}, \quad q = \frac{m}{M} \leq 1, \quad \chi = \text{paramètre de spin}$$

et $\varepsilon_{\text{rad}}(q, \chi)$ est une fonction empirique représentant l'efficacité de l'émission d'ondes gravitationnelles. Pour les trous noirs non rotatifs, une approximation couramment utilisée est :

$$\varepsilon_{\text{rad}}(q) = 0.048 \cdot \frac{(1 - q)^2}{(1 + q)^4}$$

Le spin effectif du reste est donné par :

$$\chi_{\text{eff}} = \frac{M\chi_M + m\chi_m}{M + m}$$

Si les trous noirs composants ont des spins orientés de manière aléatoire, le spin net de l'objet fusionné tendra, en moyenne, vers zéro, c'est-à-dire, $\chi_{\text{eff}} \approx 0$.

Soit $f(m, M) \mapsto M_f$ une fonction représentant la masse finale d'un trou noir formé par la fusion de deux trous noirs de masses m et M , selon la formule relativiste décrite précédemment.

Pour étendre ce principe à la fusion de n trous noirs, nous réduisons le problème au cas de n trous noirs identiques, chacun de masse m , de sorte que la masse initiale totale soit $M = nm$. Définissons une fonction récursive $g(n, m) \mapsto M_f$ où $g(n, m)$ renvoie la masse finale après fusion des n trous noirs de masse m . La fonction s'exécute comme suit :

```
g(n, m)  $\mapsto$   $M_f$  :  
  
    IF  $n = 2$  THEN  $M_f = f(m, m)$   
    IF  $n = 3$  THEN  $M_f = f(m, m), M_f = f(m, M_f),$   
    ELSE  
        isOdd = false  
        IF Odd( $n$ ) THEN  $n = n - 1, \text{isOdd} = \text{true}$   
         $M_f = g(n/2, m)$   
         $M_f = f(M_f, M_f)$   
        IF isOdd THEN  $M_f = f(m, M_f)$ 
```

Cette structure récursive est particulièrement adaptée à la programmation dynamique. En stockant les résultats intermédiaires de $g(a, b)$ dans une table de mémorisation, le nombre total de calculs distincts est considérablement réduit, ce qui permet d'obtenir une efficacité logarithmique du nombre de fusions, soit $O(\log_2 n)$.

Contribution négligeable à l'énergie potentielle des fusions de trous noirs

L'énergie potentielle gravitationnelle produite par les fusions de trous noirs est extrêmement limitée, car elle est directement tirée de la masse initiale des trous noirs. Par définition, l'énergie rayonnée – principalement sous forme d'ondes gravitationnelles – ne peut jamais dépasser la masse-énergie totale du système.

Même dans des conditions idéales, comme une configuration de spin prograde alignée (qui maximise l'efficacité radiative), la fraction de masse convertie en énergie d'ondes gravitationnelles reste faible. En utilisant une approximation semi-analytique dérivée de simulations numériques (17; 18), la fraction d'énergie rayonnée est donnée par :

$$\frac{E_{\text{gw}}}{M} \approx \eta(1 - 4\eta)[1 - 0.0686(1 - \chi_{\text{eff}})^2]$$

où $\eta = \frac{Mm}{(M+m)^2}$ est le rapport de masse symétrique et χ_{eff} est le spin sans dimension effectif.

Dans le scénario le plus favorable – fusions impliquant des trous noirs dépassant 500 masses solaires et des spins proches de l'unité – la fraction d'énergie maximale reste inférieure à 16 %.

Compte tenu de cette limite supérieure et de l'abondance relativement faible des trous noirs dans la plupart des environnements galactiques, leur contribution à l'énergie potentielle gravitationnelle totale des systèmes célestes est négligeable.

Les trous noirs et le problème de la conservation du volume

Malgré leur contribution relativement faible à l'énergie des ondes gravitationnelles, il est impossible d'exclure les trous noirs du calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle. Selon la gravitation newtonienne, tout objet massif, y compris les trous noirs, contribue à l'énergie potentielle totale via l'expression standard $E_p = -GmM/d$.

Considérons la construction de la configuration compacte initiale, qui conserve le volume total du gaz et des étoiles et donne un corps de masse M et de volume V . Si le système contient également n trous noirs de masse m et de volume individuel v , alors, par analogie, ils devraient également être inclus dans la configuration compacte, ce qui conduit à une masse et un volume révisés $M' = M + nm$, $V' = V + nv$.

Cependant, ce traitement présente un paradoxe. Si des trous noirs étaient introduits dans la configuration compacte, ils finiraient par coalescer sous l'effet de l'attraction gravitationnelle. Mais contrairement à la matière normale, *la fusion des trous noirs réduit leur volume total*, une propriété que ne partagent pas les étoiles. Ainsi, les traiter de manière analogue dans un cadre de conservation du volume rompt l'hypothèse fondamentale de conservation du modèle.

Cela met en évidence une propriété unique des trous noirs, ils violent la conservation du volume par fusion. Leur inclusion dans les calculs d'énergie potentielle gravitationnelle est nécessaire, mais leur comportement géométrique introduit une incohérence conceptuelle qui remet en cause l'hypothèse de conservation du volume utilisée pour construire la configuration compacte.

Trous noirs et cas limite de l'énergie potentielle gravitationnelle

Cette analyse suggère que les trous noirs doivent être traités de manière analogue à la matière ordinaire dans la configuration compacte à volume conservé, mais avec l'importante réserve que leur comportement volumique unique lors de la fusion doit être respecté. Dans ce cadre, nous fusionnons tous les trous noirs présents dans le système en un seul trou noir équivalent.

L'objet résultant peut être très dense (par exemple, densité ≈ 1000 pour une masse de $4.3 \times 10^6 M_{\odot}$) ou extrêmement diffus à l'échelle géométrique (par exemple, densité ≈ 0.001 pour une masse de $4.3 \times 10^9 M_{\odot}$) en raison de la mise à l'échelle non linéaire du rayon de Schwarzschild avec la masse. Paradoxalement, la présence d'un plus grand nombre de trous noirs, lorsqu'ils sont fusionnés en un seul objet, peut diminuer l'énergie potentielle gravitationnelle totale du système.

Ce résultat est inévitable. À mesure que le nombre et la masse totale des trous noirs augmentent, le système s'approche de la limite physique de formation d'un trou noir unique et définitif. Selon le théorème de l'absence de cheveux, un tel trou noir est dépourvu de structure interne, pas de distribution de masse, pas d'auto-interaction

gravitationnelle, et donc pas d'énergie potentielle gravitationnelle au sens classique du terme. Il est entièrement défini par sa masse, son spin et sa charge. Par conséquent, les trous noirs représentent le point final de la compaction gravitationnelle, au-delà duquel aucune énergie de liaison gravitationnelle ne peut être extraite. À mesure que leur prédominance dans un système s'accroît, l'énergie potentielle gravitationnelle accessible diminue inévitablement.

Résultats du modèle avec des fractions de trous noirs variables

Les figures 7 à 10 présentent les résultats de notre modèle théorique pour les galaxies contenant le même nombre d'étoiles que précédemment considéré, désormais fixé à la masse et au rayon solaires $1 M_{\odot}$, $1 R_{\odot}$. L'axe des abscisses indique la fraction de la masse stellaire totale attribuée aux trous noirs, exprimée en pourcentage. Avec une fraction de masse de trou noir d'environ 1.3 %, les rapports de masse sombre des galaxies de 100, 200 et 300 milliards d'étoiles convergent vers des valeurs respectives de 19.7, 22 et 23.

Ces résultats concordent bien avec les contraintes observationnelles, en particulier la proportion de matière noire de 95 % fréquemment citée pour la Voie lactée, qui correspond à un rapport de masse sombre d'environ 20, et les estimations plaçant la fraction de masse stellaire dans les trous noirs à environ 1 % (19). La tendance à la diminution de la production de masse sombre associée à l'augmentation de la proportion de trous noirs persiste jusqu'à des galaxies d'environ un milliard d'étoiles, après quoi l'effet commence à s'inverser légèrement. Remarquons qu'avec seulement 5 % de la fraction massique des trous noirs, la plupart des galaxies deviennent indiscernables les unes des autres en termes de rapport de masse sombre. À ce stade, seules les plus petites galaxies demeurent distinctes, tandis que les systèmes plus grands convergent vers un comportement universel de production de masse sombre.

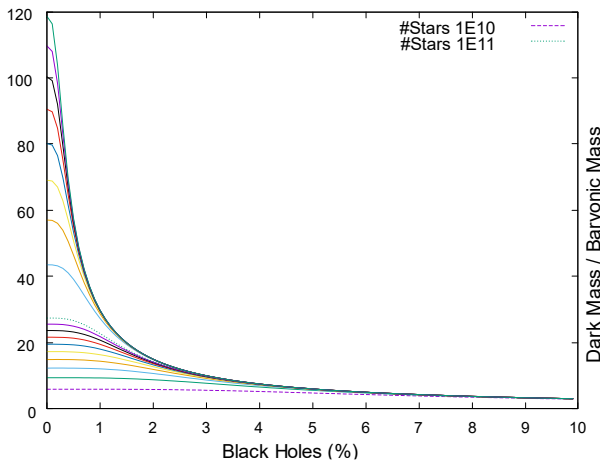


Figure 7

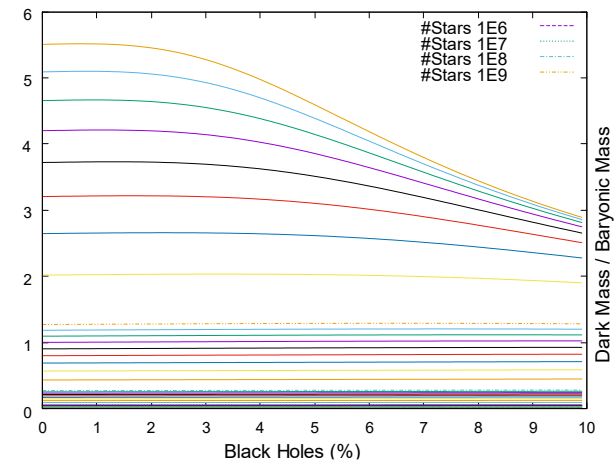


Figure 8

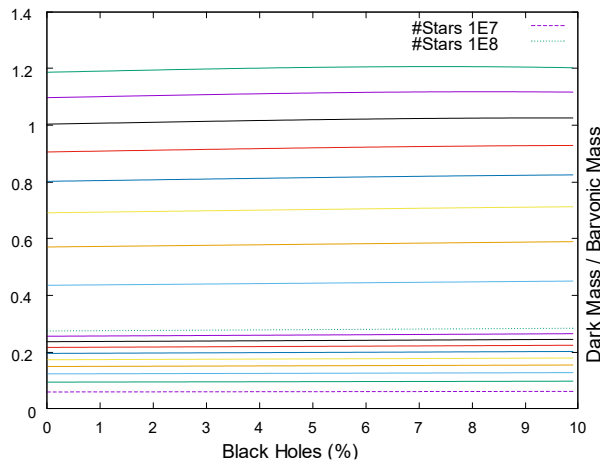


Figure 9

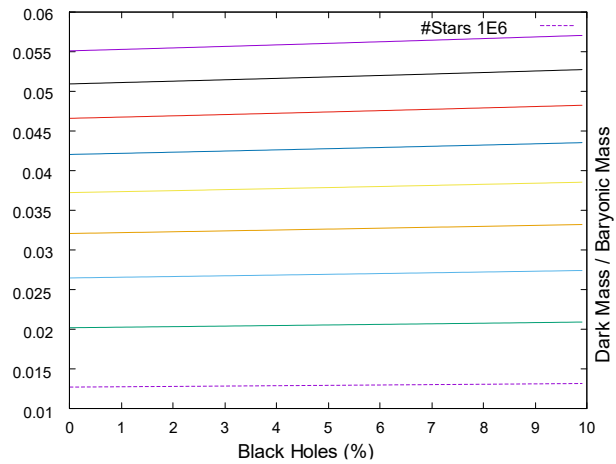


Figure 10

Les modèles galactiques

Afin d'évaluer si l'énergie potentielle gravitationnelle peut à elle seule expliquer la masse sombre observée dans les galaxies, nous avons testé notre modèle théorique par rapport à l'échantillon SPARC (20), qui comprend les données de courbes de rotation de 175 galaxies ainsi que les modèles de masse de chacune.

Pour chaque point de données, l'ensemble de données fournit la vitesse observée V_{obs} et la contribution de la masse baryonique contenue dans le rayon orbital V_{bar} ainsi que sa décomposition pour les étoiles du bulbe V_{bul} , du disque V_{disk} et du gaz V_{gas} . Ces valeurs sont utilisées pour estimer la masse contenue dans le rayon orbital M_{bul} , M_{disk} , M_{gas} en utilisant les modèles de masse. Par la suite, la masse sombre requise M_{dark} est calculée en comparant l'accélération observée à celle prédite par la matière visible. Chaque point comprend également une estimation de l'incertitude eM_{dark} pour la masse sombre déduite.

Deux galaxies (UGC 4305 et UGC 6628) ont été exclues en raison d'une masse noire globale négative, ce qui laisse un échantillon final de 173 galaxies. Cet ensemble de données contient 3 362 points de données cinématiques, dont 3 039 (environ 90 %) ont été retenus pour l'analyse. Les points de données avec des valeurs de masse sombre négatives ou des erreurs négatives ont été supprimés afin de garantir la cohérence et la fiabilité.

Méthode d'ajustement de la population stellaire

Pour chaque point de données de l'échantillon SPARC, nous appliquons notre modèle afin de déterminer la composition optimale des vestiges stellaires et des étoiles évoluées – en particulier les trous noirs, les naines blanches ($0.6 M_{\odot}$, $0.0085 R_{\odot}$), les naines rouges ($0.4 M_{\odot}$, $0.5 R_{\odot}$) et les géantes rouges ($4 M_{\odot}$, $100 R_{\odot}$) – capables de reproduire au plus près la masse sombre requise M_{dark} . Il s'agit d'une simple recherche exhaustive (recherche par force brute) conservant la solution minimisant l'erreur.

Pour chaque configuration, nous calculons l'énergie potentielle gravitationnelle E_{dark} prédite par le modèle et évaluons l'écart absolu $\Delta_{dark} = |E_{dark} - M_{dark}|$.

Le processus d'ajustement vise d'abord à ramener Δ_{dark} à l'incertitude observationnelle $\Delta_{dark} < eM_{dark}$ ou $\Delta_{dark} < 2eM_{dark}$.

Bien qu'une approche plus précise prenne en compte à la fois l'incertitude sur la masse sombre observée M_{dark} et l'incertitude sur la prédiction du modèle E_{dark} , nous considérons eM_{dark} comme la marge d'erreur effective pour E_{dark} , par simplification pratique.

Si aucune composition ne satisfait à ce critère, nous minimisons Δ_{dark} dans un deuxième temps. Chaque point de données est traité indépendamment.

Résultats d'ajustement du modèle

Le modèle présente une excellente concordance avec les données d'observation. Parmi les 173 galaxies analysées, 86 % (149 galaxies) ne présentent aucune erreur résiduelle sur l'ensemble des points de données inclus, évaluées selon le seuil relâché $\Delta_{dark} < 2eM_{dark}$. Cela correspond à 81 % du total des points de données (2 467 sur 3 039) répondant à la même condition.

Sous le critère plus strict $\Delta_{dark} < eM_{dark}$, 74 % des galaxies (128 sur 173) sont entièrement résolues, aucun point de données individuel ne dépassant le seuil d'erreur, ce qui représente 71 % des points de données retenus.

Globalement, 95 % des points de données individuels répondent à la condition $2eM_{dark}$ et 92 % se situent sous le seuil plus strict $1eM_{dark}$. Ces résultats confirment la robustesse du modèle à reproduire les distributions de masse sombre observées sur un large éventail de types de galaxies.

De plus, en examinant le positionnement de la valeur prédite E_{dark} dans la barre d'erreur de M_{dark} — où 0 % correspond à une correspondance exacte et 100 % se situe au bord de la barre d'erreur — les résultats sont fortement concentrés près du centre. Pour les 86 % de galaxies qui satisfont à $\Delta_{dark} < 2eM_{dark}$, le décalage moyen est de $3 \% \pm 9 \%$. Pour les 74 % de galaxies avec $\Delta_{dark} < eM_{dark}$, le décalage s'améliore à $1.4 \% \pm 1.6 \%$.

Toutes les marges d'erreur ($\pm e$) dans cette analyse correspondent à un écart type.

Composition de la population dans les ajustements réussis

L'un des résultats les plus convaincants du modèle est la plausibilité physique des compositions stellaires nécessaires pour reproduire la masse sombre observée. Pour les 86 % de galaxies où l'ajustement du modèle satisfait $\Delta_{\text{dark}} < 2eM_{\text{dark}}$, l'algorithme converge vers la composition moyenne de la population stellaire suivante (exprimée en fraction de la masse baryonique totale) :

Trous noirs	5.4 % $\pm$ 4.6 %
Naines blanches	30 % $\pm$ 7.7 %
Géantes rouges	20 % $\pm$ 6.7 %
Naines rouges	45 % $\pm$ 7.7 %

Ces proportions restent constantes pour les galaxies répondant au critère plus strict $\Delta_{\text{dark}} < eM_{\text{dark}}$, ainsi que pour celles présentant des résidus légèrement plus importants. Cette cohérence étaye la conclusion selon laquelle l'énergie potentielle gravitationnelle peut expliquer la masse sombre observée en utilisant des distributions réalistes des types stellaires.

La fraction relativement élevée de naines blanches inférée par l'algorithme pourrait être modérée en incluant une faible proportion d'étoiles à neutrons, qui offrent une densité élevée à faible masse. De même, la contribution des géantes rouges peut être partiellement remplacée par des hypergéantes plus rares mais de très faible densité et plus massives. Ces ajustements préserveraient l'équilibre énergétique tout en restant astrophysiquement plausibles.

Cohérence intragalactique et profils de distribution stellaire

Le modèle précédent démontre qu'il est possible de reproduire entièrement la masse sombre observée grâce à l'énergie potentielle gravitationnelle générée par des populations stellaires courantes, à savoir les trous noirs, les naines blanches, les naines rouges et les géantes rouges. Cependant, cette approche optimise chaque point de données indépendamment et n'assure pas la cohérence entre les points d'une même galaxie.

Pour introduire la cohérence intra-galactique, nous calculons m_{bul} , m_{disk} , m_{gas} et m_{dark} , qui représentent respectivement les masses contenues dans la tranche orbitale associée à chaque point de données. Les proportions d'étoiles et de trous noirs assignées à un point ne peuvent dépendre que de la masse baryonique totale locale, c'est-à-dire $m_{\text{bul}} + m_{\text{disk}} + m_{\text{gas}}$. Cette contrainte réduit les degrés de liberté disponibles, ce qui complexifie le processus d'ajustement, mais permet d'imposer une cohérence physique globale au sein de chaque galaxie.

Il s'agit du même algorithme de recherche par force brute que précédemment, toutes les combinaisons sont examinées pour chacun des points et seule la meilleure est retenue.

Les figures 11 et 12 présentent deux exemples de galaxies illustrant la distribution stellaire récupérée selon les rayons orbitaux, telle que prédite par cette optimisation contrainte.

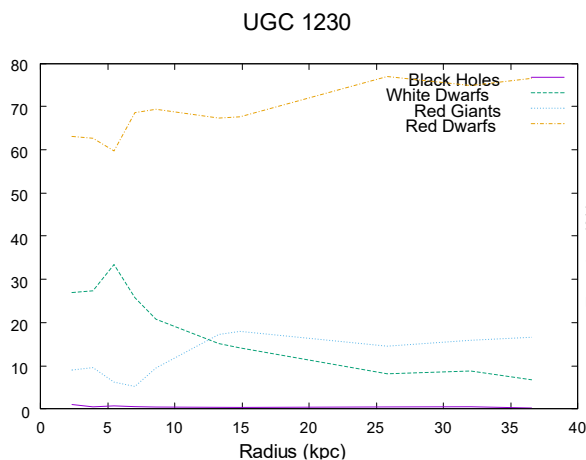


Figure 11

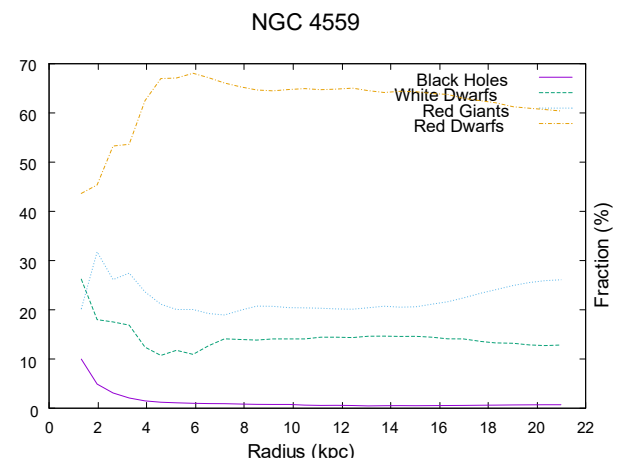


Figure 12

Le champ de masse-énergie

Pour comprendre comment l'énergie potentielle gravitationnelle – interprétée ici comme masse sombre – affecte les courbes de rotation galactique, il faut d'abord considérer la distribution spatiale de cette masse-énergie. Contrairement à la matière baryonique, cette composante invisible n'est pas localisée dans des particules discrètes, mais plutôt distribuée dans le champ gravitationnel lui-même.

L'invisibilité et l'intangibilité persistantes de cette forme de masse-énergie posent un défi conceptuel. Cependant, cette difficulté n'est pas entièrement nouvelle. Comme l'a noté Léon Brillouin (21; 22) :

« Toute énergie possède une masse, mais il semble que le cas de l'énergie potentielle ait été omis. Les fondateurs de la relativité la mentionnent à peine. En réalité, l'énergie correspondante est répartie dans l'espace et sa masse ne peut être localisée avec précision. La symétrie de la distribution suggère une répartition de la masse entre les différentes particules en interaction. Il est donc nécessaire, depuis la relativité classique, de réviser les valeurs des masses. Bien avant les quanta, la *renormalisation* était essentielle (et a été omise) dans la relativité d'Einstein. »

L'analyse de Brillouin souligne une omission théorique clé de la relativité classique ; l'équivalence en masse de l'énergie potentielle est distribuée spatialement et ne peut être attribuée à un point unique. Cela concorde avec notre interprétation, l'énergie potentielle gravitationnelle d'un système se manifeste par un champ masse-énergie étendu et non local. De ce fait, ce champ contribue lui-même à la courbure de l'espace-temps, produisant les effets dynamiques attribués à la masse sombre.

Proportionnalité du champ et localisation de la masse sombre

Bien que le problème de la masse associée à l'énergie potentielle gravitationnelle ait été clairement formulé par Brillouin en 1965, il n'a pas reçu de traitement satisfaisant, ni en physique classique ni en physique relativiste. Dans ce travail, nous postulons que la masse emmagasinée dans le champ gravitationnel est directement proportionnelle à l'intensité du champ en un point donné.

Soit $\Phi(E_a)$ le champ gravitationnel produit par une masse sombre E_a en position a , et $\Phi(M_a)$ le champ produit par une masse baryonique M_a au même point. De même, en position b , soit $\Phi(M_b)$ et $\Phi(E_b)$ les composantes baryonique et sombre, respectivement. Nous supposons la relation de proportionnalité suivante :

$$\frac{\Phi(E_b)}{\Phi(E_a)} = \frac{\Phi(M_b)}{\Phi(M_a)}$$

En utilisant l'expression standard du champ gravitationnel produit par une masse ponctuelle,

$$\Phi(M) \propto \frac{M}{R}$$

où R est le rayon caractéristique ou la distance de la source, on obtient :

$$\frac{\Phi(M_b)}{\Phi(M_a)} = \frac{M_b R_a}{M_a R_b} \quad \text{et} \quad \frac{\Phi(E_b)}{\Phi(E_a)} = \frac{E_b R_a}{E_a R_b}$$

L'égalisation des deux ratios conduit à :

$$\frac{E_b R_a}{E_a R_b} = \frac{M_b R_a}{M_a R_b}$$

ce qui se simplifie en :

$$\frac{E_b}{E_a} = \frac{M_b}{M_a} \quad \Rightarrow \quad E_b = E_a \cdot \frac{M_b}{M_a}$$

Cette relation fournit une règle simple mais puissante, la masse sombre locale est proportionnelle à la masse baryonique locale, sous l'hypothèse que l'intensité du champ gravitationnel régit la distribution de la masse-énergie stockée dans le champ.

Contributions des composantes à la production de masse sombre

Dans le contexte galactique, la production de masse sombre induite par la gravitation doit être analysée composante par composante, car chaque contributeur baryonique présente une efficacité différente dans la génération d'énergie potentielle. En pratique, les données d'observation disponibles séparent généralement la masse baryonique en au moins deux composantes, la masse du gaz et la masse du disque stellaire.

Si la composante gazeuse contribue à une masse sombre E_{gas} à partir d'une masse baryonique M_{gas} au point a , et que le disque stellaire contribue à une masse E_{disk} à partir d'une masse baryonique M_{disk} au point a , il est nécessaire de calculer leurs contributions relatives à la masse sombre totale induite par la gravitation au point b . Celles-ci peuvent être exprimées comme suit :

$$e_{\text{gas}} = \frac{E_{\text{gas}} m_{\text{gas}}}{M_{\text{gas}}}, \quad e_{\text{disk}} = \frac{E_{\text{disk}} m_{\text{disk}}}{M_{\text{disk}}}$$

La contribution totale au point b est alors $e_{\text{tot}} = e_{\text{gas}} + e_{\text{disk}}$

Cependant, cette division reste simpliste. Comme indiqué précédemment, l'énergie potentielle gravitationnelle varie considérablement selon le type d'étoile (par exemple, naines rouges, géantes rouges, naines blanches, trous noirs). Un traitement plus précis nécessiterait de diviser la masse baryonique en plusieurs catégories, chacune ayant des paramètres de masse et de rayon distincts. Ces variations déterminent l'énergie de liaison gravitationnelle et donc la quantité de masse sombre effectivement « générée » par chaque catégorie. Un modèle grossier à deux composantes peut servir d'approximation, mais une modélisation plus détaillée est essentielle pour plus de précision.

Modèle à deux composantes avec un seul paramètre d'ajustement

En l'absence d'informations détaillées sur les sous-populations stellaires, nous limitons l'analyse aux deux principales composantes baryoniques généralement disponibles dans les données d'observation ; le gaz et le disque stellaire. Leurs contributions respectives à la masse sombre induite par la gravitation sont modélisées à l'aide d'un seul paramètre libre f , qui représente la fraction d' E_{dark} attribuée à la composante gaz.

La masse sombre totale modélisée est exprimée comme suit :

$$E_{\text{dark}} = E_{\text{gas}} + E_{\text{disk}} = f E_{\text{dark}} + (1 - f) E_{\text{dark}}$$

À partir de là, nous définissons les contributions relatives pour chaque point de données comme suit :

$$e_{\text{gas}} = \frac{f E_{\text{dark}} m_{\text{gas}}}{M_{\text{gas}}}, \quad e_{\text{disk}} = \frac{(1 - f) E_{\text{dark}} m_{\text{disk}}}{M_{\text{disk}}}$$

Où :

- E_{dark} , M_{gas} , and M_{disk} sont les valeurs mesurées au rayon médian de la galaxie.
- e_{dark} , m_{gas} and m_{disk} sont les valeurs mesurées locale au point de données.

Le paramètre f est optimisé une fois par galaxie et appliqué uniformément à tous les points de données. Malgré sa simplicité, ce modèle reproduit la masse sombre observée dans la marge d'erreur pour 76 des 175 galaxies de l'échantillon SPARC, soit 43 % de l'ensemble de données.

Afin de rester prudent dans notre analyse d'erreur, nous attribuons à chaque valeur calculée e_{tot} la même incertitude que celle de la masse sombre observée correspondante e_{dark} .

Les figures 13 et 14 illustrent des exemples représentatifs de galaxies bien ajustées par ce modèle monoparamètre à deux composantes.

Affinement incrémental du modèle à deux composantes

Il est possible d'améliorer la précision du modèle en introduisant des paramètres f supplémentaires, chacun associé à une région radiale distincte de la galaxie. Ces paramètres permettent de faire varier spatialement la pondération relative entre les contributions du gaz et du disque stellaire, améliorant ainsi l'ajustement au profil de masse sombre observé.

Pour chaque segment, le calcul est effectué à partir d'un point de référence situé au centre du segment, avec ses propres valeurs de E_{dark} , M_{gas} , and M_{disk} . Cette approche garantit que le calcul proportionnel dans chaque région reste physiquement cohérent et correctement normalisé.

L'utilisation de deux paramètres f nous permet d'obtenir des ajustements sans erreur pour 29 galaxies supplémentaires. L'utilisation de trois paramètres f nous permet d'obtenir des ajustements parfaits pour 6 galaxies supplémentaires. Au total, cette approche fournit des solutions sans erreur pour 111 galaxies sur 175, soit environ 63 % de l'échantillon SPARC.

La capacité à reproduire les distributions de masse sombre observées sur une fraction aussi importante de galaxies, en utilisant uniquement la masse baryonique locale et l'échelle d'énergie potentielle gravitationnelle, étaye fortement l'existence d'une relation directe et physiquement significative entre la masse baryonique et la masse sombre inférée. Cela renforce l'hypothèse fondamentale selon laquelle l'énergie potentielle gravitationnelle, lorsqu'elle est correctement modélisée, explique la matière noire sans nécessiter de matière.

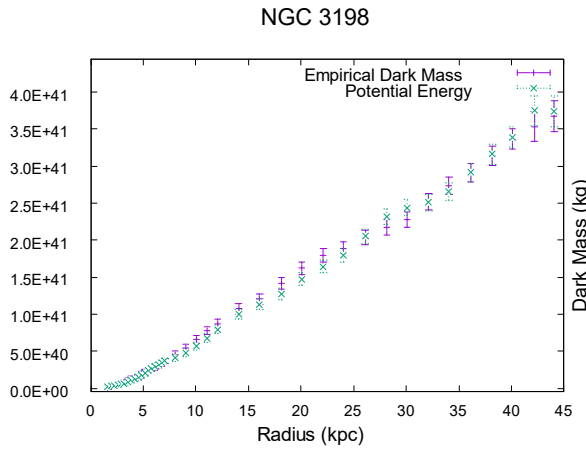


Figure 13

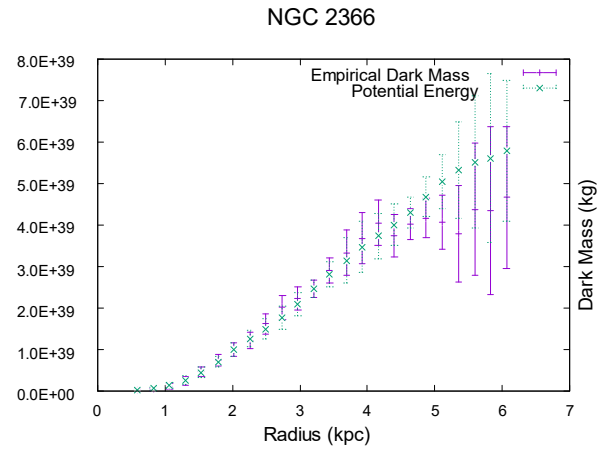


Figure 14

L'Énergie noire

Dans les modèles précédents de calcul d'énergie potentielle gravitationnelle pour des systèmes auto-gravitants (galaxies, amas, etc.), le terme d'interaction directe à grande échelle entre corps a été considéré comme négligeable. Ce terme, de la forme $-GmM/d$, où d peut être considéré comme la distance moyenne entre les corps, est en effet très petit à l'échelle stellaire. Toutefois, à l'échelle cosmologique, et lorsqu'il est accumulé sur l'ensemble des corps de l'univers, il devient significatif.

Considérons un ensemble de n masses ponctuelles de masse m , séparées en moyenne par une distance d , de masse cumulée $M = nm$. La somme des interactions entre chaque masse et la somme des précédentes donne une énergie potentielle :

$$\Delta E_i = \frac{-GmM_i}{d}, \Delta E_{\text{dil}} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta E_i = -\frac{Gm^2}{d} \sum_{i=1}^{n-1} i = -\frac{Gm^2}{d} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \approx -\frac{GM^2}{2d} \quad (\text{pour } n \gg 1)$$

Cette énergie représente l'état "dilué" de l'univers, un ensemble de masses gravitationnellement faiblement liées à grande distance.

Énergie de compaction gravitationnelle

Par comparaison, si cette même masse totale M est fusionnée en une boule homogène compacte de rayon R (obtenue, par exemple, en conservant la densité solaire), l'énergie potentielle gravitationnelle devient :

$$\Delta E_{\text{comp}} = -\frac{3GM^2}{5R}$$

La différence d'énergie potentielle entre les deux états est donc :

$$\Delta E_p = \Delta E_{\text{dil}} - \Delta E_{\text{comp}} = GM^2 \left(\frac{3}{5R} - \frac{1}{2d} \right)$$

Cette expression est toujours positive si $R \ll 2d$, ce qui est effectivement le cas dans l'univers réel $R \sim 10^{16}$ m (densité solaire), $d \sim 10^{26}$ m (distance moyenne intergalactique ou rayon de Hubble corrigé). On obtient donc $R/d \sim 10^{-10}$, rendant la contribution effective très significative.

Un aspect fondamental est que R est fixe (la compacité est constante, imposée par la densité choisie, comme celle du Soleil), tandis que d augmente avec l'expansion de l'univers. Ainsi, l'énergie potentielle gravitationnelle effective ΔE_p augmente avec d (c'est-à-dire avec le volume V) :

$$\frac{d\Delta E_p}{dV} > 0 \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{d\Delta E_p}{dV} < 0$$

Ce résultat s'interprète comme une pression gravitationnelle négative, générée non pas par un champ scalaire exotique, mais par la variation géométrique d'un champ gravitationnel distribué dans l'espace. La structure même de l'espace, en se dilatant, diminue les interactions gravitationnelles de fond. Cette raréfaction gravitationnelle produit une énergie potentielle croissante, dont la dérivée négative se manifeste en pression opposée à la gravitation — autrement dit, une source d'expansion accélérée.

Application à l'univers observable à densité galactique

Plutôt que de compacter la masse totale de l'univers à une densité stellaire (comme celle du Soleil), nous supposons ici que la matière cosmique est structurée sous forme de halos galactiques contenant à la fois la masse baryonique et la masse noire. Ces halos sont modélisés comme des ellipsoïdes de révolution aplatis, de rayon horizontal R_{halo} et de hauteur $h = \alpha R_{\text{halo}}$, où α est un facteur de forme.

Le volume moyen d'un halo galactique s'écrit alors :

$$V_{\text{gal}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{halo}}^2 \cdot \alpha R_{\text{halo}} = \frac{4}{3} \pi \alpha R_{\text{halo}}^3$$

La densité moyenne d'un halo galactique, incluant matière noire et baryonique, est donnée par :

$$\sigma_{\text{gal}} = \frac{M_{\text{gal}}}{V_{\text{gal}}} = \frac{3M_{\text{gal}}}{4\pi\alpha R_{\text{halo}}^3}$$

En supposant que l'univers est constitué de N galaxies identiques, de masse M_{gal} , la masse totale est :

$$M_{\text{tot}} = NM_{\text{gal}}$$

et le volume total équivalent devient :

$$V_n = NV_{\text{gal}} = \frac{M_{\text{tot}}}{\sigma_{\text{gal}}}$$

Ce volume est égal à celui d'une sphère compacte de rayon R , telle que :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{M_{\text{tot}}}{\sigma_{\text{gal}}} \quad \Rightarrow \quad R_n = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M_{\text{tot}}}{\sigma_{\text{gal}}} \right)^{1/3}$$

Ce résultat est important, il indique que, quelle que soit la forme géométrique des halos, le rayon R ne dépend que de la densité galactique moyenne σ_{gal} . Le facteur de forme α disparaît complètement, ce qui confère une robustesse remarquable à cette modélisation.

En compactant la masse totale de l'univers observable $M_{\text{tot}} \approx 8.8 \times 10^{52}$ kg (compatible Λ CDM) à une densité des galaxies compatible avec les échantillons SPARC, EAGLE et Illustris, $\sigma_{\text{gal}} \in [3.0 \times 10^{-22}, 2.0 \times 10^{-21}]$ kg/m³, on obtient un rayon effectif $R \in [2.2 \times 10^{24}, 4.1 \times 10^{24}]$ m.

L'énergie potentielle gravitationnelle d'un tel système structuré est donnée par :

$$\Delta E_p = GM_{\text{tot}}^2 \left(\frac{3}{5R} - \frac{1}{2d} \right)$$

En utilisant $d = kc/H \approx 4.5 \times 10^{26}$ m avec $k = 3.27$ qui est le facteur comobile associé au rayon de Hubble dans Λ CDM, l'évaluation numérique conduit à $\Delta E_p \in [7.5 \times 10^{70}, 1.4 \times 10^{71}]$ J. Ce qui entre à l'intérieur de l'estimé actuel de l'univers observable $\Delta E_\Lambda \in [6.6 \times 10^{70}, 2.6 \times 10^{71}]$ J (Planck 2018, WMAP, SNIa, BAO).

Notre équation peut se réécrire de manière à déduire la masse totale M_{tot} par une dépendance au ratio Ω_Λ/Ω_m , dont l'erreur est mieux cernée, ainsi qu'à la densité galactique par R et au rayon de Hubble par d .

$$M_{\text{tot}} = \frac{c^2}{G} \cdot \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \cdot \left(\frac{3}{5R} - \frac{1}{2d} \right)^{-1}$$

Nous pouvons utiliser les constantes cosmologiques usuelles et un rayon comobile $d \approx 4.5 \times 10^{26}$ m et $\sigma_{\text{gal}} \approx 1.2 \times 10^{-21}$ kg/m³ produisant un rayon effectif compact $R \approx 2.6 \times 10^{24}$ m et un rapport d'énergie noire sur matière $\Omega_\Lambda/\Omega_m \approx 2.17$, pour calculer la masse M_{tot} (baryonique + masse noire galactique). Puisque R dépend de M_{tot} , il faut trouver M_{tot} générant R stabilisant sa propre valeur, soit $M_{\text{tot}} \approx 4.81 \times 10^{51}$ kg produisant $\Delta E_p \approx 9.38 \times 10^{68}$ J d'énergie noire. Ce qui est trop peu et ne respecte pas Λ CDM.

Pour résumer, si nous considérons que la masse de l'Univers $M_{\text{tot}} \approx 8.8 \times 10^{52}$ kg se retrouve entièrement dans les galaxies alors il est possible de produire l'énergie potentielle respectant l'énergie noire. Cependant, notre équation permet de calculer exactement la masse galactique totale et elle est seulement de $M_{\text{tot}} \approx 4.81 \times 10^{51}$ kg soit presque vingt fois moins.

Ceci est parfaitement compréhensible car si l'énergie noire est bien de l'énergie potentielle gravitationnelle diffuse, le rapport $\Omega_\Lambda/\Omega_m \approx 2.17$ est une erreur d'interprétation. Il surestime la « constante cosmologique » en ignorant la contribution dynamique de la structuration. Une partie significative de l'effet gravitationnel attribué à Ω_m devrait en réalité être comptabilisée dans Ω_Λ . Le modèle Λ CDM sous-estime alors la contribution énergétique du champ structuré (c'est-à-dire Ω_Λ), tout en surestimant la densité de matière. Cela implique une révision possible du ratio Ω_Λ/Ω_m , suggérant que l'univers contient plus de masse noire diffuse (énergie noire) qu'on ne le pensait.

Bien que le terme $1/2d$ soit moins important ($< 1\%$) dans le calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle totale — dominée par le terme de compaction $3/5R$ — il joue un rôle crucial dans la dynamique de l'expansion cosmique. Ce que l'on nomme habituellement « énergie noire » correspond en réalité à l'énergie potentielle gravitationnelle associée à la distribution à grande échelle ; soit la masse noire globale. Cependant, ce n'est pas l'amplitude de cette énergie qui est responsable de l'expansion accélérée de l'univers, mais bien la variation du terme $1/2d$ avec le volume cosmique. À mesure que l'univers se dilate et que la distance moyenne d augmente, ce terme décroît, générant ainsi une pression effective négative. Cette contribution dynamique, bien que faible en valeur absolue, pourrait être le véritable moteur de l'effet répulsif attribué à l'énergie noire dans le modèle Λ CDM.

Pression émergente de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle effective du système gravitationnel, obtenue précédemment sous la forme :

$$\Delta E_p = GM^2 \left(\frac{3}{5R} - \frac{1}{2d} \right)$$

peut être exprimée comme fonction du volume cosmique V , en notant que R est le rayon d'une sphère compacte de masse M , supposé constant (structure galactique stable), $d = (3/4\pi)^{1/3} V^{1/3}$.

On a alors :

$$\Delta E_p(V) = GM^2 \left(\frac{3}{5R} - \frac{1}{2(3/4\pi)^{1/3} V^{1/3}} \right)$$

La pression effective est obtenue par dérivation thermodynamique :

$$P(V) = -\frac{d\Delta E_p}{dV} = -GM^2 \cdot \frac{1}{2(3/4\pi)^{1/3}} \cdot \frac{1}{3} V^{-4/3} = -\frac{GM^2}{6(3/4\pi)^{1/3} V^{4/3}}$$

Cette pression est strictement négative, et décroît avec l'expansion. Elle n'est pas attribuable à une substance exotique ou à un champ hypothétique, mais résulte directement de la dilution de l'interaction gravitationnelle due à l'augmentation du volume. Cette énergie potentielle macroscopique, produite par la structuration gravitationnelle, stocke de l'information dans le champ lui-même. Sa dérivée devient alors une force de rappel négative s'opposant à la gravitation locale, et pouvant jouer le rôle d'une énergie noire effective.

Intégration dans la relativité générale

Dans la relativité générale, la source de la courbure de l'espace-temps n'est pas seulement la masse, mais le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Dans un univers isotrope et homogène, ce tenseur prend la forme d'un fluide parfait où ρ est la densité d'énergie et P la pression :

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$$

Or, la pression que nous avons obtenue précédemment n'est pas une hypothèse, mais une conséquence géométrique de la structure gravitationnelle du champ. Il est donc naturel de considérer que cette pression — issue de l'énergie potentielle effective — peut être réintégrée comme une composante du tenseur énergie-impulsion :

$$T_{\text{grav}}^{\mu\nu} = \left(\rho_{\text{pot}} + \frac{P_{\text{grav}}}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + P_{\text{grav}} g^{\mu\nu}$$

où :

$$\rho_{\text{pot}} = \frac{\Delta E_p}{V}, \quad P_{\text{grav}} = -\frac{GM^2}{6(3/4\pi)^{1/3}V^{4/3}}$$

Ce tenseur possède la même structure que celui de l'énergie noire, mais avec une origine non constante, il émerge dynamiquement de la structuration gravitationnelle elle-même. Donc l'équation complète est :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^{\text{matière}} + T_{\mu\nu}^{\text{grav}} + T_{\mu\nu}^\Lambda)$$

Reproduction de la cosmologie Λ CDM

Pour évaluer le rôle cosmologique de cette pression effective, nous introduisons cette expression dans les équations de Friedmann, sous l'hypothèse d'un univers spatialement plat ($k = 0$) :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right)$$

où ρ est la densité de masse et P la pression :

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad P = -\frac{GM^2}{6(3/4\pi)^{1/3}V^{4/3}}$$

Ce qui donne, en utilisant la relation entre le facteur d'échelle a et le volume comobile V avec $a \propto V^{1/3}$, l'équation suivante :

$$\frac{\ddot{V}}{V} = -\frac{A}{V} + \frac{B}{V^{4/3}} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{V}}{V} \right)^2 + \Lambda V$$

avec $A \propto GM$ et $B \propto G^2 M^2 / c^2$ et le dernier terme ΛV représentant l'énergie noire sous forme d'une constante cosmologique.

Transformation adimensionnelle

L'équation différentielle précédente n'est pas directement soluble numériquement en raison des échelles extrêmes impliquées. Nous introduisons donc des grandeurs adimensionnées :

- $V \rightarrow V/V_0$, où V_0 est le volume actuel de l'univers,
- $t \rightarrow \tau = t/t_0$ où t_0 est l'âge actuel de l'univers.

Cela implique un changement d'échelle pour les dérivées temporelles, par exemple :

$$\frac{dV}{dt} \rightarrow \frac{V_0}{t_0} \frac{dV}{d\tau}, \quad \frac{d^2V}{dt^2} \rightarrow \frac{V_0}{t_0^2} \frac{d^2V}{d\tau^2}$$

et les constantes deviennent :

$$\tilde{A} = \frac{GMt_0^2}{V_0}, \quad \tilde{B} = FP \cdot \tilde{A}, \quad \tilde{\Lambda} = \Lambda t_0^2$$

où FP est un paramètre libre représentant l'intensité de la pression effective. Nous autorisons également une généralisation de l'exposant $4/3$ en introduisant un facteur multiplicatif FE , qui agit sur la définition effective du rayon moyen et permet d'explorer des cas d'anisotropie ou de structure interne.

L'équation finale adimensionnée s'écrit :

$$\ddot{V} = -k\tilde{A}/V + 0.5 \cdot k\tilde{B}/V^{4FE/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{V}}{V} \right)^2 + \tilde{\Lambda}V$$

Le facteur $(4\pi/3)^{1/3}$ provient de la géométrie sphérique, car le rayon moyen dans un volume V est donné par $R = (3V/4\pi)^{1/3}$. C'est cette relation qui est à l'origine du coefficient $k = 4\pi/3$ introduit dans la version adimensionnée.

Le facteur de proportion (FP)

Le facteur FP mesure simplement le rapport d'intensité entre la pression effective et l'attraction gravitationnelle. En théorie classique, le facteur naturel impliquerait :

$$\frac{B}{A} \sim \frac{GM}{c^2} \left(\frac{GM}{V^{1/3}} \right) \cdot \left(\frac{1}{A} \right)$$

Mais dans un cadre adimensionné, cette constante effective est absorbée dans FP . Il devient alors un paramètre libre d'ajustement, pouvant être positif ou négatif, selon que la pression effective amplifie ou contrebalance l'attraction gravitationnelle globale. Ce paramètre est le plus important car il modifie la position de la courbe sur l'axe y soit $q(z)$.

Le facteur d'exposant (FE)

La pression effective dépend du rayon moyen de l'univers, noté d , relié au volume V par :

$$d = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}$$

Cette définition repose sur une hypothèse d'homogénéité et d'isotropie sphérique. Elle devient moins contraignante si on admet des structures internes, anisotropies, ou géométries effectives plus complexes, par exemple dans un univers en réseau filamenteaire.

De plus, la relation inverse $V = 4\pi d^3 / 3$ est géométriquement stricte mais physiquement arbitraire si l'on considère que d n'est qu'une moyenne de distances caractéristiques.

Ainsi, nous généralisons l'exposant $4/3$ du terme de pression en le remplaçant par :

$$\frac{B}{V^{4FE/3}}$$

où FE est un facteur d'exposant libre (par défaut $FE = 1$). Cela revient à introduire une relation généralisée entre rayon moyen d et volume V :

$$d \propto V^{FE/3}$$

et à considérer que la pression gravitationnelle s'exprime comme :

$$P \propto -\frac{1}{d^4} \propto -\frac{1}{V^{4FE/3}}$$

Ce paramètre FE permet donc de moduler la dépendance géométrique de la pression gravitationnelle à la structure de l'univers et d'ajuster finement le comportement dynamique de l'équation pour mieux épouser les observations (notamment autour du redshift de transition). Concrètement il permet de modifier légèrement la forme de la courbe en particulier dans la zone $z < 2$.

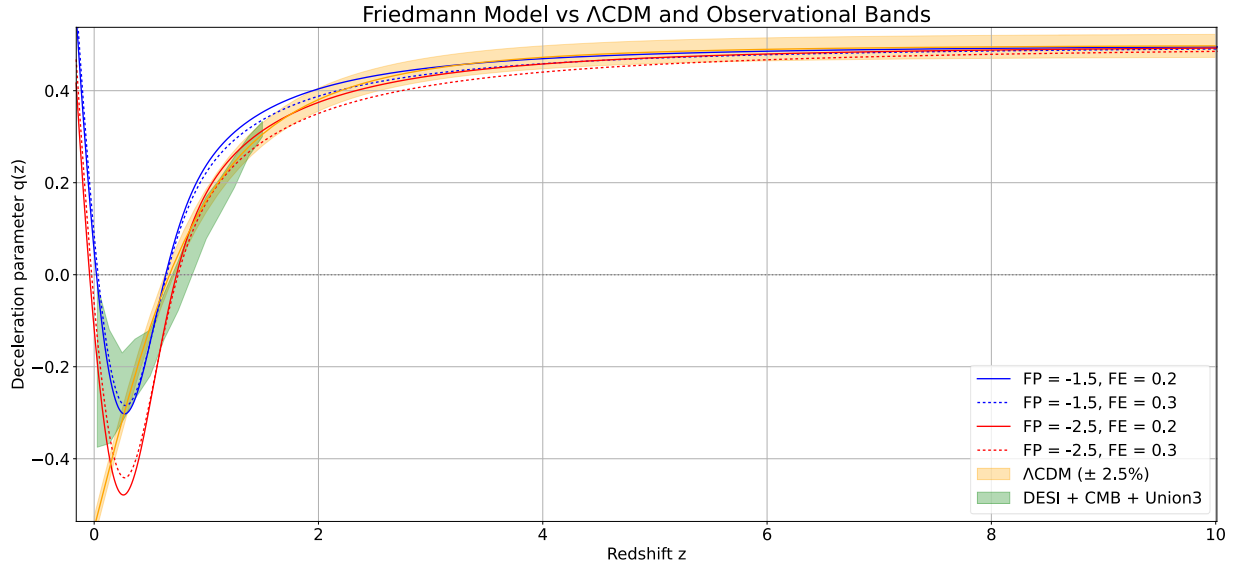


Figure 15

Discussion sur le paramétrage

Nous constatons, une fois de plus, qu'en dépit des nombreuses simplifications nécessaires, l'adéquation de la courbe est excellente. Toutefois, l'utilisation de deux paramètres permet un ajustement qui laisse planer un doute raisonnable. Cela dit, il est important de noter que la position de l'inflexion (pour $z < 3$) se situe au début de la courbe, et que le contrôle exercé sur l'augmentation ou la diminution de l'évasement est pratiquement nul. Il en va de même pour la pente de la quasi-droite (pour $z > 3$), qui demeure stable indépendamment du paramétrage.

Nous n'avons pas réussi à identifier un paramétrage respectant parfaitement les mesures observationnelles actuelles (DESI + CMB + Union3), bien que nous en soyons proches. Il est toutefois aisé de reproduire le modèle Λ CDM dans l'intervalle $z = 0.6$ à $z = 10$. De plus, bien qu'aucune des courbes générées ne corresponde exactement aux données observationnelles pour $z < 1.5$, les quatre variantes explorées couvrent collectivement différentes régions de cet espace de données. Le fait que le taux d'inflexion dépende principalement du facteur FE suggère que l'hypothèse d'isotropie pourrait être inexacte, et que le calcul de la distance moyenne requiert davantage qu'un simple exposant.

Le paramètre dV_0 , représentant la vitesse d'expansion initiale dans le modèle, n'est pas libre, il dépend entièrement du facteur FP . La modification du volume initial V_0 ne change absolument rien dans l'intervalle $z = 0$ à $z = 10$, de sorte que toute translation sur l'axe des redshifts est donc légitime. En revanche, nous n'avons pas réussi à faire varier la constante cosmologique Λ , celle-ci s'avérant beaucoup trop sensible. Trouver un paramètre Λ ne provoquant pas l'effondrement du solveur numérique s'est avéré extrêmement difficile. Par conséquent, nous avons posé $\Lambda = 0$.

Discussion sur la marge d'erreur

Calcul de l'énergie noire

Si l'on considère le calcul de l'énergie noire, notre fonction f projette la densité galactique $\sigma_{\text{gal}} \in [3.0 \times 10^{-22}, 2.0 \times 10^{-21}]$ kg/m³ dans une plage d'énergie potentielle $\Delta E_p \in [7.5 \times 10^{70}, 1.4 \times 10^{71}]$ J elle-même contenue dans l'intervalle de l'énergie noire mesurée $\Delta E_\Lambda \in [6.6 \times 10^{70}, 2.6 \times 10^{71}]$ J. Ce recouvrement pourrait, en apparence, résulter du hasard. Cependant, analysons cette possibilité. La probabilité qu'un chiffre significatif tel que 7.5 tombe

dans l'intervalle [6.6, 26] est d'environ 19.4 %, et il en va de même pour 14. La probabilité que les deux valeurs soient simultanément comprises dans cet intervalle est donc $19.4 \% \times 19.4 \% \approx 3.76 \%$.

Si l'on considère également que l'exposant 10^{70} soit le bon, parmi une plage raisonnable d'exposants allant de 40 à 100, la probabilité est alors de $1 / (100 - 40 + 1) \approx 1.64 \%$. La probabilité totale que cette correspondance soit le fruit du hasard devient donc $3.76 \% \times 1.64 \% \approx 0.062 \%$ ce qui correspond à environ une chance sur 1 600, soit une probabilité bien inférieure à un seuil de 3σ (environ 0.27 %).

Le calcul probabiliste présenté repose sur une estimation simple mais rigoureuse du hasard numérique. Il s'appuie sur le fait que la valeur de ΔE_p , dérivée uniquement de données physiques non ajustées — la masse totale de l'univers $M_{tot} \approx 8.8 \times 10^{52}$ kg, et l'intervalle de densité galactique — tombe dans l'intervalle expérimental de l'énergie noire E_Λ , sans recours à un ajustement libre. La constante de Hubble H_0 intervient dans ce calcul avec une influence inférieure à 1 %, et n'a donc pas d'incidence significative sur le résultat. Le calcul probabiliste estime la chance que ce résultat concorde à la fois en chiffre significatif et en ordre de grandeur. Ces probabilités sont considérées comme indépendantes, et combinées de manière standard. Cette approche est justifiée lorsqu'on évalue la vraisemblance qu'un accord aussi précis soit dû au seul hasard, dans un cadre sans ajustement libre.

Calcul du modèle de Friedmann

Évaluer rigoureusement la probabilité qu'une courbe générée par le modèle corresponde par hasard à une forme compatible avec les observations est complexe. Néanmoins, certaines caractéristiques structurelles du modèle se révèlent remarquablement stables à travers l'ensemble des paramétrisations. Nous nous appuyons sur cette robustesse pour estimer la probabilité qu'un tel accord avec les données empiriques résulte du hasard.

Premièrement, le point d'inflexion principal vers $z = 0.25$, qui marque la transition entre une accélération et une décélération cosmologique, aurait tout aussi bien pu être convexe. En l'absence de contrainte dynamique imposant la concavité observée, une probabilité a priori de 50 % peut être raisonnablement assignée à cette configuration.

Deuxièmement, le passage dans la zone de décélération nulle ($q(z) = 0$), localisée entre $z = 0.6$ et $z = 0.9$, aurait pu apparaître n'importe où dans un intervalle étendu, par exemple entre $z = 1$ et $z = 11$. La probabilité que la courbe tombe précisément dans l'intervalle observé est donc de l'ordre de $(0.9 - 0.6) / (11 - 1) = 3 \%$.

Troisièmement, la convergence de la courbe vers le plateau Λ CDM à $q(z) \approx 0.4$ autour de $z = 1$ aurait pu jamais se produire et converger vers n'importe quelle autre valeur de q , jusqu'à un maximum arbitraire de $q = 1.4$, ce qui est très conservateur. En considérant une bande de tolérance de largeur $\Delta q = 0.1$ centrée sur le plateau, la probabilité d'un tel alignement est approximativement de 1 %.

Enfin, la portion quasi-linéaire de la courbe entre $z = 3$ et $z = 10$ doit conserver une pente très étroite pour rester dans la bande $q(z = 10) \in [0.472, 0.522]$. En restreignant les pentes admissibles à l'intervalle $[3 \times 10^{-3}, 11 \times 10^{-3}]$, et en supposant une distribution uniforme des pentes à deux chiffres significatifs, la probabilité d'une telle précision est estimée à 8 %. En tenant compte également d'une probabilité de 10 % pour que l'exposant soit 10^{-3} , la probabilité totale de conserver une pente compatible est 0.8 %.

La probabilité conjointe d'obtenir simultanément ces quatre caractéristiques structurelles par pur hasard est donc $50 \% \times 3 \% \times 1 \% \times 0.8 \% = 1.2 \times 10^{-6}$ ce qui correspond à une chance sur environ 830 000, soit au-delà du seuil de signification de 4.5σ .

L'évaluation de la probabilité qu'un modèle reproduise spontanément les principales caractéristiques observées repose sur une série d'événements distincts dans l'évolution de la courbe de décélération. Chaque événement — comme la concavité de l'inflexion vers $z \approx 0.25$, le passage par la zone de décélération nulle $q(z) = 0$ entre $z = 0.6$ et $z = 0.9$, l'absence de dérive vers des valeurs divergentes autour de $z \approx 1.0$, ou encore la stabilité de la pente de la quasi-droite pour $z > 3$ — représente une condition qui aurait pu ne pas être satisfaite. Ces comportements sont structurellement indépendants dans la dynamique du modèle, la réalisation de l'un ne contraint pas mécaniquement les autres. Leur conjonction simultanée devient donc un événement combiné hautement spécifique. Le produit de leurs probabilités constitue, dans ce contexte, une approximation pertinente de la vraisemblance globale.

Calcul de la masse noire

La possibilité d'obtenir la masse noire totale par combinaison de différentes populations stellaires repose, par analogie, sur la résolution d'un système du type :

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = M, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1$$

Dans le cas linéaire, il est connu qu'environ 60 % des systèmes admettent une solution dans l'hypercube $[0,1]^4$ (tesseract) pour des coefficients m_i aléatoires. Toutefois, le système modélisant notre composition énergétique est fortement non linéaire, contraint par des propriétés physiques additionnelles. Malgré cela, les résultats numériques obtenus non seulement satisfont les contraintes imposées, mais produisent des compositions cohérentes avec les observations astrophysiques.

Notre fonction f fait simplement correspondre, pour chaque point de données, une masse baryonique M_{bar} et une composition galactique C_{gal} à la masse noire estimée M_{dark} , soit $E_{cal} = |M_{dark} - f(M_{bar}, C_{gal})|$, que nous comparons à l'erreur expérimentale eM_{dark} . Nous considérons le point résolu s'il existe C_{gal} tel que $E_{cal} < 2eM_{dark}$ et non résolu dans le cas contraire. L'hypothèse que toute combinaison (M_{bar}, M_{dark}) puisse être résolue par une combinaison C_{gal} semble fausse, car nous échouons à le faire. Cependant, selon cette hypothèse, il ne devrait exister aucune différence dans la capacité de résolution d'un point (M_{bar}, M_{dark}) et $(M_{bar}, \tau M_{dark})$, où τ est une fraction raisonnable (90 % à 30 % ou 111 % à 333 %). Ainsi notre algorithme ne devrait aucunement faire la différence entre un point expérimental réel et une variation aléatoire de celui-ci.

Nous construirons donc des variations aléatoires de notre échantillon galactique (SPARC) en multipliant la masse noire de tous les points de données des galaxies par un facteur τ aléatoire (un facteur τ par galaxie). Nous résoudrons cent (100) ensembles de galaxies modifiées et nous comparerons leurs résultats à celui de l'ensemble original. Nous utiliserons des intervalles du type $\tau \in [\text{min}\%, \text{max}\%]$ ou $\tau \in [1/\text{max}\%, 1/\text{min}\%]$ avec $\text{max}\% - \text{min}\% = 10\%$. Cela permet de s'assurer que nous avons à la fois des diminutions de la masse noire et des augmentations comparables. Nous avons utilisé une erreur relative constante et donc l'erreur est τeM_{dark} , l'utilisation de l'erreur absolue ne change pas beaucoup les résultats mais elle est mathématiquement incorrecte.

Nous comparerons la proportion G_{good} de galaxies résolues sans erreur, c'est-à-dire la proportion de galaxies pour lesquelles tous leurs points de données sont résolus, ainsi que la proportion P_{good} des points se trouvant dans ces galaxies. Pour notre échantillon original sans modification, nous avons $\text{max}(G_{good}) = 86\%$ et $\text{max}(P_{good}) = 81\%$. Nous présenterons toujours le z-score le moins élevé entre celui de G_{good} et P_{good} .

Pour $\tau \in [80\%, 90\%]$ ou $\tau \in [111\%, 125\%]$, nous trouvons $\text{max}(G_{good}) = 87\% > 86\%$ et $\text{max}(P_{good}) = 83\% > 81\%$ avec un z-score de 0.9σ . Ainsi cette petite variation agit simplement comme une forme de bootstrapping permettant d'améliorer les résultats. Puis, pour $\tau \in [70\%, 80\%]$ ou $\tau \in [125\%, 142\%]$, nous trouvons $\text{max}(G_{good}) = 85.5\% < 86\%$ et $\text{max}(P_{good}) = 81.7\% > 81\%$ avec un z-score de 2.27σ . Avec $\tau \in [60\%, 70\%]$ ou $\tau \in [142\%, 166\%]$, nous avons $\text{max}(G_{good}) = 85\% < 86\%$ et $\text{max}(P_{good}) = 81.7\% > 81\%$ avec un z-score de 2.83σ . À $\tau \in [50\%, 60\%]$ ou $\tau \in [166\%, 200\%]$, nous avons $\text{max}(G_{good}) = 83\% < 86\%$ et $\text{max}(P_{good}) = 79\% < 81\%$ avec un z-score de 3.14σ . Puis à $\tau \in [40\%, 50\%]$ ou $\tau \in [200\%, 250\%]$, nous avons $\text{max}(G_{good}) = 78\% < 86\%$ et $\text{max}(P_{good}) = 72\% < 81\%$ avec un z-score de 5.27σ . Finalement à $\tau \in [30\%, 40\%]$ ou $\tau \in [250\%, 333\%]$, nous avons $\text{max}(G_{good}) = 73\% < 86\%$ et $\text{max}(P_{good}) = 64\% < 81\%$ avec un z-score de 7.33σ .

Ainsi, notre algorithme semble distinguer les « bonnes » galaxies des « mauvaises » ayant été modifiées, ce qui contredit totalement l'hypothèse initiale. Il est clair qu'au-delà d'un certain seuil, aucune composition réaliste d'étoiles et de trous noirs ne pourrait satisfaire les valeurs. Dans les cas extrêmes, seule une population de trous noirs pourrait satisfaire l'intervalle bas et de naines blanches l'intervalle haut.

En ne considérant que les facteurs $\tau > 100\%$, notre algorithme performe de façon optimale dans la zone $\tau \in [1, 1.25]$ et échoue au-delà, par exemple pour $\tau \in [1.25, 100]$. Pourtant, s'il s'agissait d'un hasard, il aurait pu performer de façon optimale n'importe où dans cette plage. La probabilité de cet événement est donc de $1/400$. De plus, il s'agit en fait de masses de l'ordre de 10^{40} kg, et même en restant conservateur, la probabilité de se trouver dans cette plage est inférieure à $1/10$. Ensuite, le fait que nos solutions optimales placent en moyenne la proportion de naines rouges en première place et celle des trous noirs en dernière n'avait qu'une probabilité de $1/8$ de se produire au hasard. Ceci pour un total de $1/32\,000$, soit approximativement 4σ .

Marge d'erreur cumulée finale

Enfin, en combinant l'ensemble des éléments étudiés — à savoir la concordance quantitative du calcul de l'énergie noire, la forme compatible de la courbe de décélération avec les observations, et la correspondance énergétique avec la masse noire galactique — on obtient une probabilité globale inférieure à $1/1\,600 \times 1/830\,000 \times 1/32\,000$, ce qui correspond à un niveau de signification statistique supérieur à 7.5σ . Donc, même en restant très conservateur, on atteint 5σ .

Conclusion

L'objectif de cet article était de démontrer que le phénomène communément appelé « matière noire » peut être entièrement expliqué par l'énergie potentielle gravitationnelle. Par des approches à la fois théoriques et empiriques, nous avons montré que l'énergie potentielle générée par les interactions gravitationnelles, notamment appliquée à des systèmes comme Terre-Lune ou Terre-Soleil, est loin d'être négligeable et doit être considérée comme une grandeur physique réelle.

À l'aide de modèles théoriques simplifiés, nous avons établi que cette énergie potentielle, convertie via la relation d'équivalence masse-énergie $E = mc^2$, produit des contributions du même ordre de grandeur que la masse noire déduite des courbes de rotation galactique.

Nous avons ensuite comparé notre modèle théorique à un corpus substantiel de données observationnelles et obtenu un excellent ajustement, malgré les hypothèses nécessairement simplifiées utilisées. Ce succès empirique fournit une condition nécessaire à la validation du modèle, l'énergie potentielle gravitationnelle prédite par la distribution de masse baryonique doit être suffisante pour expliquer la masse sombre observée. Nos résultats montrent que cette condition est remplie pour un large éventail de types de galaxies.

Nous avons ensuite étendu notre modèle en appliquant le principe de proportionnalité causale, à savoir que des distributions de masse identiques du même type doivent générer des effets proportionnellement identiques. Si une masse baryonique M , composée d'étoiles d'un type donné (par exemple, des étoiles de masse solaire), produit une masse sombre correspondante E , alors une sous-composante de masse m générera une masse sombre :

$$e = \frac{Em}{M}$$

Exprimé sous forme de champ gravitationnel, cela implique que la distribution spatiale de la masse sombre suit celle de la masse baryonique, à condition que la composition (types stellaires, fraction de gaz) reste homogène. Cela rétablit directement la corrélation observée empiriquement entre les profils de masse baryonique et sombre (23; 24), mais ici, elle apparaît naturellement comme une conséquence de la structure du champ gravitationnel, plutôt que de nécessiter une hypothèse phénoménologique.

Ainsi, l'hypothèse selon laquelle la masse sombre est générée par l'énergie potentielle gravitationnelle explique non seulement son ampleur, mais fournit également une explication fondamentale de sa distribution spatiale. Ce qui paraissait auparavant mystérieux — l'alignement entre la matière baryonique et la matière noire — est ici démontré comme la conséquence logique de l'équivalence masse-énergie basée sur le champ.

Enfin, cette même énergie potentielle gravitationnelle permet de créer une dépendance fonctionnelle entre la densité galactique et l'énergie noire et de calculer celle-ci précisément. De plus, elle offre une explication naturelle à l'apparition d'une pression négative à l'échelle cosmique. En effet, la dilution progressive des interactions gravitationnelles à mesure que les structures s'éloignent induit une décroissance de l'énergie de liaison macroscopique, ce qui correspond thermodynamiquement à une pression effective négative. Cette pression, dérivée directement de l'évolution du champ gravitationnel structuré, engendre une accélération de l'expansion conforme aux observations associées à l'énergie noire. Ainsi, non seulement l'énergie potentielle permet de rendre compte de la masse sombre, mais elle peut également générer l'effet répulsif qui structure la dynamique de l'univers à grande échelle.

La probabilité que ces éléments combinés permettent d'expliquer l'univers noir a été estimée, de manière conservatrice, à un niveau de signification supérieur à 5σ . Il convient de souligner que cette estimation ne prend même pas en compte la simplicité conceptuelle du modèle proposé, ni le fait que l'énergie potentielle

gravitationnelle est une grandeur physique bien établie, couramment utilisée en ingénierie et en physique classique. L'idée que cette énergie puisse également jouer un rôle cosmologique réel confère à cette hypothèse une plausibilité physique supplémentaire, indépendante à la correspondance aux données expérimentales.

Le problème de l'obstacle épistémologique

La question la plus fondamentale soulevée par ces travaux est peut-être de savoir pourquoi le rôle de l'énergie potentielle gravitationnelle dans la génération de la masse sombre est resté si longtemps méconnu. L'énergie potentielle gravitationnelle et la relation d'équivalence masse-énergie $E = mc^2$ sont des principes bien établis, chacun soutenu par une validation expérimentale approfondie. De plus, le concept d'énergie de liaison contribuant à la masse n'est pas nouveau ; l'énergie de liaison nucléaire, par exemple, est bien comprise comme un défaut de masse mesurable dans les systèmes atomiques, bien que sa localisation soit généralement attribuée au champ quantique.

La principale raison pour laquelle l'énergie de liaison gravitationnelle a été historiquement écartée comme source de masse est l'idée que la gravité est une force trop faible pour produire des effets énergétiques significatifs. Cependant, nos résultats remettent en cause cette hypothèse. Alors que l'énergie de liaison nucléaire contribue modestement à la masse à l'échelle des noyaux atomiques – souvent de quelques pour cent – l'énergie potentielle gravitationnelle peut générer des équivalents de masse sombre bien plus importants. Dans les systèmes galactiques, le rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle et la masse baryonique peut dépasser un facteur dix, et dans les amas ou les structures plus grandes, ce rapport peut être bien plus élevés.

Ce contraste met en évidence une vérité liée à l'échelle ; la gravité est faible à l'échelle quantique, mais devient dominante aux échelles astronomiques, tandis que l'interaction nucléaire forte se comporte inversement. Immense à l'échelle subatomique, mais négligeable au-delà du noyau. L'incapacité à prendre en compte cette dépendance à l'échelle pourrait expliquer pourquoi l'origine gravitationnelle de la masse sombre est restée obscure malgré les outils théoriques et empiriques nécessaires à sa découverte.

Un autre obstacle conceptuel majeur à la reconnaissance de l'origine gravitationnelle de la masse noire réside dans l'utilisation généralisée du second théorème de Newton. En effet, celui-ci permet de considérer une sphère solide comme une masse ponctuelle. Cette simplification vient naturellement à l'esprit lorsqu'on étudie de vaste système stellaire et a entraîné une mauvaise compréhension de ce qu'est réellement l'énergie potentielle gravitationnelle utile. Les approches traditionnelles se focalisent sur la position relative des corps célestes, considérés comme des masses ponctuelles, mettant en avant le terme $E = -GM/d$ comme contribution principale. Or, comme nous l'avons démontré, ce terme est négligeable face à l'énergie associée à une restructuration du système—par exemple, la fusion ou la séparation de corps massifs—sous conservation de la densité volumique.

L'énergie potentielle pertinente ne résulte pas uniquement de la distance, mais de la différence d'énergie entre deux états macroscopiques distincts du système. C'est cette transformation d'état, respectant les propriétés physiques de la matière, qui révèle la véritable teneur énergétique du champ gravitationnel. La focalisation historique sur l'interaction positionnelle, plutôt que sur la réorganisation interne des masses, a contribué à masquer le rôle de l'énergie potentielle comme source réelle de courbure de l'espace-temps. En reconsidérant l'énergie potentielle comme une quantité localisée dans le champ et génératrice de masse, on retrouve une explication physiquement cohérente du phénomène de masse noire—déjà contenue dans la théorie gravitationnelle classique, mais restée inaperçue à cause d'un biais conceptuel discret mais décisif.

Défi de la relativité générale et implications théoriques

Une difficulté théorique plus profonde réside dans le fait que la gravité newtonienne (GN) n'est pas la théorie fondamentale de la gravitation, contrairement à la relativité générale (RG). Contrairement à la GN, la RG n'admet pas de loi de conservation générale et globale de l'énergie. Comme l'a montré Emmy Noether, la conservation de l'énergie en RG ne se vérifie que sous des symétries très spécifiques, telles que l'invariance par translation temporelle, qui ne s'appliquent pas aux espace-temps en évolution dynamique. En particulier, la notion d'énergie potentielle gravitationnelle, essentielle à la dynamique newtonienne, n'a pas d'analogue direct et covariant en RG.

Néanmoins, la gravitation newtonienne reste extraordinairement précise en champ faible et est beaucoup plus simple à utiliser que la relativité générale. La dynamique des galaxies, où le champ gravitationnel est faible et les vitesses non relativistes, relève clairement de ce domaine. En gravité newtonienne, l'énergie potentielle du système est connue, mais pour déterminer la dynamique correcte, cette énergie doit être réintroduite dans le système, c'est-

à-dire considérée comme une source de gravité. Il est difficile de croire que la relativité générale donnerait des résultats significativement meilleurs, à moins que le problème ne réside dans une prise en compte incomplète de l'auto-induction gravitationnelle – l'interaction du champ avec sa propre densité d'énergie (25; 26; 27; 28). Si tel est bien le cas, la solution la plus naturelle serait de trouver une expansion de la relativité générale en champ faible dans laquelle cette auto-induction apparaît explicitement. Dans une telle formulation, le terme d'énergie potentielle gravitationnelle devrait réapparaître, mais désormais comme une quantité dérivée et non postulée.

De manière plus spéculative, le fait que la gravité "*reconnaisse*" toutes les formes d'énergie — y compris l'énergie potentielle gravitationnelle, longtemps considérée comme un simple artifice de calcul — suggère l'existence d'un principe unificateur plus profond. Le champ de Higgs en offre déjà un exemple limité ; il convertit l'énergie potentielle scalaire en masse inertielle pour certaines particules. La gravité semble généraliser ce mécanisme, en se couplant non seulement aux champs scalaires, mais à toutes les formes d'énergie : cinétique, électromagnétique, nucléaire ou gravitationnelle.

Le problème fondamental pour un couplage par l'énergie avec les autres champs demeure que l'énergie n'est pas conservée en GR. Le fait que l'énergie potentielle soit « absorbée » par les trous noirs dans notre modèle en est un exemple frappant. Cependant, l'inexistence d'une invariance ne signifie pas l'inexistence d'un phénomène, au contraire, il est encore plus intéressant par sa variation. Le problème revient à introduire une variation dans une physique basée sur l'invariance. De plus, l'énergie potentielle est un phénomène global qui est difficilement réconciliable avec un phénomène local. Heureusement, la renormalisation est toujours là comme mécanisme d'ajustement d'échelle.

Remarques finales

En conclusion, l'étude de la masse noire semble bien ne pas nécessiter de théorie alternative de la gravitation ou de particules exotiques. Ici, même la relativité générale semble superflue, le cadre de la mécanique newtonienne classique, étendu à l'équivalence masse-énergie $E = mc^2$, se montrent suffisant.

Nous avons démontré que des modèles simples, fondés sur la physique, peuvent reproduire avec précision l'amplitude et la distribution de la masse sombre dans un large éventail de systèmes galactiques. Ces modèles peuvent être systématiquement améliorés, par exemple en intégrant une synthèse détaillée des populations stellaires, un traitement plus précis du gaz interstellaire ou une modélisation plus fine des distributions radiales. La même méthodologie peut également être étendue à des structures cosmiques plus vastes telles que les amas et les superamas de galaxies.

De plus, l'usage mixte de la relativité générale et du calcul classique de l'énergie potentielle semble nécessaire pour une compréhension correcte du phénomène attribué à l'énergie noire. Ici aussi, une amélioration du modèle par un calcul correct de la distance moyenne intergalactique semble nécessaire.

Une conclusion s'impose, l'énergie potentielle gravitationnelle ne peut plus être négligée dans les discussions sur la masse noire et l'énergie noire. Son inclusion apporte une solution à la fois quantitative et conceptuelle à un mystère astrophysique de longue date.

Les programmes C++ et Python utilisés pour effectuer tous les calculs numériques et générer les graphiques correspondants sont disponibles gratuitement sur dark-mass-generator.sourceforge.io.

Financement

Cette recherche n'a reçu aucun financement spécifique d'un organisme public, commercial ou à but non lucratif.

References

1. *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*. **V. Cooper Rubin and W. K. Ford, Jr.** 1970, *Astrophysical Journal*, Vol. 159, p. 379.
2. *Rotational Properties of 21 Sc Galaxies with a Large Range of Luminosities and Radii from NGC 4605 ($R=4\text{kpc}$) to UGC 2885 ($R=122\text{kpc}$)*. **V. Cooper Rubin, W. K. Ford, Jr. and N. Thonnard.** 1980, *Astrophysical Journal*, Vol. 238, p. 471.
3. *Rotation Velocities of 16 Sa Galaxies and a Comparison of Sa, Sb, and Sc Rotation Properties*. **V. Cooper Rubin, et al.** *Astrophysical Journal*, Vol. 289, p. 81.
4. *GAPE: a Microlensing Search for Dark Matter by Monitoring Pixels*. **P. Gondolo, et al.** s.l. : ASP Conference Series (Dark and Visible Matter in Galaxies), 1997, Vol. 117.
5. *The MACHO Project: Microlensing Results from 5.7 Years of LMC Observations*. **C. Alcock, et al.** s.l. : *Astrophysical Journal*, 2000, Vol. 542, pp. 281-307.
6. *Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds*. **P. Tisserand, et al.** s.l. : *Astronomy & Astrophysics*, 2007, Vol. 469.
7. *Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure*. **LUX Collaboration.** s.l. : *Physical Review Letters*, 2017, Vol. 118.
8. *Final results of the PICASSO dark matter search experiment*. **PICASSO Collaboration.** s.l. : *Astroparticle Physics*, 2017, Vol. 90, pp. 85-92. ISSN 0927-6505.
9. *Dark matter search results from the complete exposure of the PICO-60 C3F8 bubble chamber*. **PICO Collaboration** . s.l. : *Physical Review D*, 2019, Vol. 100.
10. *Search for low-mass dark matter via bremsstrahlung radiation and the Migdal effect in SuperCDMS*. **SuperCDMS Collaboration.** s.l. : *Physical Review D*, 2023.
11. *Probing Gravity at Cosmological Scales by Measurements which Test the Relationship between Gravitational Lensing and Matter Overdensity*. **Zhang, Pengjie, et al.** s.l. : *Physical Review Letters*, 2007, Vol. 99.
12. *Confirmation of general relativity on large scales from weak lensing and galaxy velocities*. **Reyes, Reinabelle, et al.** s.l. : *Nature*, 2010, Vol. 464, pp. 256–258.
13. *Strong Gravitational Lensing as a Probe of Dark Matter*. **Vegetti, S., et al.** s.l. : *Space Science Reviews*, 2024, Vol. 220.
14. *Microscope Mission: Final Results of the Test of the Equivalence Principle*. **MICROSCOPE Collaboration.** 2022, *Physical Review Letters*, Vol. 119.
15. *Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences*. **Buonanno, Alessandra and Damour, Thibault** . 6, 2000, *Physical Review D*, Vol. 62.
16. *Gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA*. **Berti, Emanuele , Cardoso, Vitor and M. Will, Clifford.** 2006, *Physical Review D*, Vol. 73.
17. *Final spin from the coalescence of two black holes*. **Rezzolla, Luciano, et al.** 2008, *Physical Review D*, Vol. 78.
18. *Final mass and spin of black-hole mergers*. **Tichy , Wolfgang and Marronetti, Pedro** . 2008, *Physical Review D*, Vol. 78.
19. *The Black Hole Mass Function Across Cosmic Times. I. Stellar Black Holes and Light Seed Distribution*. **Sicilia, Alex , et al.** 2, 2022, *The Astrophysical Journal*, Vol. 924.
20. *SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves*. **Lelli, Federico , McGaugh, Stacy S. and Schombert, James M.** 6, s.l. : *The Astronomical Journal*, 2016, Vol. 152, p. 157.
21. *L'énigme $E = Mc^2$: énergie potentielle et renormalisation de la masse*. **Brillouin, Léon.** 10, Paris : s.n., 1964, *Journal de Physique*, Vol. 25.
22. *The actual mass of potential energy, a correction to classical relativity*. **Brillouin, Léon.** 3, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 53.
23. *The Radial Acceleration Relation in Rotationally Supported Galaxies*. **McGaugh, Stacy S. , Lelli, Federico and Schombert, James M.** 2016, *Physical Review Letters*, Vol. 117.
24. *One Law to Rule Them All: The Radial Acceleration Relation of Galaxies*. **Lelli, Federico , et al.** 2, 2017, *The Astrophysical Journal*, Vol. 836, p. 152.
25. *Significance of Gravitational Nonlinearities on the Dynamics of Disk Galaxies*. **Deur, Alexandre , Sargent, Corey and Terzić, Balša.** 94, s.l. : *The Astrophysical Journal*, 2020, Vol. 896.

26. *An explanation for dark matter and dark energy consistent with the standard model of particle physics and General Relativity.* **Deur, Alexandre.** 2019, The European Physical Journal C, Vol. 79, p. 883.
27. *Effect of the field self-interaction of General Relativity on the cosmic microwave background anisotropies.* **Deur, Alexandre.** 13, s.l. : Classical and Quantum Gravity, 2022, Vol. 39.
28. *Relativistic corrections to the rotation curves of disk galaxies.* **Deur, Alexandre.** s.l. : The European Physical Journal C, 2021, The European Physical Journal C, Vol. 81, p. 213.