Distribution of Artificial Prime Numbers in the Fibonacci Sequence and Their Relation to the Counting Function

José Acevedo Jiménez
Santiago, Rep. Dominicana

Abstract

This paper introduces the concept of **artificial primes**, defined within a specific subset SSS of positive integers greater than one. A number $q \in S$ is considered an artificial prime if no other element $d \in S$, with $d \neq q$, divides q. Focusing on the subset of Fibonacci numbers greater than 1, we analyze the behavior of artificial primes in this sequence. Remarkably, the counting function of artificial primes among the first n Fibonacci numbers (with $n \geq 3$) matches the classical prime counting function $\pi(n)$, which enumerates the number of primes less than or equal to n. This correspondence highlights a surprising structural parallel between classical prime distribution and internal divisibility properties within recursive numerical sequences.

Keywords: Artificial prime numbers, prime numbers, Fibonacci sequence, number theory, divisibility, counting functions, recursive structure, relative primality.

Distribución de Números Primos Artificiales en la Sucesión Fibonacci y su Relación con la Función $\pi(n)$

José Acevedo Jiménez
Santiago, Rep. Dominicana

Abstract

This paper introduces the concept of **artificial primes**, defined within a specific subset SSS of positive integers greater than one. A number $q \in S$ is considered an artificial prime if no other element $d \in S$, with $d \neq q$, divides q. Focusing on the subset of Fibonacci numbers greater than 1, we analyze the behavior of artificial primes in this sequence. Remarkably, the counting function of artificial primes among the first n Fibonacci numbers (with $n \geq 3$) matches the classical prime counting function $\pi(n)$, which enumerates the number of primes less than or equal to n. This correspondence highlights a surprising structural parallel between classical prime distribution and internal divisibility properties within recursive numerical sequences.

Keywords: Artificial prime numbers, prime numbers, Fibonacci sequence, number theory, divisibility, counting functions, recursive structure, relative primality.

Definiciones

- **Número primo:** Un número primo es un entero positivo mayor que 1 que tiene exactamente dos divisores positivos distintos: el 1 y él mismo.

- **Primo artificial:** Un número q en un conjunto S de enteros positivos mayores que 1 se llama un primo artificial si no hay otro número d en S (con $d \neq q$) que divida a q. En otras palabras, q solo puede ser dividido por sí mismo dentro del conjunto S.

- **Compuesto natural:** Un número c en un conjunto S de enteros positivos es un compuesto natural si existe por lo menos un número $d \in S$ que lo divide, con $d \neq c$.

- **Sucesión de Fibonacci:** La sucesión de Fibonacci es una secuencia infinita de números enteros definida recursivamente por:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Primeros números de Fibonacci

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,

233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711,

28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309,

3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, 102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170, 1836311903, 2971215073, 4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074, 32951280099,

53316291173, 86267571272, 139583862445, 225851433717, 365435296162, 591286729879, 956722026041, 1548008755920, 2504730781961, 4052739537881,

6557470319842, 10610209857723, 17167680177565, 27777890035288, 44945570212853, 72723460248141, 117669030460994, 190392490709135, 308061521170129, 498454011879264,

806515533049393, 1304969544928657, 2111485077978050, 3416454622906707, 5527939700884757, 8944394323791464, 14472334024676221, 23416728348467685, 37889062373143906, 61305790721611591, 99194853094755497, …

Introducción

Los números primos desempeñan un papel central en la teoría de números, siendo fundamentales tanto en el estudio de las propiedades aritméticas como en aplicaciones modernas, como la criptografía. En este trabajo, exploramos una generalización contextual del concepto de primalidad conocida como primos artificiales, definida en relación con un subconjunto específico de enteros positivos mayores que uno.

En particular, analizamos esta noción dentro del conjunto de los números de Fibonacci mayores que 1. Un número en este conjunto se considera primo artificial si no es divisible por ningún otro elemento del conjunto, salvo por sí mismo. Lo notable es que, al contar estos primos artificiales entre los primeros n términos de Fibonacci (para $n \geq 3$ se obtiene una función contadora que coincide con la de los primos clásicos hasta n.

Este paralelismo sugiere una estructura subyacente que conecta la teoría clásica de los primos con propiedades internas de secuencias recursivas como la de Fibonacci.

Divisibilidad en la sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci presenta una serie de propiedades aritméticas interesantes, entre ellas, patrones regulares en términos de divisibilidad. Una de las características fundamentales es que la sucesión está fuertemente estructurada en lo que respecta a la divisibilidad entre sus términos.

Una propiedad notable es la siguiente:

$$F_n \mid F_m \quad \Leftrightarrow \quad n \mid m.$$

Es decir, un número de Fibonacci divide a otro si y solo si su índice divide al índice del segundo.

Esta propiedad permite estudiar la divisibilidad dentro del conjunto de los números de Fibonacci sin necesidad de operar directamente con los valores, solo observando las relaciones entre sus índices.

Además, existe una relación conocida entre el máximo común divisor de dos términos de Fibonacci y el Fibonacci del máximo común divisor de sus índices:

$$mcd(F_m, F_n) = F_{mcd(m,n)}.$$

Función contadora de primos artificiales (conjunto especifico)

Consideremos ahora el conjunto formado por los números de Fibonacci mayores que 1.

Si tomamos los términos de esta sucesión a partir del tercero (es decir, F_n para $n \geq 3$), podemos formar un conjunto $S = \{ F_n \mid n \geq 3 \}$. En este conjunto, ciertos números de Fibonacci son divisibles por otros números dentro del mismo conjunto, mientras que otros no. Aquellos que no pueden ser divididos por ningún otro número Fibonacci (aparte de sí mismos) dentro de S, son considerados primos artificiales.

Definamos $\pi_S(x)$ como la función contadora de números primos artificiales menores o iguales que x dentro de S. Entonces, para $n \geq 5$, se cumple que:

$$\pi_S(F_n) = \pi(n),$$

Donde $\pi(n)$ es la función contadora de números primos (naturales) menores o iguales que n, la cual satisface la estimación:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración

Consideremos el conjunto A ordenado de los números naturales mayores que 2.

$$A = \{3,4,5,6,7,8,9, \ldots \}.$$

Dentro de este conjunto, observamos que el número 4 no es divisible por ningún otro elemento de A, excepto por sí mismo. Por lo tanto, bajo la definición de primo artificial (es decir, un número que no es divisible por ningún otro del conjunto, salvo por sí mismo), el 4 es un primo artificial en A.

Los demás números primos mayores que 2, como 3, 5, 7, 11, etc., también son primos artificiales en A, ya que no tienen divisores propios dentro del conjunto. En consecuencia, el conjunto de primos artificiales de A está dado por:

Primos artificiales en $A = \{3, 4, 5, 7, 11, 13, \ldots \}$.

Definimos los números naturales como:

$N_1 = 1, N_2 = 2, N_{k+1} = N_k + 1$. Esta definición genera la sucesión habitual de los números naturales, es decir:

$$1,2,3,4,5, \ldots$$

En el conjunto de los números naturales, un número N_i divide a otro N_j si y solo si su índice divide al índice del segundo:

$$N_i \mid N_j \Leftrightarrow i \mid j.$$

Esta propiedad será fundamental al establecer la correspondencia con los números de Fibonacci.

Tomemos ahora el conjunto S compuesto por los números de Fibonacci mayores que 1.

Establecemos una correspondencia ordenada entre los elementos del conjunto A y los de S, de modo que a cada elemento $N_k \in A$ le corresponde un $F_n \in S$ con igual índice k. Es decir:

$$N_k \leftrightarrow F_k, \text{ para } k \geq 3.$$

Dado que la divisibilidad en ambos conjuntos depende de la divisibilidad entre índices, la relación de divisibilidad se conserva bajo esta correspondencia. En otras palabras:

$$F_i \mid F_j \Leftrightarrow i \mid j \Leftrightarrow N_i \mid N_j.$$

Como los números primos artificiales en el conjunto A coinciden con los primos clásicos mayores que 2 (junto con el 4), y existe una correspondencia índice a índice entre A y S que preserva la divisibilidad, entonces los primos artificiales en S coinciden con los primos clásicos en posición, salvo por un desplazamiento inicial.

Esto implica que la función contadora de primos artificiales en S, es decir, la cantidad de elementos en S que no son divisibles por ningún otro del conjunto, coincide con la función contadora de números primos clásicos $\pi(n)$, para $n \geq 5$.

Conclusión

El estudio de los primos artificiales en la sucesión de Fibonacci proporciona una visión alternativa de la primalidad, basada en las relaciones de divisibilidad dentro de un conjunto específico. La coincidencia entre la función contadora de primos artificiales en esta sucesión y la función contadora de primos clásicos sugiere una posible estructura numérica subyacente que merece un análisis más detallado. Este hallazgo plantea nuevas interrogantes sobre la primalidad relativa en secuencias recursivas y la posibilidad de extender este concepto a otras estructuras numéricas. En conjunto, estos resultados abren nuevas vías de investigación en la teoría de números y en la aritmética estructurada.

References

[1] Koshy, Thomas. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley-Interscience.

[2] Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). https://oeis.org