A gravitational force that is independent of speed contradicts the equivalence principle and the equality of heavy and inertial mass

Ulrich Brosinsky

December 2024

Ulrich.Brosinsky@t-online.de

Abstract

This consideration is concerned with the effect of a given gravitational field on a sample body and not with the contributions made by gravitational sources according to the energy-momentum tensor. The special theory of relativity is therefore sufficient for the investigation in local approximation.

a) Using the example of a movement in the direction of a gravitational field, it is shown that either the equivalence principle applies only approximately or gravity does not act on the mass but on the energy of falling bodies.

b) If the equality of gravity and inertia is also to apply to bodies with internal kinetic and potential energies, then gravity is proportional to the respective energy of the individual components. Otherwise, gravity and inertia would only be approximately equal.
The proportionality is transferred to the energy of the entire body despite any internal velocities.

c) The planetary motion suggests a velocity-dependent gravitational force, from which the exact validity of the equivalence principle follows as well as the exact equality of gravity and inertia, even taking into account special relativistic effects.

d) Newton's law of gravitation for two masses can be formulated in special relativistic terms by replacing their product with the scalar product of the "mass tangential vectors" to the world lines. This is a conclusion that is possible without recourse to general relativity.

e) Short reference to the difference between the gravitational field and the electrostatic field, the force of which is independent of velocity.

a) The equivalence principle is immediately obvious in Newtonian thinking with its absolute accelerations. Therefore, the question arises whether in a special relativistic view, where accelerations depend on the reference frame, the equivalence principle can also be valid?
The time coordinate and the position coordinates must be transformed into the frame of the respective observer. For the accelerations, the second derivatives of the positions with respect to time, the transformations are correspondingly complex. Less complicated is the investigation of the velocity parameter $\theta = \tanh v/c$, which corresponds to an imaginary angle to the time axis and can be treated like a real angle with the prefactor i. In particular, it behaves additively under successively executed Lorenz transformations performed in the same direction of motion.

The simple case of a force in the direction of movement of a body of mass m is calculated as follows:
The derivative of the four-momentum or energy-momentum vector (E/c, **p**) with respect to the proper time τ yields the Minkowski force. The energy E is the sum of rest energy and kinetic energy. After inserting $E = mc^2 \cosh\theta$ and $|\mathbf{p}| = mc \sinh\theta$, the following results due to the pseudo-Euclidean metric – taking into account $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ – for the magnitude of the force $F = mc\, d\theta/d\tau$.
F is the force that is felt in the body's reference frame – orthogonal to the world line – or is measured from an accompanying inertial system. The advantage of this formulation is its Lorentz invariance and the occurrence of only one time derivative.
If the same force acts on several bodies of the same mass m, but with different velocities, the change in the velocity parameters is proportional to the respective elapsed proper time:
$F = mc\, d\theta_i / d\tau_i$.

In comparison, a single accelerated observer of masses m of an inertial system with different velocities in the direction of motion observes a change for all velocity parameters proportional to the change in *his* proper time t – the $d\theta_i/dt$ are the same for all i.
If the equivalence principle is to apply, i.e. these two cases are indistinguishable, because of

$$dt = d\tau_i \cosh\theta_i$$

follows for the respective force

$$F_i = mc\, d\theta_i / d\tau_i = mc \cosh\theta_i\, d\theta_i / dt = E_i / c\;\; d\theta_i / dt ,$$

i.e. proportionality to the energy if all $d\theta_i/dt$ are equal.

This result can also be applied to the elevator thought experiments.

In the first elevator thought experiment, the observation of bodies of an inertial system from the perspective of an accelerating elevator is compared with the view from an elevator at rest in the gravitational field.
The observed free-falling bodies can have different velocities in the direction of the gravitational field, but should be in the vicinity of the observer in order to exclude inhomogeneities of the gravitational field and effects of curvature of space-time. Therefore, the above special relativistic view is sufficient.

From the accelerated perspective, the elevator moves through the inertial sytem of the free bodies of the same mass m – all accelerations observed on the bodies are due to the elevator acceleration. All $d\theta_i$ coincide in a given time interval. If the same gravitational force $F = mc\, d\theta_i / d\tau_i$ acted on all bodies – in the respective own system – the $d\theta_i$ would also be different due to the different $d\tau_i$. Thus, the equality of all $d\theta_i$ because $d\tau_i = dt / \cosh\theta_i$ results in a velocity dependence with the factor $\cosh\theta_i$ relative to the gravitational field, i.e. relative to the body generating the field. Therefore a gravitational force does not act on the mass of the bodies, but on their energy.

The second elevator thought experiment compares the view of an observer A, who is in an inertial system with other bodies with the view of an observer B, who is falling freely together with these bodies in his vicinity. For A, all $d\theta_i = 0$. If this should also apply to B in a field, there is a field that changes all θ_i equally during his proper time $d\tau_B$. Since the time $dt = d\tau_B \cosh\theta_B$ elapses in the rest system of the field, all θ_i change proportionally to dt, from which according to the above formula forces proportional to the energies Ei result again.

For velocities perpendicular to the force direction of the gravitational field, a similar but somewhat more complicated consideration leads to the same proportionality of the forces to the energies.

b) The increase in the gravity of a body with its temperature due to the kinetic energy of its particles is undisputed. Since the thermal oscillations are bound movements, the potential energies must also be taken into account here. Their equality of gravity and inertia is confirmed with great accuracy for nuclear binding energies. Since there is no reason not to assume the same for the potential energies of vibrations, only the equality for the kinetic energy remains to be proven, which is contained in the respective energy $E_i = m_i c^2 \cosh \theta_i$ for a $\theta_i > 0$. The total force that acts on the total energy of the body is the sum of the individual forces, which are proportional to the individual energies and thus proportional to $\cosh \theta_i$, which means that gravity is also speed-dependent here.

For a body at rest in the gravitational field, this consideration applies irrespective of the directions of the individual velocities. If the body is moving in the gravitational field, the energies and momenta of all particles (marked here with a ´) must be subjected individually to the Lorentz transformation:

$$E_i = E_i' \cosh \theta + cp_{ix}' \sinh \theta$$
$$cp_{ix} = cp_{ix}' \cosh \theta + E_i' \sinh \theta \qquad cp_{iy} = cp_{iy}' \qquad cp_{iz} = cp_{iz}'$$

The total energy E and the total momentum p of the body moving with the velocity corresponding to the parameter θ are obtained by summation. Since in the rest system of the body (marked with ´) all individual momenta add up to zero, the following results for the moving body

$$E = E' \cosh \theta \qquad cp = E' \sinh \theta \ .$$

Due to the linearity of the Lorentz transformation, summation and transformation are interchange-able, the energies of the individual parts of a system can first be added to the total energy and then transformed. Just as a single mass point has the energy $E = E_0 \cosh \theta$ with $E_0 = m c^2$, the overall system has the energy $E = E_0 \cosh \theta$, where E_0 is the energy in its center of mass system. This means that the proportionality of energy and gravity is transferred to the system and the factor $\cosh \theta$ also applies to the ratio of the gravity of a moving system to the gravity that is determined for this system when it is in rest relative to the gravitational field, i.e. relative to the body generating the field. This internal consistency enables the generalization of the approach of a velocity-dependent gravity to any arbitrarily composed bodies.

c) The question of whether the equivalence principle and the equality of gravity and inertia apply only approximately can be clarified on the basis of planetary motion.

In a particle accelerator for high velocities, a synchrotron, a relativistic adjustment of the centripetal force is required to maintain the orbit, namely by the Lorentz factor $\cosh \theta$.

The velocities of the planets are not in the relativistic range, but a relativistic effect would be cumulative and would have become noticeable long ago. A gravity dependent on the Lorentz factor provides the corresponding adjustment – for a body on a circular orbit around the centre of gravity, the same r-high-minus-two law applies in the gravitational field as for a body at rest in it.

This means that the speed dependence of gravity is observed and the exact validity of the equivalence principle is confirmed. There are no counterarguments against the equality of gravity and inertia on the part of the special theory of relativity.

d) A simple summary of this result is provided by tangential unit vectors to the world lines. If there is only one direction of motion with θ_1 and θ_2 , the unit vectors can be written as
($\cosh \theta_1$, $\sinh \theta_1$, 0 , 0) and ($\cosh \theta_2$, $\sinh \theta_2$, 0 , 0) .
Their scalar product is $\cosh \theta_1 \cosh \theta_2 - \sinh \theta_1 \sinh \theta_2 = \cosh (\theta_1 - \theta_2)$. Multiplied by the masses of the bodies associated with the world lines, the unit tangential vectors become “mass vectors” and Newton's law of gravitational law can be written in special relativistic terms as $F = \gamma\, \mathbf{m_1}\, \mathbf{m_2} / r^2$, whereby the product of the masses is replaced by the pseudo-Euclidean scalar product of their mass vectors.
(Incidentally, these mass vectors are, except for the prefactor 1/c , identical to the four-momentum vectors, which have the magnitude mc).

Since forces, measured in the own frame, are Lorentz-invariant, as is the scalar product, this formula can be generalized to any relative motion.

This approach does not take into account the results of general relativity, it is only intended to show what special relativity alone can contribute to the subject of gravitation.

This point of view may seem unusual, as questions on the subject of gravity are usually referred to the general theory of relativity, which does not express its results in terms of forces. A “translation” of the formulations of the general theory of relativity into the force-based way of thinking would be desirable in order to exclude contradictions in the approaches.

e) The difference to the electrostatic field is remarkable: Although it satisfies the r^{-2} law like the gravitational field, its force on moving charges is independent of velocity.

Eine geschwindigkeitsunabhängige Schwerkraft steht im Widerspruch zum Äquivalenzprinzip sowie zur Gleichheit von schwerer und träger Masse

Ulrich Brosinsky

Dezember 2024

Ulrich.Brosinsky@t-online.de

Zusammenfassung

Bei dieser Betrachtung geht es um die Wirkung eines gegebenen Schwerefeldes auf einen Probekörper und nicht um die Beiträge, die Gravitationsquellen gemäß dem Energie-Impuls-Tensor zum Schwerefeld leisten. Für die Untersuchung in lokaler Näherung genügt daher die Spezielle Relativitätstheorie.

a) Am Beispiel einer Bewegung in Richtung eines Schwerefeldes wird gezeigt: Entweder gilt das Äquivalenzprinzip nur näherungsweise oder die Schwerkraft greift nicht an der Masse, sondern an der Energie fallender Körper an.

b) Soll die Gleichheit von Schwere und Trägheit auch für Körper mit inneren kinetischen und potentiellen Energien gelten, folgt eine Schwerkraft proportional zur jeweiligen Energie der einzelnen Bestandteile. Anderenfalles wären Schwere und Trägheit nur näherungsweise gleich. Die Proportionalität überträgt sich trotz beliebiger innerer Geschwindigkeiten auf die Energie des gesamten Körpers.

c) Die Planetenbewegung legt eine geschwindigkeitsabhängige Schwerkraft nahe, woraus die exakte Gültigkeit des Äquivalenzprinzipes folgt sowie die exakte Gleichheit von Schwere und Trägheit auch unter Berücksichtigung speziell-relativistischer Effekte.

d) Das Newtonsche Gravitationsgesetz für zwei Massen kann speziell-relativistisch formuliert werden, indem ihr Produkt ersetzt wird durch das Skalarprodukt der „Massen-Tangentialvektoren“ an die Weltlinien. Dies ist eine Folgerung, die ohne Inanspruchnahme der Allgemeinen Relativitätstheorie möglich ist.

e) Hinweis auf den Unterschied zwischen Schwerefeld und elektrostatischem Feld, dessen Kraft geschwindigkeitsunabhängig ist.

a) Das Äquivalenzprinzip ist in Newtonscher Denkweise mit ihren absoluten Beschleunigungen unmittelbar einleuchtend. Daher stellt sich die Frage, ob in speziell-relativistischer Betrachtung, wo Beschleunigungen vom Bezugsystem abhängen, das Äquivalenzprinzip ebenfalls gültig sein kann.

Speziell relativistisch sind die Zeitkoordinate und die Ortskoordinaten in das System des jeweiligen Beobachters zu transformieren. Für die Beschleunigungen, den zweiten Ableitungen des Ortes nach der Zeit, sind die Transformationen entsprechend aufwendig. Als weniger umständlich erweist sich die Untersuchung des Geschwindigkeitsparameters $\theta = \tanh v/c$, der einem imaginären Winkel zur Zeitachse entspricht und wie ein reeller Winkel mit dem Vorfaktor i behandelt werden kann. Insbesondere verhält er sich unter in der selben Bewegungsrichtung nacheinander ausgeführten Lorentztransformationen additiv.

Der einfache Fall einer Kraft in Bewegungsrichtung eines Körpers der Masse m berechnet sich wie folgt:
Die Ableitung des Viererimpulses oder Energie-Impuls-Vektors $(E/c, \mathbf{p})$ nach der Eigenzeit τ liefert die Vierer- oder Minkowski-Kraft. Die Energie E ist dabei die Summe von Ruhenergie und kinetischer Energie. Nach Einsetzen von $E = mc^2 \cosh\theta$ und $|\mathbf{p}| = mc \sinh\theta$ ergibt sich wegen der pseudoeuklidischen Metrik – unter Berücksichtigung von $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ – für den Betrag der Kraft $F = mc\, d\theta/d\tau$.
F ist die Kraft, die im körpereigenen System – orthogonal zur Weltlinie – gespürt beziehungsweise von einem begleitenden Inertialsystem aus gemessen wird. Das Vorteilhafte an dieser Formulierung ist ihre Lorentz-Invarianz sowie das Auftreten nur einer Zeitableitung.
Wirkt dieselbe Kraft auf mehrere Körper derselben Masse m, jedoch mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, ist die Änderung der Geschwindigkeitsparameter proportional zur jeweils vergangenen Eigenzeit: $F = mc\, d\theta_i/d\tau_i$.
Im Vergleich dazu beobachtet ein einzelner beschleunigter Beobachter an in Bewegungsrichtung unterschiedlich schnellen Massen m eines Inertialsystems für alle Geschwindigkeitsparameter eine Änderung proportional zur Änderung *seiner* Eigenzeit t – die $d\theta_i/dt$ sind für alle i gleich.
Soll das Äquivalenzprinzip gelten, also diese beiden Fälle nicht zu unterscheiden sein, folgt wegen

$$dt = d\tau_i \cosh\theta_i$$

für die jeweilige Kraft

$$F_i = mc\, d\theta_i/d\tau_i = mc \cosh\theta_i\, d\theta_i/dt = E_i/c\, d\theta_i/dt \quad ,$$

also unter Gleichheit aller $d\theta_i/dt$ eine Proportionalität zur Energie.

Dieses Ergebnis kann auch auf die Fahrstuhl-Gedankenexperimente angewandt werden.

Im ersten Fahrstuhl-Gedankenexperiment wird die Beobachtung von Körpern eines Inertialsystems aus der Sicht eines beschleunigten Fahrstuhles verglichen mit der Sicht aus einem im Schwerefeld ruhenden Fahrstuhl auf frei fallende Körper. Die beobachteten frei fallenden Körper können unterschiedliche Geschwindigkeiten in Richtung des Schwerefeldes haben, sollen sich dabei aber in der Nähe des Beobachters befinden, um Inhomogenitäten des Schwerefeldes sowie Effekte der Raumzeitkrümmung auszuschließen. Daher genügt die obige speziell-relativistische Betrachtung.

Aus der beschleunigten Perspektive bewegt sich der Fahrstuhl durch das Inertialsystem der freien Körper derselben Masse m – alle an den Körpern beobachteten Beschleunigungen rühren von der Fahrstuhlbeschleunigung. Alle $d\theta$ stimmen in einem gegebenen Zeitintervall überein. Wirkte auf alle Körper – im jeweiligen Eigensystem – dieselbe Schwerkraft $F = mc\, d\theta_i/d\tau_i$, wären wegen der unterschiedlichen $d\tau_i$ auch die $d\theta_i$ verschieden. So folgt aus der Gleichheit aller $d\theta_i$ wegen $d\tau_i = dt / \cosh\theta_i$ eine Geschwindigkeitsabhängigkeit mit dem Faktor $\cosh\theta_i$ relativ zum

Schwerefeld, d. h. relativ zum das Feld erzeugenden Körper, also eine Gravitation , die nicht an der Masse der Körper angreift, sondern an deren Energie.

Das zweite Fahrstuhl-Gedankenexperiment vergleicht die Sicht eines Beobachters A, der sich mit anderen Körpern in einem Inertialsystem befindet. mit der Sicht eines Beobachters B, der gemeinsam mit diesen Körpern in seiner Nähe frei fällt. Für A sind alle $d\theta_i = 0$. Soll dies auch für B in einem Feld zutreffen, liegt ein Feld vor, das alle θ_i während seiner Eigenzeit $d\tau_B$ gleichermaßen ändert. Da im Ruhsystem des Feldes die Zeit $dt = d\tau_B \cosh \theta_B$ vergeht, ändern sich auch hier alle θ_i proportional zu dt, woraus nach obiger Formel wieder Kräfte proportional zu den Energien E_i resultieren.

Für Geschwindigkeiten senkrecht zur Kraftrichtung des Schwerefeldes führt eine ähnliche, aber etwas umständlichere Betrachtung zur selben Proportionalität der Kräfte zu den Energien.

b) Unstrittig ist die Zunahme der Schwere eines Körpers mit seiner Temperatur infolge der kinetischen Energie seiner Teilchen. Da es sich bei den Wärmeschwingungen um gebundene Bewegungen handelt, sind hier auch die potentiellen Energien zu berücksichtigen. Deren Gleichheit von Schwere und Trägheit ist für Kernbindungsenergien mit großer Genauigkeit bestätigt. Da es keinen Grund gibt, dies nicht auch für die potentiellen Energien von Schwingungen anzunehmen, bleibt nur noch die Gleichheit für die kinetische Energie nachzuweisen Diese ist in der jeweiligen Energie $E_i = m_i c^2 \cosh \theta_i$ bei einem $\theta_i > 0$ enthalten. Die Gesamtkraft, die an der Gesamtenergie des Körpers angreift, ist die Summe der Einzelkräfte, die proportional zu den Einzelenergien und damit proportional zu $\cosh \theta_i$ sind, womit sich die Schwerkraft hier ebenfalls als geschwindigkeitsabhängig erweist.

Für einen im Schwerefeld ruhenden Körper gilt diese Betrachtung unabhängig von den Richtungen der Einzelgeschwindigkeiten. Bewegt sich der Körper im Schwerefeld, sind die Energien und Impulse aller Teilchen (hier mit einem Strich gekennzeichnet) einzeln der Lorentztransfomation zu unterwerfen:

$$E_i = E_i' \cosh \theta + cp_{ix}' \sinh \theta$$
$$cp_{ix} = cp_{ix}' \cosh \theta + E_i' \sinh \theta \qquad cp_{iy} = cp_{iy}' \qquad cp_{iz} = cp_{iz}'$$

Die Gesamtenergie E und der Gesamtimpuls p des mit der dem Parameter θ entsprechenden Geschwindigkeit bewegten Körpers ergeben sich durch Summation. Da sich im Ruhsystem des Körpers (gestrichen) alle Einzelimpulse zu Null addieren, ergibt sich für den bewegten Körper

$$E = E' \cosh \theta \qquad cp = E' \sinh \theta$$

Wegen der Linearität der Lorentztransformation sind Summation und Transformation vertauschbar, die Energien der Einzelteile eines Systemes können zuerst zur Gesamtenergie addiert und dann transformiert werden. So wie ein einzelner Massepunkt die Energie $E = E_0 \cosh \theta$ mit $E_0 = mc^2$ besitzt, hat das Gesamtsystem die Energie $E = E_0 \cosh \theta$, wobei E_0 die Energie in seinem Schwerpunktsystem bedeutet. Damit überträgt sich die Proportionalität von Energie und Schwere auf das Gesamtsystem und der Faktor $\cosh \theta$ gilt auch für das Verhältnis der Schwere eines bewegten Systems zur Schwere, die bei diesem System festgestellt wird, wenn es relativ zum Schwerefeld, d. h. relativ zum das Feld erzeugenden Körper, ruht. Diese innere Stimmigkeit ermöglicht die

Verallgemeinerung des Ansatzes einer geschwindigkeitsabhängigen Schwerkraft auf beliebig zusammengesetzte Körper.

c) Die Frage, ob nun das Äquivalenzprinzip sowie die Gleichheit von Schwere und Trägheit nur näherungsweise gelten, kann anhand der Planetenbewegung geklärt werden.

In einem Teilchenbeschleuniger für hohe Geschwindigkeiten, einem Synchrotron, ist, um die Kreisbahn zu halten, eine relativistische Anpassung der Zentripetalkraft erforderlich, und zwar um den Lorentzfaktor $\cosh\theta$.
Nun liegen die Geschwindigkeiten der Planeten nicht im relativistischen Bereich, dennoch wäre ein relativistischer Effekt kumulativ und hätte sich längst bemerkbar gemacht. Eine mit dem Lorentz-faktor geschwindigkeitsabhängige Schwerkraft sorgt gerade für die entsprechende Anpassung – für einen Körper auf einer Kreisbahn um das Gravitationszentrum ist dadurch im Schwerefeld dasselbe r-hoch-minus-zwei-Gesetz gültig wie für einen darin ruhenden Körper.

Damit ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Schwerkraft beobachtet und die exakte Gültigkeit des Äquivalenzprinzipes bestätigt. Gegen die Gleichheit von Schwere und Trägheit gibt es seitens der Speziellen Relativitätstheorie keine Gegenargumente.

d) Eine einfache Zusammenfassung dieses Ergebnisses ermöglichen tangentiale Einheitsvektoren an die Weltlinien. Gibt es nur eine Bewegungsrichtung mit θ_1 und θ_2, lassen sich die Einheits-vektoren schreiben als $(\cosh\theta_1 , \sinh\theta_1 , 0 , 0)$ und $(\cosh\theta_2 , \sinh\theta_2 , 0 , 0)$. Ihr Skalarprodukt ist dann $\cosh\theta_1 \cosh\theta_2 - \sinh\theta_1 \sinh\theta_2 = \cosh(\theta_1 - \theta_2)$. Multipliziert mit den Massen der den Weltlinien zugehörigen Körper, werden die Einheitstangentialvektoren zu „Massevektoren“ und das Newtonsche Gravitationsgesetz kann speziell-relativistisch als $F = \gamma\, \mathbf{m_1}\, \mathbf{m_2} / r^2$ geschrieben werden, wobei das Produkt der Massen durch das Skalarprodukt ihrer Massenvektoren ersetzt ist.
(Diese Massevektoren sind übrigens bis auf den Vorfaktor 1/c identisch mit den Viererimpulsen, welche den Betrag mc haben.)

Da Kräfte, gemessen im Eigensystem, lorentz-invariant sind wie auch das Skalarprodukt, ist diese Formel auf beliebige Relativbewegungen verallgemeinerbar.

Dieser Ansatz berücksichtigt nicht die Ergebnisse der Allgemeinen Relativitätstheorie, er soll nur zeigen, was die Spezielle Relativitätstheorie allein zum Thema Gravitation beizutragen vermag.

Diese Betrachtungsweise mag ungewohnt erscheinen, denn bei Fragen zum Thema Schwerkraft wird üblicherweise die Allgemeine Relativitätstheorie zu Rate gezogen, die ihre Ergebnisse nicht in Form von Kräften ausdrückt. Eine “Übersetzung“ der Formulierungen der Allgemeinen Relativitäts-theorie in die an Kräfte angelehnte Denkweise wäre wünschenswert, um Widersprüche in den Betrachtungsweisen auszuschließen.

e) Bemerkenswert ist der Unterschied zum elektrostatischen Feld: Obwohl es wie das Gravitations-feld dem r^{-2} - Gesetz genügt, ist seine Kraft auf bewegte Ladungen geschwindigkeitsunabhängig.