

RÉFLEXIONS SUR LES MÉTHODES DE LA  
REPRÉSENTATION DU CHAMP DE LA  
PESANTEUR TERRESTRE  
PAR ABDELKADER SELLAL, INGÉNIEUR  
GÉODÉSIEN<sup>1</sup>

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**  
**Ingénieur Géographe Général**

**Résumé**

Dans ce rapport, je présente les réflexions de mon collègue Abdelkader Sellal sur les méthodes de la représentation du champ de la pesanteur terrestre et ses propositions en la matière pour encourager les jeunes géodésiens à découvrir ces méthodes.

**Abstract**

In this report, I present the reflections from my colleague Abdelkader Sellal on the methods of representing the terrestrial gravity field and his proposals on the subject to encourage the young geodesists to discover these methods.

**DÉCEMBRE 2024**

**VERSION 1.A**

---

1. Décédé en 2012.

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM,**  
e-mail : abenhadjsale@gmail.com

© Décembre 2024 - **Abdelkader SELLAL - Abdelmajid BEN HADJ SALEM -**

## Abréviations

**AAC** : Association Africaine de Cartographie  
**ADOS** : Africain Doppler Survey (AIG)  
**AIG** : Association Internationale de Géodésie  
**AIUB** : Astronomical Institute University of Bern  
**AUSLIG** : Australian Surveying and Land Information Group (nouvelle appellation : Geoscience Australia)  
**CHAMP** : **CH**allenging **M**ini-satellite **P**ayload  
**CORS** : Continuously Operating Reference Station  
**DGFI** : Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut  
**DGPS** : Differential GPS  
**EGM** : Earth Geopotential Models  
**EGNOS** : European Geostationary Navigation Overlay Service  
**EM** : Ellipsoïde moyen  
**ESA** : European Spatial Agency (Agence Spatiale Européenne)  
**EUREF** : European Reference Frame (AIG)  
**GFZ** : GeoForschungsZentrum Potsdam  
**GIPSY/OASIS** : GNSS-Inferred Positioning System and Orbit Analysis Simulation Software  
**GLONASS** : **G**LObal' **n**aya **N**avigatsionnaya **S**putnikovaya **S**istema (Global Orbiting Navigation Satellite System, Russia)  
**GM** : Géoïde moyen  
**GMT** : Generic Mapping Tools  
**GNSS** : Global Navigation Satellite Systems  
**GOCE** : Gravity field and Ocean Circulation Explorer  
**GPS** : Global Positioning System  
**GRACE** : Gravity Recovery and Climate Experiment  
**GRS80** : Geodetic Reference System 1980  
**IGN** : Institut Géographique National de France (Nouvelle appellation : Institut Géographique de l'Information Géographique et Forestière)  
**IGS** : International GNSS Service (AIG)  
**IGeS** : International Geoïd Service (AIG)  
**INCT** : Institut National de Cartographie et de Télédétection (Algérie)  
**ITRF** : International Terrestrial Reference Frame (AIG)  
**ITRS** : International Terrestrial Reference System (AIG)  
**MIT** : Massachusetts Institute of Technology (USA)  
**MSL** : Mean Sea Level  
**NASA** : National Aeronautics and Space Administration (USA)  
**NRTK** : Network Real Time Kinematic  
**OSU** : Ohio State University (USA)  
**OTC** : Office de la Topographie et de la Cartographie (Nouvelle appellation Office de la Topographie et du Cadastre depuis 2009, Tunisie)  
**JPL** : Jet Propulsion Laboratory (USA)

**RGIA** : Réseau Géodésique Intégré Algérien  
**RINEX** : Receiver Independent Exchange Format (AIG)  
**RTCM** : Radio Technical Commission for Maritime Services  
**SINEX** : Solution (Software/technique) INdependent EXchange Format (AIG)  
**SOPAC** : Scripps Orbit and Permanent Array Center  
**SST** : Sea Surface Topography  
**SVAR** : Système Vertical Algérien de Référence  
**TU** : Technical University  
**UCAR** : University Corporation for Atmospheric Research  
**UNAVCO** : University Navstar Consortium  
**VLBI** : Very Long Baseline Interferometry  
**VPN** : Virtual Private Network  
**WGD2000** : World Geodetic Datum 2000

RÉFLEXIONS SUR LES MÉTHODES DE LA REPRÉSENTATION DU CHAMP  
DE LA PESANTEUR TERRESTRE

ABDELKADER SELLAL, INGÉNIEUR GÉODÉSIE

COLLECTÉES PAR ABDELMAJID BEN HADJ SALEM  
INGÉNIEUR GÉOGRAPHE GÉNÉRAL

*A la mémoire de tous mes amis et collègues décédés*

## Préface

Dans ce rapport, je vous présente une lettre que j'ai reçue de la part de mon collègue l'ingénieur géodésien Abdelkader Sellal en 2005.

Dans cette lettre, il évoquait :

- Premièrement la question de la publication d'un article à la revue connue " *Journal of Geodesy*" en citant deux géodésiens, l'un ayant publié trois livres, le deuxième avait présidé une importante commission à l'Association Internationale de Géodésie (AIG) sans pour autant avoir publié chacun un article. Ainsi, il encourageait à soumettre des articles au Journal of Geodesy.

- Deuxièmement, il passait en revue ses réflexions sur les quelques méthodes connues de la représentation du champ de la pesanteur terrestre en citant les différentes écoles auxquelles appartenaient les mathématiciens et les théoriciens en géodésie mathématique et physique.

- Enfin, il encourageait moi-même et les jeunes géodésiens à découvrir en profondeur en mettant en place les fondements mathématique et physique de la représentation du champ de la pesanteur terrestre.

De cette lettre, on découvre l'immense dévouement de mon ami Abdelkader Sellal à la connaissance et la recherche et précisément la maîtrise des aspects mathématique et physique de la Géodésie domaine fondamental de la Géomatique.

Paix à son âme.

**Abdelmajid Ben Hadj Salem**  
**Ingénieur Général Géographe**  
**Tunis, 05 décembre 2024**

Alger, .. mars 2005

**Mon Cher Ben Hadj Salem,**

J'ai tardé un peu à t'écrire parce que j'étais branché sur un travail de compilation de programmes et que je devais faire vite parce que le compilateur que j'utilise est un utilitaire d'évaluation avec une date d'expiration.

Je suis en mesure maintenant de correspondre avec toi un peu plus longuement et je t'envoie à cet effet un texte<sup>2</sup> que j'ai rédigé il y a quelques mois (novembre et décembre), destiné d'abord à l'Institut en vue de proposer des tâches pour donner une impulsion aux travaux géodésiques à l'INCT.

Je n'ai pas encore déposé officiellement ce texte ici à l'INCT même si je l'ai diffusé auprès de certains collègues.

Ce texte couvre, il me semble, l'ensemble des thèmes de la géodésie d'aujourd'hui tels qu'on pourrait les appliquer à nos matériaux géodésiques.

Je n'ai pas inclus la gravimétrie au sol qui sera décrite dans une livraison ultérieure.

Ce que j'escompte est d'abord tu trouveras le temps de parcourir le texte et ce que j'en attends évidemment, ce sont tes réactions et tes suggestions.

Ensuite voir comment nous pourrons faire ensemble des développements.

Mon ambition actuelle est de publier dans le *Journal of Geodesy* à partir d'ici. Ce n'est pas une mince affaire et cela tu le sais très bien.

Je mentionnerais, à titre d'exemple deux cas parmi les collègues et amis que j'ai laissés à Graz (*Autriche*).

Bernhard Hofmann-Wellenhof a publié trois livres, le premier [2] sur le GPS en 1992 avec deux collègues, un américain et un autrichien, le deuxième en 1993 avec Helmut Moritz sur les relations entre la géodésie, la géométrie et la relativité [3] et le troisième récemment sur la navigation et le GPS mobile [4] avec deux autres auteurs autrichiens.

Je n'ai jamais vu son nom en dix ans de parution du *Journal of Geodesy*. Le professeur Hans Sünkel n'est également pas à présenter, il a entre autre présidé durant de longues années la Commission internationale sur le Géoïde. Je n'ai aussi jamais vu son nom dans une publication du *Journal of Geodesy*.

Qu'est-ce qui me rend donc si confiant pour espérer publier dans une revue d'un aussi haut niveau scientifique ?

En premier lieu, je viens de citer deux noms, je pense que s'ils n'ont pas publié dans le *Journal of Geodesy*, c'est qu'ils n'en ont pas fait une priorité. Ils publient en particulier en langue allemande en Allemagne et en Autriche.

Pour ce qui me concerne, j'ai été fasciné depuis 1995 par la présentation, le contenu et la qualité du *Journal of Geodesy*. Les thèmes que je décris sont fondés presque exclusivement sur le contenu du *Journal of Geodesy*.

A des fins de publication dans le *Journal of Geodesy* et parmi les thèmes que je décris, il y en a un auquel j'accorde la priorité, c'est le chapitre que j'ai intitulé "Nouveaux modèles de géopotentiels" relatifs aux trois satellites CHAMP, GRACE et GOCE, les deux premiers déjà sur orbites, le troisième

---

2. Le texte en question est celui présenté dans le document de son hommage [1].

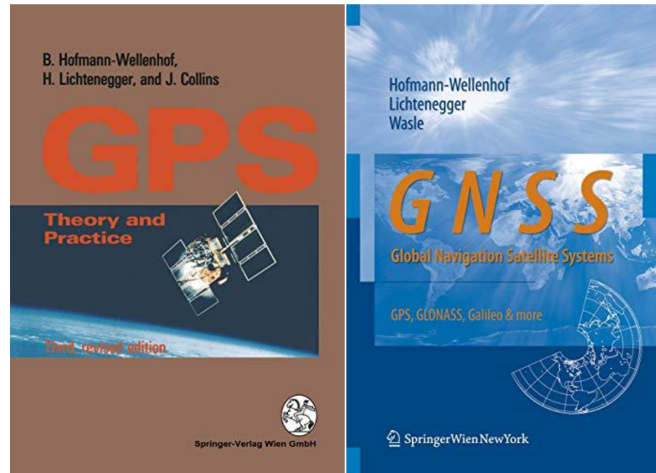


FIGURE 1 – Premier et troisième livres de B. Hofmann-Wellenhof

devant être lancé en 2006, parce qu'il s'agit d'un terrain scientifique en friche et jusqu'en 2010 au moins, il y aura toujours du travail original à présenter et à publier.

Il y aussi le fait que les données recueillies par ces trois satellites sont si abondantes que les organismes, centres et universités (Bonn, Potsdam, Delft et d'autres) qui gèrent les aspects technologiques et scientifiques de ces projets sont à la recherche d'une "main-d'oeuvre" pour traiter cet amoncellement (accumulation) d'informations.

Ce qui m'intéresse ici c'est la partie algorithmique et la partie mathématique.

La partie algorithmique permet de rechercher quelles sont les meilleures représentations mathématiques du champ de la pesanteur via le mouvement et les perturbations du satellite sur son orbite avec deux techniques explorées de manière approfondie depuis quelques années, la gradiométrie et la poursuite de satellites par d'autres satellites.

La partie mathématique ou plutôt la partie numérique est centrée sur l'inversion d'immenses matrices pleines et mal conditionnées.

J'ai ici plusieurs raisons particulières de vouloir traiter ce thème :

- En premier lieu, il s'agit là d'un sujet pratique et nullement difficile. Ensuite, j'ai un ami qui est professeur d'analyse numérique à l'université du Minnesota, Youssef Saad, qui a un long parcours de chercheur derrière lui. C'est un spécialiste du traitement de grandes matrices, du calcul de valeurs et de vecteurs propres et de calculs vectoriels et parallèles sur super-ordinateurs ou réseaux d'ordinateurs. Tu trouveras ses références dans la lettre ci-jointe et tu pourras consulter son site.

Je veux frapper ici plusieurs coups avec plusieurs pierres. D'un côté, nous publierons à partir d'Algérie et de la Tunisie. De l'autre, nous pourrions mentionner des références bibliographiques avec des noms à consonances arabes.

Et comme, si l'on excepte Fernando Sanso, la plupart des géodésiens ne sont pas de grands ma-



FIGURE 2 – Professeurs E. Grafarend and H. Moritz (de gauche à droite)

theux, je suis certain que nous avons une belle carte à jouer dans ce domaine précis.

- En deuxième position, je te propose de travailler sur les fondements mathématiques et physiques de la géodésie. Le point de départ serait le thème numéro six que j'ai intitulé nouvelles méthodes de détermination du géoïde.

La méthode que je décris est celle de Grafarend<sup>3</sup>, qu'il a développée avec un thésard iranien, Ali Reza Ardalan [6]. Pour inverser et bien conditionner l'opérateur de Poisson, ils ont utilisé une technique de Tikhonov. Etant en contact avec le professeur Grafarend depuis 1996 sur la question, j'ai cherché à développer une voie plus analytique de résolutions d'équations intégrales singulières. Cette voie utilise la technique des opérateurs pseudo-différentiels et est basée sur les travaux de l'école française de mathématiques, Laurent Schwartz, Jean Dieudonné, Henri Cartan, Jean Leray, Roger Godement et de manière plus étendue, le groupe Bourbaki.

J'ai finalisé en 1997 une algorithmique pour inverser l'opérateur de Poisson en le définissant comme opérateur pseudo-différentiel mais je ne l'ai pas programmé.

Il s'agit toujours d'inverser de grandes matrices pleines et mal conditionnées et on pourrait profiter du fait que l'on travaillera sur les algorithmes de GRACE, GOCE et CHAMP pour reprendre ce travail.

Une des clés de l'étude du champ de la pesanteur est de savoir comment le représenter sous une forme mathématique de manière optimale.

A partir de Stokes, il y a eu les développements en harmoniques sphériques. Pendant un siècle et demi, ces développements sont devenus incontournables pour toute représentation du champ de la pesanteur terrestre jusqu'aux modèles globaux de l'OSU (1991) et de la NASA (EGM96).

Durant les années 1990, Grafarend s'est affranchi de la représentation en harmoniques sphériques pour adopter des développements en harmoniques ellipsoïdaux s'appuyant sur la théorie de l'ellipsoïde de niveau de Somigliana-Pizzetti et il a défini avec Ali Reza Ardalan en 2000, sur cette base, un système géodésique mondial qu'il a intitulé WGD2000 [7], censé prendre la relève du GRS1980.

Une autre école à l'université de Kaiserslautern, sous la direction de Willy Freedon, a développé

---

3. Erik Grafarend (1939-2020) : Eminent géodésien de l'école allemande décédé en décembre 2020,[5].



durant quinze ans une analyse et une représentation systématique du champ de la pesanteur au moyen d'ondelettes et de splines de divers types. Les coefficients correspondants sont disponibles sur Internet.

L'université américaine de Vanderbilt vient d'inaugurer une nouvelle voie en utilisant une certaine forme de splines sphériques pour représenter le champ de la pesanteur, méthode présentée par Christopher Jekeli dans l'un des derniers rapports de l'OSU (n°475, mars 2005, téléchargeable sur Internet).

J'ai depuis plusieurs années l'idée de représenter le potentiel terrestre aux moyens de distributions de Laurent Schwartz. Cela me paraît plus conforme avec la nature discrète des quantités du champ de la pesanteur, hauteurs du géoïde, anomalies de gravité et autres et est en accord avec la théorie de Bjerhammar, inventeur de la géodésie discrète. Il y a quelques années, Lars Sjöberg m'a proposé de travailler sur les fondements mathématiques de la théorie de Bjerhammar qu'il trouvait manquant de consistance mais je n'ai pas pu séjourner à Stockholm.

Ce qui précède constitue quelques facettes du problème général des problèmes de valeurs aux limites en géodésie. On ne pourra pas tout voir en ce domaine.

Un aspect intéressant ici est de calculer systématiquement sur des variétés courbes au lieu d'espaces plats. On regroupe ici les travaux de Martin Hotine, Antonio Marussi et Erik Grafarend.

Il n'y a pas beaucoup de spécialistes en la matière en ce moment. Seul J. Zund à l'université du Nouveau Mexique a tenté une synthèse.

Mon intérêt ici est d'appliquer certains des résultats de l'école française, Henri Poincaré, Jean Dieudonné, et André Lichnérowicz.

Il y a aussi les Russes qui publient de temps en temps dans le *Journal of Geodesy* et continuent de développer la théorie de Molodensky.

Pour le problème de valeurs aux limites dans sa globalité, je pense qu'il n'y a plus maintenant le temps de s'y appesantir. Il faudrait une dizaine d'années au moins pour aboutir à des résultats intéressants et je pense qu'il vaut mieux travailler sur des choses plus concrètes.

Parmi celles-ci, je te propose de commencer dès maintenant à préparer des synthèses sur le système GALILEO.

Je dispose ici de deux logiciels de traitement de données GPS., GAMIT/GLOBK et le BERNESE version 5.0. On peut commencer à chercher à intégrer dans ces deux logiciels des données de type GALILEO que l'on simulera.

Avec ces deux logiciels, on pourra aussi calculer des positions de satellites GRACE et CHAMP à partir de données disponibles sur Internet.

Je pense avoir fait un tour assez complet de ce que l'on pourrait réaliser en commun. Concernant les thèmes que j'ai décrits, je serais intéressé à avoir des correspondants en Tunisie même si toi-même, tu ne désires pas t'appesantir<sup>4</sup> sur tel ou tel sujet. Autrement dit si tu peux trouver des

---

4. S'appesantir : synonyme s'alourdir.

collègues, en particulier des jeunes qui voudraient travailler sur ces thèmes, je serais très heureux de correspondre avec eux.

## Références

- [1] **Sellal Abdelkader and Abdelmajid Ben Hadj Salem.** 2022. Tribute to The Memory of My Friend and Colleague Abdelkader Sellal, Engineer Geodesist (1946-2017) - V3- September 2022 - 117 pages, <https://www.vixra.org/pdf/2208.0066v3.pdf> .
- [2] **B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins.** 1992. Global Positioning System : Theory and Practice. Springer-Verlag Vienne & New-York, 334 pages.
- [3] **B. Hofmann-Wellenhof and H. Moritz.** 1993. Geometry, Relativity, Geodesy. Karlsruhe Wichmann. 205 pages.
- [4] **B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger and E. Wasle.** GNSS : Global Navigation Satellite Systems. 546 pages. 2008. Springer-Verlag Vienne.
- [5] **E.W. Grafarend, A. Ben Hadj Salem.** 2022. Optimization of Geodetic Networks. <https://vixra.org/pdf/2411.0168v1.pdf>, 47 pages.
- [6] **A. Ardalan.** 1999. High Resolution Regional Geoid Computation in The World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity. Thèse Docteur Ingénieur. Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswessen der Universität Stuttgart. 250 pages.
- [7] **E.W. Grafarend, A. Ardalan.** 1999. *World Geodetic Datum 2000*. Journal of Geodesy, **Vol 73**, pp 611-623.