The proof of the Fermar's Last Theorem, Mersenne's prime conjecture and Poincare Conjecture In Euclidean Geomertry

LIAO TENG

Tianzheng International Mathematical Research Institute, Xiamen, China

ABSTRACT:

In order to strictly prove from the point of view of pure mathematics Goldbach's 1742 Goldbach conjecture and Hilbert's twinned prime conjecture in question 8 of his report to the International Congress of Mathematicians in 1900, and the French scholar Alfond de Polignac's 1849 Polignac conjecture, By using Euclid's principle of infinite primes, equivalent transformation principle, and the idea of normalization of set element operation, this paper proves that Goldbach's conjecture, twin primes conjecture and Polignac conjecture are completely correct. In order to strictly prove a conjecture about the solution of positive integers of indefinite equations proposed by French scholar Ferma around 1637 (usually called Ferma's last theorem) from the perspective of pure mathematics, this paper uses the general solution principle of functional equations and the idea of symmetric substitution, as well as the inverse method. It proves that Fermar's last theorem is completely correct.

Key words:

Twin prime conjecture, Polignac conjecture, Goldbach conjecture, the infinitude of prime numbers, the principle of equivalent transformations, the idea of normalization of set element operations, Fermat indefinite equation, functional equation decomposition, symmetric substitution, prime number principle, proof by contradiction.

I. INTRODUCTION

In a 1742 letter to Euler, Goldbach proposed the following conjecture: any integer greater than 2 can be written as the sum of three prime numbers. But Goldbach himself could not prove it, so he wrote to ask the famous mathematician Euler to help prove it, but until his death, Euler could not prove it.The convention "1 is also prime" is no longer used in the mathematical community, but this paper needs to restore the convention "1 is also prime". The modern statement of the original conjecture is that any integer greater than 5 can be written as the sum of three prime numbers. ($n > 5$: When n is even, $n=2+(n-2)$, $n-2$ is also even and can be decomposed into the sum of two prime numbers; When n is odd, $n=3+(n-3)$, which is also an even number, can be decomposed into the sum of two primes.) Euler also proposed an equivalent version in his reply, that any even number greater than 2 can be written as the sum of two primes. The common conjecture is expressed as Euler's version. The statement "Any sufficiently large even number can be represented as the sum of a number of prime factors not more than a and another number of prime factors not more than b" is written as "a+b". A common conjecture statement is Euler's version that any even number greater than 2 can be written as the sum of two prime numbers, also known as the "strong Goldbach conjecture" or "Goldbach conjecture about even numbers". From Goldbach's conjecture about even numbers, it follows that any odd number greater than 7 can be represented as the sum of three odd primes. The latter is called the "weak Goldbach conjecture" or "Goldbach conjecture about odd numbers". If Goldbach's conjecture is true about even numbers, then Goldbach's conjecture about odd numbers will also be true.Twin primes are pairs of prime numbers that differ by 2, such as 3 and 5,5 and 7,11 and 13. . This conjecture, formally proposed by Hilbert in Question 8 of his report to the International Congress of Mathematicians in 1900, can be described as follows:There are infinitely many prime numbers p such that p + 2 is prime.Prime pairs (p, p + 2) are called twin primes.In 1849, Alphonse de Polignac made the general conjecture that for all natural numbers k, there are infinitely many prime pairs (p, p + 2k). The case of k = 1 is the twin prime conjecture. Around 1637, the French scholar Fermat, while reading the Latin translation of Diophatus' Arithmetics, wrote next to proposition 8 of Book 11: "It is impossible to divide a cubic number into the sum of two cubic numbers, or a fourth power into the sum of two fourth powers, or in general to divide a power higher than the second into the sum of two powers of the same power. I am sure I have found a wonderful proof of this, but the blank space here is too small to write."Around 1637, the French scholar Fermat, while reading the Latin translation of Diophatus' Arithmetics, wrote next to proposition 8 of Book 11: "It is impossible to divide a cubic number into the sum of two cubic numbers, or a fourth power into the sum of two fourth powers, or in general to divide a power higher than the second into the sum of two powers of the same power. I am sure I have found a wonderful proof of this, but the blank space here is too small to write."Since Fermat did not write down the proof, and his other conjectures contributed a lot to mathematics, many mathematicians were interested in this conjecture. The work of mathematicians has enriched the content of number theory, involved many mathematical means, and promoted the development of number theory.

II. CONCLUSIONREASONING

Elementary proof of Goldbach's conjecture

In a 1742 letter to Euler, Goldbach proposed the following conjecture: any integer greater than 2 can be written as the sum of three prime numbers. But Goldbach himself could not prove it, so he wrote to ask the famous mathematician Euler to help prove it, but until his death, Euler could not prove it.The convention "1 is also prime" is no longer used in the mathematical community, but this paper needs to restore the convention "1 is also prime". The modern statement of the original conjecture is that any integer greater than 5 can be written as the sum of three prime numbers. When n is even, n=2+(n-2), n-2 is also even and can be decomposed into the sum of two prime numbers; When n is odd, n=3+(n-3), which is also an even number, can be decomposed into the sum of two primes.) Euler also proposed an equivalent version in his reply, that any even number greater than 2 can be written as the sum of two primes. The common conjecture is expressed as Euler's version. The statement "Any sufficiently large even number can be represented as the sum of a number of prime factors not more than a and another number of prime factors not more than b" is written as "a+b". A common nt of number theory.

Suppose N=2p+3q(p, q, N are all any non-negative integers),then N=2(p+q)+q(p, q, N are all any non-negative integers), when q is any even number, then N=2(p+q)+q(p, q an N are all any non-negative integers, q is any even number) is any even number, when q is any odd number, then N=2(p+q)+q(p, N are any non-negative integers, q is any odd number) can represent any odd number, so N=2(p+q)+q(p, q, N are any non-negative integers) can represent any non-negative integer. Since

N=2p+3q(p, q, and N are any non-negative integers), then N=2p+3(q-1)+3(p, q, and N are any non-negative integers), then N+1=(2p+1)+3(q-1)+3(p, q, and N are any non-negative integers), then

N+1=(2p+1)+3(2q-1)+3-3q(p, q, N are any nonnegative integer), then N+(1+3q)=(2p+1)+3(2q-1)+3(p, q, N are any nonnegative integer), then N+(1+3q)-2(2q-1)=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any one non-negative integer), that is, N+(3-q)=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any nonnegative integer). Because (2p+1)(p is any non-negative integer), (2q-1)(q is any non-negative integer), and 3 are odd number, and because N is any non-negative integer an integer, (3-q)(q is any non-negative integer) is also any non-negative integer, then N+(3-q)(q and N are any non-negative integers) is still any non-negative integer, and N is any odd number, then N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any a non-negative integer) is true, and N is any odd number. Since p and q are any non-negative integers, so (2p+1)(p is any non-negative integer) and (2q-1)(q is any non-negative integer) must can both be prime numbers.Since prime numbers are odd, and there are infinitely many primes, it has been proved by Euclid , prime numbers can be infinite, or they can be small enough until they are 1,when an odd number is not prime, it can always be added to or subtracted from several times the value of 2, that is, it can always be added to or subtracted from 2k(k is any positive integer) to become prime. When (2p+1) and (2q-1) are odd and not prime, they become prime by adding or subtracting 2k(where k is any positive integer). At the same time (2p+1) and (2q-1) add or subtract 2k(k is any positive integer) to become prime numbers, if you think of them as smaller primes, you can also think of N as smaller non-negative integers, if you think of them as larger primes, you can also think of N as larger non-negative integers, Since the non-negative positive number N is still any non-negative integer after adding or subtracting the even number 2k(k is any positive integer), any odd number in any non-negative integer can always be written as the sum of three primes. There must be a prime number of 3, according to the equation N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any non-negative integers), then N-3=(2p+1)+(2q-1)(p, q, N are any non-negative integers), Since (n-3)(N is any non-negative integer) is any odd number minus 3, so (N-3)(N is any non-negative integer) is any even number, so any even number in any non-negative integer can always be written as the sum of two prime numbers.When (2p+1) is prime, leave (2p+1) unchanged, or if you add or subtract 2k(k is any positive integer), then (2p+1) add or subtract 2k(k is any positive integer), it can always become another prime number. And when (2p+1) is not prime, add the value of p to k(k is any positive integer), such that 2(p+k)+1 can be a prime, or subtract the value of p from k(k is any positive integer), such that 2(p-k)+1 can also be a prime, Then the equation N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any nonnegative integer) becomes the N+2k=[2(p+k)+1]+(2q-1)+3(p, q, N are arbitrary a nonnegative integer), or equation N=(2p+1)+ (2q-1)+3 (p, q, N are arbitrary a nonnegative integer) becomes

N-2k=[2(p-k)+1]+(2q-1)+3(p, q, and N are all any non-negative integers, and k is any positive integer), because N is any non-negative integer, so N+2k(k is any positive integer) and N-2k(k is any positive integer) are both any non-negative integers,so N=[2(p+k)+1]+(2q-1)+3 (p, q, N are any nonnegative integer, k for any positive integer) or N=[2(p-k)+1]+(2q-1)+3 (p, q, N are any nonnegative integer, k for any positive integer) was established. In the same way, since when (2q-1)(q is any non-negative integer) is prime, keep (2q-1)(q is any non-negative integer) unchanged, or if you add or subtract 2k(k is any positive integer), then (2q-1) add or subtract 2k(k is any positive integer), it can always become another prime number.. And when (2q-1)(q is any non-negative integer) is not prime, add the value of q to k(k is any positive integer), so that 2(q+k)-1 must be a prime number.,or the value of q minus k(k is any positive integer), such that 2(q-k)-1(q is any non-negative integer,k for any positive integer) must also be a prime number, I use the symbol (+/-) to mean adding or subtracting between two numbers, then the equation N=[2(p(+/-)k)+1]+(2q-1)+3(p, q, N are any non-negative integers, k for any positive integer) becomes the N+2k=[2(p(+/-)k)+1]+[2(q+k)-1]+3(p, q, N are any nonnegative integer, k for any positive integer), or the equation N=[2(p(+/-)k)+1]+(2q-1)+3(p, q, N are any nonnegative integer, k for any positive integer) becomes N-2k=[2(p(+/-)k)+1]+[2(q-k)-1]+3(p, q, N are any nonnegative integer, k for any positive integer), because the nonnegative integer N is arbitrary, So N+2k(k is any positive integer) and N-2k (k is any positive integer) are both arbitrary non-negative integers, which is odd, which means that any odd number can be written as the sum of three prime numbers, [2(p(+/-)k)+1] (p is any nonnegative integer, k for any positive integer), [2(q(+/-)k)-1] (q is any nonnegative integer, k for any positive integer), and 3 are all prime numbers. So we can make both (2p+1)(p being any non-negative integer) and (2q-1)(q being any non-negative integer) prime numbers, The variable N to the left of the equation N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are all any non-negative integers) is an arbitrary non-negative integer, can not to tube, or equations [N(+/-)2k]=[2(p(+/-)k)+1]+[2(q(+/-)k)-1]+3(p, q, N are arbitrary a nonnegative integer, k for any positive integer) on the left side of the variable [N(+/-)2k] is an arbitrary nonnegative integers, can need not tube. So we can make both (2p+1)(p being any non-negative integer) and (2q-1)(q being any non-negative integer) prime numbers, equation N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any nonnegative integer) on the left side of the nonnegative integer variables N is an arbitrary, can need not tube, or can make both [2(p(+/-)k)+1](p for arbitrary a nonnegative integer, k for any positive intege) and [2(q(+/-)k)-1)](q for arbitrary a nonnegative integer, k for any positive intege) prime numbers, equation [N(+/-)2k]=[2(p(+/-)k)+1]+[2(q(+/-) k)–1]+3(p, q, N are any nonnegative integer) on the left side of the variable [N(+/-)2k] is an arbitrary nonnegative integers, can need not tube. The equation N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are all any non-negative integer) is obtained again, which is true, where (2p+1)(p is any non-negative integer),(2q-1)(q is any non-negative integer), and 3 are all prime numbers.Since (2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any non-negative integers) can not be any even number, the variable N to the left of the equation

N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are all any non-negative integers) is an arbitrary

non-negative integer, which can be ignored, then N=(2p+1)+(2q-1)+3(p, q, N are any

non-negative integers) means that there is the any odd number of the sum of three prime numbers , and N is any odd number, and N=(2p+1)+(2q-1)+1(p, q, N are any non-negative integers) can also be true, so any odd number must be written as the sum of three prime numbers, one of which must be 3, and any odd number can be written as the sum of three prime numbers, one of which must be 1. Because both N-3=(2p+1)+(2q-1)(p, q, and N are any non-negative integers) and N-1=(2p+1)+(2q-1)(p, q, and N are any non-negative integers) are true, and both N-3 and N-1 are any even number, and both (2p+1)(p being any non-negative integer) and (2q-1)(q being any non-negative integer) are prime numbers, then any even number can be written as the sum of any finite number of prime pairs, and then any even number can be written as the sum of two primes, so Goldbach's conjecture holds.

At the same time, according to the N-3=(2p+1)+(2q-1)(p, q, N are any nonnegative integer), get (N-3)-2(2q-1)=(2q-1)-2(2q-1)=(2p+1)-(2q-1)(p, q, N are all any non-negative integers), according to N-1=(2p+1)+(2q-1)(p, q, N are all any non-negative integers),get (N-1)-2(2q-1)=(2p+1)+(2q-1)-2(2q-1)=(2p+1)-(2q-1)(p, q, N are any nonnegative integer), and N-3 and N-1 are any even number, So (N-3)-2(2q-1) and (N-1)-2(2q-1) both represent any even number, and (2p+1)(p is any non-negative integer) and (2q-1)(q is any non-negative integer) are both prime numbers, so any even number can be written as the difference of any infinite pair of prime numbers, so the twin prime conjecture and the Polignac conjecture are both correct.

At the same time, I discovered a prime number generation (or construction) mechanism,I first give a construction formula of prime numbers N=2p-q(p is any non-negative integer, q, N are any prime) or N=kp-q(p is any non-negative integer, k is any positive integer, q, N are any prime), and I prove this formula below. Based on myproof that N=(2p+1)+(2q-1)+3 (p, q, and N are all arbitrary non-negative integers),we get N-2×(2q-1)-2×3=(2p+1)-(2q-1)-3(p, q, and N are all arbitrary non-negative integers), where *means multiplication, N-2×(2q-1)-2×3 is still any non-negative integer, then N=(2p+1)-(2q-1)-3(p, q, N are all any non-negative integers) holds, then N+(2q-1)-1=2p-3(p, q, N are all any non-negative integers), Since N+(2q-1)-1 is still any non-negative integer, so N=2p-3(p and N are any non-negative integers) is true, then N-q=2p-q-3(p and N are non-negative integers, q is prime) is true, then N-q+3=2p-q(p and N are non-negative integers) is true, then N-q+3=2p-q(p and N are non-negative integers, q is any prime number) is true, because n-q+3 is still a non-negative integer, so N=2p-q(p and N are non-negative integers, q is any prime number) is true, and N=kp-q(p and N are non-negative integers, k is any positive integer, q is any prime number) is also true, because any non-negative integer must contain all prime numbers, Therefore, N=2p-q(p is any non-negative integer, q and N are any prime numbers) is true, and N=kp-q(p is any non-negative integer, k is any positive integer, q and N are any prime numbers) is also true. If N=2p-q(p being any non-negative integer, q and N being any prime) holds, we know that when q is equal to p, then there must be at least one prime between any prime q and 2q, and N=kp-q(p being any non-negative integer, k being any positive integer, q and N are all any prime numbers) shows that any prime number can be constructed by subtracting any prime number q(q is less than kp, k being any positive integer) from kp(k is any positive integer) .The formula N=kp-q(p is any non-negative integer, q and N are any prime numbers,k is any positive integer) can also be written as N=2p+10^r-q(p and r are any positive integers,k is any positive integer and N is any prime number, q is the numbers in the set {1, 3, 5, 7}).If q and p are mutually different primes, then for any two mutually different primes q and p,N=kp-q(p, N are any non-negative integers, k is any positive integer, q is any prime number), N+2q=kp+q(p, N are any non-negative integers, k is any positive integer, and q is any prime number) is obtained, N+2q= kp+q (p, N are any non-negative integers, k is any positive integer, q is any prime number), then N=kp+q(p, N is any non-negative integer, k is any positive integer, q is any prime number,), because the non-negative integer N must contain all prime numbers, then N=kp+q(q, p, N are all any prime numbers, and q is prime to p, k is any positive integer),so there are infinitely many prime numbers of the form q+kp, where k is a positive integer, i.e. in the arithmetic sequence q+p,q+2p,q+3p,..... ,There are infinitely many prime numbers, there are infinitely many prime moduli p congruence q, so we have proved Dirichlet's theorem.

The proof of the Fermar's Last Theorem:

Method 1:

Ferma's last theorem says that equation $x^n+y^n=z^n$ ($x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x\neq y \neq z \neq 1, n \in Z^+$, $n > 2$) has no positive integer solution, according to $(x + y)^n=z^n$ ($y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x\neq y \neq z \neq 1, n \in Z^+$, and $n > 2$), according to the Pythagorean theorem, we can wait until the $x^2+ y^2=z^2$ ($n\in Z^+$, $x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x\neq y \neq z \neq 1$) was established, if $x^{n-2}=y^{n-2}=z^{n-2}$($n\in Z^+$, $x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$), that we can get the $x^2\ x^{n-2}+y^2\ y^{n-2}=z^2\ z^{n-2}$($n\in Z^+$, $x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x \neq y \neq z \neq 1$), then the equation $x^2x^{n-2}+y^2y^{n-2}=z^2z^{n-2}$($n\in Z^+$, $x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x \neq y \neq z \neq 1$, $n > 2$) and equation $x^2+ y^2=z^2$ ($n \in Z^+$, $x \in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x \neq y \neq z \neq 1$, $n > 2$) have the same positive integer solutions. In fact, because when $x\neq y\neq z\neq 1$, then $x^{n-2}=y^{n-2}=z^{n-2}$ ($x \neq y \neq z \neq 1$, $n > 2$) can not be true. In turn, because $x \neq y \neq z \neq 1$, therefore, $x^{n-2} \neq y^{n-2}$、$y^{n-2} \neq z^{n-2}, z^{n-2} \neq x^{n-2}$, then the equation $x^2x^{n-2}+y^2y^{n-2}=z^2z^{n-2}$($n\in v$, $x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x \neq y \neq z \neq 1$, $n > 2$) and equation $x^2+ y^2=z^2$($n\in Z_+$, $x\in Z_+$, $y \in Z_+$, $z \in Z_+$, $x\neq y \neq z \neq 1$) will not have any positive integer solutions, and $x^2x^{n-2}+y^2y^{n-2}=z^2z^{n-2}$($n\in Z^+$, $x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x\neq y \neq z \neq 1, n > 2$) will not have any integer solutions, so fermat theorem suppose $x^n+y^n=z^n$($n\in Z_+$, $x\in Z_+$, $y \in Z_+$, $z \in Z_+$, $x \neq y \neq z \neq 1, x^{n-2} \neq y^{n-2} \neq z^{n-2} \neq 1$, $n > 2$) no integer solutions was established. Actually $x^n+y^n=z^n$($n\in Z^+$, $x\in R$, $y \in R, z \in R$, $x\neq y \neq z \neq 1$,$x^{n-2}\neq y^{n-2}\neq z^{n-2}\neq 1$, $n > 2$) no real solution, at the same time $x^n+y^n=z^n$($n\in Z_+$, $x\in C$, $y \in C$, $z \in C$, $x\neq y \neq z \neq 1$,$x^{n-2}\neq y^{n-2}\neq z^{n-2}\neq 1$, $n > 2$) without any complex solution.

Method 2:

Ferma's last theorem says that equation $x^n+y^n=z^n$ ($x\in Z^+$, $y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x\neq y \neq z \neq 1, n \in Z_+, n > 2$) has no positive integer solution, according to $(x + y)^n=z^n$ ($y \in Z^+$, $z \in Z^+$, $x\neq y \neq z \neq 1, n \in Z^+$, and $n > 2$),when$(x + y)^n=x^n+j_1u^{p-k-h(i)}v^{p-k-g(j)}$

$+j_2\ u^{p-k-h(i)}v^{p-k-g(j)}+\ldots+j_k\ u^{p-k-h(i)}v^{p-k-g(j)}+\ldots+y^n>z^n(x\in Z^+, y\in Z^+, z\in Z^+, x\neq y\neq z\neq 1, k\in Z^+, j_1\in Z, j_2\in Z, \ldots, j_i\in Z, i\in Z_+, h(i)\in Z, j\in Z^+, g(j)\in Z, n\in Z^+$ and $n>2)$, if $x^n+y^n=z^n$ $(x\in Z_+, y\in Z_+, z\in Z_+, x\neq y\neq z\neq 1, n\in Z_+$, and $n>2)$ has a positive integer solution, then $x+y\neq z$, and $x+y>z$, Otherwise it would be wrong and contradictory.When $x^p+y^p=z^p$ $(x\neq y\neq z\neq 1$, p is any prime number, $p\geq 3)$,suppose $x^p+y^p=z^p(x\neq y\neq z\neq 1$,p is any prime number, $p\geq 3)$ has a positive integer solution when p is any prime,then because $2^px^p+2^py^p=2^pz^p$ $(x\neq y\neq z\neq 1$,p is any prime number,$p\geq 3)$,when $2x=u+v$ $(x\in Z^+$, $u\in Z^+$, $v\in Z_+$, $u>3, v>1)$ *and* $2y=u-v$ $(x\in Z^+$, $u\in Z^+$, $v\in Z^+$, $z\neq 1, u>3, v>1)$, so let's put $2x=u+v(x\in Z^+$, $u\in Z^+$, $v\in Z^+$, $u>3, v>1)$ and $2y=u-v$ $(x\in Z^+$, $u\in Z^+$, $v\in Z^+$, $u>3, v>1)$ into

$2^px^p+2^py^p=2^pz^p(x\neq y\neq z\neq 1$, p is any prime number, $p\geq 3)$,
So $(2u)*(u^{p-1}+j_1u^{p-3}v^{p-3}+j_2u^{p-4}v^{p-4}+\ldots+j_ku^{p-k-h(i)}v^{p-k-g(j)}+\ldots+pv^{p-1}$
$=(2z)(2z)^{p-1}($ p is any prime number, $p\geq 3$, $k\in Z_+, u\in Z_+, v\in Z_+, j_1\in Z, j_2\in Z, \ldots, j_k\in Z$, $i\in Z_+, h(i)\in Z$, $j\in Z_+$, $g(j)\in Z$, $u\in Z_+, v\in Z_+$, $u>3, v>1)$,

then $(u)*(u^{p-1}+j_1u^{p-3}v^{p-3}+j_2u^{p-4}v^{p-4}+\ldots+j_ku^{p-k-h(i)}v^{p-k-g(j)}+\ldots+pv^{p-1})=(z)(2z)^{p-1}$
$=(z)(2)^{p-1}(z)^{p-1}($ p is any prime number, $p\geq 3$, $k\in Z^+, u\in Z^+, v\in Z^+, j_1\in Z, j_2\in Z, \ldots, j_k\in Z$, $i\in Z^+$, $h(i)\in Z, j\in Z^+$, $g(j)\in Z, u\in Z^+, v\in Z^+$, $u>3, v>1)$,

Since u is a positive integer product factor of the value on the right-hand side of the equation, and because u and z are variables, not constants, and $u>3$, *so* $u=z$ *or* $u\geq(2z)$ or $3<u<z$. When $u\geq 2z$, then $2x=u+v\geq 2z+v$, then $x>z$, then $x^p+y^p>z^p$ (p is any prime number, $p\geq 3, x\in Z^+, y\in Z^+, z\in Z^+ x\neq y\neq z\neq 1)$,then $x^p+y^p=z^p$ (p is any prime number, $p\geq 3, x\in Z^+, y\in Z^+, z\in Z^+ x\neq y\neq z\neq 1)$ has no positive integer solution. So let's just think about u=z and $3<u<z$.When u=z,then$(u^{p-1}+j_1u^{p-3}v^{p-3}+j_2u^{p-4}v^{p-4}+\ldots+j_ku^{p-k-h(i)}v^{p-k-g(j)}+\ldots+pv^{p-1})=(2)^{p-1}(z)^{p-1}$ (p is any prime number, $p\geq 3$, $k\in Z^+, u\in Z^+, v\in Z^+, j_1\in Z, j_2\in Z, \ldots, j_k\in Z$, $i\in ZZ^+{}_+$, $h(i)\in Z$, $j\in Z^+, g(j)\in Z)$. And $2(x+y)=(u+v)+(u-v)$,then u=x+y, according to u=z, then x+y=z . When x+y=z, then$(x+y)^p=z^p$, then $x^p+y^p<z^p$ (p is any prime number, $p\geq 3, x\in Z_+, y\in Z_+, z\in Z_+, x\neq y\neq z\neq 1, u\in Z_+, v\in Z_+$, $u>3, v>1)$, so $x^p+y^p=z^p$(p is any prime number, $p\geq 3, x\in Z_+, y\in Z_+, z\in Z_+ x\neq y\neq z\neq 1)$ has no positive integer solution, this contradicts the previous assumption that $x^p+y^p=z^p$ $(x\neq y\neq z\neq 1$,p is any prime number,$p\geq 3)$ has positive integer solutions, and when $3<u<z$, then according to u=x+y, then $x+y<z$,and when $x+y<z$, then $(x+y)^p<z^p$, then $x^p+y^p<z^p$(p is any prime number, $p\geq 3, x\in Z^+, y\in Z^+, z\in Z^+, x\neq y\neq z\neq 1, u\in Z^+, v\in Z^+$, $u>3, v>1)$,so $x^p+y^p=z^p$(p is any prime number, $p\geq 3, x\in Z^+, y\in Z^+, z\in Z^+ x\neq y\neq z\neq 1)$ has no positive integersolution, this contradicts the previous assumption that $x^p+y^p=z^p$ $(x\neq y\neq z\neq 1$,p is any prime number,$p\geq 3)$ has positive integer solutions.Therefore, it is wrong to assume that if p is a prime number, then $x^p+y^p=z^p$ $(x\neq y\neq z\neq 1$,p is any prime number,$p\geq 3)$ has a positive integer solution,so for any prime number p, $x^p+y^p=z^p$($x\in Z^+$, $y\in Z^+$, $z\in Z^+$,$x\neq y\neq z\neq 1$, p is any prime number, $p\geq 3$) has no positive integer solutions. So the fermat equation $x^n+y^n=z^n$($x\in Z^+$, $y\in Z^+$, $z\in Z^+$ $x\neq y\neq z\neq 1, n\in Z_+$, and $n>2$) has no positive integer solutions.

The Proof of Mersenne's prime conjecture:

Let me first prove that if 2^n-1($n\in Z^+$) is prime, then n is also prime. This can be proved by proof by contradiction:

Assuming n is not a prime number, there are two positive integers, 1<a< n, and 1<b< n ,that satisfy n=ab.

Thereupon

2^n-1=$2^{(ab)}$-1=$(2^a)^b$-1=y^b (Let y=2^a)

=(y-1)(y^{b-1}+y^{b-2}+...+y+1),

because

(y-1) and (y^{b-1}+y^{b-2}+...+y+1) are not equal to 1,otherwise if y-1=1,then y=2,is also $2^a=1$, then $a=0$, conflict with a>1. If (y^{b-1}+y^{b-2}+...+y+1)=1, then y=1,this contradicts y=2^a>2(a>1).So y-1 and (y^{b-1}+y^{b-2}+...+y+1) are positive integer greater than 1, that is, two product factors greater than 1 of 2^n-1($n\in Z^+$), which contradicts 2^n-1($n\in Z^+$) is a prime number.So if 2^n-1($n\in Z^+$) is prime, then n is also prime.

Assume that only a finite number of primes p_i make $2^{p_i}-1$ can become a prime number, now construct

Q=$2^{2k}(2^{p_i})$-1=2^{2k+p_i}-2^{2k}+2^{2k}-1=$2^{2k}(2^{p_i}-1)$+$(2^k+1)(2^k-1)$($i\in Z^+, k\in Z^+$). Because of having an infinite number of prime number，so $2k+p_i$($i\in Z^+, k\in Z^+$) can always is a prime number, assuming $p_j=2k+p_i$($i\in Z^+, j\in Z^+, k\in Z^+$). When $k\neq p_i$($i\in Z^+, k\in Z^+$), because $2^{2k}(2^{p_i})$-1 can not be divisibled by all primes less than $2^{2k}(2^{p_i})$-1, according to the definition of prime Numbers, so when $k\neq p_i$($i\in Z^+, k\in Z^+$), then $2^{p_j}-1=2^{2k}(2^{p_i})$-1 is a prime number, this contradicts the previous assumption, so there are not only a finite number of prime numbers p_i that make $2^{p_i}-1$ prime，so there are an infinite number of prime numbers p_i make $2^{p_i}-1$($i\in Z^+$) can be a prime number. Below I to prove this, assuming $2^{2k}=2u=2^nP_m(k\in Z^+, u\in Z^+, m\in Z^+,\ n\in Z^+)$, First take all the primes, and then take any number of primes from all the primes, allow to repeat any number of the same prime number, also allow to repeat any number of prime numbers, and then multiply all these obtained primes, their product is represented by P_m. So $2^{2k}(2^{p_i}-1)$+ 2^{2k}-1($i\in Z^+, k\in Z^+$) cannot be divided exactly by 2 and all primes of a prime.

Obviously $2^{2k}(2^{p_i}-1)$+ 2^{2k}-1> $2^{p_i}-1$($i\in Z^+$, $k\in Z^+$), at the same time $2^{2k}(2^{p_i}-1)$+ 2^{2k}-1>P_j($i\in Z^+, k\in Z^+, j\in Z^+$), P_j is the 'largest' prime of all primes.According to the definition of a prime number, a positive integer that is not evenly divided by 2 and any of the prime numbers must be a prime number, So $2^{2k}(2^{p_i}-1)$+ 2^{2k}-1($i\in Z^+, k\in Z^+$) must be a prime number, $(2^{p_{i+2k}}-1)$ ($i\in Z^+, k\in Z^+$) must also be a prime number. This contradicts the previous assumption that there are only a finite number of Mersenne primes; there are obviously more Mersenne primes than $2^{p_i}-1$($i\in Z^+$). So it is wrong to assume that there are only a finite number of Mersenne primes, or that there is a maximum number of Mersenne primes.Since primes of the form $2^{p_i}-1$($i\in Z^+$, p_i is prime) are called Mersenne primes, there are an infinite number of Mersenne primes and the Mersenne conjecture holds. Suppose there is any odd number O_j, then any even number E=$O_j + 1$. Hypothesis $2u = 2^n P_m(k \in Z^+, u \in Z^+, m \in Z^+,\ n \in Z^+)$, P_m for any odd,$O_j = 2u + 1(u \in Z^+)$,thenE=O_j +1=(2u +1)+1=$[(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) + 1] + 1$ $(p_1、p_2、p_3、p_4、\ldots、p_k、\ldots、p_i、\ldots \in Z^+, n_1、n_2、n_3、n_4 \ldots、n_i、\ldots \in Z^+, u \in Z^+, i \in Z^+)$, $p_1、p_2、p_3、p_4、\ldots、p_k、\ldots、p_i、\ldots$ represents all prime numbers.Then $E = O_j + p_q = (2u + 1) + p_q = [(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) + 1] + p_q(q \in Z^+)$, p_q is a prime number, or $E = O_j + 1$=(2u + 1)+1=$[(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) + 1] + 1 - p_k + p_k$ =$[(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_k)^{n_k} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) - 1] \times p_k + (p_k + 1 + 1)$, $[(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_k)^{n_k} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) - 1]$ can't be divided exactly by any one of all the prime Numbers primes, So according to the definition of a prime number, cannot be divided exactly by any prime positive integers must be prime Numbers, so $[(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_k)^{n_k} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) - 1]$ must be a prime number, denoted by $p_j(j \in Z^+)$, if $(p_k$+1+1) is a prime number, which we denote by $p_v(v \in Z^+)$, then for any sufficiently large even number E, assuming that E is greater than the product of all primes, then any sufficiently large even number E can be expressed as the sum of the product of one prime p_j and the other prime p_q, or any sufficiently large even number E can be expressed as the sum of the product of one prime $p_v(v \in Z^+)$ and two other primes $p_j(j \in Z^+)$ and $p_k(k \in Z^+)$, is $E_j = O_j + 1 = (2u + 1) + 1 = p_j \times p_k + p_v$. Or $(p_k$+1+1) is an odd number, and Suppose that when p_k is added, $(p_k$+1+1) must be represented only by the product of two primes, one of which is $p_g(g \in Z^+)$ and the other by $p_r(r \in Z^+)$. $p_1、p_2、p_3、p_4、\ldots、p_k、\ldots、p_i、\ldots$ Representing all primes, then any sufficiently large even number E can be expressed as the sum of the product of a prime $p_r(r \in Z^+)$ and two other primes $p_j(j \in Z^+)$ and $p_g(g \in Z^+)$, is also $E = O_j + 1 = (2u + 1) + 1 = [(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_k)^{n_k} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) - 1] \times p_g + p_g p_r$ =$[(2^n \times (p_1)^{n_1} \times (p_2)^{n_2} \times (p_3)^{n_3} \times \ldots \times (p_k)^{n_k} \times \ldots \times (p_i)^{n_i} \times \ldots) - 1] \times p_g + (p_g - 1) \times p_r + p_r = (p_j \times p_g) + p_r$ $(j \in Z^+, g \in Z^+, r \in Z^+)$.

The proof of the Poincare Conjecture

Proof: If there is any Angle ∠A, take the vertex of Angle A as the center of the circle, and draw an arc with any length R as the radius, the two rays intersecting Angle A are at two points B and C. And respectively B, C two points as the center of the circle, with the same arbitrary length L as the radius of the arc. Two arcs intersect at point P, connect two points A and P with a non-scale rule, get a straight line AP, intersection arcs $\overline{BC}$ is at point Q, so ∠QAB=∠CAQ. Then use the ungraduated straightedge to connect B and C, point A as the center of the circle, the length R of line segment AB as the radius of the arc, point C as the center of the circle, the length m of line segment BC as the radius of the arc, the two arcs intersect at point D, use the ungraduated straightedge to connect two points C and D and two points A and D, the line segment CD and AD are obtained. For ΔACD and ΔQAC, AD=AQ,CD=CQ,AC=CA, so the triangles ΔACD and ΔQAC are identical, so ∠DAC=∠CAQ.

For ΔDAC and ΔQAB, AD=AB,BQ=CD,QB=CD, so ΔDAC and ΔQAB are identical, so $\angle DAC=\angle QAB=\angle CAQ$, so the line AP and AC divide $\angle BAD$ into three equal parts. Since $\angle BAC$ is an arbitrary Angle, $\angle BAD$ is also an arbitrary Angle, and each bisecting Angle $\angle DAC$, $\angle CAQ$, and $\angle QAB$ are also arbitrary angles. Therefore, the three equal points of any Angle exist, and the three equal points of any Angle can also be made indirectly by using a non-graduated ruler and a compass.

In fact, all curvatures, including the series composed of many curvatures, which are also called curvature flows, are originated from the "flow number" proposed by Newton when he founded calculus. The origin of the concept of slope of a point on a curve is also the "flow number" proposed by Newton when he founded calculus. The curvature of the curve corresponds to any two adjacent points on the transcurve L(note: the curve is also called an arc, called a manifold in topology), assuming that the two adjacent points are M and M', respectively, the tangent lines L_1 and L_2 of their outer tangent circles, and the two tangent lines intersect. Suppose that the smaller Angle between the two tangents $L_1$and L_2 is called the outer tangential Angle β, and the larger Angle between the two tangents L_1 and L_2 is called the outer tangential Angle $\beta^{'}$, obviously $\beta+\beta^{'}=\pi$ radians, because they are collinear. Join M and M' to get the line MM'. Suppose that the Angle between tangent L_1 and line segment MM' through M, that is, the direction Angle between tangent L_1 and line segment MM', also called the Angle between tangent L_1 and line segment MM', denoting its magnitude as α, the Angle between tangent L_2 and line segment MM' through M', That is, the direction Angle between the tangent line L_2 and the line segment MM' is also called the tangent Angle between the tangent line L_2 and the line segment MM', and its magnitude is α'. Suppose that the length of the arc $\overline{MM'}$ of a curve L between two points M and M' is, as M' tends to M along the curve L, if there is a limit to the average curvature of the arc $\overline{M'M}$, then this limit is called the curvature of the curve L at point M, denoted K, that is

$K=\lim_{M'\to M}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$,or $K=\lim_{\Delta s\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|=|\frac{d\alpha}{ds}|$.When M approaches M' along the curve L, if the limit of the average curvature of the arc MM'exists, then K' is called the curvature of the point M' on the curve L with respect to the point M on the curve L, denoted K', that is $K'=\lim_{M\to M'}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$,or $K'=\lim_{\Delta s\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|=|\frac{d\alpha}{ds}|$.

It should be noted that the above two curvatures K and $K'$are often not zero, because the two points M and M 'are not necessarily located on the same tangent circle. Poincare's conjecture states that all points on a closed manifold moving in the same direction can be reduced to a single point, and then the geometry made up of all such closed manifolds must be a sphere. When the Poincare conjecture holds, then any two adjacent points on all closed manifolds, assumed to be M and M', must be on the same outer tangent circle, and all closed manifolds must be compact and simply connected. The concept of slope on a curve is the value of the tangent of any point on the curve, such as the Angle between the tangent lines L_1 and L_2 of any point M or M' of the curve L and the horizontal X axis of the rectangular coordinate system in which it is located. Newton's "flow number" is actually a differential, and in particular the "flow number" already includes the concept of curvature and slope at any point on the curve, and also includes the concept of curvature flow and slope flow. The first meaning of the flow number is a series of numbers, Newton said "flow number" refers to the curvature of all points on the curve and the slope of all points on the curve of the series, and Newton also pointed out that the essence of the differential is the limit, the essence of the integral is the sum. Newton has made clear the most central idea and concept of calculus, the essence of the limit is the limit of extreme values, is the value of some ultimate point.

I began to prove Poincare's conjecture:First of all, the necessary and sufficient condition for the Poincare conjecture to be true is that all closed manifolds can be converted to the curvature of all points on the closed manifolds by topological transformations. The sequence of values of all these curvatures is called the curvature flow of the closed manifold. If all closed manifolds with zero curvature flow are converted to circles, then Poincare's conjecture holds.Since any Angle can be bisected by an ungraduated ruler and compass, an Angle equal to the bisected Angle of this arbitrary Angle can be made by an ungraduated ruler and compass outside any ray of this arbitrary Angle, so any Angle can be bisected by an ungraduated ruler and compass. Because above, when I proved that there are three equal points of any Angle, I first took an arbitrary Angle, and then I divided it into two equal parts, and on the basis of the two equal parts of any Angle, I proved that I could make an Angle of half the Angle of this arbitrary Angle. So if you combine this new Angle with the original arbitrary Angle, then the number of radians of the entire Angle is 1.5 times the number of radians of the original arbitrary Angle, which is also a new Angle. Since the original angular radian is arbitrary, the radian of this new Angle is also arbitrary, and the 2 bisection angles of the original arbitrary Angle and the 3 bisection angles of the new arbitrary Angle are equal, and the radian number of each such bisection Angle is also arbitrary until it is zero. If the number of radians of each bisection of any Angle is considered as a unit, then the number of radians of any Angle is 2, which is the Angle of 2 units, and the number of radians of the new arbitrary Angle is 3, which is the Angle of 3 units. If there are P of these arbitrary angles and Q of these new arbitrary angles, then there are infinitely many of these bisecting angles. Since all non-negative integers can be written as N=2P+3Q(P, Q are non-negative integers), N can be iterated over all non-negative positive numbers. Here's how I prove it.Proof: when P and Q are zero, then N=0; If P is a non-negative integer and Q is odd, then N=2P+3Q=(2P+2Q)+Q=2(P+Q)+Q is odd; If P is a non-negative integer and Q is even, then N=2P+3Q=(2P+2Q)+Q=2(P+Q)+Q is even; So, if P and Q are non-negative integers, then N=2P+3Q=(2P+2Q)+Q=2(P+Q)+Q goes through all non-negative integers. Since all non-negative integers are either odd or even, now N=2P+3Q includes them all, so all non-negative integers can be written in the form N=2P+3Q (P, Q are non-negative integers), so any Angle can be equally divided by any infinite n (n traverses all non-negative integers).When any Angle is 360 degrees, take the common vertex O of all bisected angles as the center of the circle, draw an arc with any length as the radius R, and intersect each ray at P_1、P_2、P_{n-1}...., P_n , and connect P_1、P_2、P_{n-1}、 ... , and P_n from end to end ， forms a closed manifold, then an circumference can also be equally divided by any n(n traverses all non-negative integers). Because the curvature of a curve is the rate of rotation of the tangent direction Angle of a point on the curve against the arc length, it can be defined by differentiating, indicating the degree to which the curve deviates from the straight line. It is a number that indicates the degree of curvature of a curve at a certain point. The greater the curvature, the greater the curvature of the curve, and the reciprocal of the curvature is the radius of curvature. The curvature of the curve L at a point M on it can also be understood in this way: half of the smaller pinch Angle 2α(the tangent Angle of the tangent Angle α is formed after any two adjacent points M on the closed curve L intersect the two tangents of M' (M and M' are located just on some outer tangent circle), that is, the tangent value tg(α) of the tangent Angle α. The Angle between the tangent line and the string is called the chord Angle, the Angle of the smaller Angle is called the inner chord Angle, and the Angle of the larger Angle is called the outer chord Angle. In general, the tangent Angle refers to the inner sine Angle, and the inner sine Angle plus the outer sine Angle is π radians. For the Angle between any two tangents on the circle, the absolute value of the ratio of the tangent Angle (equal to half of the outer Angle of the tangent) Δα to the change of the length Δs of arc $\overline{M'M}$(the value is called the average curvature of the arc), when the change of arc length Δs approaches zero, Its limit value is the curvature of the point M' on the curve L with respect to the point M on the curve L . What needs to be said is why do you want to use the smaller Angle and not the larger Angle? The answer is simply convenience. The larger Angle is called the inside Angle of the tangent line, the smaller Angle is called the outside Angle of the tangent line, and the sum of the outside Angle of the tangent line and the inside Angle of the tangent line is π radian Angle, in general, the tangent Angle refers to the outside Angle of the tangent line.Curvature is always relative, it's always a point of curvature M relative to any other point of curvature M', where M and M' are adjacent to each other, curvature is not absolute, there is no absolute curvature.

Then when any closed manifold L passes through two adjacent vertices M and M' of the inner positive n square of the outer tangent circle, when n(n is a non-negative integer) approaches infinity, and any vertex M' of the inner positive n square approaches along the curve L to another adjacent vertex M of the inner positive n square (M' can be either to the left of M or to the right of M), The length of the chord $|M'M|$ and the arc $|\overline{M'M}|$ between any two adjacent points M and M’ become smaller and smaller. The smaller Angle formed by the intersection of the two adjacent vertices on the curve L that are also the tangent lines of the two adjacent vertices M and M’ on the square with the positive n is also getting smaller and smaller (the tangent Angle 2α), and the half of the tangent Angle is the tangent Angle α(the tangent Angle is just twice the tangent Angle for the circle, and this is not necessarily the case for other curves). Tangent Angle alpha as the variation of $\Delta\alpha$ and arc $\overline{M'M}$ as long S the variation of Δs as the absolute value of the ratio of the $|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$ also with arc $\overline{M'M}$ long as change Δs tend to be zero, its limit value $K=\lim_{\Delta s\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|=|\frac{d\alpha}{ds}|$ that is smaller and smaller, tending to zero, and eventually reach zero, Finally, the curvature K of point M with respect to point M' becomes zero.Conversely, when any closed manifold L passes through two adjacent vertices M and M 'of the inner positive n square of the circle, when n(n is a non-negative integer) approaches infinity, and any vertex M of the inner positive n square approaches along the curve L to another adjacent vertex M’ of the inner positive n square (M can be either to the left of M' or to the right of M’), The length of the chord $|M'M|$ and the arc $|\overline{M'M}|$ between any two adjacent points M and M’ become smaller and smaller. The smaller Angle formed by the intersection of the two adjacent vertices on the curve L and the tangents of the two adjacent vertices M and M'on the inner positive n square (tangent Angle 2α) is also getting smaller. Half of the outer Angle of the tangent, the Angle of the tangent Angle α(the outer Angle of the tangent Angle is just twice the Angle of the tangent Angle for a circle, but

this is not necessarily the case for other curves), is also getting smaller and smaller. Tangent Angle α as the variation of $\Delta\alpha$ and arc $\overline{M'M}$ as long S the variation of Δs as the absolute value of the ratio of the also with arc $\overline{M'M}$ ong as change Δs tend to be zero, its limit value $K'=\lim_{\Delta s\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$ that is smaller and smaller, tending to zero, and eventually reach zero, Finally, the curvature $K'$of the point M' with respect to the point M becomes zero.

Ince M and M'are any adjacent two points on a closed manifold L, without losing generality, if all adjacent two points on a closed manifold L have exactly the same properties as any adjacent two points M and M', then the curvature K of any point on all adjacent two points on a closed manifold L is zero with respect to the other point, Then all points on a closed manifold L have zero curvature K with respect to their neighbors. And since both M and M'are located on the inner circle where the positive N-square is located, and since M and M' are any adjacent two points on the closed manifold L, without loss of generality, if all adjacent two points on the closed manifold L have exactly the same properties as any adjacent two points M and M', then all adjacent two points on the closed manifold L are located on the inner circle where the positive infinite N-square is located, Moreover, all points on the closed manifold L are located on the inner circle of the positive infinite n square.

Then on the inner circle of the positive infinite n square, the curvature of any point with respect to its neighbors is zero. At the same time, if all closed manifoles have the property of a closed manifold L, then all points on such closed manifoles are located on the inner circle of the positive infinite n square, their curvature with respect to their neighbors is zero, and all such closed manifoles are circles. The necessary and sufficient condition for the poser conjecture to hold is that all closed manifolds can be transformed topologically into closed manifolds with zero curvatures, that is, into circles, and that the geometry formed by such closed manifolds must be a sphere.A circle is essentially a special type of positive n(n traverses all non-negative integers) square. When n is a positive integer of finite size, no matter how small the length of each side of the positive n square is, it is greater than zero, and when n is infinite, taking all non-negative integers, then each side is as small as zero, and the positive n square becomes a circle. My method uses the concept of curvature proposed by Gauss in Euclidean differential topological geometry, and the method of dividing any Angle into three equal parts by an ungraduated ruler and a compass, proving Gauss's conjecture that the curvature of a circle in Euclidean differential topological geometry is zero. Then a closed positive n square, when n is a positive integer and tends to infinity, is a circle, and the curvature of every point on it with respect to its nearest neighbor is zero, and the curvature of every point on the circle of the Gaussian conjecture is zero. So this closed square with positive n(n traverses all non-negative integers) is a circle. Since all points on the circumference of the circle can be condensed into a single point in the same direction, in line with the premise of the Poincare conjecture, the three-dimensional geometry formed by all such closed manifold must be a ball, in line with the conclusion of the Poincare conjecture, which holds in Euclidean three-dimensional Spaces and two-dimensional surfaces.

Since any adjacent two points M and M' of any closed manifold L are any adjacent vertices of a positive infinite N-square, if their curvature is zero, then they are all on the inner circle where the positive infinite N-square is located. When n is infinite, all the vertices of the positive infinite n square are on the inner circle in which they are located, and if all the vertices have zero curvature with respect to their neighbors, the positive infinite n square will coincide with the inner circle in which it is located, and the positive infinite n square will become a circle, so it is impossible for the area of a circle to be the area of a positive finite square, The square of the circle conjecture of the ancient Greek three cubits is not valid.

The square of the circle in the conjecture of the three great geometric ruler in ancient Greece should mean the square of the circle. Since we already know that a circle is a special positive infinite n(n is a non-negative integer approaching infinity) square, it cannot be a positive finite square, so it cannot be a positive square. If "square the circle" in the drawing conjecture of the three great geometric ruler in ancient Greece means to draw with a straight ruler and a compass, and to convert the area of a circle to the area of a square, it will be impossible to achieve. Gauss was right that points on a circle do have zero curvature with respect to their neighbors. Therefore, all points on such a closed manifold can be condensed into one point in the same direction, which conforms to the premise of Poincare's conjecture, and all points on such a closed manifold have zero curvature with respect to their neighbors, so they are a compact closed manifold, and they are all circles.

In the assumption of the Poincare conjecture that "all closed manifold condense to a point in the same direction", if the manifold is compact, it is a circle, which is equivalent to the fact that the curvature of any point on the manifold with respect to the nearest neighboring point is zero. A closed manifold whose curvature is a non-zero constant is definitely not a circle, and any point on it is not compact, although it can be condensed to a point in the same direction, and the absolute value of the curvature of any point on the closed manifold with respect to the nearest neighboring point is a constant greater than zero. A circle is essentially a special positive n square (n traverses all non-negative integers). When n is an infinite positive integer, if the closed manifold must not be a compact manifold, then the length of each side of a square with positive n(n is an arbitrarily finite non-negative integer) and the length of its corresponding arc are greater than zero. When n is infinite, and n takes all non-negative integers, then the length of each of its sides and the length of the arc corresponding to each of its sides will be reduced to zero, and then the positive n(n takes all non-negative integers) square will be a circle. The curvature of each point on the circle is equal to zero with respect to the nearest neighboring point, which conforms to Gauss's conjecture that the curvature of every point on the circle is zero. Since all points on the circumference of a circle can be condensed into a single point in the same direction, and the circle is a compact closed manifold, conforming to the premise of Poincare's conjecture, a three-dimensional geometry consisting of all such compact closed manifold whose curvature is zero at each point must be a sphere. It is consistent with the conclusion of the Poincare conjecture, so the Poincare conjecture is valid in Euclidean three-dimensional space and two-dimensional surfaceA closed manifold of multiple dimensions (three dimensions and above) with zero curvature in any high dimensional closed space (four dimensions and above) must be a cascade of rings with a coevent common point between every two rings. Such a ring must satisfy the Poincare conjecture of multidimensional surfaces (three and more dimensions) in high-dimensional space (four and more dimensions). In turn, A closed manifold of high dimensions (four and above) satisfying the Pengcare conjecture of a multidimensional surface (three and above dimensions) must be a cascade of rings with a coevent common point between every two closed rings of a multidimensional surface (three and above dimensions) whose curvature is zero in any high-dimensional space (four and above dimensions). I have proved the Poincare conjecture for two-dimensional surfaces in three-dimensional closed Spaces, and its proof method and conclusion can be extended to any high dimensional (four or more dimensional) closed Spaces and multidimensional surfaces. It is a pure mathematical method that does not depend on physical mathematical methods.

Suppose the area of the circle is S, the circumference of the circle is C, the diameter of the circle is d, the radius of the circle is R, and C' is the circumference of the positive n-sided shape,r is the distance between the center of the positive n-boundary and any of its vertices D_i(i traverses all the full numbers), $|D_iD_{i-1}|$ is the distance between any two adjacent vertices D_i and D_{i-1} of a regular polygon,

$\pi=\frac{C}{d}=\frac{C}{2r}$,$\lambda=\max(|D_2D_1|, |D_3D_2|, |D_4D_3|, \dots, |D_iD_{i-1}|)$.

Then the area of the i-th isosceles triangle shape in orthomorphosis is:

$S_i=2*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*|D_iD_{i-1}|*H=\frac{1}{2}*\frac{C'}{n}*H=\frac{C'}{2n}*\sqrt{r^2-\frac{C'^2}{4n^2}}$,

Suppose the area of a positive infinite polygon is S', $\lambda\to 0$ as $n\to\infty$, and $C'\to C$,

Then

$S'=\lim_{\lambda\to 0,C'\to C}\sum_{i=1}^{\infty}s_i=\lim_{\lambda\to 0,C'\to C}\sum_{i=1}^{\infty}S_i=\lim_{\lambda\to 0,C'\to C}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C'}{2n}*\sqrt{r^2-\frac{C'^2}{4n^2}}$,

because $\lim_{\lambda\to 0,C'\to C}\frac{C'}{2n}*\sqrt{r^2-\frac{C'^2}{4n^2}}=S$, then $S'=S$.

So the area of a positive infinite polygon is the area of the outer circle of its positive infinite n(n traverses all non-negative integers) edge shape.

Therefore, the area of the positive infinite n(n traversing all non-negative integers) is $S'=\pi r^2$, that is to say, the circle can only be transformed into the positive infinite n(n traversing all non-negative integers) edge shape, can not be transformed into a positive finite polygon such as a regular quadrilateral, the area of the circle is impossible to be the area of the positive square.

The sum of a class of power series

We call series of numbers such as "1^k , 2^k , 3^k , ... , n^k (n and k are natural numbers) " power series, as "1 ,2 ,3 ,... , n" , "$\mathbf{1^2}$,$\mathbf{2^2}$,$\mathbf{3^2}$,... ,$\mathbf{n^2}$" , "$\mathbf{1^3}$,$\mathbf{2^3}$,$\mathbf{3^3}$,... ,$\mathbf{n^3}$" , "$\mathbf{1^4}$,$\mathbf{2^4}$,$\mathbf{3^4}$,... , $\mathbf{n^4}$" , the following formulas are proved to be correct by mathematical induction:

$1+2+3+4+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$,

$\sum(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2})=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2}+\frac{1+2+3+4+\cdots+n}{2}=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2}+\frac{n(n+1)}{4}$,

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+2n^2+n}{6}$,

$1^3+2^3+3^3+...+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2=\frac{n^4+3n^2+n^2}{4}$,

$1^4+2^4+3^4+...+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3+3n^2-n}{30}$,

$1^5+2^5+3^5+...+n^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$,

$1^6+2^6+3^6+...+n^6=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$,

$1^7+2^7+3^3+...+n^7=\frac{3n^8+12n^7+14n^6+7n^4+2n^2}{24}$,

$1^8+2^8+3^8+...+n^8=\frac{10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n}{90}$,

$1^9+2^9+3^9+...+n^9=\frac{2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20}$,

$1^{10}+2^{10}+3^{10}+...+n^{10}=\frac{6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n}{66}$,

We call these formulas the first n terms and formulas of the power series, and the following introduces a derivation method with the 4th power list as an example.

Let's start with an expansion:

n(n+1)(n+2)(n+3)=$n^4+6n^3+11n^2+6n$, From this expansion we can get:

n^4 =n(n+1)(n+2)(n+3) -6n^3-11n^2-6n,

Take n=1 and we multiply with the * sign, then:

1^4 =1*2*3*4 – 6 -11 -6 ,

If n=2, then:

2^4 =2*3*4*5 – 6*2^3-11*2^2-6*2 ,

If n=3, then:

3^4 =3*4*5*6 – 6*3^3-11*3^2-6*3,

...

n^4 =n(n+1)(n+2)(n+3) -6n^3-11n^2-6n。

The two sides of these equations are added together, and the * sign indicates multiplication:

$\mathbf{1^4}$+$\mathbf{2^4}$+$\mathbf{3^4}$+…+$\mathbf{n^4}$=[1*2*3*4+2*3*4*5+3*4*5*6+…+ n(n+1)(n+2)(n+3)]-6*[$\mathbf{1^3}$+$\mathbf{2^3}$+$\mathbf{3^3}$+…+$\mathbf{n^3}$]-11* [$\mathbf{1^2}$+$\mathbf{2^2}$+$\mathbf{3^2}$+…+$\mathbf{n^2}$]-6*[1+2+3+4+…+n]。

To calculate the value of 1*2*3*4+2*3*4*5+3*4*5*6+…+ n(n+1)(n+2)(n+3) in parentheses, suppose n=100, to compute the value of 1*2*3*4+2*3*4*5+3*4*5*6+…+ 100*101*102*103, obviously if it's hard to compute directly, Its value consists of 300 multiplications plus 100 summations,we might as well put 1*2*3*4+2*3*4*5+3*4*5*6+…+100*101*102*103 multiply the terms of by 5, and you get 1*2*3*4*5+2*3*4*5*5+3*4*5*6*5+…+ 100*101*102*103*5, so add the first two terms together and you get 2*3*4*5*6, then add the third term 3*4*5*6*5 and you get 3*4*5*6*7, then add the fourth term 4*5*6*7*5 , and you get 4*5*6*7*8, then add the fifth term5*6*7*8*5 , and you get 5*6*7*8*9 , ... and so on, the second-to-last term is 99*100*101*102*5, add to the second-to-last term 99*100*101*102*5, and the sum after that is 99*100*101*102*(5+98),that's 99*100*101*102*103,add the last item 100*101*102*103*5 to get 100*101*102*103* (5+99), which is 100*101*102*103*104,

so 1*2*3*4+2*3*4*5+3*4*5*6+…+ 100*101*102*103=$\frac{1}{5}$(100*101*102*103*104),

guess:1*2*3*4+2*3*4*5+3*4*5*6+…+100*101*102*103+...+n*(n+1)(n+2)*(n+3)= $\frac{1}{5}$ n*(n +1)(n+2)*(n+3)*(n+4), then $\mathbf{1^4}$ + $\mathbf{2^4}$ + $\mathbf{3^4}$ +…+ $\mathbf{n^4}$ =[1*2*3*4+2*3*4*5+3*4*5*6+…+ n(n+1)(n+2)(n+3)] -6*[$\mathbf{1^3}$+$\mathbf{2^3}$+$\mathbf{3^3}$+…+$\mathbf{n^3}$]-11*[$\mathbf{1^2}$+$\mathbf{2^2}$+$\mathbf{3^2}$+…+$\mathbf{n^2}$]-6*[1+2+3+4+…+n], so $\mathbf{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}}$.

The correctness of this formula can be proved by mathematical induction as follows:

If n=1, then (6+15+10-1)/30=1, the formula is obviously true, and the formula is also true if n=k, then

$\mathbf{1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4=\frac{6k^5+15k^4+10k^3-k}{30}}$,then

when n=k+1,

$\mathbf{1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4+(k+1)^4=\frac{6k^5+15k^4+10k^3-k}{30}+(k+1)^4=\frac{6k^5+15k^4+120k^3+15k^2+119k+30}{30}}$, and

$\mathbf{\frac{6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)}{30}=\frac{6k^5+15k^4+120k^3+15k^2+119k+30}{30}}$,

so $\mathbf{\frac{6k^5+15k^4+10k^3-k}{30}+(k+1)^4=\frac{6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)}{30}}$.

This proves that the formula also works when n=k+1. Through the above proof we can known take any natural number, the formula $\mathbf{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}}$ is true.

The unification of gravity and quantum mechanics

Newton's universal gravitation and the unification of quantum mechanics, please refer to the content I published in the journal of the American academy of multidisciplinary research and development(AJMRD)paper"A new space-time theory"
(please visit: https://www.ajmrd.com/vol-6-issue-5/;
Or https://www.ajmrd.com/wp-content/uploads/2024/05/D643745.pdf) associated with the quantum mechanics theory.The Newtonian gravitation between an object A and an object B is F, then their force F, using the relevant theory of quantum mechanics, can be expressed in terms of the mass of the object m, combined with other physical quantities:F$=\mathrm{G}\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{r}^2}=|-\frac{\mathrm{mC}^2}{\mathrm{r}}|=|-\frac{\mathrm{mhC\times C}}{\mathrm{h\times r}}|\approx\frac{1.24\mathrm{eV\times\mu m\times m\times C}}{\mathrm{hr}}=\frac{1.24\times10^{-6}\mathrm{eV\times m\times C}}{\mathrm{hr}}$. In the above formula:The ‘x’ symbol means multiplication,
M is the mass of the object A in kilograms,
m is the mass of the object B in kilograms.
r is the average distance of the force between the object A and the object B, in meters,
h is Planck's constant, h=6.62606957(29)$\times10^{-34}$J.s,
hc≈1.24meVmm=1.24eV$.\mu\mathrm{m}=1.24\times10^{-6}\mathrm{eV.m}$,

1eV=1 electron volt,
1μm=1micron=10^{-6}m,

G is Newton's universal gravitation constant, G=$(6.67 \mp 0.07) \times 10^{-11} m^3/(kg^{-1}\ s^{-2})$,
C is the propagation rate of light in vacuum, C≈2.997924583×10^8 m/s.

Several other questions

A similar method can be used to derive the summation formula of 5 to 10 power series and the summation formula of 11 to 11 power series, and can also be proved by referring to the above method.So the area of a positive infinite polygon is the area of the outer circle of its positive infinite n(n traverses all non-negative integers) edge shape.Therefore, the area of the positive infinite n(n traversing all non-negative integers) is $S' = \pi r^2$, that is to say, the circle can only be transformed into the positive infinite n(n traversing all non-negative integers) edge shape, can not be transformed into a positive finite polygon such as a regular quadrilateral, the area of the circle is impossible to be the area of the positive square.

Does disjoint mean parallel? How to unify Euclidean geometry, Lobachevsky geometry and Riemannian geometry?Disjoint may not parallel, disjoint can be parallel or not parallel,not parallel does not necessarily intersect; Intersect can have points of intersection or it can have no points of intersection； Parallelism can have points of intersection (such as overlap) or it can have no points of intersection. In order to unify Euclidean geometry, Lobachev geometry, and Riemannian geometry, I rewrote the fifth postulate of geometry. The other four formulas do not change, they are:

Postulate 1: a straight line can be made from any point to any point.
Postulate 2: a finite line can continue to be extended.
Postulate 3: circles can be drawn at any point and at any distance.
Postulate 4: All right angles are equal.
Postulate 5: Beyond a known line, it may not be possible to make any line parallel to a known line, if a line can be made parallel to a known line, then at least one line can be made parallel to a known line, and even any number of lines can be made parallel to a known line. On the other hand, if you go beyond a line, you may not be able to make any line intersect a known line, and if you can make a line intersect a known line, you can make at least one line intersect a known line, and you can even make any number of lines intersect a known line.

Newton's universal gravitation and the unification of quantum mechanics, please refer to the content I published in the journal of the American academy of multidisciplinary research and development(AJMRD)paper"A new space-time theory"
(please visit: https://www.ajmrd.com/vol-6-issue-5/;
Or https://www.ajmrd.com/wp-content/uploads/2024/05/D643745.pdf) associated with the quantum mechanics theory.The Newtonian gravitation between an object A and an object B is F, then their force F, using the relevant theory of quantum mechanics, can be expressed in terms of the mass of the object m, combined with other physical quantities:F= $G\frac{Mm}{r^2}$=|- $\frac{mC^2}{r}| = | - \frac{mhC\times C}{h\times r}| \approx \frac{1.24eV\times\mu m\times m\times C}{hr} = \frac{1.24\times 10^{-6} eV\times m\times C}{hr}$. In the above formula:The ‘x’ symbol means multiplication,
M is the mass of the object A in kilograms,

m is the mass of the object B in kilograms.
r is the average distance of the force between the object A and the object B, in meters,
h is Planck's constant, h=6.62606957(29) $\times 10^{-34}$J.s,
hc≈1.24meVmm=1.24eV. $\mu m = 1.24 \times 10^{-6}$eV. m,
1eV=1 electron volt,
1μm=1micron=10^{-6}m,
G is Newton's universal gravitation constant, G=$(6.67 \mp 0.07) \times 10^{-11} m^3/(kg^{-1}\ s^{-2})$,
C is the propagation rate of light in vacuum, C≈2.997924583$\times 10^{8}$ m/s.
A new working principle of controlled nuclear fusion ——my idea on the working principle of controlled nuclear fusion : Inertial magnetic confinement of deuterium and tritium will gather them into a specific region (small fusion ring), and use the laser beam generated by battery discharge to continuously irradiate this specific region (small fusion ring), generating hundreds of millions of degrees of high temperature, so that the deuterium and tritium in this specific region produce fusion, generating a large number of high temperature heat. And these high temperature heat into another large specific area (big fusion ring) through helium, when starting the nuclear reactor, the controlled nuclear polymerization device small fusion ring work first (preheat), a steady stream of high temperature heat generated in the small fusion ring into the big fusion ring, the heat is constantly imported and enriched into the big fusion ring. So that the temperature in the big fusion ring also reaches hundreds of millions of degrees, so that the inertial magnetic confinement of deuterium and tritium in the big fusion ring produces nuclear fusion, and the heat is continuously generated and enriched in the big fusion ring, maintaining the temperature of hundreds of millions of degrees, so that the nuclear fusion reaction of deuterium and tritium in the big fusion ring can continue. When the energy produced by the nuclear fusion reaction of deuterium and tritium confined by inertial magnetic confinement in the big fusion ring begins to gain, and the gain reaches a sufficient proportion, a part of the gained energy is exported to drive a steam turbine or gas turbine to generate electricity. Part of the electricity emitted charges the battery, so that the laser fusion reaction in the small fusion ring can continue, and the amount of battery discharge is reasonably distributed, and the remaining part of the electricity is output to the external grid through the transmission line.

The Proof of the Collatz conjecture:

The Collatz conjecture was proposed by German mathematician Lothar Collatz in 1937 and is also known as the "3n+1" conjecture or the "Kakutani conjecture".

The Collatz conjecture is defined by a simple iterative process:Start with any positive integer: If it is even, divide it by 2, if it is odd, multiply it by 3 and add 1;

Repeat the above steps.

The conjecture claims that for any positive integer, repeating this process will eventually lead to 1.

Example:

For example, start with 6:6 → 3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

From 19:

19 → 58 → 29 → 88 → 44 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 2 → 1

By computer verification, Collatz's conjecture holds for numbers less than 10^{18}, but for a long time no one could give a general proof, and Collatz's conjecture was long an open problem. Now that I've found a general proof, Collatz's conjecture works. Let me show you how I proved it.

Proof: For any non-negative integer p and for any non-negative integer q, suppose N=2p+3q=2(p+q)+q. Non-negative integers include all even numbers and all odd numbers. If p is any non-negative integer and q is any even number, then N=2p+3q=2(p+q)+q must be any even number. If p is any nonnegative integer and q is any odd number, then N=2p+3q=2(p+q)+q must be any odd number. So if p is any non-negative integer and q is a non-negative integer, then N=2p+3q=2(p+q)+q must be any non-negative integer. Now consider assuming that N=2p+3q+1=2(p+q)+q+1(p is any non-negative integer and q is any non-negative integer), then N=2p+3q+1=2(p+q)+q+1(p is any non-negative integer and when is any non-negative integer) is any positive integer.

According to Collatz rules, start with any positive integer and divide it by 2 if it is even, multiply it by 3 and add 1 if it is odd. Repeat the above steps. If we divide the above process into several steps, in each step, starting with any positive integer, if it is even, then divide it by 2, if it is odd, then multiply it by 3 plus 1, and add up the results obtained by dividing by 2 or 3 plus 1 in all steps, then the result M satisfies:

$$M = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(2^{u_i}v_i + 3v_i + 1)\right)(\text{i is a positive integer}, u^i \text{ is any non} - \text{negative integer}, u^i \geq 0, v_i \text{ is any odd number}, v_i \geq 1\text{ , n is a positive integer}).$$

Now let me explain the whole process. Starting with any positive integer, if it is even and it can be written in the expression 2^{u_i}(i is a positive integer, 2^{u_i} is any non-negative integer , $u^i \geq 0$), If you divide 2^{u_i} by 2 continuously, the result is of course 1. If it is even and it cannot be written as 2^{u_i}(i is a positive integer and u^i is any non-negative integer , $u^i \geq 0$), then it must be written as the expression of

$2^{u_i} \times v_i$(i is a positive integer, u^i is any non − negative integer, $u^i \geq 0, v_i$ is any odd number, $v_i \geq$ 1 ≥1, n is a positive integer,"×" indicates multiplication,indicating that it is divided by 2 after u^i times, gives the odd number v_i. After getting the odd number v_i, the rule is that v_i should be multiplied by 3 and added by 1 to get $3v_i$+1.

When v_i is any odd number, then $3v_i$+1 must be even. Since $3v_i + 1$=$4v_i - v_i + 1$, which is every even number, divide it by 4 to get $v_i - \frac{v_{i-1}}{4}$. When $v_i > 1$, then $v_i - 1 > 0$, so when $v_i > 1$, then $v_i - \frac{v_{i-1}}{4} < v_i$. At most When $v_i \geq 5$, the value of v_i in $3v_i + 1$ must be reduced and become smaller, according to the rules set by Collatz.

Since 3×5+1=16→8→4→2→1, and 3×3+1=10→5→3×5+1=16→8→4→2→1, when $v_i > 1$, the value of v_i in $3v_i + 1$ must be reduced and become smaller according to the rules set by Collatz.

First $3v_i + 1$divided by 2, $3v_i + 1$ becomes $2w_j$(j is a positive integer and w_j is a positive integer), then v_i becomes w_j(j is a positive integer and $w_j$is a positive integer, then if w_j is an even number, then divide w_j by 2 to get w_{j+1}, as v_i becomes w_{j+1}(j is a positive integer and $w_{j+1}$is a positive integer). If w_{j+1} is an even number, then divide w_{j+1} by 2 to get w_{j+2} , then think of it as v_i becomes w_{j+2}, and if w_{j+2} is still an even number, then let w_{j+2}continue to divide by 2. Until we know that we have an odd number, we assume that the odd number is w_{j+k}(j is a positive integer, k is a positive integer, and $w_{j+k}$is a positive integer), and then we think of v_i as w_{j+k}(j is a positive integer, k is a positive integer). If $w_j$is odd, then multiply w_j by 3 and add 1, and you get $3w_j+1$, which is taken as v_i becomes w_j(j is a positive integer and w_j is a positive integer), because when w_j is odd, then $3w_j+1$ must be even. Then divide $3w_j+1$ by 2 to get w_{j+2}. If w_{j+2} is even, divide w_{j+2} by 2 to get w_{j+3}. If w_{j+3} is still even, so on.

Then let w_{j+3} continue to divide by 2 until you get an odd number, assuming that the odd number is w_{j+k}(j is a positive integer, k is a positive integer, and w_{j+k} is a positive integer), and think of it as v_i becomes w_{j+k}(j is a positive integer, k is a positive integer). According to the previous calculations,If v_i>1, then there must be $v_i > w_{j+k}$ (j is a positive integer and k is a positive integer). Since v_i is odd, v_i>1 is equivalent to $v_i \geq 3$. According to the rules set by Collatz, when v_i=3, start with some positive integer $3v_i+1=10$, which is even, divide it by 2 to get 5, and then, 3 x 5+1=16. 16→8→4→2→1, such as the final value of v_i will be able to fall, become small, become 1.When $v_i > 3$, start with some positive integer $3v_i+1$, divide it by 2 if it is even, multiply it by 3 and add 1 if it is odd, and eventually the value of v_i can also come down, become smaller, and become 1. For odd numbers greater than or equal to 3, the resulting value of their reduction must be 1. When v_i=1, then 3v_i+1= 4, 4 divided by 2, you get 2, 2 divided by 2, you get 1. So, according to the rules set by Collatz, when v_i≥1(i is a positive integer, v_i is odd, × means multiplication), start with some positive integer 3v_i+1, divide it by 2 if it is even, multiply it by 3 and add 1 if it is odd, Eventually the value of v_i must come down and become smaller until it becomes 1. Finally, the value of 3v_i+1 becomes 4, 4 divided by 2, gets 2, 2 divided by 2, gets 1.

$M = \lim_{n\to+\infty}\ (\sum_{i=1}^{n}(2^{u_i}v_i + 3v_i + 1))(\text{i is A positive integer}, u^i \text{ is any non} - \text{negative integer}, u^i \geq 0,\text{vi is any odd number,vi} \geq 1$, n is a positive integer, even though think of n (n is odd, and n→M) as v_i, and according to the rules set by Collatz, when v_i≥1(i is a positive integer, v_i is odd, the value of 3v_i+1 is an odd number, × means multiplication), starting with some positive integer 3v_i+1, if it is even, then divide it by 2, if it is odd, then multiply it by 3 and add 1, and eventually the value of v_i will be able to fall, become smaller, until it becomes 1. Finally, the value of 3v_i+1 becomes 4. 4 divided by 2 gives you 2. 2 divided by 2 gives you 1. According to the proof in front of,

$$M = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(2^{u_i}v_i + 3v_i + 1)\right)$$

can represent all positive integers, so it can also represent all odd numbers. Even v_i= $M = \lim_{n\to+\infty}\ (\sum_{i=1}^{n}(2^{u_i}v_i + 3v_i + 1))$, think of it as v_i, then in accordance with the rules of Collatz's, when $v_i \geq 1$ (i is a positive integer, v_i is odd), Starting with some positive integer 3v_i+1, if it is even, divide it by 2, if it is odd, multiply it by 3 and add 1, and eventually the value of v_i must come down and become smaller until it becomes 1. Finally, the value of 3v_i+1 becomes 4. 4 divided by 2 gives you 2. 2 divided by 2 gives you 1. According to the previous proof, From

$3 \times \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (2^{u_i} v_i + 3v_i + 1)\right)$(i is A positive integer, u^i is any non − negative integer, $u^i \geq 0$,vi is any odd number,vi≥1 , n is a positive integerstart, if it is even, divide it by 2, if it is odd, multiply it by 3 and add 1, eventually the value of v_i must be reduced, smaller, Until it becomes 1. Finally, the value of $3v_i$+1 becomes 4, 4 divided by 2, gets 2, 2 divided by 2, gets 1.

If

$3 \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (2^{u_i} v_i + 3v_i + 1)\right)$(i is a positive integer, u^i is any non − negative integer, $u^i \geq 0$,vi is any odd number,vi≥1 , n is a positive integer is an even value, so let it be divided by 2 several times until you get an odd number w_{j+k}(j is a positive integer, k is a positive integer, w_{j+k} is a positive integer) until then w_{j+k} is assigned to v_i, according to the above method, according to the rules set by Collatz, then when v_i≥1(i is a positive integer, v_i is odd, × means multiplication), start with some positive integer $3v_i$+1, if it is even, divide it by 2, if it is odd, Multiply it by 3 and add 1, and eventually the value of v_i will drop and become smaller until it becomes 1. Finally, the value of $3v_i$+1 becomes 4. 4 divided by 2 gives you 2. 2 divided by 2 gives you 1. So starting with any positive integer, according to the rules set by Collatz, if it is even, divide it by 2, if it is odd, assign it to v_i(i is a positive integer, v_i is odd) and multiply it by 3 plus 1, then when v_i≥1(i is a positive integer, v_i is odd, × means multiplication), and eventually the value of v_i will drop and become smaller until it becomes 1. Finally, the value of $3v_i$+1 becomes 4, 4 divided by 2, gets 2, 2 divided by 2, gets 1. So Collatz's conjecture must be true.

III. Conclusion

After Ferma's Last theorem conjecture and Mersenne's prime conjecture are proved to be fully valid, the study of the distribution of prime numbers and other related other studies will play a driving role. Readers can do a lot in this regard.

IV.Thanks

Thank you for reading this paper.

V.CONTRIBUTION

The sole author, poses the research question, demonstrates and proves the question.

Author
Name: Liao Teng (1509135693@139.com), Sole author
Setting: Tianzheng International Institute of Mathematics and Physics, Xiamen, China
Work unit address: 237 Airport Road, Weili Community, Huli District, Xiamen City

References

[1] John Derbyshire(America):《PRIME OBSESSION》P218,BERHARD RIEMANN AND THE GREATEST UNSOlVED PROBLEM IN MATHMATICS,Translated by Chen Weifeng, Shanghai Science and Technology Education Press, China,https://www.doc88.com/p-54887013707687.html;
[2] Xie Guofang: On the number of prime numbers less than a given value - Notes to Riemann's original paper proposing the Riemann conjecture.

黎曼猜想的证明

廖腾

Tianzheng International Mathematical Research Institute, Xiamen, China

摘要:

为了从纯粹数学的角度严格证明 Riemann 1859 年的论文《论不大于x的素数的个数》中的猜想，并严格证明黎曼猜想的正确性，本文利用欧拉公式证明了如果ζ(s)函数的自变量共轭，则ζ(s)函数值也共轭，从而得到ζ(s)函数的零点自变量也共轭，并利用黎曼ζ(s)函数零点的共轭和ζ(s)=0 与ζ(1-s)=0 的零点自变量 s 和零点自变量 1-s 也必须共轭,得到了黎曼ζ(s)函数的非平凡零点必定满足 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 t ≠ 0)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 t ≠ 0)。而黎曼ζ(s)函数零点的对称性则是黎曼ζ(s)函数非平凡零点都位于临界线上的必要条件，根据黎曼ζ(s)函数零点 s 和黎曼ζ(s)函数零

点 1-s 的对称性质，结合黎曼黎曼ζ(s)函数零点 s 和黎曼ζ(s)函数零点 1-s 的共轭性质，证明ζ(s)函数非平凡零点的实部必定只能等于$\frac{1}{2}$。又通过黎曼的设定的 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in C$ 且 $t\neq 0)$和辅助函 $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1\right)$,得到$\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t)=0$,结合黎曼ζ(s)函数的非平凡零点必定满足 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$和 $s=\frac{1}{2}-ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$，从而等价地证明了黎曼ξ(t)函数的零点必须都是不为零的实数，黎曼猜想是完全正确的。

关键词:

欧拉公式，黎曼ζ(s)函数，黎曼函数ξ(t)，黎曼猜想，共轭性。

I. 引论:

黎曼猜想是黎曼在其 1859 年的一篇论文《论不大于x的素数的个数》中留下的一个重要而著名的数学问题，对研究素数分布具有重要意义，被称为数学中最大的未解之谜。经过多年的努力，我解决了这个问题，并严格证明了黎曼猜想和广义黎曼猜想都是完全正确的。波利尼亚克猜想、孪生素数猜想和哥德巴赫猜想也是完全正确的。如果你从黎曼的论文《论不大于x的素数》一开始就透彻地理解了黎曼的猜想并完全相信其背后的逻辑推理，那就太好了。你需要在阅读我的这篇论文之前做这些准备。下面介绍一下黎曼论文《论不大于x的素数的个数》的大约前半部分的内容，我对这部分内容作了讲解推导，这是你了解黎曼猜想的前提和基础。

1859 年，黎曼被柏林科学院接纳为通讯院士，为了表达自己被赐予这份殊荣的感谢之情，他想到最好方式是立即利用由此得到的许可向柏林科学院通报一项关于素数分布密度的研究，高斯和狄利克雷曾也长期对此问题抱有浓厚的兴趣，它似乎并不是完全配不上这样性质的一个报告。

黎曼以欧拉的发现，即下面这个等式作为本研究的起点：

$$\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

其中等式左边的 p 取遍所有质数，等式右边的 n 取遍所有自然数，用 ζ(s)表记由上面这两个级数（当它们收敛时）表示的复变量 s 的函数，也就是定义复变函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})。$$

上面这两个级数只有当 s 的实部大于 1 时才收敛，即当

Re(s)>1, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$和$\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})$才收敛。如果 s=1,那么$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$,它叫调和级数，是发散的。如果 Re(s)<1, $\frac{1}{1^s}=\frac{1}{1},\frac{1}{2^s}>\frac{1}{2},\frac{1}{3^s}>\frac{1}{3},\frac{1}{4^s}>\frac{1}{4}$ … ，.它更是发散的。因为如果 Re(s)<1,那么$\frac{1}{1^s}=\frac{1}{1},\frac{1}{2^s}>\frac{1}{2},\frac{1}{3^s}>\frac{1}{3},\frac{1}{4^s}>\frac{1}{4},\ldots$。但是，如果 s 是一个负数，比如 s=-1,那么它就不满足 Re(s)>1 这个条件。因此需要找到一个对任意 s 总是有效的函数 ζ(s)的表达式。用现代数学语言讲，即要对复变函数ζ(s)进行解析延拓，而解析延拓的最好方法是寻找 一个该函数的更广泛有效的表示，如积分表示或适当的函数表示。因此我们要定义一个新的函数，这个新的函数也 ζ(s)来表示，这个新的函数的自变量s不但满足 Re(s)>1，还满足 Re(s)≤1($s\neq 1$)，且函数图像是光滑的，函数图像上每一点都可求它的切线斜率，即函数处处都可求导数。不过它不再叫欧拉ζ函数，而是叫做黎曼ζ函数。黎曼用了积分来表示函数ζ(s),在本论文中，我补充了另一种复变函数用来表示黎曼函数 ζ(s)。因为$\Pi(s)=\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$,其中$\Pi(s)$为阶乘函数，$\Gamma(s)$为欧拉伽马函数，$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$, 令积分符号中的变量

$x\rightarrow nx(n\in Z^{+})$，那么

$\int_0^{\infty}(nx)^{s-1}e^{-nx}d(nx)$ $=n\int_0^{\infty}e^{-nx}\ n^{s-1}x^{s-1}=n^s\int_0^{\infty}e^{-nx}\ x^{s-1}=\Gamma(s)=\Pi(s-1)$,所以

$$\int_0^{\infty}e^{-nx}\ x^{s-1}=\frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

，这正是黎曼在它的论文中说的，他说他要利用

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}x}\ \ x^{\mathrm{s}-1} = \frac{\Pi(\mathrm{s}-1)}{n^{\mathrm{s}}}$$

,因为 n 为全体正整数，所以需要对等式两边的$\mathrm{e}^{-\mathrm{n}x}$和$\frac{1}{\mathrm{n}^\mathrm{s}}$作$\sum$运算 ，所以

$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{n}x} = 1+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{n}x}-1 = (1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-3x}+\ldots)-1 = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$-1=$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$=$\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}$ ，

公比 q 满足 0<q=|e^{-x}|<=1(0<=$x \to +\infty$)，$\frac{\Pi(\mathrm{s}-1)}{\mathrm{n}^\mathrm{s}} = \frac{\Pi(\mathrm{s}-1)}{1^\mathrm{s}+2^\mathrm{s}+3^\mathrm{s}+4^\mathrm{s}+5^\mathrm{s}+\cdots}$ ，

并且$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^\mathrm{s}} = \frac{1}{1^\mathrm{s}+2^\mathrm{s}+3^\mathrm{s}+4^\mathrm{s}+5^\mathrm{s}+\cdots} = \zeta(\mathrm{s})$，所以由

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{n}x}x^{\mathrm{s}-1} = \frac{\Pi(\mathrm{s}-1)}{n^{\mathrm{s}}}$$

,可以得到$\Pi(\mathrm{s}-1)\zeta(\mathrm{s})$=$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mathrm{s}-1}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}-1}$,这正是黎曼在他的论文中得到的。

现在考虑积分

$$\int \frac{(-x)^{\mathrm{s}-1}dx}{\mathrm{e}^{x}\ -1}$$

按现代数学记号，该积分应记成$\int_{\mathrm{C}}\frac{(-x)^{\mathrm{s}-1}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}-1}$，或考虑到一般用 Z 表示复数，该积分应记成$\int_{\mathrm{C}}\frac{(-\mathrm{Z})^{\mathrm{s}-1}\mathrm{dZ}}{\mathrm{e}^{\mathrm{Z}}-1}$，它的积分路径从右向左从+∞到+∞，包含值 0 但不包含被积函数的任何其他奇点的区域的正向边界进行，其中的积分路径 C 如下面的图 1 所示。

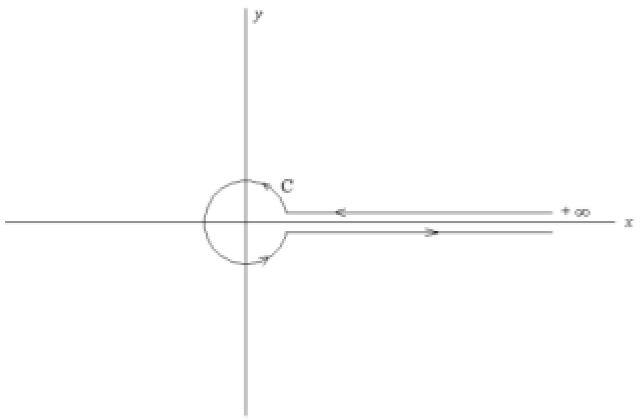


图 1

包含值 0 但不包含被积函数的任何其他奇点(比如 s=1)的区域的正向边界进行。容易该积分值为:

$(e^{-\pi si}-e^{\pi si})\int_0^{\infty\infty}\frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$，

其中我们约定在多值函数$(-x)^{s-1}$中，ln$(-x)$的取值对于负的x为实数，由此即得

$2\sin(\pi s)\,\Pi(s-1)\zeta(s)=i\int_\infty^\infty\frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}(x\ \in R)$。

其中我们约定在多值函数$(-x)^{s-1}$中，ln$(-x)$的取值对于负的x为实数，由此即得

$2\sin(\pi s)\,\Pi(s-1)\zeta(s)=i\int_\infty^\infty\frac{(-x)^{s-1}dx}{x-1}(x\in R)$。

现在这一等式对于任意复变量s都给出了函数ζ(s)的值，并表明它是单值解析的，并且对于所有有限的s(除了 1 之外)都取有限值，当s等于一个负偶数时取零值。

上面等式的右边是一个整函数，故左边也是一个整函数，因为Π(s-1) = Γ(s)，而Γ(s)在s= 0,–1,–2,–3,...的一级极点和sin(πs)的零点抵消。

黎曼 ζ(s)函数是级数表达式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}(n\in Z^+)$(Re(s)>1)在复平面上的解析延拓。之所以要对上述级数表达式进行解析延拓，是因这一表达式只适用于复平面上 s 的实部 Re(s)>1 的区域（否则级数不收敛）。黎曼找到了这一表达式的解析延拓（当然黎曼没有使用“解析延拓”这样的现代复变函数论术语）。运用围道积分,解析延拓后的黎曼ζ函数可以表示为:

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_\infty^\infty\frac{(-z)^s}{e^Z-1}\frac{dz}{z}$$

上式中的积分实际上是一个环绕正实轴（即从+∞出发，沿实轴上方积分至原点附近，环绕原点积分至实轴下方，再沿实轴下方积分至+∞——离实轴的距离及环绕原点的半径均趋于0）进行的围道积分；式中的 Γ 函数Γ(s)是阶乘函数在复平面上的解析延拓，对于正整数 s＞1:Γ(s)=(s-1)!。可以证明，上述ζ(s)的积分表达式除了在 s=1 处有一个简单极点外，在整个复平面上处处解析。这样的表达式是所谓的亚纯函数——即除了在一个孤立点集上存在

极点外，在整个复平面上处处解析的函数——的一个例子。这就是黎曼ζ函数的完整定义。

为了得到该积分的值分，我们假设有模任意小的一个复数δ，且δ的模｜δ｜$\to 0$,因为

$(-Z)^s=e^{s\ln(-Z)}$,并且 ln(-Z)=ln(Z)+πi 或 $\ln(-Z)=\ln(Z)-\pi i$, 那么

$\int_C\frac{(-Z)^{s-1}dZ}{e^Z-1}=\int_\infty^\delta\frac{(-Z)^{s-1}dZ}{e^Z-1}+\int_\delta^\infty\frac{(-Z)^{s-1}dZ}{e^Z-1}+k\int_{|\delta|\to0}^\infty\frac{(-Z)^{s-1}dZ}{e^Z-1}=\int_{+\infty}^\delta\frac{(-Z)^s dZ}{(e^Z-1)Z}+\int_\delta^{+\infty}\frac{(-Z)^s dZ}{(e^Z-1)Z}$

$+k\int_{|\delta|\to0}\frac{(-Z)^s dZ}{(e^Z-1)Z}=(e^{\pi si}-e^{-\pi si})\int_\delta^\infty\frac{e^{s\ln(Z)}dZ}{(e^Z-1)Z}+k\int_{|\delta|\to0}\frac{(-Z)^s dZ}{(e^Z-1)Z}$,k为一常数。

复变量的三角函数的定义由欧拉公式 sin(z)=$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$给出，假设 z=πs，那么

sin(πs)=$\frac{e^{\pi si}-e^{-\pi si}}{2i}$.所以$e^{\pi si}-e^{-\pi si}$=2isin(πs), i=$\frac{e^{\pi si}-e^{-\pi si}}{2\sin(\pi s)}$.所以

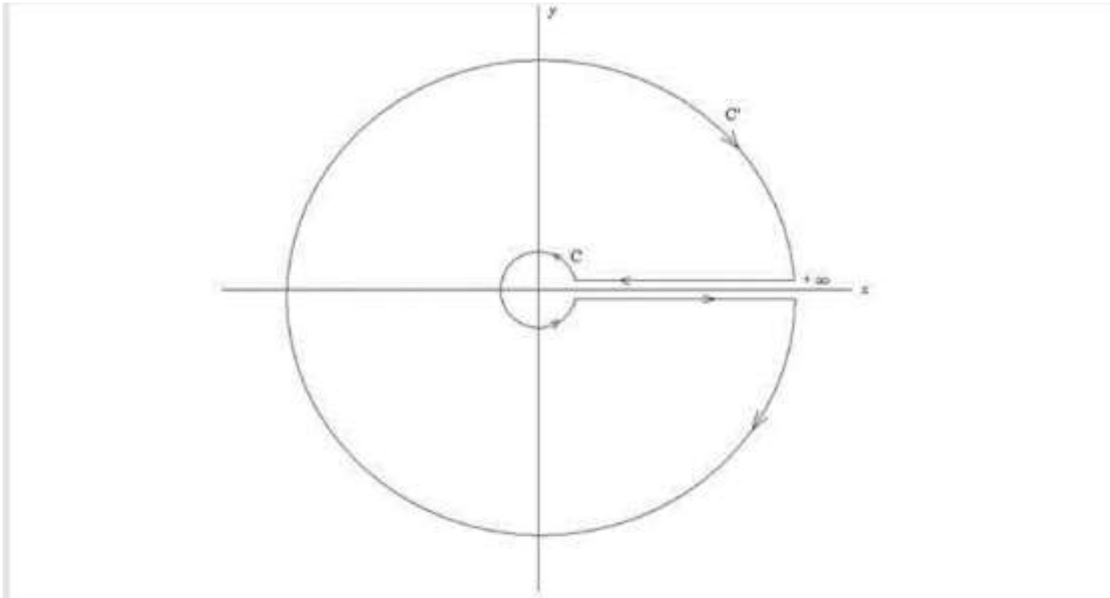
$\int_C\frac{(-Z)^{s-1}dZ}{e^Z-1}=(e^{\pi si}-e^{-\pi si})\int_\delta^\infty\frac{e^{s\ln(Z)}dZ}{e^Z-1}+k\int_{|\delta|\to0}\frac{(-Z)^s dZ}{(e^Z-1)Z}$，如果δ为一个实数，且δ的绝对值

｜δ｜$\to 0$，那么$\int_{|\delta|\to0}\frac{(-Z)^s dZ}{(e^Z-1)Z}=0$,那么$\int_C\frac{(-Z)^{s-1}dZ}{e^Z-1}$=2isin(πs)$\int_0^\infty\frac{x^{s-1}dx}{x-1}$ $(x\in R)$。那么

$\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\int_C\frac{(-Z)^{s-1}dZ}{e^Z-1}=\int_0^\infty\frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$ $(x\in R)$。前面我们得到$\Pi(s-1)\zeta(s)=\int_0^\infty\frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}(x\in R)$，

所以 2sin(πs) $\Pi(s-1)\zeta(s)=i\int_0^\infty\frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$。

当 s 的实部为负时,上面的积分可以不沿正向围绕给定值的区域进行，而是沿负向包含所有剩下的复数值的区域进行，参见下面的图 2，其中的大圆 C′ 的半径趋向无穷大，从而包含被积函数的所有极点即分母e^x-1的所有零点 2nπi（n 为整数），接下来的计算应用柯西的留数定理。



因为该积分的值对于模无限大的复数为无限小，而在该区域内部，被积函数只有当x等于 $2\pi i$ 的整数倍时才有奇点，于是该积分即等于负向围绕这些值的积分之和，但围绕值 $n2\pi i$ 的积分等于$(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$，被积函数$\frac{(-x)^{s-1}}{(e^x-1)}$在 $n2\pi i(n\neq 0)$的留数等于：

$[\frac{(-x)^{s-1}}{(e^x-1)'}]_{x=n2\pi i}=[\frac{(-x)^{s-1}}{e^x}]_{x=n2\pi i}=(-n2\pi i)^{s-1}$,

于是我们得到

$2\sin(\pi s)\prod(s-1)\,\zeta(s)=(2\pi)^s\sum n^{s-1}((-i)^{s-1}+i^{s-1})$ [1] (等式 3),

它揭示了一个ζ(s) 和ζ(1- s)之间的关系，利用函数Π(s)的已知性质，即利用Π(s-1)=Γ(s)和伽玛函数Γ(s)的余元公式和勒让德公式。也可以将它表述为：

$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$在变换$s\rightarrow 1-s$下不变。

根据欧拉的公式$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)\ (x\in R)$可以得到

$e^{i(-\frac{\pi}{2})}=\cos(\frac{-\pi}{2})+i\sin(\frac{-\pi}{2})=0-i=-i$,

$e^{i(\frac{\pi}{2})}=\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})=0+i=i$,

那么

$(-i)^{s-1}+i^{s-1}=(-i)^{-1}(-i)^s+(i)^{-1}(i)^s=(-i)^{-1}e^{i(-\frac{\pi}{2})s}+i^{(-1)}e^{i(\frac{\pi}{2})s}=$

$ie^{i(-\frac{\pi}{2})s}-ie^{i(\frac{\pi}{2})s}=i(\cos\frac{-\pi s}{2}+i\sin\frac{-\pi s}{2})-i(\cos\frac{\pi s}{2}+i\sin\frac{\pi s}{2})=i\cos(\frac{\pi s}{2})-i\cos(\frac{\pi s}{2})+\sin(\frac{\pi s}{2})+\sin(\frac{\pi s}{2})$

$=2\sin(\frac{\pi s}{2})$ (等式 4).

根据伽马函数 Γ(s)的性质 Π(s-1)=Γ(s)，并且

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}=\zeta(1-s)$($n \in Z^+$ 并且n遍取所有的正整数, $s \in C$，并且 $s \neq 1$),

把上面(等式 4)的结果代入上面(等式 3)右边，将得到:

$2\sin(\pi s)\Gamma(s)\,\zeta(s)=(2\pi)^s\zeta(1-s)2\sin\frac{\pi s}{2}$ (等式 5),

根据倍角公式 $\sin(\pi s)=2\mathrm{Sin}(\frac{\pi s}{2})\cos(\frac{\pi s}{2})$, 我们将得到:

$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\,\zeta(s)$($s\in C$ and $s \neq 1$) (等式 6),

作如下变换$s\rightarrow 1-s$,也就是把s当做 1-s代入等式 6, 将得到:

$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$($s\in C$ 并且 $s \neq 1$) (等式 7)。

这就是$\zeta(s)$的泛函方程$\zeta(s)$($s \in C$ 且 $s \neq 1$). 为了将它改写成一种对称的形式，用伽玛函数的

余元公式

$\Gamma(Z)\Gamma(1-Z)=\frac{\pi}{\sin(\pi Z)}$ (等式 8)

和勒让德公式

$\Gamma(\frac{Z}{2})\Gamma(\frac{Z}{2}+\frac{1}{2})=2^{1-Z}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(Z)$ (等式 9) ,

在等式 8 中，令 $z=\frac{s}{2}$ ，并把它代入等式 8，将得到:

$\sin(\frac{\pi s}{2})=\frac{\pi}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}$ (等式 10) ,

在 等式 9 中, 令 z=1-s 并把它代入等式 9，将得到:

$\Gamma(1-s)=2^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})$ (等式 11)。

把 $\sin(\frac{\pi s}{2})=\frac{\pi}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}$ (等式 10) 和 $\Gamma(1-s)=2^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})$ (等式 11) 的结果代入

$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$($s\in C$ 且 $s \neq 1$) (等式 7)将得到:

$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\,\zeta(1-s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$) (等式 12),

也就是说

$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$在变换$s\to 1-s$下是不变的，这正是 Riemann 在他的论文中所说的。

即

$\prod(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod(\frac{1-s}{2}-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)(s\in C$ 并且 $s\neq 1)$ (等式 12)。

该函数的这一性质诱导我在级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$的一般项中引入$\Pi(\frac{s}{2}-1)$而不是$\Pi(s-1)$，由此我们能得到函数$\zeta(s)$的一个很方便的表达式，事实上我们有

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}\ x^{-\frac{s}{2}}dx\ 。$$

为了推导上式，我们先来看$\Pi(\frac{s}{2}-1)=\Gamma(\frac{s}{2})=\int_0^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}e^{-x}dx$，在$\Pi(\frac{s}{2}-1)=\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}e^{-x}dx$中，作如下替换$x\to n^2\pi x$，那么

$\Pi(\frac{s}{2}-1)=\Gamma(s)=\int_0^{\infty}(n^2\pi x)^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx=n^s.n^{-2}.\pi^{\frac{s}{2}}.\pi^{-1}\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}\ x^{-\frac{s}{2}}d(n^2\pi x)=$

$n^s.n^{-2}.\pi^{\frac{s}{2}}.\pi^{-1}.n^2.\pi\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}\ x^{-\frac{s}{2}}dx=n^s.\pi^{\frac{s}{2}}\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}\ x^{-\frac{s}{2}}dx$，所以

$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}\ x^{-\frac{s}{2}}dx$。

因此，如果记$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}=\psi(x)$，即得

$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}\ x^{-\frac{s}{2}}dx=\int_0^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x})x^{-\frac{s}{2}}dx=\int_0^{\infty}\psi(x)x^{-\frac{s}{2}}dx$。

根据雅可比 theta 函数

$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi x}=e^{-0^2\pi x}+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}=1+2(e^{-\pi x}+e^{-4\pi x}+e^{-9\pi x}+e^{-16\pi x}+\cdots)$,

易见$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}=\frac{\theta(x)-1}{2}$。

下面来推导 theta 函数的变换公式：$\theta(\frac{1}{x})=\sqrt{x}\,\theta(x)$:

设第一类完全椭圆积分

k, k'分别称为雅可比椭圆函数或椭圆积分的模（modulus）和补模。

$k=k(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}$，

$k'=k(k')=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\theta)}}$，

令$\tau=k'/k$ ，有

$\sqrt{\frac{2k}{\pi}}=\theta(\tau)=1+2(e^{-\pi\tau}+e^{-4\pi\tau}+e^{-9\pi\tau}+e^{-16\pi\tau}+\cdots)$,

将模 k 和补模 k'互换又有

$\sqrt{\frac{2k'}{\pi}}=\theta\left(\frac{1}{\tau}\right)=1+2(e^{-\pi/\tau}+e^{-4\pi/\tau}+e^{-9\pi/\tau}+e^{-16\pi/\tau}+\cdots)$,

上述两式相比即得$\theta(\frac{1}{\tau})=\sqrt{\tau}\,\theta(\tau)$。它先由柯西用傅立叶分析得到，后来雅可比又用椭圆函数给出了证明。

运用上面的积分表达式

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-z)^s}{e^z-1}\frac{dz}{z}$$

同样可以证明 黎曼 ζ 函数满足上面代数关系式——也叫函数方程$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$ (等式 7)，从这个关系式中不难发现，黎曼ζ函数在 s=-2n（n 为正整数）处取值为零——因为 $\sin(\frac{\pi s}{2})$为零。复平面上的这种使黎曼ζ函数取值为零的点被称为黎曼ζ函数的零点。因此 s=-2n（n 为正整数）是黎曼ζ函数的零点。这些零点分布有序、性质简单，称为黎曼ζ函数的平凡零点。除了这些平凡零点外，黎曼ζ函数还有许多其他零点，它们的性质远比那些平凡零点来得复杂，被恰如其分地称为非平凡零点。

黎曼在他的论文中作了如下描述：

$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_1^{\infty}\psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^{\infty}\psi(\frac{1}{x})\,x^{\frac{s-3}{2}}dx\;+\frac{1}{2}\int_0^1(x^{\frac{s-3}{2}}\;-x^{\frac{s}{2}-1})dx$

$=\frac{1}{s(s-1)}\;+\int_1^{\infty}\psi(x)\,(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}})dx$，

我们来看上述等式的最后一个式子，如果 s→1-s,那么

$\frac{1}{s(s-1)}=\frac{1}{(1-s)(1-s-1)}=\frac{1}{(1-s)(-s)}\frac{1}{(s-1)s}$，

$x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}=x^{\frac{1-s}{2}-1}+x^{-\frac{1+(1-s)}{2}}=x^{\frac{-1-s}{2}}+x^{-\frac{2-s}{2}}=x^{-\frac{1+s}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}$,所以

$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$在变换$s\rightarrow 1-s$下不变。

这样黎曼就再次推导出了$\zeta(s)$的函数方程，这比前面用围道积分和留数定理的推导更简单。

若引入辅助函数函数方程$\Phi(s)=\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$。

可以简洁地写为$\Phi(s)=\Phi(1-s)$，但更方便的做法是在$\Phi(s)$中添加因子$s(s-1)$，这正是黎曼接下来做的，即令(为了和黎曼的记号保持一致引入数字因子$\frac{1}{2}$)

$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$。

因为因子$(s-1)$消去了$\zeta(s)$在$s=1$处的一阶极点，因子s消去了$\Gamma(\frac{s}{2})$在$s=0$处的极点，而$\zeta(s)$的平凡零点 -2，-4，-6,....和$\Gamma(\frac{s}{2})$的其余极点抵消，因此$\xi(s)$是一个整函数，且仅以$\zeta(s)$的 非平 凡 零 点 为 零 点 。 注 意 到 因 子$s(s-1)$ 显 然 在$s\to1-s$ 下 不 变 ， 所 以 有函 数 方 程 $\xi(s)=\xi(1-s)$. $\zeta(s)$的零点除了平凡零点 $s=-2n$（n 为自然数），由于恰好是

$\xi(s)=\Gamma(\frac{s}{2}+1)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$中的 $\Gamma(\frac{s}{2}+1)$的极点，因而不是$\xi(s)$的零点外，其余全都是$\xi(s)$的零点，因此$\xi(s)$的零点与黎曼ζ函数的非平凡零点相重合。换句话说，$\xi(s)$将黎曼$\zeta(s)$函数的非平凡零点从全体零点中分离了出来。

现在设 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in C \text{ and } t\neq 0)$，$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t)$,于是可得

$\xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^{\infty}\psi(x)\ x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x\ )dx$

或

$\xi(t)=4\int_1^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx$。

黎曼定义的这个函数$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t)$和现在通常使用的函数$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$本质上完全相同,因为$\prod\left(\frac{s}{2}\right)=\Gamma(\frac{s}{2}+1)=\frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})$,所以$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\xi(s)$。仅有的差别是黎曼以 t 为自变量，而现在通常使用的$\xi(s)$仍以 s 为自变量，s 和 t 差一个线性变换：$s=\frac{1}{2}+ti$, 即一个 90°旋转加$\frac{1}{2}$的平移。这样一来，s 复平面中的直线 $Re(s)=\frac{1}{2}$就对应于 t 平面中的实轴 黎曼$\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$函数在临界直线 $Re(s)=\frac{1}{2}$上的零点的实部就对应于函数$\xi(t)$的实根。注意在黎曼的记号中，

函数方程$\xi(s)=\xi(1-s)$就变成了$\xi(t)=\xi(-t)$，即$\xi(t)$是偶函数，故而其幂级数展开只有偶次幂，且零点关于$t=0$对称分布。 另外， 从上面的两个积分表示也可以明显看出$\xi(t)$是偶函数，因为$\cos(\frac{1}{2}t\ln x)$是 t 的偶函数。

对于所有有限的 t ，函数$\xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)\ x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx$

或

函数$\xi(t)=4\int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx$

的值都是有限的，并可以按t^2的幂展开成一个快速收敛的级数，因为对于一个实部大于 1 的 s 值，$\ln\zeta(s)=-\sum\ln(1-p^{-s})$的值也是有限的，这对$\xi(t)$的其它因子的对数也同样成立，因此函数只$\xi(t)$有当 t 的虚部位于$\frac{1}{2}$i 和$-\frac{1}{2}$i 之间时才可能取零值。即$\xi(s)$只有当 s 的实部位于 0 和 1 之间时才可能取零值。方程$\xi(t)$的实部在 0 和 T 之间的根的数目是$N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln T)$，约等于$\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$(黎曼对零点数目估计的这一结果直到 1859 年才由 Mangoldt 严格证明)。这是因为沿包含所有虚部位于$\frac{1}{2}$i 和$-\frac{1}{2}$i 之间、实部位 0 和 T 之间的 t 值的正向回路的积分$\int d\ln\xi(t)$ (略去和$\frac{1}{T}$同阶的小量后)的值约等于$(T\ln\frac{T}{2\pi}-T)i$, 而该积分的值等于位于此区域内的方程的根的数目乘以 $2\pi i$(此即应用幅角原理)。事实上黎曼发现在该区域内的实根数目近似等于该数目，极有可能所有的根都是实数。对此黎曼自然希望能有一个严格的证明，然而在一些仓促的不成功的初步尝试之后，黎曼暂时把寻求证明搁在一边，因为对于黎曼接下来研究的目的来说它并不是必需的。黎曼轻描淡写写下的这几句话就是著名的黎曼猜想，数学中最著名的猜想！

根据黎曼在论文中的假设:$s=\frac{1}{2}+ti(t\in C\ \text{and}\ t\neq 0)$，那么黎曼猜想等价于，对于$\zeta(s)=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$)来说,它的复数根 s（负偶数除外）必定都是只满足 $s=\frac{1}{2}+ti\left(t\in R\text{ 且 }t\neq 0\right)$和 $s=\frac{1}{2}-ti\left(t\in R\text{ 且 }t\neq 0\right)$的复数，都位于满足 Re(s)=$\frac{1}{2}$的垂直实数轴的临界线上，这些复数根 s（负偶数除外） 叫做黎曼$\zeta(s)\left(n\in Z^+\text{ 且 }s\neq 1\text{ 且 }s\neq -2n\,,n\in Z^+\right)$函数的非平凡零点。

对黎曼ζ函数非平凡零点的研究构成了现代数学中最艰深的课题之一。我们所要讨论的黎曼猜想就是一个关于这些非平凡零点的猜想。在这里我们先把它的内容表述一下， 然后再叙述它的来龙去脉。黎曼猜想：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于 Re(s)=$\frac{1}{2}$的直线上。在黎曼猜想的研究中，数学家们把复平面上 Re(s)=$\frac{1}{2}$的直线称为临界线（criticalline）。运用这一术语，黎曼猜想也可以表述为：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于临界线上。这就是黎曼猜想的内容，它是黎曼在 1859 年在他的这篇《论不大于 x 的素数的个数》论文中提出的。从其表述上看，黎曼猜想似乎是一个纯粹的复变函数命题，但我们很快将会看到，它其实却是一曲有关素数分布的神秘乐章。

一个复数域上的函数——黎曼ζ函数——的非平凡零点平凡零点（在无歧义的情况下我们有时将简称其为零点）的分布怎么会与看似风马牛不相及的自然数（在本书中自然数指正整数）中的素数分布产生关联呢？这还得从所谓的欧拉乘积公式谈起。我们知道，早在古希腊时期，欧几里德就用精彩的反证法证明了素数有无穷多个。随着数论研究的深入，人们很自然地对素数在自然数集上的分布产生了越来越浓厚的兴趣。1737 年，数学家欧拉在俄国圣彼得堡科学院发表了一个极为重要的公式，为数学家们研究素数分布的规律奠定了基础。这个公式就是欧拉乘积公式，即

$\sum_n n^{-s}=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$ ，

这个公式左边的求和对所有的自然数进行，右边的连乘积则对所有的素数进行。可以证明这个公式对所有 Re(s)>1 的复数 s 都成立。这个公式的左边正是我们在上文中介绍过的黎曼ζ函数在 Re(s)>1 时的级数表达式，而它的右边则是一个纯粹有关素数（且包含所有素数）的表达式，这样的形式正是黎曼ζ函数与素数分布之间存在关联的征兆。那么这个公式究竟蕴涵着有关素数分布的什么样的信息呢？黎曼ζ函数的零点又是如何出现在这种关联之中的呢？

欧拉本人率先对这个公式所蕴含的信息进行了研究。他注意到在 s=1 的时候，公式的左边

$$\sum_n n^{-1}$$

是一个发散级数（这是一个著名的发散级数，称为调和级数），这个级数以对数方式发散。这些对于欧拉来说都是不陌生的。为了处理公式右边的连乘积，他对公式两边同时取了对数，于是连乘积就变成了求和，由此他得到:

$\ln(\sum_n n^{-1})=\sum_{\mathrm{p}}(\mathrm{p}^{-1}+\frac{\mathrm{p}^{-2}}{2}+\frac{\mathrm{p}^{-3}}{3}+\cdots)$ ，

由于式中右端括号中除第一项外所有其他各项的求和都收敛，而且那些求和的结果累加在一起仍然收敛。因此右边只有第一项的求和是发散的。由此欧拉得到了这样一个有趣的渐近表达式：

$\sum_p p^{-1}\sim\ln(\sum_n n^{-1})\sim\ln\ln(\infty)$,

或者，更确切地说，

$\sum_{p<N} p^{-1}\sim\ln\ln(N)$,

这个结果, 以 lnln（N）的方式发散——是继欧几里得证明素数有无穷多个以来有关素数的又一个重要的研究结果。它同时也是对素数有无穷多个这一命题的一种崭新的证明（因为假如素数只有有限多个，则求和就只有有限多项，不可能发散）。但欧拉的这一新证明所包含的内容要远远多于欧几里得的证明，因为它表明素数不仅有无穷多个，而且其分布要比许多同样也包含无穷多个元素的序列——比如｛n｝序列——密集得多（因为后者的倒数之和收敛）。

不仅如此，如果我们进一步注意到$\sum_{\mathrm{p}<\mathrm{N}}\mathrm{p}^{-1}\sim\ln\ln(N)$,的右端可以改写为一个积分表达式：

$\ln\ln(N)\sim\int^{\mathrm{N}}\frac{x^{-1}}{\ln(x)}\mathrm{d}x$

而通过引进一个素数分布的密度函数 ρ(x)——它给出在x附近单位区间内发现素数的几率，$\sum_{\mathrm{p}<\mathrm{N}}\mathrm{p}^{-1}\sim\ln\ln(N)$左端也可以改写为一个积分表达式：

$\sum_{p<N} p^{-1} \sim \int^{N} x^{-1}\,\rho(x)\mathrm{d}x$,

将这两个积分表达式进行比较，不难猜测到素数的分布密度为 $\rho(x) \sim 1/\ln x$，从而在x以内的素数个数——通常用 $\pi(x)$表示——为

$\pi(x)\sim \mathrm{Li}(x)$,

其中

$\mathrm{Li}(x)=\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$,

是对数积分函数。

这个结果正是著名的素数定理——当然这种粗略的推理并不构成对素数定理的证明。因此欧拉发现的这个结果可以说是一扇通向素数定理的暗门。可惜欧拉本人并没有沿着这样的思路走，从而错过了这扇暗门，数学家们提出素数定理的时间也因此而延后了几十年。

提出素数定理的荣誉最终落到了另外两位数学家的肩上：他们是德国数学家高斯（Friedrich Gauss ,1777—1855)和法国数学家勒让德(Adrien-Marie Legendre ,1752—1833)。

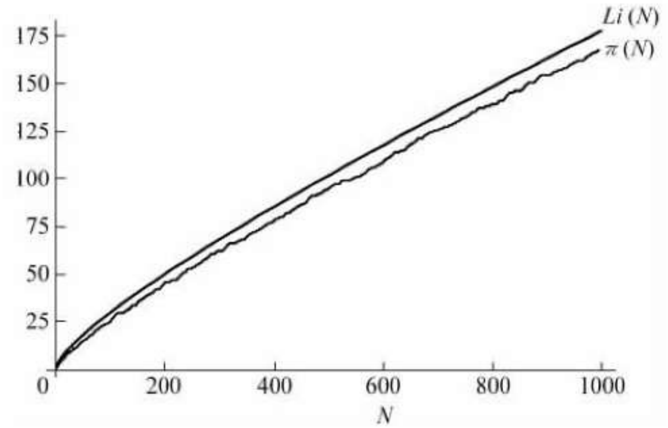
高斯对素数分布的研究始于 1792 到 1793 年间，那时他才十五岁。在那期间，每当“无所事事”的时候，这位早熟的天才数学家就会挑上几个长度为 1000 的自然数区间，计算这些区间中的素数个数，并进行比较。在做过了大量的计算和比较之后，高斯发现素数分布的密度可以近似地用对数函数的倒数来描述，即 $\rho(x) \sim 1/\ln x$，这正是上面提到的素数定理的主要内容。但是高斯并没有发表这一结果。高斯是一位追求完美的数学家，他很少发表自己认为还不够完美的结果，而他的数学思想与灵感犹如浩瀚奔腾的江水，汹涌激荡，常常让他还没来得及将一个研究结果完美化就又展开了新课题的研究。因此高斯一生所做的数学研究远远多过他正式发表的。但另一方面，高斯常常会通过其他的方式——比如书信——透露自己的某些未发表的研究成果，他的这一做法给一些与他同时代的数学家带来了不小的尴尬。其中“受灾”较重的一位便是勒让德。这位法国数学家在 1806 年率先发表了线性拟合中的

最小平方法，不料高斯在 1809 年出版的一部著作中提到自己曾在 1794 年（即比勒让德早了 12 年）就发现了同样的方法，使勒让德极为不快。

有道是：不是冤家不聚首。在素数定理的提出上，可怜的勒让德又一次不幸地与数学巨匠高斯撞到了一起。勒让德在 1798 年发表了自己关于素数分布的研究，这是数学史上有关素数定理最早的文献。由于高斯没有发表自己的研究结果，勒让德便理所当然地成为素数定理的提出者。勒让德的这个优先权一共维持了 51 年。但是到了 1849 年，高斯在给德国天文学家恩克（Johann Encke，1791—1865）的一封信中提到了自己在 1792—1793 年间对素数分布的研究，从而把尘封了半个世纪的优先权从勒让德的口袋中勾了出来，挂到了自己那已经鼓鼓囊囊的腰包之上。幸运的是，高斯给恩克写信的时候勒让德已经去世 16 年了，他用最无奈的方式避免了再次遭受残酷打击。无论高斯还是勒让德，他们对于素数分布规律的研究都是以猜测的形式提出的(勒让德的研究带有一定的推理成分,但离证明仍相距甚远)。因此确切地说，素数定理在那时还只是一个猜想，即素数猜想，我们所说的提出素数定理指的也只是提出素数猜想。素数定理的数学证明直到一个世纪之后的 1896 年，才由法国数学家阿达马（Jacques Hadamard，1865—1963）与比利时数学家普森（Charlesde la Va llée-Poussin，1866—1962）彼此独立地给出。他们的证明与黎曼猜想有着很深的渊源，其中阿达马的证明所出现的时机和场合还有着很大的戏剧性,这些我们将在后文中加以叙述。

素数定理是简洁而优美的，但它对于素数分布的描述仍然是比较粗略的，它给出的只是素数分布的一个渐近形式——小于 N 的素数个数在 N 趋于无穷时的分布形式。从有关素数分布与素数定理我们也可以看到，$\pi(x)$与 $\mathrm{Li}(x)$之间是有偏差的，而且这种偏差的绝对值随着x的增加似有持续增加的趋势（所幸的是，这种偏差的增加与 $\pi(x)$及 $\mathrm{Li}(x)$本身的增加相比仍是微不足道的——否则素数定理也就不成立了）。那么有没有一个公式可以比素数定理更精确地描述素数的分布呢？这便是黎曼在 1859 年想要回答的问题。那一年是高斯去世后的第

五年，32 岁的黎曼继德国数学家狄利克雷（Johann Dirichlet，1805—1859）之后成为高斯在哥廷根大学的继任者。同年的 8 月 11 日，他被选为柏林科学院的通信院士。作为对这一崇高荣誉的回报，黎曼向柏林科学院提交了一篇论文——一篇只有短短八页的论文，标题是：论小于给定数值的素数个数。正是这篇论文将欧拉乘积公式所蕴含的信息破译得淋漓尽致，也正是这篇论文将黎曼ζ函数的零点分布与素数的分布联系在了一起



（上图为素数分布与素数定理的示意图）

这篇论文把人们对素数分布的研究推向壮丽的巅峰，并为后世的数学家们留下一个魅力无穷的伟大谜团。

根据欧拉公式：$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})$，这是研究素数分布规律的基础。黎曼的研究也是以这一公式作为起点的。为了消除这一公式右边的连乘积，欧拉曾经对公式的两边取对数，黎曼也如法炮制（连乘积真是一个人人欲除之而后快的东西），从而得到

$\ln\zeta(s) \equiv \sum_p \ln(1-p^{-s})$=$\sum_p\sum_n\frac{p^{-s}}{n}$，但过了这一步，黎曼就和欧拉就分道扬镳了：欧拉证

明了素数有无穷多个后就鸣金收兵了；而黎曼则沿着一条布满荆棘的道路继续走了下去，走出了素数研究的一片崭新的天地。

可以证明，上面给出的 $\ln\zeta(s) \equiv \sum_p \ln(1-p^{-s})=\sum_p\sum_n \frac{p^{-s}}{n}$右边的双重求和在复平面上 Re(s)＞1 的区域内是绝对收敛的，并且可以改写成斯蒂尔切斯积分：

$\ln\zeta(s)=\int_0^\infty x^s \mathrm{d}\,\mathrm{J}(x)$,

其中$\mathrm{J}(x)$是一个特殊的阶梯函数，它在x=0 处取值为零，以后每越过一个素数就增加 1，每越过一个素数的平方就增加 1/2，……，每越过一个素数的 n 次方就增加 1/n，……而在$\mathrm{J}(x)$不连续的点（即x等于素数、素数的平方、……、素数的 n 次方、……的点）上，其函数值则用$\mathrm{J}(x)=\frac{1}{2}[\mathrm{J}(x^-)+\mathrm{J}(x^+)]$来定义。显然，这样的一个阶梯函数可以用素数分布函数 $\pi(x)$ 表示为:

$\mathrm{J}(x)=\sum_n \frac{\pi(x^{\frac{1}{n}})}{n}$。

对上述斯蒂尔切斯积分进行一次分部积分便可得到:

$\ln\zeta(s) = s\int_0^\infty \mathrm{J}(x)\,x^{-s-1}\mathrm{d}x$。

这个公式的左边是黎曼ζ函数的自然对数，右边则是对J()——一个与素数分布函数 $\pi(x)$有直接关系的函数的积分，它可以被视为欧拉乘积公式的积分形式。这一结果的方法与黎曼有所不同，黎曼发表论文时还没有斯蒂尔切斯积分——那时候荷兰数学家斯蒂尔切斯（Thomas Stieltjes，1856—1894）才三岁。

如果说传统形式下的欧拉乘积公式只是黎曼ζ函数与素数分布之间存在关联的朦胧征兆，那么在上述积分形式的欧拉乘积公式下，这两者间的关联就已是确凿无疑并且完全定量的了。

接下来首先要做的显然是从上述积分中解出$\mathrm{J}(x)$来，黎曼解出的$\mathrm{J}(x)$是：

$\mathrm{J}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln\zeta(Z)}{Z} x^Z \mathrm{d}z$,

其中 a 为大于 1 的实数。上面这个积分是一个条件收敛的积分，它的确切定义是从 a-ib 积分到 a+ib(b 为正实数),然后取 b→∞的极限。黎曼说这个结果是完全普遍的。实际上与实际

上黎曼所说的普遍性结果相匹配的完整结果直到 40 年后才由芬兰数学家梅林（Robert Mellin，1854—1933）所发表，现在被称为梅林变换（Mellin transform）。

像这样一种被黎曼随手写下、却让数学界花费几十甚至上百年的时间才能证明的命题在黎曼那篇论文中还有好几处。这是黎曼那篇论文的一个极为突出的特点：它有一种高屋建瓴的宏伟视野，远远超越了同时代的其他数学文献。它那高度浓缩的文句背后包含着的极为丰富的数学结果，让后世的数学家们陷入漫长的深思之中。人们在对黎曼的部分手稿进行研究时发现，黎曼对自己论文中的许多语焉不详的命题是做过扎实的演算和证明的，只不过他和高斯一样追求完美，发表的东西远远少于自己研究过的。更令人钦佩的是，黎曼手稿中的一些演算和证明哪怕是时隔了几十年之后才被整理出来，也往往还是大大超越当时数学界的水平。我们有较强的理由相信，黎曼在论文中以陈述而不是猜测的语气所表述的内容，无论有没有给出证都是有着深入的演算和证明背景的。

好了，现在回到 $J(x)$的表达式来，这个表达式给出了 $J(x)$与黎曼 ζ 函数之间的确切关联。换句话说，只要知道了 ζ(s)，通过这个表达式原则上就可以计算出 $J(x)$。知道了 $J(x)$，下一步显然就是计算 $\pi(x)$。这并不困难，因为上面提到的 $J(x)$与 $\pi(x)$之间的关系式可以通过所谓的默比乌斯反演（Möbius inversion）来反解出 $\pi(x)$与 $J(x)$的关系式，其结果为:

$\pi(x)=\sum_n \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}})$,

这里 μ(n)称为默比乌斯函数（Möbius function），它的取值如下：

●$\mu(1)=1$;

●$\mu(n)=0$（如果 n 可以被任一素数的平方整除;

●$\mu(n)=-1$（如果 n 是奇数个不同素数的乘积);

●$\mu(n)=1$（如果 n 是偶数个不同素数的乘积);

因此知道 J(x)就可以计算出 π(x) ,即素数的分布函数。把这些步骤连接在一起,我们看到,从ζ(s)到 J(x),再从 J(x)到 π(x),素数分布的秘密完全定量地蕴涵在了黎曼 ζ 函数之中。这就是黎曼研究素数分布的基本思路。

素数的分布与黎曼 ζ 函数之间存在着深刻关联。这一关联的核心就是 J(x)的积分表达式:

$\mathrm{J}(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{a-i}\infty}^{\mathrm{a+i}\infty}\frac{\ln\zeta(\mathrm{s})}{\mathrm{s}}x^{\mathrm{s}}\mathrm{ds}$,由于黎曼 ζ 函数具有极为复杂的性质,这一积分同样也是极为复杂的。为了对这一积分做进一步的研究,黎曼引进了一个辅助函数 ξ(s):

$\xi(\mathrm{s})=\Gamma(\frac{s}{2}+1)(\mathrm{s}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(\mathrm{s})$。

但更好的做法是将ξ(s)定义为

$\xi(\mathrm{s})=\frac{1}{2}\mathrm{s}(\mathrm{s}-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$。

因为因子(s–1)消去了ζ(s)在s=1 处的一阶极点,因子s 消去了$\Gamma(\frac{s}{2})$在s=0 处的极点,而ζ(s)的平凡零点 -2,-4,-6,....和$\Gamma(\frac{s}{2})$的其余极点抵消,因此ξ(s)是一个整函数,且仅以ζ(s)的 非 平 凡 零 点 为 零 点 。

引进这样一个辅助函数有什么好处呢?首先,由式 $\xi(\mathrm{s})=\Gamma(\frac{s}{2}+1)(\mathrm{s}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(\mathrm{s})$定义的辅助函数 ξ(s)可以被证明是整函数,即在复平面上所有 s≠∞的点上都解析的函数。这样的函数在性质上要比黎曼ζ函数简单得多,处理起来也容易得多。事实上,在所有非平庸的复变函数中,整函数是解析区域最为宽广的(解析区域比它更大,即包括 s=∞的函数只有一种,那就是常数函数)。这是引进 ξ(s)的好处之一。

其次,利用这一辅助函数,我们在前面得到过的黎曼 ζ 函数所满足的代数关系式$\zeta(\mathrm{s})=2^{\mathrm{s}}\pi^{\mathrm{s}-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-\mathrm{s})\zeta(1-\mathrm{s})$(s∈C 且 $s\neq 1$)(等式 7)可以表述为一个对于 s 与 1-s 对称的简单形式:ξ(s)= ξ(1-s)。这是引进 ξ(s)的好处之二。

此外,从 ξ(s)的定义中不难看到,ξ(s)的零点必定是 ζ(s)的零点。另一方面,ζ(s)的零点除了

平凡零点 s=-2n(n 为自然数)由于恰好是黎曼引进的辅助函数 $\xi(s)=\Gamma(\frac{s}{2}+1)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$中的 $\Gamma(\frac{s}{2}+1)$的极点，因而不是 ξ(s)的零点外，其余全都是 ξ(s)的零点，因此 ξ(s)的零点与黎曼ζ函数的非平凡零点相重合。换句话说，ξ(s)将黎曼 ζ函数的非平凡零点从全体零点中分离了出来。这是引进 ξ(s)的好处之三。

这里我们有必要先提一下黎曼 ζ 函数的一个简单性质,即 ζ(s)在 Re(s)>1 的区域内没有零点。没有零点当然就更没有非平凡零点，而后者跟 ξ(s)的零点是重合的，因此上述性质表明 ξ(s)在 Re(s)>1 的区域内也没有零点；又由于 ξ(s)=ξ(1-s)，因此 ξ(s)在 Re(s)<0 的区域内也没有零点。这表明 ξ(s)的所有零点——从而也就是黎曼 ζ函数的所有非平凡零点都位于 0≤Re(s)≤1 的区域内。由此我们得到了一个有关黎曼ζ函数零点分布的重要结果，那就是：黎曼ζ函数的所有非平凡零点都位于复平面上 0≤Re(s)≤1 的区域内。

好了，现在回到黎曼的论文中来。引进了 ξ(s)之后，黎曼便用 ξ(s)的零点对 lnξ(s)进行了分解：

$\ln\zeta(s)=\ln\xi(0)+\sum_{\rho}\ln(1-\frac{s}{\rho})-\ln\Gamma(s/2+1)+\frac{s}{2}\ln\pi-\ln(s-1)$，

其中 ρ 为 ξ(s)的零点(也就是黎曼 ζ 函数的非平凡零点)。分解式中的求和对所有的 ρ 进行，并且是以先将 ρ 与 1-ρ 配对的方式进行的。由于 ξ(s)=ξ(1-s)，因此零点总是以 ρ 与 1-ρ 成对的方式出现的。这一点很重要，因为上述级数是条件收敛的，但是在将 ρ 与 1-ρ 配对之后则是绝对收敛的。这一分解式也可以写成等价的连乘积关系式：

$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}(1-\frac{s}{\rho})$。

这样的连乘积关系式对于有限多项式来说是显而易见的(只要满足 ξ(0)≠0 这一条件即可），但对于无穷乘积来说却绝非一目了然，它有赖于 ξ(s)是整函数这一事实。其完整证明直到 1893 年才由阿达马在对整函数的无穷乘积表达式进行系统研究时给出。阿达马对这一关系式

的证明是黎曼的论文发表之后这一领域内第一个重要进展。

很明显，上述级数分解式的收敛与否与 ξ(s)的零点分布有着密切的关系。为此黎曼研究了 ξ(s)零点分布，并由此而提出了三个重要命题：

命题一　在 0<Im(s)<T 的区域内，ξ(s)的零点数目约为(T/2π)ln(T/2π)-(T/2π)。

命题二　在 0<Im(s)<T 的区域内， ξ(s)的位于 Re(s)=1/2 的直线上的零点数目也约为(T/2π)ln(T/2π)-(T/2π)。

命题三　ξ(s)的所有零点都位于 Re(s)=1/2 的直线上。（注：后面我会严格证明这个命题）

在这三个命题之中，第一个命题是证明级数分解式的收敛性所需要用到的（不过黎曼建立在这一命题基础上的说明因过于简略而不足以构成证明）。对于这个命题黎曼的证明是指出在 0 < Im(s) < T 的区域内 ξ(s)的零点数目可以由 dξ(s)/2πiξ(s)沿矩形区域{0 < Re(s) < 1，0 < Im(s)<T}的边界作围道积分得到。在黎曼看来，这点小小的积分算不上什么，因此他直接写下了结果（即命题一）。黎曼并且给出了该结果的相对误差为 1/T。但黎曼显然大大高估了他的读者的水平，因为直到 46 年后的 1905 年，他所写下的这一结果才由德国数学家曼戈尔特（Hansvon Mangoldt，1854—1925）所证明（这一结果因此而被称为了黎曼-曼戈尔特公式，它除了补全黎曼论文中的一个小小证明外，也确立了黎曼ζ函数的非平凡零点有无穷多个）。

将黎曼的第二个命题与前一个命题相比较可以看出，这第二个命题实际上是表明 ξ(s)的几乎所有零点——从而也就是黎曼 ζ 函数的几乎所有非平凡零点——都位于 Re(s)=1/2 的直线上。这是一个令人吃惊的命题，因为它比迄今为止——也就是黎曼的论文发表一个半世纪以来——人们在研究黎曼猜想上取得的所有结果都要强得多！而且黎曼在叙述这一命题时所用的语气是完全确定的，这似乎表明，当他写下这一命题时，他认为自己对此已经有了证明。可惜的是，他完全没有提及证明的细节，因此他究竟是怎么证明这一命题的？他的证明

究竟是正确的还是错误的？我们全都无从知晓。除了 1859 年的论文外，黎曼还曾在一封信件中提到过这一命题，他说这一命题可以从对 ξ 函数的一种新的表达式中得到，但他还没有将之简化到可以发表的程度。这就是后人从黎曼留下的片言只语中得到的有关这一命题的全部信息。

黎曼的这三个命题就像是三座渐次升高的山峰，一座比一座巍峨，攀登起来一座比一座困难。他的第一个命题让数学界等待了 46 年；他的第二个命题已经让数学界等待了超过一个半世纪；而他的第三个命题想必大家都看出来了，正是大名鼎鼎的黎曼猜想！今天，黎曼猜想已经被我攻克，它确实完全成立，后面我将会严格证明这个黎曼猜想。

惯常在谈笑间让定理灰飞烟灭的黎曼到了表述这第三个命题——也就是黎曼猜想——的时候，也终于一改举重若轻的风格，用起了像“非常可能”这样的不确定语气。黎曼并且写道：“我们当然希望对此能有一个严格的证明，但是在经过了一些快速而徒劳的尝试之后，我已经把对这种证明的寻找放在了一边，因为它对于我所研究的直接目标不是必需的。”黎曼把证明放在了一边，整个数学界的心弦却被提了起来。黎曼猜想的成立与否对于黎曼的“直接目标”——证明 lnξ(s)的级数分解式的收敛性——的确不是必需的（因为那只要上述第一个命题就足够了），但对于今天的数学界来说却是至关重要的。粗略的统计表明，在当今的数学文献中已经有超过一千条数学命题或“定理”以黎曼猜想（或其推广形式）的成立作为前提。黎曼猜想的命运与提出这些命题或“定理”的所有数学家们的“直接目标”息息相关，并通过那些命题或“定理”而与数学的许多分支有着千丝万缕的联系。另一方面，黎曼对于黎曼猜想的表述方式也从一个侧面表明黎曼对于自己写下的命题是属于猜测性的还是肯定性的是加以区分的。现在让我们回到对 $J(x)$的计算上来。利用 ξ(s)的定义及其分解式，可以将 lnζ(s)表示为:$\ln\zeta(s)=\ \ln\xi(0)+\sum_{\rho}\ln(1-\frac{s}{\rho})-\ln\Gamma(s/2+1)+\frac{s}{2}\ln\pi-\ln(s-1)$;对 lnζ(s)作这样的分解，目的是为了计算 $J(x)$。但是将这一分解式直接代入 $J(x)$的积分表达式所得到的

各个单项积分却并不都收敛，因此黎曼在代入之前先对 $J(x)$作了一次分部积分，由此得到:

$J(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\ln\zeta(Z)}{Z}x^{Z}$dz, 将 lnζ(s)的分解式代入上式 ,各单项便可分别积出。下表是 lnζ(s)分解式中的项及其对应的积分结果：

$\ln\zeta(s)$分解式中的项	对应的积分结果
$-\ln(s-1)$	$Li(x)$
$\sum_{\rho}\ln\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$	$-\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left[Li(x^{\rho})+Li(x^{1-\rho})\right]$
$-\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$	$\int_{x}^{\infty}\frac{dt}{t(t^{2}-1)\ln t}$
$\ln\xi(0)$	$\ln\xi(0)=-\ln 2$
$\frac{s}{2}\ln\pi$	0

在上述结果中，对级数

$$\sum_{\rho}\ln\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

的积分最为复杂，其结果是对级数逐项积分的结果。这一结果-$\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$是条件收敛的，不仅要如 lnξ(s)的级数表达式中一样将 ρ 与 1-ρ 进行配对，而且还必须依照 Im(ρ)从小到大的顺序求和。黎曼在给出这一结果时承认逐项积分的有效性有赖于对 ξ 函数的“更严格”的讨论，但他表示这是容易证明的。这一“容易证明”的结果在 36 年后的 1895 年被曼戈尔特所证明。另外值得指出的一点是，在黎曼对这一级数的各个项进行积分时隐含了一个要求，那就是对所有的零点 ρ，0<Re(ρ)<1， 这比我们在前面提到过的 0≤Re(ρ)≤1 要强。这一加强看似细微(只不过是将等号排除掉而已)，其实却是数论中一个非同小可的结果,后面我会对它加以证明。黎曼在文章中不仅没有对这一结果加以证

明，连暗示性的说明也没有，应该被视为他论文的一个漏洞。这一漏洞在曼戈尔特的证明中也同样存在。

不过这一漏洞只是论证方法上的漏洞，是可以弥补的，论证的结果本身并不依赖于 $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ 这样的条件。

由上面这些结果黎曼得到了 J(x)的显形式：

$J(x)=\mathrm{Li}(x)-\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]+\int_{x}^{+\infty}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}(\mathrm{t}^2-1)\ln \mathrm{t}}-\ln 2,$

$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{dt}}{\ln \mathrm{t}}(x\in \mathrm{Z}^+)$，

这一结果，连同 $\pi(x)$与 $J(x)$的关系式：

$\pi(x)=\sum_{\mathrm{n}}\frac{\mu(\mathrm{n})}{\mathrm{n}}J(x^{\frac{1}{\mathrm{n}}}),$

便是黎曼所得到的素数分布的完整表达式，也是他 1859 年论文的主要结果。黎曼的这一结果给出的是素数分布的精确表达式，它的第一项(由 $J(x)$及 $\pi(x)$的第一项共同给出)正是当时尚未得到证明的素数定理所预言的结果 $\mathrm{Li}(x)$。黎曼既然已经给出了素数分布的精确表达式，却没能直接证明远比该结果粗糙的素数定理，这是为什么呢？这其中的奥秘就在于黎曼ζ函数的非平凡零点，在于 J(x)的表达式中那些与零点有关的项，即$-\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$。在 $J(x)$的表达式中，所有其他的项都十分简单，也比较光滑，因此素数分布的细致规律——那些细致的疏密涨落——主要就蕴涵在了这个与黎曼ζ函数的非平凡零点有关的级数之中。如上所述，这个级数是条件收敛的，也就是说它的收敛有赖于参与求和的各项——即来自不同零点的贡献——之间的相互抵消。这些来自不同零点的贡献就像一首盘旋起伏的舞曲，引导着素数的细致分布。而这首舞曲的奔放程度——也就是这些贡献相互抵消的方式和程度——则决定了素数的实际分布与素数定理给出的渐近分布之间的接近程度。所有这一切都定量地取决于黎曼ζ函数非平凡零点的分布。黎曼给出的素数分布的精确表达式之所以没能立即使得对素数定理的直接证明成为可能，原因正是因为当时人们对黎曼

ζ函数非平凡零点的分布还知道得太少（事实上当时人们所知道的也就是我们在上面已经提到过的 0≤Re(ρ≤1），无法有效地估计那些来自零点的贡献，从而也就无法有效地估计素数定理与素数实际分布——即黎曼给出的精确表达式——之间的偏差。

那么黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布对素数定理与素数实际分布之间的偏差究竟有什么样的影响呢？在这个问题上数学家们已经取得了一系列结果。素数定理的证明本身就是其中一个。在素数定理被证明之后，1901 年，瑞典数学家科赫（von Koch，1870—1924）进一步证明了（这正是我们前面提到过的以黎曼猜想的成立为前提的数学命题的一个例子），假如黎曼猜想成立，那么素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差为 O($x^{\frac{1}{2}}$ln$x$）。Li(x^{ρ})的模随的增加以$x^{\mathrm{Re}(\rho)}$/ln$x$的方式增加，因此任何一对非平凡零点 ρ 与 1-ρ 所给出的渐近贡献 Li(x^{ρ}) +Li($x^{1-\rho}$)起码是 Li($x^{\frac{1}{2}}$）~ $x^{\frac{1}{2}}$/ln$x$ 。这一结果暗示素数定理与素数实际分布之间的偏差不可能小于 Li($x^{\frac{1}{2}}$)。事实上，英国数学家李特尔伍德（John Littlewood，1885—1977）曾经证明，素数定理与素数实际分布之间的偏差起码有 Li($x^{\frac{1}{2}}$)lnlnln$x$ 。这与科赫的结果已经非常接近（其主项都是$x^{\frac{1}{2}}$）。因此黎曼猜想的成立意味着素数的分布相对有序；而反过来，假如黎曼猜想不成立，假如黎曼 ζ 函数的某一对非平凡零点 ρ 与 1-ρ 偏离了临界线（即 Re(ρ)>1/2 或 Re(1-ρ)>1/2），那么它们所对应的渐近贡献的主项就会大于$x^{\frac{1}{2}}$，从而素数定理与素数实际分布之间的偏差就会变大。因此，对黎曼猜想的研究使数学家们看到了貌似随机的素数分布背后奇异的规律和秩序。这种规律和秩序就体现在黎曼ζ函数非平凡零点的分布之中。

1885 年，一位叫做斯蒂尔切斯（Thomas Stieltjes，1856—1894）的年轻的荷兰数学家,在巴黎科学院发表了一份简报，声称自己证明了以下结果：

M(N)≡ $\sum_{n<N}\mu(n)$=O($N^{\frac{1}{2}}$),

这里的 μ(n)是我们前面提到过的默比乌斯函数，由它的求和所给出的函数 M（N）称为梅

尔滕斯函数（Mertens function）。这个命题看上去倒是“面善”得很：默比乌斯函数 μ(n)是一个整数函数，其定义虽有些琐碎，却也并不复杂，而梅尔滕斯函数 M(N)不过是对 μ(n)的求和，证明它按照 $O(N^{\frac{1}{2}})$增长似乎不像是一件太困难的事情。但这个其貌不扬的命题事实上却是一个比黎曼猜想更强的结果！换句话说，证明了上述命题就等于证明了黎曼猜想（但反过来则不然，否证了上述命题并不等于否证了黎曼猜想）。因此斯蒂尔切斯的简报意味着声称自己证明了黎曼猜想。虽然当时黎曼猜想还远没有像今天这么热门，消息传得也远没有像今天这么飞快，但有人证明了黎曼猜想仍是一个非同小可的消息。别的不说，证明了黎曼猜想就意味着证明了素数定理,而后者自高斯等人提出以来折磨数学家们已近一个世纪之久，却仍未得到证明。与在巴黎科学院发表简报几乎同时，斯蒂尔切斯给当时法国数学界的一位重量级人物埃尔米特（Charles Hermite，1822—1901）发去了一封信件，重复了这一声明。但无论在简报还是在信件中斯蒂尔切斯都没有给出证明，他说自己的证明太复杂，需要简化。换作是在今天，一位年轻数学家开出这样一张空头支票，是很难引起数学界的任何反响的。但是 19 世纪的情况有所不同，因为当时学术界常有科学家做出成果却不公布（或只公布一个结果）的事，高斯和黎曼都是此道中人。因此像斯蒂尔切斯那样声称自己证明了黎曼猜想，却不给出具体证明，在当时并不算离奇。学术界对之的反应多少有点像现代西方法庭所奉行的无罪推定原则，即在出现相反证据之前倾向于相信声明成立。

但相信归相信，数学当然是离不开证明的，而一个证明要想得到最终的承认，就必须公布细节、接受检验。因此大家就期待着斯蒂尔切斯发表具体的证明，其中期待得最诚心实意的当属接到斯蒂尔切斯来信的埃尔米特。埃尔米特自 1882 年起就与斯蒂尔切斯保持着通信关系，直至 12 年后斯蒂尔切斯过早地去世为止。在这期间两人共交换过 432 封信件。埃尔米特是当时复变函数论的大家之一，他与斯蒂尔切斯的关系堪称数学史上一个比较奇特的现象。斯蒂尔切斯刚与埃尔米特通信时还只是莱顿天文台（Leiden Observatory）的一名助理，而

且就连这个助理的职位还是靠了他父亲(斯蒂尔切斯的父亲是荷兰著名的工程师兼国会成员)的关照才获得的。在此之前他在大学里曾三度考试失败。好不容易“拉关系、走后门”进了天文台，斯蒂尔切斯却“身在曹营心在汉”，手上干着天文观测的活，心里惦记的却是数学，并且给埃尔米特写了信。照说当时一无学位、二无名声的斯蒂尔切斯要引起像埃尔米特那样的数学元老的重视是不容易，甚至不太可能的。但埃尔米特是一位虔诚的天主教徒，他恰巧对数学怀有一种奇特的信仰，他相信数学存在是一种超自然的东西，寻常的数学家只是偶尔才有机会了解数学的奥秘。那么，什么样的人能比“寻常的数学家”更有机会了解数学的奥秘呢？埃尔米特凭着自己的神秘主义眼光找到了一位，那就是默默无闻的观星之人斯蒂尔切斯。埃尔米特认为斯蒂尔切斯具有上帝所赐予的窥视数学奥秘的眼光，他对之充满了信任。在他与斯蒂尔切斯的通信中甚至出现过“你总是对的，我总是错的”那样极端的赞许。在这种奇特信仰与 19 世纪数学氛围的共同影响下，埃尔米特对斯蒂尔切斯的声明深信不疑。但无论埃尔米特如何催促，斯蒂尔切斯始终没有公布他的完整证明。一转眼 5 年过去了，埃尔米特对斯蒂尔切斯依然“痴心不改”，他决定向对方“诱之以利”。在埃尔米特的提议下，法国科学院将 1890 年数学大奖的主题设为“确定小于给定数值的素数个数”。这个主题大家想必有似曾相识的感觉，是的，它跟我们前面刚刚介绍过的黎曼那篇论文的题目十分相似。事实上，该次大奖的目的就是征集对黎曼那篇论文中提及过却未予证明的某些命题的证明（这一点明确写入了征稿要求之中）。至于那命题本身，则既可以是黎曼猜想，也可以是其他命题，只要其证明有助于“确定小于给定数值的素数个数”即可。在如此灵活的要求下，不仅证明黎曼猜想可以获奖，就是证明比黎曼猜想弱得多的结果——比如素数定理——也可以获奖。在埃尔米特看来，这个数学大奖将毫无悬念地落到斯蒂尔切斯的腰包里，因为即便斯蒂尔切斯对黎曼猜想的证明仍然“太复杂，需要简化”，他依然能通过发表部分结果或较弱的结果而领取大奖。可惜直至大奖截止日期终了，斯蒂尔切斯依然毫无动静。

但埃尔米特也并未完全失望，因为他的学生阿达马提交了一篇论文，领走了大奖——肥水总算没有流入外人田。阿达马获奖论文的主要内容正是前面提到过的对黎曼论文中辅助函数ξ(s)的连乘积表达式的证明。这一证明虽然不仅不能证明黎曼猜想，甚至离素数定理的证明也还有一段距离，却仍是一个足可获得大奖的进展。几年之后，阿达马再接再厉，终于一举证明了素数定理。埃尔米特放出去的这根长线虽未能如愿钓到斯蒂尔切斯和黎曼猜想，却错钓上了阿达马和素数定理，斩获亦是颇为丰厚(素数定理的证明在当时其实比黎曼猜想的证明更令数学界期待）。

那么斯蒂尔切斯呢？没听过这个名字的读者可能会觉得他是一个浮夸无为的家伙，事实却不然。斯蒂尔切斯在分析与数论的许多方面都做出过重要贡献。他在连分数方面的研究为他赢得了“连分数分析之父”的美誉；挂着他名字的黎曼-斯蒂尔切斯积分（Riemann-Stieltjes integral）更是将他与黎曼的大名联系在了一起（不过两人之间并无实际联系——黎曼去世时斯蒂尔切斯才 10 岁）。但他那份有关黎曼猜想的声明却终究没能为他赢得永久的悬念。现在数学家们普遍认为斯蒂尔切斯所宣称的关于 $M(N)=O(N^{\frac{1}{2}})$的证明即便有也是错误的。不仅如此，就连命题 $M(N)=O(N^{\frac{1}{2}})$本身的成立也已受到了越来越多的怀疑。

素数定理自高斯与勒让德以经验公式的形式提出以来，许多数学家对此做过研究。其中一个比较重要的结果是由俄国数学家切比雪夫（Pafnuty Chebyshev，1821—1894）做出的。早在 1850 年，切比雪夫就证明了对于足够大的x，素数分布 π(x)与素数定理给出的分布 Li(x)之间的相对误差不会超过 1%。但在黎曼 1859 年的研究以前，数学家们对素数分布的研究主要局限在实分析手段上。从这个意义上讲，即使撇开具体的结果不论，黎曼建立在复变函数之上的研究仅就其方法而言，也是对素数分布研究的重大突破。这一方法上的突破为素数定理的最终证明铺平了道路。

前面曾经提到，黎曼对素数分布的研究之所以没能直接导致素数定理的证明，是因为人们对黎曼ζ函数非平凡零点的分布还知道得太少。那么，为了证明素数定理，我们起码要知道多少有关黎曼ζ函数非平凡零点分布的信息呢？这一问题的答案到了 1895 年随着曼戈尔特对黎曼论文的深入研究而变得明朗起来。曼戈尔特的研究我们在前面已经提到过，正是他证明了黎曼关于 J(x)的公式。但曼戈尔特那项研究的价值比仅仅证明黎曼关于 J(x)的公式要深远得多。

前面提到过，黎曼对素数分布的研究之所以没能直接导致素数定理的证明，是因为人们对黎曼ζ函数非平凡零点的分布还知道得太少。那么，为了证明素数定理，我们起码要知道多少有关黎曼ζ函数非平凡零点分布的信息呢？这一问题的答案到了 1895 年随着曼戈尔特对黎曼论文的深入研究而变得明朗起来。曼戈尔特的研究我们在前面已经提到过，正是他证明了黎曼关于 J(x)的公式。但曼戈尔特那项研究的价值比仅仅证明黎曼关于 J(x)的公式要深远得多。

曼戈尔特在研究中使用了一个比黎曼的 J(x)更简单有效的辅助函数 Ψ(x)，它的定义为:

$\Psi(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n)$，其中 Λ(n)被称为曼戈尔特函数（von Mangoldt function），它对于 n =pk（p 为素数，k 为自然数）取值为 ln(p)；对于其他 n 取值为 0。应用 Ψ(x)，曼戈尔特证明了一个本质上与黎曼关于 J(x)的公式相等价的公式：

$\Psi(x)= x -\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}-\frac{1}{2}\ln(1-x^{-2})-\ln(2\pi)$,

其中有关 ρ 的求和与黎曼的 J(x)中的求和一样，也是先将 ρ 与 1-ρ 配对，再依 Im(ρ)从小到大的顺序进行。

很明显，曼戈尔特的 Ψ(x)表达式比黎曼的 J(x)简单多了。时至今日，Ψ(x)在解析数论的研究中差不多已完全取代了黎曼的 J(x)。引进 Ψ(x)的另一个重大好处是早在几年前，前面提

到的切比雪夫就已经证明了素数定理 $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$等价于 $\Psi(x) \sim x$。为了纪念切比雪夫的贡献，曼戈尔特函数也被称为第二切比雪夫函数（second Chebyshevfunction）。

将这一点与曼戈尔特有关 $\Psi(x)$的那个本质上与黎曼关于 $J(x)$的公式相等价的公式联系在一起，不难看到素数定理成立的条件是:

$\lim_{x\to\infty} \sum_{\rho}(x^{\rho-1}/\rho)=0$,

这一条件启示我们考虑$x^{\rho-1}$在$x\to\infty$时趋于零的情形。而要让$x^{\rho-1}$在$x\to\infty$时趋于零，Re(ρ)必须小于 1。换句话说黎曼 ζ 函数在直线 Re(s)=1 上必须没有非平凡零点。这就是我们为证明素数定理而必须知道的有关黎曼ζ函数非平凡零点分布的信息。由于黎曼 ζ 函数的非平凡零点是以 ρ 与 1-ρ 成对的方式出现的，因此这一信息等价于 0<Re(s)<1。

前面曾经提到过，黎曼ζ函数的所有非平凡零点都位于 0≤Re(s)≤1 的区域内。因此为了证明素数定理，我们所需知道的有关黎曼ζ函数非平凡零点分布的信息要比我们已知的（也是当时数学家们已知的）略多一些（但仍大大少于黎曼猜想所要求的）。这样，在经过了切比雪夫、黎曼、阿达马和曼戈尔特等人的卓越努力之后，我们离素数定理的证明终于只剩下了最后一小步：即把已知的零点分布规律中那个小小的等号去掉。这一小步虽也绝非轻而易举，却已难不住在黎曼峰上攀登了三十几个年头 ,为素数定理完整证明的到来等待了一个世纪的数学家们。(注;在后面我的论文中我也证明了这一点)曼戈尔特的结果发表后的第二年(即 1896 年），阿达马与普森就几乎同时独立地给出了对这最后一小步的证明，从而完成了自高斯以来数学界的一个重大心愿。那时斯蒂尔切斯已经去世两年了。

经过素数定理的证明，人们对于黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的了解又推进了一步，那就是证明了黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 0<Re(s)<1 的区域内。在黎曼猜想的研究中数学家们把这个区域称为临界带（critical strip）。

素数定理的证明——尤其是以一种与黎曼的论文如此密切相关的方式所实现的证明——让数学界把更多的注意力放到了黎曼猜想上来。四年后（即 1900 年）的一个夏日，两百多位当时最杰出的数学家会聚到了巴黎，一位 38 岁的德国数学家走上了讲台，作了一次永载数学史册的伟大演讲。演讲的题目叫做《数学问题》，演讲者的名字叫做希尔伯特(David Hilbert，1862—1943），他恰好来自高斯与黎曼的学术故乡——群星璀璨的哥廷根大学。他是哥廷根数学精神的伟大继承者，一位与高斯及黎曼齐名的数学巨匠。希尔伯特在演讲稿中列出了 23 个对后世产生深远影响的数学问题，黎曼猜想被列为其中第八个问题的一部分，从此成为整个数学界瞩目的难题之一。

20 世纪的数学大幕在希尔伯特的演讲声中徐徐拉开，黎曼猜想也迎来了一段新的百年征程。我们把质数计数函数记作 $\pi(x)(x \in R^{+})$,这个函数的名称与圆周率毫无关系。根据素数定理，$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}(x \in \mathrm{R}^{+})$。小于等于 1 的质数是 1,除外 1 以外的质数的个数是 0，所以 $\pi(1)=0$。小于等于 2 的质数是 1 和 2，除 1 以外的质数的个数是 1，所以$\pi(2)=1$。小于等于 3 的质数是 1、2、3，除外 1 以外的质数的个数是 2，所以$\pi(3)=2$。小于等于 4 的质数是 1、2、3，除外 1 以外的质数的个数是 2，所以$\pi(4)=2$。小于等于 5 的质数是 1、2、3，5，除 1 以外的质数的个数是 3，所以$\pi(5)=3$。所以$\pi(6)=3$，$\pi(7)=4$，$\pi(11)=5$，$\pi(13)=6$， … ,如此等等。如果我们得到了质数计数函数得到了一个简便的计算表达式，这将会造成惊人的结果，对于关于数学分布的理论和应用及对数学学科的发展有重大的意义。

黎曼改进了质数计数函数，黎曼得到的质数计数函数叫做$J(x)(x \in Z^{+})$。$\mathrm{J}(x)(x \in$ Z+和 $\pi x \approx x \ln x x \in$Z+的关系如下:

$\pi(x)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathrm{n})}{\mathrm{n}} J\left(x^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\right)=J(x)-\frac{1}{2} J\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{3} J\left(x^{\frac{1}{3}}\right)-\frac{1}{5} J\left(x^{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{6} J(x^{\frac{1}{6}})-\ldots$

$(x \in R^{+}, n \in Z^{+})$，且

$\frac{1}{\mathrm{s}}\ln\zeta(\mathrm{s})=\int_{0}^{\infty} \mathrm{J}(x) x^{-\mathrm{s}-1} \mathrm{d}x$,

$\mu(n)$叫做莫比乌斯函数。莫比乌斯函数$\mu(n)$的取值只有三种，就是 0 和正负 1,如果n可以被任何质数的平方整除，也就是说在n的质因数分解中除 1 以外有一个或多个质因数的指数的次方出现了二次或更高次方，那么$\mu(n)=$

0。如果n不可以被任何质数的平方整除，也就是说 n 的质因数分解中除 1 以外任何质因数的指数的次方都是一次，那么我们来数质因数的个数。如果质因数的个数是偶数个，那么$\mu(n)$= 1。而假如质因数的个数是奇数个，那么μ(n)=-1。这里还包括了 n=1 的情况，因为 1 没有除了 1 以外的质因数，那么 1 的除 1 以外的质因数的个数就是 0，0 算作偶数，所以$\mu(1)$=1。 在上面的展开式中，随着 n$(n\in Z^{+})$的增加，$\frac{1}{n}$就变得越来越小，$x^{\frac{1}{n}}(n\in Z^{+})$也变得越来越小，相应的第 n$(n\in R^{+}\text{and } n\to+\infty)$项也就变得越来越小。表明对于$\pi(x)$的值来说，贡献最大的就是第一项$J(x)$。下面再来看黎曼得到的下面这个公式:

$J(x)=\mathrm{Li}(x)$-$\sum_{\rho}\mathrm{Li}(x^{\rho})$ $+\int_{x}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2}(t^{2}-1)lnt}-ln2\,(x\in R^{+})$,

其中 Li(x)=$\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{lnt}}(x\in R^{+})$, $J(x)$又可以描述为

$J(x)$叫做阶梯函数，它在x等于零的地方等于零，即$J(0)$=0,然后随着x的值不断增大，每经过一个质数(比如 2,3,5，…)，$J(x)$的值就增加 1。每经过一个质数的平方(比 4，9，25)，，$J(x)$的值就增加$\frac{1}{2}$。每经过一个质数的 3 次 方(比如 8,9,25， …)，J(x)的值就增加$\frac{1}{3}$。每经过一个质数的 4 次 方$\left(\text{比如 } 16,81,256，625,\ldots\right)$，J$(x)$的值就增加$\frac{1}{4}$。以此类推，每经过一个质数的$x^{n}\left(n\in Z^{+}，n\to+\infty\right)$次方，J$(x)$的值就增加$\frac{1}{\mathrm{n}}(n\in Z^{+}\text{and } n\to+\infty)$。你可以把它理解为，每经过过一个$x^{n}\left(n\in R^{+}\ and\ n\to+\infty, n\text{是一个质数}\right)$,$J(x)$的值就被增加了$\frac{1}{\mathrm{n}}(n\in Z^{+}\text{and } n\to+\infty)$。显然，这个函数跟质数的分布密切相关。来看等式的右边，第一项叫作对数积分函数 $\mathrm{Li}(x)=\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{lnt}}(\mathrm{x}\in\mathrm{Z}^{+})$，在 x 充分大的时候，$\mathrm{Li}(x)\approx\frac{x}{\ln x}(x\in\mathrm{Z}^{+})$。所以$\pi(x)\approx\mathrm{Li}(x)\approx\frac{x}{\ln x}\left(x\in\mathrm{Z}^{+},\text{并且}x\text{充分大}\right)$。再看第二项$\mathrm{Li}(x^{\rho})\left(x\in Z^{+},\text{并且 }\rho\in C\right)$，$\rho$ 是除负偶数之外的复数，ρ被黎曼称为黎曼$\zeta(\mathrm{s})(n\in R^{+}\ and\ s\neq 1\ and\ s\neq-2n)$函数

的非平凡零点。ρ 被记作：$\rho=\sigma+it\left(\sigma\in R，t\in \mathrm{R}\right)$，在实数轴上，除了负偶数，黎曼 $\zeta(\mathrm{s})\left(s\in C,且\ s\neq 1\ 且\ s\neq -2n,n\in R^{+}\right)$ 函数就再也没有零点了，所以 $\rho\left(\rho\in C,n\in R^{+}且\ \rho\neq 1\ 且\ \rho\neq -2n\right)$ 肯定不是实数，那么 $x^{\rho}(\rho\in C,x\in R^{+},and\ \rho\neq 1\ and\ \rho\neq -2n,n\in R^{+})$ 也肯定不是实数，那么 $\mathrm{Li}\left(x^{\rho}\right)\left(x\in Z^{+}，\rho\in C,且\ \rho\neq 1\ 且\ \rho\neq -2n,n\in R^{+}\right)$ 如何计算？只要将 $\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{lnt}}(x\in \mathrm{R}^{+})$ 的定义域解析延拓到除以 1 以外的全体复数。黎曼证明了黎曼 $\zeta(\rho)\left(\rho\in \mathrm{C}\ 且\ s\neq 1\ 且\ \rho\neq -2n,n\in Z^{+}\right)$ 函数的非平凡零点ρ必定满足 0≤Re(ρ)≤1，人们把这复平面上这宽度为 1 的竖直条带内称为临界带，并把满足 Re(s)=$\frac{1}{2}\left(\mathrm{s}\in \mathrm{C}\ 且\ s\neq 1\ 且\ \mathrm{s}\neq -2n,\mathrm{n}\in Z^{+}\right)$ 的垂直于实数轴的直线叫做临界线，也就是临界带的中心线。黎曼猜测黎曼 $\zeta(\mathrm{s})\left(\mathrm{s}\in \mathrm{C}\ 且\ s\neq 1\ 且\ \mathrm{s}\neq -2n,n\in Z^{+}\right)$ 函数的非平凡零点都位于临界线上，这是一个非常令人惊讶的结论。假如黎曼 $\zeta(\mathrm{s})\left(\mathrm{s}\in R^{+}\ 且\ s\neq 1\ 且\ \mathrm{s}\neq -2n,n\in R^{+}\right)$ 函数的非平凡零点的实部是在 0 到 1 之间随机取值的，那么它刚好取到$\frac{1}{2}$的概率应该等于 0,而黎曼却认为这个概率是 100%。如果黎曼猜想严格成立，那么素数的出现或素数的分布就一点都不随机，而是以确定的方式出现的，在这背后必定有有深刻的原因。质数定理的证明是研究黎曼猜想的过程中的中间产物。1896 年，阿达玛和德拉瓦布桑，证明了黎曼 $\zeta(\rho)\left(\rho\in \mathrm{C}\ 且\ \rho\neq 1\ 且\ \rho\neq -2n\right)$ 函数的非平凡零点ρ在满足 Re(ρ)=0 和 Re(ρ)=1 时无零点，从而轻松地证明了素数定理 $\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}(x\in \mathrm{Z}^{+})$。素数定理 $\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}(x\in$ Z+成立，表明对于质数计数函数 πx 来说，它的值最大部分来自于对数积分函数 $\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{lnt}}(x\in \mathrm{Z}^{+})$，而它的值次要部分来自于 $\mathrm{Li}\left(x^{\rho}\right)\left(x\in Z^{+}，\rho\in \mathrm{C}\ 且\ s\neq 1\ 且\ \rho\neq -2n,\mathrm{n}\in Z+\right.$ ，由于 $x\ln x x\in$ Z+的计算很简单，所以但对于质数计数函数 πx 的精确计算来说，黎曼 $\zeta(\rho)\left(\rho\in \mathrm{C}\ 且\ s\neq 1\ 且\ \rho\neq -2n,\mathrm{n}\in Z^{+}\right)$ 函数的非平凡零点ρ的计算就至关重要，黎曼猜想的严格证明就至关重要。1921 年英国数学家哈代证明了黎曼 $\zeta(\mathrm{s})(\mathrm{s}\in \mathrm{C}\ and\ s\neq 1\ and\ \mathrm{s}\neq -2n,n\in Z^{+})$ 函数有无穷多个非平凡零点位于临界线上。但这个结论实际上跟黎

曼猜想是完全两码事，因为有无穷多个非平凡零点位于临界线上，并不代表所有零点都位于临界线上。就像一条线段上有无穷多个点，但一条直线有无穷多条线段一样，哈代证明的结果跟所有非平凡零点的数目比起来，所占的百分比几乎是零。而数学家们将这个百分比推进到明显大于零的数还是到了 1942 年。那一年，挪威数学家塞尔伯格证明出百分比大于零，但没有给出具体数值是多少。1974 年美国数学家列森证明了至少有 34%的非平凡零点位于临界线上。1980 年中国数学家楼世拓和姚琦证明有 35%的非平凡零点位于临界线上。1989 年美国数学家康瑞证明有 40%的非平凡零点位于临界线上。黎曼 ζ(s) $\left(s \in R^{+} 且 s \neq 1 且 s \neq -2n, n \in Z^{+}\right)$函数的非平凡零点的计算比较复杂，格兰姆算出了黎曼 ζ(s)函数的前 15 个非平凡零点，如下图所示(列出了其中的十个)：

零点序号	格拉姆的零点数值	现代数值
1	1/2+14.134 725i	1/2+14.134 725 1i
2	1/2+21.022 040i	1/2+21.022 039 6i
3	1/2+25.010 856i	1/2+25.010 857 5i
4	1/2+30.424 878i	1/2+30.424 876 1i
5	1/2+32.935 057i	1/2+32.935 061 5i
6	1/2+37.586 176i	1/2+37.586 178 1i
7	1/2+40.918 720i	1/2+40.918 719 0i
8	1/2+43.327 073i	1/2+43.327 073 2i
9	1/2+48.005 150i	1/2+48.005 150 8i
10	1/2+49.773 832i	1/2+49.773 832 4i

过了 25 年，又有 138 个非平凡零点被计算出。打那以后，黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点的计算就陷入了停滞，因为当时的计算方法十分笨拙，也没有计算机做辅助。在计算被停顿了 7 年后，僵局被打破了，德国的数学家西格尔在黎曼的手稿里发现了黎曼那遥遥领先那个时代 70 年的的高明算法，让非平凡零点的计算一下子柳暗花明。为了表彰西格尔，这个算法公

式也被称为黎曼-西格尔公式，西格尔本人也因此获得了菲尔兹奖。数学家的手稿比古董要值钱得多。自那以后，黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点的计算要快得多了。哈代的学生将黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点的计算推进到了 1041 个，人工智能之父图灵将黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点的计算推进到了 11041 个，后来随着计算机的应用，对黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点的计算从 350 万个推进到 3 亿个，15 亿个，8500 亿个，乃至目前的十万亿个，这些非平凡零点都位于黎曼所说的临界线上。但十万亿零点位于临界线上相对于无限个零点都位于临界线上这一个猜测来说根本不算什么，无论计算出的位于临界线上的零点数目有多大，都还不足以证明黎曼猜想就是正确。黎曼猜想的正确性需要严格的理论证明。人们依据十万亿零点位于临界线上猜测黎曼 ζ(s) $\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in R^{+}\right)$函数的非平凡零点对于实数轴是对称的，但猜测终归是猜测，需要对这个猜测进行严格的证明，否则这样的猜测没有意义。在后面我的这篇论文中对这个猜测进行了严格的证明，并对黎曼猜想作了严格的证明，黎曼猜想确实成立。

素数定理$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}(x\in Z^{+})$已由阿达马（Hadamard）与德·拉·瓦·布桑（dela Valee Poussin）于 1896 年独立地证明了。但人们期望有一个具有精密误差项的素数定理。在 RH 之下，可以证明$\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O(\sqrt{x}\ln x)$。反之，由这个公式也可以推出 RH。所以，这个公式可以看作 RH 的算术等价形式。由此足见 RH 的极端重要性了。黎曼的文章中还包括了几个未经严格证明的命题。除了 RH 之外，都被阿达马与曼戈尔特（Mangoldt）证明了，只剩下现在所谓的 RH。命 N（T）表示 ζ(s)在矩形 0≤σ≤1，0＜t＜T 中的零点个数，黎曼作了猜想：

N（T）$\sim\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$,这个结果已由曼戈尔特证明。命 N（T）

表示在线段 $\sigma=\frac{1}{2}$，0＜t＜T 上，ζ(x)的零点个数，塞尔伯格（Selberg）证明了，存在正常数 c 与 T,则

$$N_0(T) > c\,N(T)$$

这个结果是非常惊人的。它说明了ζ(s)在线段 $\sigma=\frac{1}{2}$,0 < t < T 上的零点个数与它在矩形 0≤σ≤1，0 < t < T 上的零点个数相比，占有一个正密度，而线段的二维测度为零。黎曼ζ函数 ζ(s）与 RH 都是“原型”，有不少ζ(s)与 RH 的类似及推广。这些类似及推广都有强烈的数学背景,有许多 RH 的某种推广，它们的数学背景都是极其重要的。比如有限域 F 上的平面代数曲线对应的 RH，即每一条满足一定条件的代数曲线都对应于一个 L 函数，它们的零点都位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$上。这一命题已由韦伊（Weil）证明，而且韦伊对于高维代数簇的 RH 也作了猜想。这个猜想已由德利涅（Deligne）证明。这些无疑都是 20 世纪最伟大的数学成就之一。据我所知韦伊与德利涅的结果对解析数论就有极大的推动。例如，由韦伊证明的 RH 可以推出模素数 p 的克卢斯特曼（Kloosterman）和与完整三角和的最佳阶估计。

下面来介绍黎曼ζ(s)函数等式, 对于欧拉ζ(s)函数等式

$\zeta(s)=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$(s∈ R 且 $s\neq1$)和

$\zeta(s)=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ ($s\in C$ ，$Re(s)>1$ 且 $s\neq1$）演变为黎曼ζ(s)函数等式 $\zeta(s)=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$($s\in C$ 且 $s\neq1$)，所以要利用欧拉公式

$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$($x\in$R)和$e^{iZ}=\cos(Z)+i\sin(Z)$(Z∈C)，并将复数的三角函数表达式中的乘方运算中的指数从正整数推广到指数为一般实数,从而将欧拉级数 $\zeta(s)=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$(s∈ R 且 $s\neq1$)和$\zeta(s)=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$($s\in C$ ，$Re(s)>1$ 且 $s\neq1$)的定义域解析延拓到整个复数平面，这样，除了 s=1 以外，它处处解析，这样得到的ζ函数就和黎曼的ζ函数等价。

黎曼猜想等价于$\zeta(s)=\zeta(\overline{s})=0$($s\in C$ 且 $s\neq1$)和$\zeta(1-s)=\zeta(s)=0$(s∈ C 且$s\neq1$)都成立。

$\zeta(1-s)=\zeta(s)=0$ 可以由 $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$(s∈ C 且 $s\neq1$)得到，$\zeta(s)=\zeta(\overline{s})=0$ 可以当 ζ(s) =0, 由 $\zeta(s)=\overline{\zeta(\overline{s})}$ 得到，为了得到 $\zeta(s)=\overline{\zeta(\overline{s})}$ ，必须利用欧拉公式

$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)(x\in R)$和$e^{iZ}=\cos(Z)+i\sin(Z)(Z\in C)$，并将复数的三角函数表达式中的乘方运算中的指数从正整数推广到指数为一般实数后，进行严格的证明。如果想解决黎曼猜想，它的证明就必须遵循这样的原则和方法，否则可能就不正确。

下面我们来看看$\sum\frac{1}{n^s}=\prod(\frac{1}{1-p^{-s}})$是怎么得到的。这是欧拉的一个公式，公式中 n 为自然数，p 为质数，s 为大于的正整数。欧拉早已将之证明，下面我将重复这个证明。

欧拉刚提出这个公式的时候，显然这个公式的两边都是级数，欧拉发现有这么一个级数：

$$\sum\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\ldots$$ 记为 (1 式)

上面等式两边同乘$\frac{1}{2^s}$，左边多了一乘积项$\frac{1}{2^s}$，右边作幂运算，得：

$$\frac{1}{2^s}\sum\frac{1}{n^s}=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{12^s}+\ldots$$ (2 式)

将(1 式)和(2 式)这两个等式左右两边相减，得：

$$(1-\frac{1}{2^s})\sum\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{15^s}+\ldots$$ (3 式)

可以观察到，相对于(1 式)，(3 式)左边的乘积项增加了 $1-\frac{1}{2^s}$，(3 式)右边为(1 式)右边去除了所有分母为偶数项后留下的各项。

将(3 式)左右两边同乘以$\frac{1}{3^s}$得:

$$\frac{1}{3^s}(1-\frac{1}{2^s})\sum\frac{1}{n^s}=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\frac{1}{27^s}+\frac{1}{33^s}+\frac{1}{39^s}+\frac{1}{45^s}\ldots$$ (4 式)

将(3 式)和(4 式)这两个等式左右两边相减，得：

$$(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{2^s})\sum\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{29^s}+\frac{1}{31^s}+\ldots$$ (5 式)

同理，将(5 式)左右两边同乘$\frac{1}{5^s}$得:

$$(\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{2^s})\sum\frac{1}{n^s}=\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{35^s}+\frac{1}{55^s}+\frac{1}{65^s}+\frac{1}{85^s}+\frac{1}{95^s}+\frac{1}{115^s}+\frac{1}{145^s}+\ldots$$ (6 式)

将(5 式)和(6 式)这两个等式左右两边相减，得：

$$(1-\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{2^s})\sum\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\frac{1}{29^s}+\frac{1}{31^s}+\frac{1}{37^s}+\ldots$$ (7 式)

参照如此方法继续下去，在(2k-1 式)左右两边同乘$\frac{1}{{p_{(i)}}^s}$（i 为正整数），$p_{(i)}$为(2k-1 式)左边第一项中$(1-\frac{1}{{p_{(i-1)}}^s})$的素数$p_{(i-1)}$的上一个素数，这里的“上一个素数”指的是在数值大小上最接近$p_{(i-1)}$的，两者之间没有别的素数的素数，且$p_{(i)}>p_{(i-1)}$。(2k-1 式)左边乘积项就增加一项$\frac{1}{{p_{(i)}}^s}$,(2k-1 式)右边就变为：第 1 项为$\frac{1}{{p_{(i)}}^s}\frac{1}{{p_{(i)}}^s}$，第 2 项为$\frac{1}{{p_{(i)}}^s}*\frac{1}{{p_{(i+1)}}^s}$，第 3 项为 $\frac{1}{{p_{(i)}}^s}*\frac{1}{{p_{(i+2)}}^s}$，第 4 项为$\frac{1}{{p_{(i)}}^s}*\frac{1}{{p_{(i+3)}}^s}$，第 5 项为$\frac{1}{{p_{(i)}}^s}*\frac{1}{{p_{(i+4)}}^s}$，… ，$\frac{1}{{p_{(i)}}^s}*\frac{1}{{p_{(i+k)}}^s}$，…，k. 为正整数。如此下去，并把所有这些项都加起来，其中$p_{(1)}$、$p_{(2)}$、$p_{(3)}$，…，$p_{(i)}$，$p_{(i+1)}$，$p_{(i+2)}$，$p_{(i+3)}$、$p_{(i+4)}$、…，$p_{(i+k)}$，…，是由所有质数按照数值大小从小到大的顺序排列起来的无穷数列，且$p_{(3)}=5$，$p_{(2)}=3$，$p_{(1)}$=2 ,这样就得到(2k-1 式)右边的表达式，把这整个等式记为(2k-1 式)后的(2k 式)。

参照如此方法并往复做下去，最终将得到这么一个等式：

它的左边$\sum\frac{1}{n^s}$的系数是一些形如$(1-\frac{1}{p^s})$的连乘积，n 为自然数，p 遍取所有质数，为了书写方便，引入连乘符号Π，将左边记为:

$$\prod(1-\frac{1}{p^s})\sum\frac{1}{n^s}$$

右边为 1 加上一个分数$\frac{1}{{p_{(i)}}^s*{p_{(i+k)}}^s}$，${p_{(i)}}^s$与${p_{(i+k)}}^s$是两个无穷的大素数，所以$\frac{1}{{p_{(i)}}^s*{p_{(i+k)}}^s}$的值为零，该分数可以略去。所以，右边只剩下 1。那么，$\sum\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\prod(1-\frac{1}{p^s})}=\prod\frac{1}{(1-\frac{1}{p^s})}=\prod\frac{1}{1-p^{-s}}$，即：$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$($s\in Z^+$ 并且 $s\neq1$, $n\in Z^+$，n 便取所有正整数, $p\in Z^+$，p 便取所质数)。这个乘积公式是由瑞士数学家欧拉于 1737 年在《无穷级数的若干观察》一文中提出并证明的，欧拉乘积公式将自然数的求和表达式与素数的连续乘积表达式联系起来，包含了关于素数分布的重要信息。这一信息在 122 年之后终于被黎曼破译，这导致了黎曼著名的论文“关于小于给定值的质数的个数”的发表。为了纪念黎曼，欧拉乘积公式的左端以黎曼命名，并采用黎曼使用的符号ζ(s)(s∈C, 并且 s≠1）,称为黎曼ζ函数。前面我介绍了黎曼用积分的形式对欧拉复变函数ζ(s)进行了解析延拓，将欧拉定义的正整数 s 解析延拓到复数，定义变量 s 为复数，得到了黎曼ζ(s)函数。下面我应用欧拉公式$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$($x\in$R)

和e^{iZ}=cos(Z)+isin(Z)(Z∈C)及指数为实数的幅角原理，得到了一个适当的函数，同样对欧拉复变函数ζ(s)进行了解析延拓 将 Re(s)(s≠ 1)推广到全体实数条件下ζ(s)函数处处解析且都能收敛，得到了 s 为除了 1 以外的全体复数下的解析函数，即黎曼复变ζ(s)(s≠ 1)函数。

我在解决黎曼猜想的过程中，必须用到欧拉公式$e^{ix} = \cos(x)$+isin(x)(x为实数，表示角的弧度数)或$e^{iZ} = \cos(Z)$+isin(Z)(Z 为复数)。这个公式欧拉已经将之证明了，可直接使用。下面我用自己的方法再来证明一遍：

设有函数$f_1(x)$=e^x， 我们对$f_1(x)$=e^x(x ∈R)求导数，"'"号表示求导，那么$(e^x)'$=e^x，e^x的导数就是它自身。那么如果我们令函数$f_1(x)$=e^x的自变量为 cx (c 为常数) 将得到函数$f_1(cx)$=e^{cx}，对$f_1(cx)$=e^{cx}求导数，那么$[f_1(x)]$'=$(e^{cx})'$= ce^{cx}，如果令函数$f_1(cx)$=e^{cx}中的 c=i(i 也为常数)，那么$f_1(ix)$= e^{ix}，那么$[f_1(ix)]'$=$[e^{ix}]'$= ie^{ix}。又假设$f_2(x)$=cos(x)+isin(x)=S，则 S 是一个复数。现在对函数$f_2(x)$求导，有$[f_2(x)]'$=[cos(x)+isin(x)]'=[cos(x)]'+[isin(x)]'=-sin$x$+icos$x$ (1 式)，如果$f_1(ix)$= e^{ix}=Cos$x$+iSin$x$成立，那么根据上面得到的$[f_1(x)]'$=$[e^{ix}]'$=ie^{ix}，假设e^{ix}=Cos(x)+iSin(x)成立，把e^{ix}=Cos$x$+iSin$x$代入等式$[f_1(ix)]'$=$[e^{ix}]'$= ie^{ix}的右边得$[f_1(ix)]'$=$[e^{ix}]'$=ie^{ix}=i(cos$x$+isinx)= -sin(x)+icos(x) (2 式)，对比(1 式)和(2 式)，可以发现$f_1(ix)$与$f_2(x)$的导数相等，又由于$f_1(ix)$与$f_2(x)$均没有常数项，那么$f_1(ix)$与$f_2(x)$的表达式应该一致。我们发现 f(ix)=e^{ix} =Cos$x$+iSinx=$f_2(x)$，$f_1(ix)$与$f_2(x)$的表达式确实是一致，说明假设 e^{ix}=cos(x)+isin(x)是成立的，也就是说欧拉的公式$e^{ix} = \cos(x)$+isin(x)是对的。要证明e^{ix} =cos$x$+isin$x$(x ∈R)，更好的方法是下面一个方法，不过比较复杂。

大家都可能曾经碰到过这么一个等式：$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$+...($x$ ∈R)，它是如何来的?首先观察函数 y=e^x，如果对这个函数求导数，将得到 y'=$(e^x)'$=e^x，也就是说 y=e^x的导数是它本身，这是个非常特殊的指数函数，令 y'=$\frac{dy}{dx}$，当$\frac{dy}{dx} = 0$时，y=$e^x = 1$，当$\frac{dy}{dx} = 1$时，y=$e^x = 1 + x$，当$\frac{dy}{dx} = 1 + x$时，y=$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$，当$\frac{dy}{dx} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$时，y=$e^x = 1 + x$

$+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$，当$\frac{dy}{dx}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$时，y=$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$，当$\frac{dy}{dx}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$时，y=$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5$，依此类推，这就初步证明了 y=$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\ldots$，但是，一般地 y=$x^n$的级数是怎么样的？

y=e^x的级数又是怎样的？当把 x 当作 e，n 当作 x 时，就得到 $y=e^x$，这就需要引入幂级数的概念。

设有幂级数：$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots(x\in R)$，各项都是形如$x^n$的幂，令函数 $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots(x\in R)$，等于各项的和，如果用一些数字作为各项的系数，假如这些数字是a_0，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6…，a_{i-1}，a_i，它们分别是函数 $f(x)=x^n$的 0 阶导数$f^{(0)}(x)$，$f(x)=x^n$的 1 阶导数$f^{(1)}(x)=nx^{n-1}$，$f(x)=x^n$的 2 阶导数$f^{(2)}(x)=n(n-1)x^{n-2}$，$f(x)=x^n$的 3 阶导数$f^{(3)}(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$，…，$f(x)=x^n$ 的 n 阶导数$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2*1*x^0$在$x=0$ 时的值，分别记作$a_0=f^{(0)}(0)$，$a_1=f^{(1)}(0)$，$a_2=f^{(2)}(0)$，$a_3=f^{(3)}(0)$，…，$a_{i-1}=f^{(n-1)}(0)$，$a_i=f^{(n)}(0)$。假如把 $f(x)=x^n$作 n 次求导，将会得到：$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2*1*x^0$，那么$f^{(n)}(0)=n!$，对于特定的函数 $f=e^x$来说，所有这些各阶导数在$x=0$ 时的值$f^{(0)}(0)$，$f^{(1)}(0)$，$f^{(2)}(0)$，$f^{(3)}(0)$，…，$f^{(n-1)}(0)$，$f^{(n)}(0)$，…，都必须为 1，因为e^x的任何阶次的导数都是它本身。但x^n的各阶导数在 $x=0$ 时的值$f^{(n)}(0)=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2*1*0^0=n!$，因此这些$a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$，…，$a_{i-1}$，$a_i$必须用 1 除以 n!，才能让$f^{(0)}(0)=1$，$f^{(1)}(0)=1$，$f^{(2)}(0)=1$，$f^{(3)}(0)=1$，…，$f^{(n-1)}(0)=1$，$f^{(n)}(0)=1$，才能满足正确地写出函数 $f(x)=e^x$的级数表达式的各项的系数：a_0，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，…，a_{i-1}，a_i，…，即：$a_0=\frac{1}{0!}=1$，$a_1=\frac{1}{1!}$，$a_2=\frac{1}{2!}$，$a_3=\frac{1}{3!}$，$a_4=\frac{1}{4!}$，$a_5=\frac{1}{5!}$，…，$a_n=\frac{1}{n!}$，…，对于特定的函数 $f=e^x$来说，所有这些各阶导数在$x=0$ 时的值$f^{(0)}(0)$，$f^{(1)}(0)$，$f^{(2)}(0)$，$f^{(3)}(0)$，…，$f^{(n-1)}(0)$都必须为 1，因为e^x的任何阶次的导数都是它本身，但x^n的各阶导数在$x=0$ 时的值$f^{(n)}(0)=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2*1**0^0=n!$，因此这些 a_0，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，…，a_{i-1}，a_i等于用 1 除以 n!，才能让$f^{(0)}(0)=1$，$f^{(1)}(0)=1$，

$f^{(2)}(0)$=1，$f^{(3)}(0)$=1，…，$f^{(n-1)}(0)$=1，$f^{(n)}(0)$=1，才能满足正确地写出函数 $f(x)=e^{x}$的级数表达式的各项的系数a_0，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5， …，a_{i-1}，a_i，即：$a_0=\frac{1}{0!}$=1 ，$a_1=\frac{1}{1!}$，$a_2=\frac{1}{2!}$，$a_3=\frac{1}{3!}$，$a_4=\frac{1}{4!}$ ，$a_5=\frac{1}{5!}$ ，…，$a_n=\frac{1}{n!}$，…，对于特定的函数 $f(x)=e^{x}$来说，这里的方法是通过x的各次幂x^0、x^1、x^2、x^3、 ….、x匹配乘上x^n的各阶导数函数在自变量x=0 处的值 n!的倒数，n 为函数 $y=e^{x}$的各阶次导数函数的阶次数，也是x的 n 次幂。所以对于特定的函数 $f(x)=e^{x}$来说，$a_0=\frac{1}{0!}$=1 ，$a_1=\frac{1}{1!}=1$，$a_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$，$a_4=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$，$a_5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$，…，所以可以再次写出函数 $f(x)=e^{x}$的级数：$e^{x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$。

下面令 $f(x)=\cos(x)$，来求 $\cos(x)$的幂级数。函数 $f(x)=\cos(x)$的 0 阶导数是$f^{(0)}(x)=\cos(x)$(函数的 0 阶导数是它自己本身)，$f(x)=\cos(x)$的 1 阶导数是 $f^{(1)}(x)=-\sin(x)$，$f(x)=\cos(x)$的 2 阶导数是 $f^{(2)}(x)=-\cos(x)$，$f(x)=\cos(x)$的 3 阶导数是 $f^{(3)}(x)=\sin(x)$，$f(x)=\cos(x)$的 4 阶导数是 $f^{(4)}(x)=\cos(x)$，…，$f(x)=\cos(x)$ 的 n 阶导数是: $f^{(n)}(x)$=…，如果代入x=0，将得各阶次导数函数在x=0 处的值。因为级数是函数的各阶次导数函数在自变量x=0 处的值除以 n!，并乘上x^n展开得到的。因此将x=0 代入各阶次导数函数的自变量x求解，就很容易得到：$f^{(0)}(0)=\cos(0)$=1，$f^{(1)}(0)=-\sin(0)$=0，$f^{(2)}(0)=-\cos(0)$=-1，$f^{(3)}(0)=\sin(0)$=0，$f^{(4)}(0)=\cos(0)=1$，$f(5)(0)=-\sin 0=0$，$f60=-\cos 0=-1$，$f(7)(0)=\sin(0)$=0，…，按照 1，0，-1，0，1，0，-1，0，…，的形式，以 1,0,-1,0 为循环节无限循环下去。函数 $f=\cos(x)$的各阶次导数函数在它的自变量为x=0 处的函数值可用来构建 $\cos(x)$的幂级数需要的系数，它们是构建 $\cos(x)$的幂级数需要匹配的函数 $f(x)=\cos(x)$的各阶次导数函数在它的自变量为x =0 处的函数值，它们除以 n 的阶乘，就是x的各次幂的系数，n 为函数 $f(x)=\cos(x)$的各阶次

导数函数的阶次数，也是x的 n 次幂。现在可以参照上面构建e^x的幂级数的方式来构建 $\cos(x)$的幂级数了。$\cos(x)$展开的幂级数是：它从$\frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0=\frac{\cos(0)}{0!}x^0=\frac{1}{0!}*1$=1开始，作为第 0 项 ，即常数项。

接着是$\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1=\frac{-\sin(0)}{1!}x^1=\frac{0}{1!}*x$=0 ，作为第 1 项，结果是 0 ，等于是没有第 1 项，也等于是没有x的 1 次方项。

接着是：$\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2=\frac{-\cos(0)}{2!}x^2=\frac{-1}{2!}*x^2$=-$\frac{1}{2}x^2$ ，作为第 2 项。

接着是：$\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3=\frac{\sin(0)}{3!}x^3=\frac{0}{3!}*x^3$=0，作为第 3 项，结果是 0 ，等于是没有第 3 项，也等于是没有x的 3 次方项。

再接着是：$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4=\frac{\cos(0)}{4!}x^4=\frac{1}{4!}x^4$，作为第 4 项。

…，如此往复做下去，将会发现，对于 f(x)= $\cos(x)$的 n 阶导数$f^{(n)}(x)$，若 n 为非负整数，从 0 开始，如果 n 是偶数，则$f^{(n)}$(0)的值不是+1 就是-1，按照 1，-1，1，-1，1，-1，1，-1，…，的规律排列，所以对于 cos(x)的幂级数展开式来说其x的偶次方项前面的系数的值的符号是按+，-，+，-，+，-，+，-，…规律排列的，其系数的值$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$=$\frac{1}{n!}$或$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$=$-\frac{1}{n!}$，若 n 是奇数，则其系数的值$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0$，所以对于 cos(x)的幂级数的展开式来说没x 的奇次方项。

所以函数 f(x)=cos(x)的幂级数是：cos(x)= $\frac{1}{0!}x^0$ -$\frac{1}{2!}x^2$+ $\frac{1}{4!}x^4$ - $\frac{1}{6!}x^6$+ $\frac{1}{8!}x^8$- $\frac{1}{10!}x^{10}$ +…= 1 -$\frac{1}{2!}x^2$+$\frac{1}{4!}x^4$ -$\frac{1}{6!}x^6$+$\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}$…。

下面令 f(x)=sin(x)，来求 sin(x)的幂级数。函数 f(x)=sin(x)的 0 阶导数是$f^{(0)}(x)$=sin(x)(函数的 0 阶导数是它自己本身)，f(x)的 1 阶导数是$f^{(1)}(x)$=cos(x)，f(x)的 2 阶导数是$f^{(2)}(x)$= - sin(x)，f(x) 的 3 阶导数是 $f^{(3)}(x)$=- cos(x)，f(x) 的 4 阶导数是$f^{(4)}(x)$=sin(x)，…，f(x)的 n 阶导数是$f^{(n)}(x)$=…，如果代入x =0，将得到各阶导数函数在x=0处的值。因为级数是各阶导数函数在自变量x=0 处的值除以 n!并乘上x^n展开得到的。因此x=0处，代入各阶导数函数求解，就容易得到：$f^{(0)}$(0)=sin(0)=0，$f^{(1)}$(0)=cos(0)=1，$f^{(2)}$(0)=- sin(0) =0 ，$f^{(3)}$ (0)= $-\cos(0)$ =- 1 ，$f^{(4)}$ (0)= $\sin(0)=0$，$f^{(5)}$ (0)= $\cos(0)=1$，$f^{(6)}(0)=-\sin(0)=0$，$f^{(7)}$(0)=cos(0) = -1，…，按照 0，1，0，-1，0，1，0，-1，…，的形式，以 0，1，0，-1 为循环节无限循环下去。这些就是构建 sin(x)的幂级数需要匹配的导数值，现在可

以参照上面构建e^x的幂级数的方式来构建 sin(x)的幂级数了，各阶导数函数在x=0 处的值除以 n!就是x的各次幂的系数。函数 f=sin(x)的各阶次导数函数在它的自变量x=0 处的函数值可用来构建 sin(x)的幂级数需要的系数，它们是构建 sin(x)的幂级数需要匹配的函数 f=sin(x)的各阶次导数函数在它的自变量x=0 处的函数值，它们除以 n 的阶乘，就是x的各次幂的系数，n 为函数 f(x)=sin(x)的各阶次导数函数的阶次数，也是x的 n 次幂。现在可以参照上面构建e^x的幂级数的方式来构建 sin(x)的幂级数了。

所以 sin(x)展开的幂级数是：它从$\frac{f^{(0)}(0)}{0\,!}x^0=\frac{\sin(0)}{0\,!}x^0=\frac{0}{0\,!}*1$=0开始，作为第 0 项，即常数项，由于是 0，等于是没有常数项。

接着是$\frac{f^{(1)}(0)}{1\,!}x^1=\frac{\cos(0)}{1\,!}x^1=\frac{1}{0\,!}*x=x$ ，作为第 1 项，结果是x。

又接着是：$\frac{f^{(2)}(0)}{2\,!}x^2=\frac{-\sin(0)}{2\,!}x^2=\frac{0}{2!}*x^2$=0 ，作为第 2 项，由于是 0，等于是没有第 2 项。

接着是：$\frac{f^{(3)}(0)}{3\,!}x^3=\frac{-\cos(0)}{3\,!}x^3=\frac{-1}{3!}*x^3$= - $\frac{1}{3!}x^3$，作为第 3 项。

再接着是：$\frac{f^{(4)}(0)}{4n\,!}x^4=\frac{\sin\,(0)}{4\,!}x^4=0$ 作为第 4 项，由于是 0，等于是没有第 4 项。…，如此往复做下去，将会发现对于 f (x) =sin(x)的 n 阶导数$f^{(n)}(x)$，n 为非负正数，从 0 开始，若 n 是偶数，则$f^{(n)}$(0)的值均为 0，所以对于 cos(x)的幂级数来说没有常数项和 x 的偶次方项。若 n 是奇数，则$f^{(n)}$(0)的值不是+1 就是-1，按照 1，-1，1，-1，1，-1，1，-1，… 的规律排列，其系数的值为$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$=$\frac{1}{n!}$或$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{1}{n!}$，所以对于 sin($x$)的幂级数来说其$x$的奇次方项前面的系数的值符号是按+，-，+，-，+，-，+，-，...规律排列的，所以函数 f(x)=sin(x)的幂级数展开式是 sin(x)=$\frac{1}{1\,!}x^1$-$\frac{1}{3\,!}x^3$+$\frac{1}{5!}x^5$-$\frac{1}{7!}x^7$+$\frac{1}{9!}x^9$ −...= x-$\frac{1}{3\,!}x^3$+$\frac{1}{5!}x^5$-$\frac{1}{7!}x^7$+$\frac{1}{9!}x^9$ −...前面得到 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3$+$\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5$+...+$\frac{1}{n!}x^n$=1+ x+$\frac{1}{2}x^2$+$\frac{1}{6}x^3$+$\frac{1}{24}x^4$+$\frac{1}{120}x^5$+...+$\frac{1}{n!}x^n$ + ...(x ∈R)，如果将x换为 ix，得到：e^{ix}=1+i x +$\frac{1}{2!}(ix)^2$+$\frac{1}{3!}(ix)^3$+$\frac{1}{4!}(ix)^4$+$\frac{1}{5}(ix)^5$+...+ $\frac{1}{n!}(ix)^n$=(1-$\frac{1}{2!}x^2$+$\frac{1}{4!}x^4$-$\frac{1}{6!}x^6$+$\frac{1}{8!}x^8$-$\frac{1}{10!}x^{10}$ +...)+i(x -$\frac{1}{3\,!}x^3$+$\frac{1}{5!}x^5$-$\frac{1}{7!}x^7$+$\frac{1}{9!}x^9$ −...) (x ∈R)，因为 cos(x)=1-$\frac{1}{2!}x^2$+$\frac{1}{4\,!}x^4$-$\frac{1}{6!}x^6$+$\frac{1}{8!}x^8$-$\frac{1}{10!}x^{10}$ +...，而 sin(x)= x -$\frac{1}{3\,!}x^3$+$\frac{1}{5!}x^5$-$\frac{1}{7!}x^7$+$\frac{1}{9!}x^9$ −...，所以e^{ix}=

$\cos(x)+i\sin(x)$ ($x\in R$)。这是另一个欧拉公式。

上式中如果令$x=\pi$，将得到：

$e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1+0=-1$,所以 $e^{i\pi}+1=0$。它也叫欧拉公式 ,把数学中最重要的一些东西 0，1，e，i，π全放到一个公式里去了，它是欧拉公式$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ ($x\in R$)的特例。当 Z∈C, 那么 $e^{iZ}=\cos(Z)+i\sin(Z)$(Z∈C)。

II .推理

下面开始我的对黎曼猜想的证明:

公式 1:

因为 $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\approx 2.7182818284\ldots$,e 是自然常数，我使用 "×" 来表示相乘，那么根据欧拉公式$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$($x\in R$)，可以得到$(e^{3i})^2=(\cos(3)+i\sin(3))^2=\cos(2\times 3)+i\sin(2\times 3)=\cos(6)+i\sin(6)$。一般地，如果将复数三角函数的乘方扩展到指数为实数的情形，那么$(e^{bi})^c=e^{b\times ci}$(b∈R，c∈R) 成立。当$x>0$($x\in R$),假设 $e^y=x$ (e=2.718281828459045…，e 是自然常数，$x\in R$ 并且$x>0$, y∈R),那么 $y=\ln(x)$($x>0$), 根据欧拉公式 $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ ($x\in R$)，可以得到 $e^{yi}=e^{\ln(x)i}=\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)$($x\in R$ 并且$x>0$)。

假设 t∈R 并且$t\neq 0$,我们可以求出x^{ti}($x\in R$ and $x>0$, t∈R and $t\neq 0$) 的表达式是 $x^{ti}=(e^y)^{ti}=(e^{yi})^t=(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))^t(x>0)$。

假设 s 是任意一个复数，并且假设 s=σ+ti(σ∈R,t∈R ,s∈C 且 $s\neq 1$),那么让我们来找出x^s($x\in R$ and $x>0$, s∈C)的表达式 ,你可以将 s=σ+ti(σ∈R,t∈R,s∈C) 和

$x^{ti}=(e^y)^{ti}=(e^{yi})^t=(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))^t(x>0)$ 代入 $x^s(x>0)$ 中，你将得到：$x^s=x^{(\sigma+ti)}=x^\sigma x^{ti}=x^\sigma(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))^t=x^\sigma(\cos(t\ln x)+i\sin(t\ln x))(x>0)$,

如果你将 s=σ-ti(σ∈R, t∈R) 和 $x^{ti}=(e^y)^{ti}=(e^{yi})^t=(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))^t(x>0)$ 代入x^s,

你将得到：

$x^{\bar{s}} = x^{(\sigma-\mathrm{ti})} = x^{\sigma}(x^{\mathrm{ti}})^{-1} = x^{\sigma}(\cos(\ln x) + \mathrm{i}\sin(\ln x))^{-\mathrm{t}} = x^{\sigma}(\cos(\mathrm{t}\ln x) - \mathrm{i}\sin(\mathrm{t}\ln x))(x > 0)$.

那么

$$\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{s}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{s}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\sigma+\mathrm{ti}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\frac{1}{\mathrm{n}^{\sigma}}\times\frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{ti}}}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{-\sigma})\frac{1}{(\cos(\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n})))^{\mathrm{t}}}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{-\sigma}(\cos(\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n})))^{-\mathrm{t}})$$

($\mathrm{s} \in \mathrm{C}$ 并且 $\mathrm{s} \neq 1$, $\mathrm{n} \in \mathrm{Z}^{+}$ ，并且 n 便取所有正整数), 或者

$\zeta(\mathrm{s}) = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(\frac{1}{1-\mathrm{p}^{-\mathrm{s}}}) = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(1 - \mathrm{p}^{-\mathrm{s}})^{-1} = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(1 - \mathrm{p}^{-\rho-\mathrm{ti}})^{-1} = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{\mathrm{p}^{\sigma+\mathrm{ti}}})^{-1} = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}[1 - (\mathrm{p}^{-\sigma})\frac{1}{(\cos(\ln\mathrm{p}) + \mathrm{i}\sin(\ln\mathrm{p}))^{\mathrm{t}}}]^{-1} = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}[1 - (\mathrm{p}^{-\sigma})(\cos(\mathrm{t}\ln\mathrm{p}) - \mathrm{i}\sin(\mathrm{t}\ln\mathrm{p}))\ ]^{-1}$

($\mathrm{s} \in \mathrm{C}$ 并且 $\mathrm{s} \neq 1$, $\mathrm{p} \in \mathrm{Z}^{+}$，并且 p 便取所有质数)，并且

$\zeta(\bar{\mathrm{s}}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\bar{\mathrm{s}}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\bar{\mathrm{s}}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\sigma-\mathrm{ti}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^{\sigma}}\times\frac{1}{\mathrm{n}^{-\mathrm{ti}}}\right) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{-\sigma})\frac{1}{\left(\cos(\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n}))\right)^{-\mathrm{t}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{-\sigma}(\cos\left(\ln(\mathrm{n})\right) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n})))^{\mathrm{t}}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{-\sigma}(\cos\left(\mathrm{t}\ln(\mathrm{n})\right) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{t}\ln(\mathrm{n}))))$ ($\mathrm{s} \in \mathrm{C}$ 并且 $\mathrm{s} \neq 1$, $\mathrm{n} \in \mathrm{Z}^{+}$ 且 n 便取所有正整数),或者

$\zeta(\bar{\mathrm{s}}) = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(\frac{1}{1-\mathrm{p}^{-\bar{\mathrm{s}}}}) = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(1 - \mathrm{p}^{-\bar{\mathrm{s}}})^{-1} = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(1 - \mathrm{p}^{-\sigma+\mathrm{ti}})^{-1} = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{\mathrm{p}^{\sigma-\mathrm{ti}}})^{-1} =$

$$\prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}[1 - (\mathrm{p}^{-\sigma})\frac{1}{(\cos(\ln\mathrm{p}) - \mathrm{i}\sin(\ln\mathrm{p}))^{\mathrm{t}}}]^{-1} = \prod_{\mathrm{p}=1}^{\infty}[1 - (\mathrm{p}^{-\sigma})(\cos(\mathrm{t}\ln\mathrm{p}) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{t}\ln\mathrm{p}))\ ]^{-1}$$

($\mathrm{s} \in \mathrm{C}$ 并且 $\mathrm{s} \neq 1$, $\mathrm{p} \in \mathrm{Z}^{+}$ ，并且p便取所有质数). 并且

$\zeta(1-\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{1-\mathrm{s}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{1-\sigma-\mathrm{ti}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{\sigma-1})\frac{1}{(\cos(\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n})))^{-\mathrm{t}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{\sigma-1})(\cos(\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n})))^{\mathrm{t}}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}^{\sigma-1})(\cos(\mathrm{t}\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{t}\ln(\mathrm{n})))$

($\mathrm{s} \in \mathrm{C}$ 并且$\mathrm{s} \neq 1$, $\mathrm{n} \in \mathrm{Z}^{+}$ ，并且 n 便取所有正整数),

或者如果有任意实数 k($\mathrm{k} \in \mathrm{R}$),那么

$\zeta(\mathrm{k}-\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{k}-\mathrm{s}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{k}-\sigma-\mathrm{ti}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(\mathrm{n}^{\sigma-\mathrm{k}}\right)\frac{1}{(\cos(\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n})))^{-\mathrm{t}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(\mathrm{n}^{\sigma-\mathrm{k}}\right)(\cos(\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\ln(\mathrm{n})))^{\mathrm{t}}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(\mathrm{n}^{\sigma-\mathrm{k}}\right)(\cos(\mathrm{t}\ln(\mathrm{n})) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{t}\ln(\mathrm{n})))$

($s\in C$并且$s\neq 1$, k并且$\in R$, $n\in Z^{+}$ $n\in Z^{+}$ ，并且 n 便取所有正整数),并且

$\zeta(k-s)=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{(-k+s)}})=\prod_{p=1}^{\infty}(1-p^{s-k})^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}(1-p^{\sigma-k+ti})^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}[1-\left(p^{\sigma-k}\right)(\cos(tlnp)+isin(tlnp))]^{-1}$($s\in C$并且$s\neq 1$,$k\in R$, $p\in Z^{+}$ ，并且 p 便取所有质数).

因此

$X=n^{-\sigma}(\cos(tln(n))-isin(tln(n)))$,

$Y=n^{-\sigma}(\cos(tln(n))+isin(tln(n)))$,

$G=[1-(p^{-\sigma})(\cos(tlnp)-isin(tlnp))]^{-1}$,

$H=[1-(p^{-\sigma})(\cos(tlnp)+isin(tlnp))]^{-1}$,

也就是说，X 和 Y 是彼此的复共轭，即 $X=\overline{Y}$, 并且

G 和 H 是彼此的复共轭，也就是

$G=\overline{H}$,

因此 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\sum_{n=1}^{\infty}X=\prod_{p=1}^{\infty}G$ ($s\in C$ 并且 $s\neq 1$), 并且 $\zeta(\overline{s})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\sum_{n=1}^{\infty}Y=\prod_{p=1}^{\infty}H$ ($s\in C$ 并且 $s\neq 1$),

因此

$\zeta(s)=\overline{\zeta(\overline{s})}$($s\in C$ 并且 $s\neq 1$),并且仅当 $\sigma=\frac{1}{2}$ ，$\zeta(1-s)=\zeta(\overline{s})$ $\left(s\in C\text{ 并且 } s\neq 1\right)$,

仅当 $\sigma=\frac{k}{2}(k\in R)$, $\zeta(k-s)=\zeta(\overline{s})\left(s\in C\text{ 并且 } s\neq 1,k\in R\right)$, 那么， $\zeta(1-s)=\zeta(\overline{s})=\zeta(k-s)\left(s\in C\text{ 并且 } s\neq 1,k\in R\right)$, 因此仅 k=1($k\in R$)成立，并且当 $\zeta(s)=0$, 那么

$\zeta(1-s)=\zeta(k-s)=\zeta(\overline{s})=\zeta(s)=0\left(s\in C\text{ 并且 } s\neq 1,k\in R\right)$。

因为

$$GRH\left(s,\chi(n)\right)=L\left(s,\chi(n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{s}}=\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma+ti}}=\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\sigma}}\frac{1}{n^{ti}}\right)=$$

$\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\sigma})\frac{1}{(\cos(\ln((n))+isin(\ln(n)))^{t}}=\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\sigma}(\cos(\ln(n))+isin(\ln(n)))^{-t})=$

$\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\sigma}(\cos(t\ln(n))-i\sin(t\ln(n))\ )(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1, n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有正整数)，因为 $\zeta(s)=2^{s}\pi^{s-1}\mathrm{Sin}(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)(s\in C$且$s\neq 1)$(7 式) ,s=-2n(n∈ Z^{+}) 是黎曼 ζ(s)函数的平凡零点，因此当狄利克雷特征函数$\chi(n)\equiv 1$，那么s=-2n(n∈ Z^{+}) 是朗道-西格尔函数 L(β, $\chi(n)$)(β∈R 且$\chi(n)=1$)的零点。所以如果 s=β∈R 且 $\beta=-2n(n\in Z^{+})$,那么 L(β, $\chi(n)$)=0 且 ζ(s)=0。由于

L(β, $\chi(n)$)=

$\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\beta}(\cos(0\times\ln(n))+i\sin(0\times\ln(n)))=\chi(n)\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\beta})=$

$\left(\chi(1)1^{-\beta}-\chi(2)2^{-\beta}+\chi(3)3^{-\beta}-\chi(4)4^{-\beta}+\cdots\right)\left(\chi(n)\in R, \beta\in R\right.$ 且 $\beta\neq -2n, n\in$ Z+ ,"×" 表示相乘。因为以实数为底，指数也为实数的函数的函数值大于 0， 因此

$n^{-\beta}>0\left(n\in Z^{+}\right.$ 且 n 遍取所有的正整数$\left.\right)$ 且 $1^{\beta}-2^{\beta}<0, 3^{\beta}-4^{\beta}<0, 5^{\beta}-6^{\beta}<0,\ldots,(n-1)^{\beta}-(n)^{\beta}<0,\ldots, or\ 1^{\beta}-2^{\beta}>0, 3^{\beta}-4^{\beta}>0, 5^{\beta}-6^{\beta}>0,\ldots,(n-1)^{\beta}-(n)^{\beta}>0$ 。可以知道，如果 $\chi(n)\neq 0(n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数) ，且 β∈R 且 $\beta\neq -2n(n\in Z^{+})$, 那么 L(β, $\chi(n)$)≠0(β∈R 且 $\beta\neq -2n, n\in Z^{+}$, $\chi(n)$∈R且 $\chi(n)\equiv 1, n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数) 且L(β, 1)≠0(β∈R且$\beta\neq -2n, n\in Z^{+}$, 且 n 遍取所有的正整数), 所以对于对于黎曼 ζ(s)(s∈C 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}$) 函数来说，如果 $s\neq -2n(n\in Z^{+})$，那么它对应的朗道-西格尔函数 L(β, $\chi(n)$(β∈R 且 $\beta\neq -2n$ ，$n\in Z^{+}$，$\chi(n)=1$ ，且 n 遍取所有的正整数)的实数零点就不存在。这意味着除了负偶数， 黎曼 ζ(s)(s∈C 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$) 函数不存在实数零点，并且除了负偶数， 广义黎曼 L(s, $\chi(n)$)(s∈C 且 $s\neq 1$,且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$, $\chi(n)$∈R 且 n 遍取所有的正整数)函数的实数零点不存在，而它的非平凡零点满足 s= $\frac{1}{2}$+ti(t∈R,t≠0) 和 s= $\frac{1}{2}$-ti(t∈R,t≠0) 。表明孪生素数猜想、波利尼亚克猜想、哥得巴赫猜想几乎成立。如果 $\chi(n)=0(n\in Z^{+}$且n 遍取所有的正整数) 或 β∈R 且 $\beta=-2n(n\in Z^{+})$, 那么 L(β, $\chi(n)$)=0(β∈R 且 $\beta\neq -2n, n\in Z^{+}$, $\chi(n)$∈R 且 n遍取所有正整数)

且 $L(\beta,1)=0(\beta\in R$ 且 $\beta\neq-2n, n\in Z^{+}$, n 遍取所有正整数), 所以对于对于黎曼 $\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq1, s\neq-2n, n\in Z^{+})$ 函数来说，如果 $s=-2n(n\in Z^{+})$，那么它对应的朗道-西格尔函数 $L(\beta,\chi(n))(\beta\in R$ 且 $\beta=-2n, n\in Z^{+}, \chi(n)=1$，$\chi(n)\in R$，且 n 遍取所有的正整数)的实数零点存在，也意味着黎曼 $\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq1$ 且 $s\neq-2n, n\in Z^{+})$ 函数存在实数零点，并且除了负偶数，广义黎曼 $L(s,\chi(n))=0(s\in C$ and $s\neq1$, and $s\neq-2n, n\in Z^{+}, \chi(n)\in R$ 且 n 遍取所有的正整数) 函数的非平凡零点满足 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in R, t\neq0)$ 和 $s=\frac{1}{2}-ti(t\in R, t\neq0)$，表明孪生素数猜想、波利尼亚克猜想、哥德巴赫猜想完全成立。通过黎曼得到的

$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)\left(s\in C\text{ 并且 }s\neq1\right)$，因此当 $\zeta(s)=0$ 那么 $\zeta(1-s)=\zeta(s)=0(s\in C$ 并且 $s\neq1)$。因为仅当 $\sigma=\frac{1}{2}$, 下面三个等式：$\zeta(\sigma+ti)=0$, $\zeta(1-\sigma-ti)=0$, 和 $\zeta(\sigma-ti)=0$ 才都成立, 因此仅有 $s=\frac{1}{2}+ti$ $(t\in R$ 并且 $t\neq0)$ 和 $s=\frac{1}{2}-ti$ $(t\in R$ 并且 $t\neq0)$ 成立。因为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma+ti}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\sigma}}\times\frac{1}{n^{ti}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\sigma})\frac{1}{\left(\cos(\ln(n))+i\sin(\ln(n))\right)^{t}}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\sigma}(\cos(\ln(n))+i\sin(\ln(n)))^{-t})=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\sigma}(\cos(t\ln(n))-i\sin(t\ln(n)))=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\prod_{p=1}^{\infty}(1-p^{-s})^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}\left(1-p^{-\sigma-ti}\right)^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^{\sigma+ti}}\right)^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}[1-(p^{-\sigma})\frac{1}{(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{t}}]^{-1}=$$
$$\prod_{p=1}^{\infty}[1-(p^{-\sigma})(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))]^{-1}\left(s\in C\text{ 并且 }s\neq1, t\in C\text{ 并且 }t\neq0\ p\text{ 为质数，并且 }p\neq1\right)。$$

所以当 $\sigma=1$,如果 $1-\frac{1}{p}\cos(t\ln p)+i\frac{1}{p}\sin(t\ln p)\neq0$，那么

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})\neq0$. 如果 $1-\frac{1}{p}\cos(t\ln p)\neq0$ 并且 $\frac{1}{p}\sin(t\ln p)\neq0$，那么 $\sin(t\ln p)\neq0$ 并且 $\frac{1}{p}\cos(t\ln p)\neq1$，那么 $t\neq\frac{k\pi}{\ln p}$ $(k\in Z$，p 为质数，并且 $p\neq1)$，并且 $\cos(t\ln p)\neq p\left(t\in R\text{ 并且 }t\neq1, p\text{ 为质数，并且 }p\neq1\right)$。因此如果 $p>1\left(p\text{ 为质数}\right)$，那么 $t\neq\frac{k\pi}{\ln p}(k\in Z$, p 为质数) 并且 $\cos(t\ln p)\neq p$(p 为质数, 并且 $p>1$)。或者 $p=1$，那么 $|t|\neq|\frac{k\pi}{\ln 1}|\neq+\infty(k\in Z$, p 为质数)，并且 $\cos(t\ln 1)=1\left(t\in R\text{ 并且 }t\neq1\right)$. 因此，

并且cos(tln1)= $1\left(t\in R\ 并且\ t\neq 1\right)$. 因此，如果 σ =Re(s)=1并且t≠ $\frac{k\pi}{\ln p}$(k∈ Z , p 为质数,

且 $p\neq 1, t\in R$ 且 $t\neq 0)$, 那么 $\zeta(1+ti)=\prod_{p=1}^{\infty}[1-\frac{1}{p}\cos(t\ln p)+i\frac{1}{p}\sin(t\ln p)]^{-1}\neq$

$0\left(s\in C\ 并且\ s\neq 1\right)$。

所以当 Re(s)=1 并且 p ≠ 1 那么 $\zeta(1+ti)=\prod_{p=1}^{\infty}[1-\frac{1}{p}\cos(t\ln p)+i\frac{1}{p}\sin(t\ln p)]^{-1}\neq$

$0\left(t\in C\ 并且\ t\neq 0\right)$. 并且当 Re(s)=1 并且 p=1(p 为质数), 那么 $\zeta(1+ti)=$

$=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\prod_{p=1}^{\infty}[1-\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p)]^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1-(p^{-1})(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))}$

$=\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1-(1^{-1})(\cos(t\ln 1)-i\sin(t\ln 1))}=\frac{1}{0}\rightarrow+\infty\left(t\in C\ 并且\ t\neq 0\right)$,then $\zeta(1+ti)\neq 0\rightarrow$ $+\infty\left(t\in C\ 并且\ t\neq 0\right)$, 发散，没有零点。

当 σ =0, 那么如果 $1-\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p)\neq 0$ 那么 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})\neq$ 0， $1-\cos(t\ln p)\neq 0$ 并且 $\sin(t\ln p)\neq 0$, p 为质数，那么 $t\ln p\neq k\pi\left(k\in Z，p\ 为质数\right)$ 并且 $p\neq 1\left(p\ 为质数\right)$,那么 $t\neq\frac{k\pi}{\ln p}$(k∈ Z 并且 p 为质数， $p\neq 1$) and cos(tlnp) $\neq 1(t\in$ C 并且 $t\neq 0$，p 为质数，并且 $p\neq 1$)， 所以如果 $p>1$ (p为质数),那么 $t\neq\frac{k\pi}{\ln p}$ (k ∈ Z，p 为质数，并且 $p\neq 1$)，并且 cos(tlnp) $\neq 1$(p 为质数,并且 $p\neq 1$)。或者如果 $p=1$, 那么$|t|\neq\left|\frac{k\pi}{\ln 1}\right|\neq+\infty$(k∈ Z，p 为质数，并且 $p=1$) 并且 $|t|\neq+\infty$,t ∈ R 并且 t ≠ 0,那么 $\zeta(0+ti)=\prod_{p=1}^{\infty}[1-\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p)]^{-1}\neq 0\left(t\in C\ 并且\ t\neq 0\right)$.如果 Re(s)=0，并且 p≠1(p 为质数), 那么 $\zeta(0+ti)=\prod_{p=1}^{\infty}[1-\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p)]^{-1}\neq 0$. 另外当 Re(s)=0 并且 p=1 (p 为质数)，那么 $\prod_{p=1}^{\infty}[1-(p^{-\sigma})(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))]^{-1}=$ $\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1-(p^{-\sigma})(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))}=\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1-(1^{-1})(\cos(t\ln 1)-i\sin(t\ln 1))}=\frac{1}{0}\rightarrow+\infty$,那么 $\zeta(0+ti)\neq$ $0\rightarrow+\infty(t\in R\ 并且\ t\neq 0)$, 发散，没有零点， 所以 $\zeta(0+ti)\neq 0(t\in R\ 并且\ t\neq 0)$。 事实上黎曼ζ(s)函数的非平凡零（也就是除了负偶数以外的零）是存在的，黎曼证明了黎曼ζ(s)(s∈C, s≠1)函数的非平凡零点 s 的实部 Re(s)(s∈C,s≠1)必须满足 Re(s) ∈[0,1]。手工计算ζ(s)(s∈C, s≠1)函数的非平凡零点并不容易，黎曼计算了最初的十几个，它们的实部 Re(s)

都等于$\frac{1}{2}$。所以黎曼ζ(s)(s∈C, s≠1)函数的非平凡零点（即 s 不是负偶数）是存在的,并且黎曼ζ(s)(s∈C, s≠1)函数的非平凡零点 s 的实部 Re(s)(s∈C, s≠1)必须满足 Re(s)∈(0,1)。当 s=1+ti(t ∈ R 且 t ≠ 0), Rs(s)= σ =1,那么 $\zeta(s)=\zeta(1+ti)=\prod_{p=1}^{\infty}(\frac{1}{1-p^{-s}})=\prod_{p=1}^{\infty}(1-p^{-s})^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}(1-p^{-1-ti})^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}[1-(p^{-1})\frac{1}{(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{t}}]^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}[1-(p^{-1})(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))]^{-1}=\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{[1-\frac{1}{p}\cos(t\ln p)]+i\frac{1}{p}\sin(t\ln p)]}\neq 0\left(s\in C 且 s\neq 1, t\in C 且 t\neq 0, p\in Z^{+} 且 p 取所有质数\right)$。当自变量 s 由正整数推广为一般复数时，在欧拉积公式中，每个乘积因子的分子为 1，每个乘积因子的分母为与自然对数函数有关的多项式。当 $p\in Z^{+}$且 p 遍历所有质数时，$\zeta(1+ti)\neq 0(t\in R 且 t\neq 0)$，说明不大

于x的质数是有限的。由解析推广到一般复数后的欧拉积公式可知，对于不大于x的正整数，每增加一个质数 p，欧拉乘积公式中与 ln(p)相关的分数因子就会增加一个，表明在x附近(即x=p）存在质数 p 的概率约为$\frac{1}{\ln(p)}$,就是$\frac{1}{\ln(x)}$（即x=p）。如果我们用$\pi(x)$表示不大于x的质数的个数，那么对于一个不大于x的正整数 p（p 为质数）,那么它是质数的概率近似为$\frac{\pi(x)}{x}$，那么$\frac{\pi(x)}{x}\approx\frac{1}{\ln(x)}$。$\frac{\pi(x)}{x}\approx\frac{1}{\ln(x)}$是质数定理的表达式。正如 Riemann 在他的论文中所说，n 取所有的正整数，所以 n=1,2,3...,代入$\sum\frac{1}{n^{s}}$，显然：

$\zeta(s)=\zeta(\sigma+ti)=\sum\frac{1}{n^{s}}=\sum X=[1^{-\sigma}\cos(t\ln1)+2^{-\sigma}\cos(t\ln2)+3^{-\sigma}\cos(t\ln3)+4^{-\sigma}\cos(t\ln4)+...]-i[1^{-\sigma}\sin(t\ln1)+2^{-\sigma}\sin(t\ln2)+3^{-\sigma}\sin(t\ln3)+4^{-\sigma}\sin(t\ln4)+...]=U-Vi(s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R, 且 s\neq 1)$,

$U=[1^{-\sigma}\cos(t\ln1)+2^{-\sigma}\cos(t\ln2)+3^{-\sigma}\cos(t\ln3)+4^{-\sigma}\cos(t\ln4)+...]$,

$V=[1^{-\sigma}\sin(t\ln1)+2^{-\sigma}\sin(t\ln2)+3^{-\sigma}\sin(t\ln3)+4^{-\sigma}\sin(t\ln4)+...]$,那么

$\zeta(\overline{s})=\zeta(\sigma-ti)=\sum\frac{1}{n^{\overline{s}}}=\sum Y=[1^{-\sigma}\cos(t\ln1)+2^{-\sigma}\cos(t\ln2)+3^{-\sigma}\cos(t\ln3)+4^{-\sigma}\cos(t\ln4)+...]+i[1^{-\sigma}\sin()t\ln1)+2^{-\sigma}\sin(t\ln2)+3^{-\sigma}\sin(t\ln3)+4^{-\sigma}\sin(t\ln4)+...]=U+Vi(s\in C \text{ and } s\neq 1, t\in C 且 t\neq 0)$

$U=[1^{-\sigma}\cos(t\ln1)+2^{-\sigma}\cos(t\ln2)+3^{-\sigma}\cos(t\ln3)+4^{-\sigma}\cos(t\ln4)+...]$,

$V=[1^{-\sigma}\sin(t\ln1)+2^{-\sigma}\sin(t\ln2)+3^{-\sigma}\sin(t\ln3)+4^{-\sigma}\sin(t\ln4)+...]$,

$\zeta(1-s)=\sum(x^{\sigma-1})(\cos(t\ln x)+i\sin(t\ln x))=[1^{\sigma-1}\cos(t\ln1)+2^{\sigma-1}\cos(t\ln2)+3^{\sigma-1}\cos(t\ln3)+4^{\sigma-1}\cos(t\ln4)+...]+i[1^{\sigma-1}\sin(t\ln1)+2^{\sigma-1}\sin(t\ln2)+3^{\sigma-1}\sin(t\ln3)+4^{\sigma-1}\sin(t\ln4)$

$+\ldots](s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R,$且$s\neq 1)$,

所以$\zeta(s)=\overline{\zeta(\overline{s})}$ $(s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R,$且$s\neq 1)$，所以当$\zeta(s)=0\left(s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R,\text{且}\ s\neq 1\right.$,则必有 $\zeta(s)=$ $\zeta(s)=0$，表明黎曼 $\zeta(s)$函数的零点必定是共轭的，在 $Re(s)\in(0,1)$ 的临界带内，不存不共轭的零点。根据 $\zeta(s)=\zeta(\overline{s})=0$，如果 $s=\overline{s}$，那么$s\in R$，由于$s=-2n$(n ∈ Z+ 使得 2sin𝜋𝑠Γs−1ζs=𝑥0∞𝑥s−1𝑑𝑥ex−1

和 $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\left(s\in C\ \text{并且}\ s\neq 1\right)\left(\text{等式 }7\right)$中的函数$\zeta(s)\left(s\in\right.$ C 且 $s\neq1$ 的值为零,所以负偶数可以是黎曼 $\zeta(s)s\in C$ 且 $s\neq1$ 的零点。如果 $s\neq s$， 那么s和 s 不是同为实数,而是同为虚数，$t\in R$ 且 $t\neq0$，而且根据

$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\left(s\in C\ \text{并且}\ s\neq 1\right)\left(\text{等式 }7\right)$， 如 果 $\zeta(s)=0$ $\left(s\in\right.$ C 且 $s\neq1$ 成立,那么 $\zeta(1-s)=\zeta(s)=0 s\in C$ 且 $s\neq1$ 必定成立。

因为 $\zeta(s)=\overline{\zeta(\overline{s})}\left(s\in C\ \text{并且}\ s\neq 1\right)$，所以当 $\zeta(s)=0\left(s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R,\text{且}\ s\neq\right.$ $\left.1\right)$则 $\zeta(s)=\zeta(\overline{s})=$ $0\left(s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R,\text{且}\ s\neq\right.$ $\left.1\right)$，表明黎曼 $\zeta(s)$函数的零点必定是共轭的，所以黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C\ \text{且}\ s\neq\right.$ $\left.1\right)$函数的两个零点s和 $1-s$也必须是共轭的。如果s和 $1-s$是除负偶数以外的实数，由于s和 $1-s$共轭，则$s=1-s$，那么$s=\frac{1}{2}$,由于 $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq$ 0，且因为 $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$发散，所以如果$s$和 $1-s$是除负偶数以外的实数， 那么s和 $1-s$都不是黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C\ \text{且}\ s\neq 1\right)$的零点，也就是说黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C\ \text{且}\ s\neq\right.$ $\left.1\right)$没有除负偶数以外的实数零点。如果$Re(s)=1$,则$Re(1-s)=$ 0,那么s和 $1-s$不共轭，如果$Re(s)=0$,则$Re(1-s)=$ 1,那么s和 $1-$

s也不共轭，所以黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C \text{且} s\neq 1\right)$没有实部为 1 或 0 的零点。如果$Re(s)>1$,则$Re(1-s)<1$,那么$s$和$1-s$不共轭，或者$Re(s)<0$,则$Re(1-s)>1$,那么$s$和$1-s$也不共轭，所以黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C \text{且} s\neq 1\right)$零点$s$的实部必须 满足 $0<Re(s)<1$ ，也就是$Re(s)\in(0,1)$，这 表明素数定理 成立。如果s和$1-s$一个为实数，一个为虚数，则s和$1-s$不共轭，那么s和$1-s$不可能同为黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C \text{且} s\neq 1\right)$的零点，所以$1-s$和$s$只能同为虚数且共轭，$s$不能为纯虚数，因为如果$s$为纯虚数，则$1-s$和$s$不共轭，所以 $\zeta(s)\left(s\in C \text{且} s\neq 1\right)$无纯虚数零点。而且 如 果 $Re(s)\neq\frac{1}{2}$， 那么$Re(1-s)\neq 0$， 而且必定有$Re(s)\neq Re(1-s)$，那么$1-s$和s不共轭，所以$Re(s)\neq\frac{1}{2}$不可能成立。所以仅有 $1-s=\bar{s}$ 成立,即仅有 $1\text{-}\sigma\text{-}ti=\sigma\text{-}ti$ 成立 ， 所以仅有 $\sigma=\frac{1}{2}$ ，$t\in R$ 且 $t\neq 0$，因此黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C \text{且} s\neq 1\right)$的非实数零点的实部只能是$\frac{1}{2}$，即仅有 $Re(s)=\frac{1}{2}$成立，等价于 $\xi(s)=0\left(s=\frac{1}{2}+ti \text{或} s=\frac{1}{2}-ti, t\in R \text{且} t\neq 0\text{，}s\in C, \text{且} s\neq 1\right)$或 $\xi\left(\frac{1}{2}+ti\right)=0\left(t\in R \text{且} t\neq 0\right)$和 $\xi\left(\frac{1}{2}-ti\right)=0\left(t\in R \text{且} t\neq 0\right)$成立，所以在 $Re(s)\in(0,1)$的临界带内，$Re(s)\neq\frac{1}{2}$不可能,不存在实部不等于$\frac{1}{2}$的零点，所以黎曼猜想成立。零点 s 和零点 $1-s$ 的对称性不足以说明黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C \text{且} s\neq 1\right)$的非平凡零点都位于临界线上，零点 s 和零点 $1-s$ 的对称性仅表示它们关于 $Re(s)=\frac{1}{2}$的临界线上的一个点$\left(\frac{1}{2},oi\right)$对称，而不是零点 s 和零点 $1-s$ 关于 $Re(s)=\frac{1}{2}$的临界线对称，s 和 $1-s$ 的共轭性才是黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C \text{且} s\neq 1\right)$的非平凡零点都位于临界线上的根本原因。

根据$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\,\zeta(s)(s\in C \text{ and } s\neq 1)$ (等式 6),那么当 $\zeta(s)=0$ ，就会有 $\zeta(1-s)=\zeta(s)=0$ 成立。由于$\zeta(s)=\overline{\zeta(\bar{s})}\left(s\in C \text{并且} s\neq 1\right)$ ，那么当$\zeta(s)=0$ 或 $\zeta(\bar{s})=0$,那么就

必定会有$\zeta(s)=\zeta(\overline{s})=0$ 成立。因此当 ζ(s)=0 ，那么 s 和 1-s 也必定共轭。由此我们就得到 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in R$ 且$\neq 1)$，或 $s=\frac{1}{2}-ti(t\in R$ 且$\neq 1)$，当 Re(s) >1,欧拉 ζ 与黎曼 ζ 函数等价，由于欧拉乘积公式中的每一个乘积因子都不等于零，所以当 Re(s)>1, ζ(s)就不等于零，又根据$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$(等式 7) ,所以正偶数 2n(n 为正整数)虽然能够使 $\sin(\frac{\pi s}{2})$为零，但它不是黎曼 ζ(s)的零点。如果 s 为除负偶数和正偶数以外的其它实数，它除了不能使得 $\sin(\frac{\pi s}{2})$为零，而且必须满足 s=1-s，那么 $s=\frac{1}{2}$, 而$\zeta(\frac{1}{2})$发散， 所以负偶数以外的实数不是黎曼ζ(s)的零点。当 Re(s)>1,又根据ζ(s)=ζ(1-s)=0 成立，那么当 Re(s)<0，则ζ(s)也不等于零。又因为当ζ(s)=0 ,如果 Re(s)=0 或 Re(s) =1 ,则 s 和 1-s 不共轭 ,所以 Re(s) =0 或 Re(s)=1，则 ζ(s)无零点。所以除了负偶数，黎曼 ζ(s)有零点的前提条件是 Re(s)的值位于区间(0,1)。根据ζ(s)= ζ(1-s)=0 成立，我们知道ζ(s)的零点关于点$(\frac{1}{2},0i)$对称。但是仅仅根据 ζ(s)的零点关于点$(\frac{1}{2},0i)$对称 ,就判定黎曼ζ(s)函数的非平凡零点就都位于实部等于$\frac{1}{2}$的临界线上，这可以吗？显然不可以， 当 $Re(s)\in(0,1)$，假如 Re(s)=0.54....，那么 Re(1-s)=0.45... ,s 和 1-s 关于点$(\frac{1}{2},0i)$对称 ,但是黎曼认为这样的复数不是黎曼ζ(s)的零点。黎曼的看法是正确的，很显然，当 $Re(s)\neq\frac{1}{2}$, 那么 s 和 1-s 就必定不共轭，根据ζ(s)函数的零点必定共轭，那么, 如果 $Re(s)\neq\frac{1}{2}$，那么它必定不是ζ(s)函数的零点。综上所述，黎曼ζ(s)函数的非平凡零点必定都位于复平面 $Re(s)=\frac{1}{2}$的临界线上，黎曼猜想必定成立。

根据黎曼的论文《论不大于 x 的质数的个数》，我们可以得到关于黎 $\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$函数的表达式$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\left(s\in C\text{ 并且 }s\neq 1\right)\left(\text{等式 }7\right)$, 这是现代数学家早就知道的 ,而我呢 ,也得到了得到了这个结果。既然黎曼计算出了 $\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$函数有零点，也就是说在

$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\left(s\in C\text{ 并且 }s\neq 1\right)\left(\text{等式 }7\right)$中, $\zeta(s)=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$成立,那么根据$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\left(s\in C\text{ 并且 }s\neq 1\right)\left(\text{等式 }7\right)$和 ζ(s)=

$\zeta(\bar{s})=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$， 当 $\zeta(s)=0$，下面三个等式： $\zeta(\sigma+ti)=0$, $\zeta(1-\sigma-ti)=0$, and $\zeta(\sigma-ti)=0$ 才都成立,。并且当 $\zeta(s)=0$,根据 $\zeta(s)=\zeta(1-s)=0$ 和 $\zeta(s)=\zeta(\bar{s})=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$,因此当 $\zeta(s)=0$,s 和 1-s 也是共轭的。所以仅有 $1-s=\bar{s}$ 成立,即仅有 $1-\sigma-ti=\sigma-ti$ 成立。在我的分析中，$\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$、$\zeta(1-s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$ 和 $\zeta(\bar{s})(s\in C$ 且 $s\neq 1)$这些函数表达式都来自 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}(s\in C$ 且$s\neq 1$, $n\in Z^+$ 且n 遍取所有正整数, $p\in Z^+$ 且p 遍取所有质数)。$\zeta(s)(s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R,t\neq 0,$且$s\neq 1$是自变量为 s 的函数，$s$与$\bar{s}$与 1-s 的关系只有$C_3^2$=3 种， 即 $s=\bar{s}$ 或 s=1-s 或 $\bar{s}$=1-s，所以 s∈R, 或σ+ti=1-σ-ti ,或 σ-ti=1-σ-ti, 即 $s\in R$,或$\sigma=\frac{1}{2}$且 t=0,或 $\sigma=\frac{1}{2}$， $t\in R$ 且 $t\neq 0$,也就是$s\in R$, 或 $s=\frac{1}{2}+0i$,或 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$ 和 $s=\frac{1}{2}-ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$。因为 $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\to+\infty,\zeta(1)\to+\infty$, $\zeta(1)$ 是发散的, $\zeta(\frac{1}{2})$更是发散 ,舍弃 s=1 和 $s=\frac{1}{2}$ ，只取 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$和 $s=\frac{1}{2}-ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$。根据黎曼得到的等式$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$，所以$\xi(s)=\xi(1-s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$，因为 $\Gamma(\frac{s}{2})=\overline{\Gamma(\frac{\bar{s}}{2})}$ 、$\pi^{-\frac{s}{2}}=\overline{\pi^{-\frac{\bar{s}}{2}}}$，并且因为 $\zeta(s)=\overline{\zeta(\bar{s})}(s\in C$ 且 $s\neq 1)$，因此 $\xi(s)=\overline{\xi(\bar{s})}\left(s\in C\right.$ 且 $\left.s\neq 1\right)$。所以当 $\zeta(s)=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$,那么$\zeta(s)=\zeta(1-s)=\zeta(\bar{s})=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$ 和

$\xi(s)=\xi(1-s)=\xi(\bar{s})=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$ 必定成立 。$\zeta(s)$的零点除了平凡零点 s=-2n(n 为自然数)，由于恰好是 $\Gamma(\frac{s}{2}+1)$的极点，因而不是$\xi(s)$的零点外，其余全都是$\xi(s)$的零点，因此$\xi(s)$函数的零点与黎曼 ζ 函数的非平凡零点重合,所以黎曼 $\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$函数的非平凡零点和黎曼$\xi(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$函数的零点是相同的，而且$\xi(s)$函数的零点的虚部就是方程 $\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=0$ 的实数根，再加上前面根据朗道-西格尔函数证明了黎曼

$\zeta(s)\left(s=\sigma+ti,\sigma\in R,t\in R,t\neq 0,\text{且 } s\neq 1,\right)$函数除了负偶数外，没有实数零点，所以

$\xi(s)=0$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1$，且 $s\neq 0$，且$s\neq -2n,n\in Z^+$，n遍取所有正整数)的根必定满足 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$和 $s=\frac{1}{2}-ti(t\in R$ 且 $t\neq 0)$。根据黎曼定义的函数$\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=$

$\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0, s\in C \text{ 且 } s\neq 1\right)$和黎曼定义的 $s=\frac{1}{2}+ti$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)，因为 $s\neq 1$，且 $\prod\frac{s}{2}\neq 0$，$\pi^{-\frac{s}{2}}\neq 0$，所以 $\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\neq o$，因此当 $\xi(s)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)，那么$\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(s)=0$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq 0$，且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数),且$\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$),并且

$\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\frac{\xi(t)}{\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}}=\frac{0}{\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}}=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$),那么 $t\in R$ 且 $t\neq 0$。所以当

$\xi(s)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)，那么方程$\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$) 和 $4\int_1^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx=\xi(t)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$) 和方程

$\xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^{\infty}\Psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)的根必定都是实数，并且 $t\neq 0$。黎曼在他的论文中得到 $\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)和 $\xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^{\infty}\Psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)，或者 $\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ $=\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=\xi(t)$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$) 和

$\xi(t)=4\int_1^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)，因为 $\zeta(\frac{1}{2}+ti)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$) 的根是

$\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=0\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0, s\in C\right)$的根，并且因为 $\zeta(\frac{1}{2}+ti)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$) 的根就是$\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta((\frac{1}{2}+ti)=\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=4\int_1^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx=\xi(t)=0\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0, s\in C\right)$的根,并且因为 $\zeta(\frac{1}{2}+ti)=0\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0\right)$的根就是$\xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^{\infty}\Psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\ln x\right)=0\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0\right)$的根，而方程 $\zeta(\frac{1}{2}+ti)=0\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0\right)$的根是不等于零的实数，因为前面已经得到$\zeta(s)=0\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1 \text{ 且} s\neq -2n, n\in Z^{+}\text{，}n\text{遍取所有正整数}\right)$ 的根是 $s=\frac{1}{2}+ti$ ($t\in R$ 且 $t\neq 0$) 和 $s=\frac{1}{2}-ti$ ($t\in R$ 且 $t\neq 0$),所以方程$\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=0\left(t\in C \text{ an 且 } t\neq 0, s\in C \text{ 且 } s\neq 1\right)$和方程 $4\int_1^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx=\xi(t)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$) 和方程

$\xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^{\infty}\Psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)=0$ ($t\in C$ 且 $t\neq 0$)的根必定都是实数,并且一致。

所以当 $\zeta(s)=0(s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+})$，则 $\prod\frac{s}{2}(s\text{-}1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(s)=0(s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+})$,且 $\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=0\,(t\in C$ 且 $t\neq 0)$ 的根都是实数，其中 $\xi(t)=0(t\in C$ 且 $t\neq 0)$ 的实部在 0 和 T 之间的根的数目近似等于 $\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$，黎曼对 $\xi(t)=0$ 的零点数目估计的这一结果在 1895 年由 Mangoldt 严格证明，黎曼猜想完全成立。

因为 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\frac{1}{2}}(\cos(t\ln(n))-i\sin(t\ln(n)))=$

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\frac{1}{2}}(\cos(\ln(n^{t}))-i\sin(\ln(n^{t})))=0$ 的根的数目就是

$\xi(t)=\frac{1}{2}\text{-}(t^{2}+\frac{1}{4})\int_{1}^{\infty}\Psi()\ x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)=0$ 的根的数目。当 $t=0$，那么 $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ 是发散的。当 $\ln(n^{t})\in[0,2\pi]$，

$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\frac{1}{2}}(\cos(t\ln(n))-i\sin(t\ln(n)))=\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\frac{1}{2}}(\cos(\ln(n^{t}))-i\sin(\ln(n^{t})))=0$ 的根的数目就是 $\ln\frac{T}{2\pi}-1$,所以当 $t\in(0,T]$,

$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\frac{1}{2}}(\cos(t\ln(n))-i\sin(t\ln(n)))=\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\frac{1}{2}}(\cos(\ln(n^{t}))-i\sin(\ln(n^{t})))=0$ 的根的数目就是 $N=n_{1}\times n_{2}=\frac{T}{2\pi}\times(\ln\frac{T}{2\pi}-1)$。

公式 2

让我们定义复数 $Z=x+yi(x\in R, y\in R)$，并假设我们有任意复数 $s=\sigma+ui(\sigma\in R，u\in R)$.我们使用 $r(r\in R$ 且 $r>0)$ 来表示复数 $Z=x+yi(x\in R，y\in R)$的模$|Z|$,并使用 φ 来表示复数 $Z=x+yi(x\in R, y\in R)$的复角度 $Am(Z)$.也就是 $|Z|=r$，那么 $r=(x^{2}+y^{2})^{\frac{1}{2}}$，因此

$Z=r(\mathrm{Cos}(\varphi)+i\mathrm{Sin}(\varphi))$ 且 $\varphi=|\arccos(\frac{x}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{1}{2}}})|$，且 $\varphi\in(-\pi,\pi]$，那么 $\varphi=Am(Z)$。根据

$x^{s}=x^{\sigma+ui}=x^{\sigma}x^{ui}=x^{\sigma}(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))^{u}=x^{\sigma}(\cos(u\ln x)+i\sin(u\ln x))$ 可以得到:

$r^{s}=r^{(\sigma+ui)}=r^{\sigma}r^{ui}=r^{\sigma}(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))^{u}=r^{\sigma}(\cos(u\ln x)+i\sin(u\ln x))\ (r>0)$，那么

$f(Z,s)=z^{s}=(r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^{\sigma+ui}=(r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^{\sigma}r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^{ui}=r^{\sigma}(\cos(\sigma\varphi)+i\sin(\sigma\varphi))(r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^{ui}=r^{\sigma}(\cos(\sigma\varphi)+i\sin(\sigma\varphi))r^{ui}(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))ui=r\sigma(\cos(\sigma\varphi)+i\sin(\sigma\varphi))(\cos(u\ln r)+i\sin(u\ln r))(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))i$

$=r^{\sigma}(\cos(\rho\varphi+u\ln r)+i\sin(\rho\varphi+u\ln r))(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))^{i}$。

因为

$Z = e^{\ln|Z|+iAm(Z)}=e^{\ln|Z|}e^{iAm(Z)}=e^{\ln|Z|}(\cos(Am(Z))+i\sin(Am(Z)))=r(\cos(Am(Z))+i\sin(Am(Z)))$,so

$\ln Z=\ln|Z|+iAm(Z)(-\pi<Am(Z)<=\pi)$。

假设 a>0,那么 $a^x=e^{\ln(a^x)}=e^{x\ln a}$ ，那么 $z^s=e^{s\ln z}$ 。

假设任意复数 Q= $\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi)$，并且假设

复数 ψ= i,then $\ln Q=\ln|Q|+iAm(Q)$（$-\pi<Am(Q)<=\pi$).

因为 $0<=|\sin(u\varphi)|<=1$,

所以

如果$-\pi<u\varphi<=\pi$,那么 $Am(Q)=u\varphi$ 且$-\pi<Am(Q)<=\pi$；

如果$u\varphi>\pi$，那么 $Am(Q)=u\varphi-2k\pi(k\in Z^+)$ 且 $-\pi<Am(Q)<=\pi$；

如果 $u\varphi<-\pi$，那么 $Am(Q)=u\varphi+2k\pi(k\in Z^+)$ 且 $-\pi<Am(Q)<=\pi$. 那么

如果 $Am(Q)=u\varphi$，那么

$(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))^i=Q^\psi=e^{\psi\ln Q}=e^{\psi(\ln|Q|+iAm(Q))}=e^{i(o+iAm(Q))}=e^{-u\varphi}$。

那么 $f(Z,s)=z^s=r^\sigma(\cos(\sigma\varphi+u\ln r)+i\sin(\sigma\varphi+u\ln r))(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))^i$

$=e^{-u\varphi}r^\sigma(\cos(\rho\varphi+u\ln r)+ie^{-u\varphi}r^\sigma\sin(\rho\varphi+u\ln r)$。

用$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ 替换 r，将上式化为：

$f(Z,s)=z^s=e^{-u\varphi}(x^2+y^2)^{\frac{\sigma}{2}}(\cos(\rho\varphi+u\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}))$

$+ie^{-u\varphi}(x^2+y^2)^{\frac{\sigma}{2}}(\sin(\sigma\varphi+u\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}))$ 。

如果$Am(Q)=u\varphi-2k\pi(k\in Z^+)$,那么

$(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))^i=Q^\psi=e^{\psi\ln Q}=e^{\psi(\ln|Q|+iAm(Q))}=e^{i(o+i(u\varphi-2k\pi))}=e^{2k\pi-u\varphi}$，那么

$f(Z,s)=z^s=r^\sigma(\cos(\sigma\varphi+u\ln r)+i\sin(\sigma\varphi+u\ln r))(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))^i$

$=e^{2k\pi-u\varphi}r^\sigma(\cos(\sigma\varphi+u\ln r)+ie^{2k\pi-u\varphi}r^\sigma\sin(\sigma\varphi+u\ln r)$ 。.

用$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$替换 r，将上式化为：

f(Z,s)=z^s=$e^{2k\pi-u\varphi}(x^2+y^2)^{\frac{\sigma}{2}}(\cos(\sigma\varphi+u\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}))$

$+ie^{2k\pi-u\varphi}(x^2+y^2)^{\frac{\sigma}{2}}(\sin(\sigma\varphi+u\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}))$。

如果Am(Q)=uφ+2kπ($k\in Z^+$)，那么

$(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))^i=Q^\psi=e^{\psi\ln Q}=e^{\psi(\ln|Q|+iAm(Q))}$=$e^{i(o+i(u\varphi+2k\pi))}$=$e^{-2k\pi-u\varphi}$，那么

f(Z,s)=z^s=$r^\sigma(\cos(\sigma\varphi+u\ln r)+i\sin(\sigma\varphi+u\ln r))(\cos(u\varphi)+i\sin(u\varphi))^i$

=$e^{-2k\pi-u\varphi}r^\sigma(\cos(\sigma\varphi+u\ln r)$+$ie^{-2k\pi-u\varphi}r^\sigma\sin(\sigma\varphi+u\ln r)$。

用$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$替换 r，将上式化为：

f(Z,s)=z^s=$e^{-2k\pi-u\varphi}(x^2+y^2)^{\frac{\sigma}{2}}(\cos(\sigma\varphi+u\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}))$

$+ie^{-2k\pi-u\varphi}(x^2+y^2)^{\frac{\sigma}{2}}(\sin(\sigma\varphi+u\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}))$。

推论 1:

对于任意复数 s，当 $Rs(s)>0$ 且 $(s\neq 1)$,如果 $s=\sigma+ti(\sigma\in R, t\in R)$，那么

那么黎曼 $\zeta(s)\left(s\in C \text{ 且 } Rs(s)>0 \text{ and } s\neq 1\right)$函数和狄利克雷 $\eta(s)\left(s\in C \text{ 且 } Rs(s)>\right.$

0 且 s≠1 函数的关系就是：

η(s)= $\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}$+$\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}$+$\frac{1}{5^s}-\frac{1}{6^s}$+…$\left(s\in C \text{ 且 } Rs(s)>0 \text{ 且 } s\neq 1\right)$，

ζ(s)= $\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}$+$\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}$+$\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}$+…$\left(s\in C \text{ 且 } Rs(s)>0 \text{ 且 } s\neq 1\right)$，

$\eta(s)-\zeta(s)=-(\frac{2}{2^s}+\frac{2}{4^s}+\frac{2}{6^s}+\cdots)=-\frac{2}{2^s}(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\ldots)=-\frac{2}{2^s}\zeta(s)\left(s\in\right.$

C 且 Rss>0且 s≠1，

$\eta(s)=1-\frac{2}{2^s}\zeta(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)\left(s\in C \text{ 且 } Rs(s)>0 \text{ 且 } s\neq 1\right)$,那么

η (s)= $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\left(s\in C \text{ 且 } Rs(s)>0 \text{ 且 } s\neq 1\right)$且 η (s)=(1- 2^{1-s}) ζ(s) $\left(s\in C \text{ 且 } Rs(s)>0 \text{ 且 } s\neq\right.$

$\left.1\right)$，ζ(s)是黎曼 Zeta 函数,η(s)是狄利克雷η(s)函数,

因此黎曼 $\zeta(s)=\frac{\eta(s)}{(1-2^{1-s})}=\frac{1}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$ (s ∈ C 且 Rs(s) >)

0 且 $s \neq 1$, n$\in Z^+, p \in Z^+, s \in$C，n 遍取所有正整数, p 遍取所有质数)。现在让我们来证明

ζ(s)和ζ(($\overline{s}$)彼此复共轭。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$=[$1^{-\sigma}$cos(tln1)$-$ $2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $3^{-\sigma}$cos(tln3)$-4^{-\sigma}$cos(tln4)-...]-i[$1^{-\sigma}$sin(tln1)$-$ $2^{-\sigma}$ sin(tln2)+ $3^{-\sigma}$sin(tln3) $-$ $4^{-\sigma}$sin(tln4)+...]= U-Vi,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}$=[$1^{-\sigma}$cos(tln1)$-2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $3^{-\sigma}$cos(tln3)$-4^{-\sigma}$cos(tln4)-...]+i[$1^{-\sigma}$sin(tln1)$-$ $2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $3^{-\sigma}$sin(tln3)$-4^{-\sigma}$sin(tln4)+...]= U+Vi,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-s}}$=[$1^{\sigma-1}$ cos(tln1) $-$ $2^{\sigma-1}$ cos(tln2)+ $3^{\sigma-1}$ cos(tln3) $-4^{-\sigma}$ cos(tln4)-...]+i[$1^{-\sigma}$ sin(tln1) $-$ $2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $3^{-\sigma}$sin(tln3)$-$ $4^{-\sigma}$sin(tln4)+...],

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k-s}}$=[$1^{\sigma-k}$cos(tln1)$-$ $2^{\sigma-k}$cos(tln2)+ $3^{\sigma-k}$cos(tln3)$-4^{\sigma-k}$cos(tln4)-...]+i[$1^{\sigma-k}$sin(tln1) $-$ $2^{\sigma-k}$sin(tln2)+ $3^{\sigma-k}$sin(tln3) $-$ $4^{\sigma-k}$sin(tln4)+...],

($s \in C$ 且 $s \neq 1, n \in Z^+$且 n 遍取所有的正整数,$k \in R$）。因为

$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}$ = $\overline{\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}}$,

$\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$=$\overline{\prod_p(1-p^{-\overline{s}})^{-1}}$,

($s \in C$ 且 $s \neq 1, p \in Z^+$ 且 p 遍取所有的质数),

因此

$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}$=$\overline{\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}}$,

因此

$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \overline{\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}}$,

$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\prod_p(1-p^{-s})^{-1} = \overline{\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\prod_p(1-p^{-\overline{s}})^{-1}}$,

ζ(s)=$\frac{1}{(1-2^{1-s})}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$,

ζ($\overline{s}$)=$\frac{1}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\prod_p\left(1-p^{-\overline{s}}\right)^{-1}$ ($s \in C$ 且 $s \neq 1, n \in Z^+$ 且 n 遍取所有的正整数,$p \in Z^+$ p 遍取所有的质数),

因此

仅 $\zeta(s)=\overline{\zeta(\overline{s})}$ $(s \in C$ 且 $s \neq 1)$, [2]

因此

p^{1-s}=$p^{(1-\sigma-ti)}$=$p^{1-\sigma}p^{-ti}$=$p^{1-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{-t}$=$p^{1-\sigma}(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))$,
$p^{1-\overline{s}}=p^{(1-\sigma+ti)}=p^{1-\sigma}p^{ti}=p^{1-\sigma}(p^{ti})\ =p^{1-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{t}=(p^{1-\sigma}(\cos(t\ln p)+$

$i\sin(t\ln p))$ $(s \in C$ 且 $s \neq 1, t \in C$ 且 $s \neq 0, p \in Z^{+}$),

因此

$p^{-(1-s)}$=$p^{(-1+\sigma+ti)}$=$p^{\sigma-1}p^{ti}=p^{\sigma-1}\frac{1}{(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))}$ =$(p^{\sigma-1}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$,

$p^{-(\overline{s})}$=$p^{-(\sigma-ti)}$=$p^{-\sigma}p^{ti}=(p^{-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$

$(s \in C$ a 且 $s \neq 1, t \in C$ 且 $s \neq 0, p \in Z^{+}$),

因此

$(1-p^{-(1-s)})$=1-$(p^{\sigma-1}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ =$1-p^{\sigma-1}\ \cos(t\ln p)-ip^{\sigma-1}\sin(t\ln p)$,
$(1-p^{-(\overline{s})})$=1-$(p^{-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ =$1-p^{-\sigma}\ \cos(t\ln p)-ip^{-\sigma}\sin(t\ln p)$,

$(s \in C$ 且 $s \neq 1, t \in C$ 且 $t \neq 0, p \in Z^{+}$),

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-s}}$ =[$1^{\sigma-1}\cos(t\ln 1)-2^{\sigma-1}\cos(t\ln 2)+3^{\sigma-1}\cos(t\ln 3)-4^{\sigma-1}\cos(t\ln 4)-\ldots$]+i[$1^{\sigma-1}\sin(t\ln 1)$
$-2^{\sigma-1}\sin(t\ln 2)+3^{\sigma-1}\sin(t\ln 3)\ -4^{\sigma-1}\sin(t\ln 4)+\ldots$] ,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}$=[$1^{-\sigma}\cos(t\ln 1)-2^{-\sigma}\cos(t\ln 2)+3^{-\sigma}\cos(t\ln 3)-4^{-\sigma}\cos(t\ln 4)-\ldots$]+i[$1^{-\sigma}\sin(t\ln 1)-2^{-\sigma}$
$\sin(t\ln 2)+3^{-\sigma}\sin(t\ln 3)-4^{-\sigma}\sin(t\ln 4)+\ldots$]

$(s \in C$ 且 $s \neq 1, t \in C$ 且 $s \neq 0, n \in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数),

当 $\sigma=\frac{1}{2}$,

那么

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-s}}$=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}$ $(s \in C$ 且 $s \neq 1, n \in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数),

$(1-p^{-(1-s)})$ =$(1-p^{-\overline{s}})$$(s \in C$ 且 $s \neq 1, p \in Z^{+})$,

且

$(1-p^{-(1-s)})^{-1}$=$(1-p^{-\overline{s}})^{-1}$$(s \in C$ 且 $s \neq 1, p \in Z^{+})$,

$\prod_{p}(1-p^{-(1-s)})^{-1}$=$\prod_{p}\left(1-p^{-\overline{s}}\right)^{-1}$, $(s \in C$ 且 $s \neq 1, p \in Z^{+}$ and p 遍取所有的质数),

并且

$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-s}}=\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}$,

$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{s})}\prod_{p}(1-p^{-(1-s)})^{-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\prod_{p}(1-p^{-\overline{s}})^{-1}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1, t\in C$ 且 $t\neq 0, n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数, $p\in Z^{+}$ 且 p 遍取所有的质数),

而且

$\zeta(1-s)=\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{s})}\prod_{p}(1-p^{-(1-s)})^{-1}$,

$\zeta(\overline{s})=\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\prod_{p}(1-p^{-\overline{s}})^{-1}$,

$\zeta(1-s)=\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-s}}$,

$\zeta(\overline{s})=\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$ 且 p 遍取所有的质数, $n\in Z^{+}$且 n 遍取所有的正整数),

因此当 $\sigma=\frac{1}{2}$, 那么

仅 $\zeta(1-s)=\zeta(\overline{s})\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1\right)$成立。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k-s}}$=[$1^{\sigma-k}$cos(tln1)$-$ $2^{\sigma-k}$cos(tln2)+ $3^{\sigma-k}$cos(tln3) $-4^{\sigma-k}$cos(tln4)-...]+i[$1^{\sigma-k}$sin(tln1) $-$ $2^{\sigma-k}$sin(tln2)+ $3^{\sigma-k}$sin(tln3) $-$ $4^{\sigma-k}$sin(tln4)+...],

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}$=[$1^{-\sigma}$cos(tln1)$-2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $3^{-\sigma}$cos(tln3)$-4^{-\sigma}$cos(tln4)-...]+i[$1^{-\sigma}$Sin(tln1)$-$ $2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $3^{-\sigma}$sin(tln3)$-4^{-\sigma}$sin(tln4)+...],

$p^{k-s}=p^{(k-\sigma-ti)}=p^{k-\sigma}p^{-ti}=p^{k-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{-t}=p^{k-\sigma}(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))$,

$p^{1-\overline{s}}=p^{(1-\sigma+ti)}=p^{1-\sigma}p^{ti}=p^{1-\sigma}(p^{ti})=p^{1-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{t}=(p^{1-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$,

($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$ 且 p 遍取所有的质数, $n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数, $k\in R$),

那么

$p^{-(k-s)}=p^{(-k+\sigma+ti)}=p^{\sigma-k}p^{ti}=p^{\sigma-k}\frac{1}{(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))}=(p^{\sigma-k}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$,

$p^{-(\overline{s})}=p^{-(\sigma-ti)}=p^{-\sigma}p^{ti}=(p^{-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$,

$p^{-(k-s)}=(p^{\sigma-k}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$,

($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$ 且 p 遍取所有的质数, $k\in R$),

因此

$(1-p^{-(k-s)})$=1-($p^{\sigma-k}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ =$1-p^{\sigma-k}\cos(t\ln p)-ip^{\sigma-k}\sin(t\ln p)$,

$(1-p^{-\bar{s}})$ =1- ($p^{-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ = $1-p^{-\sigma}\cos(t\ln p)-ip^{-\sigma}\sin(t\ln p)$, ($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$ 且 p 遍取所有的质数, $k\in R$) , 因此当 $\sigma=\frac{k}{2}(k\in R)$ ，那么$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-k+s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\bar{s}}}$ $\left(s\in C\right.$ 且 $s\neq 1, k\in R, n\in Z^{+}$且 n 遍取所有的正整数$\left.\right)$,

$(1-p^{-(k-s)})$ =$(1-p^{-\bar{s}})$ ($s\in C$ ， n 遍取所有的正整数， $s\neq 1, k\in R, p\in^{+}$ 且 p 是质数),

and $(1-p^{-(k-s)})^{-1}$=$(1-p^{-\bar{s}})^{-1}$(s∈C 且 s≠1,k∈R, $p\in Z^{+}$ 且 p 是质数),

$\prod_{p}(1-p^{-(k-s)})^{-1}$=$\prod_{p}\left(1-p^{-\bar{s}}\right)^{-1}$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$且 p 遍取所有的质数, $k\in R$),

且

$$\frac{1}{(1-2^{1-k+s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k-s}}=\frac{1}{(1-2^{1-\bar{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\bar{s}}}$$

($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$且 p 遍取所有的质数, $n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数, $k\in R$),且

$\zeta(k-s)$=$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-k+s})}\prod_{p}(1-p^{-(k-s)})^{-1}$,

$\zeta(\bar{s})$=$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\bar{s}})}\prod_{p}(1-p^{-\bar{s}})^{-1}$,

$\zeta(k-s)$=$\frac{1}{(1-2^{1-k+s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k-s}}$ (s∈C 且 s≠ 1, k ∈R),

$\zeta(\bar{s})$=$\frac{1}{(1-2^{1-\bar{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\bar{s}}}$ (s∈C 且 s≠ 1),

($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$ 且 p 遍取所有的质数, $n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有的正整数, $k\in R$),

因此当 $\sigma=\frac{k}{2}(k\in R)$,那么仅 $\zeta(k-s)=\zeta(\bar{s})$(s∈C且s≠ 1))($s\in C$ 且 $s\neq 1, k\in R$) 。黎曼已经知道黎曼 ζ(s)函数有零点,通过黎曼得 ζ(1-s)得到的等式 $\zeta(1-s)2^{1-s}\pi^{-s}\mathrm{Cos}(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$$\left(s\in C\right.$ 且 $\left.s\neq 1\right)$, 我们就知道 ζ(1-s)=$2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$ $\left(s\in C\right.$ 且 $\left.s\neq 1\right)$中,ζ(s)=0($s\in C$ 且 $s\neq 1$)成立。当 ζ(s) =0 ($s\in C$ 且 $s\neq 1$) , 那么 $\zeta(k-\bar{s})$ = ζ(s) =0 ($s\in C$ 且 $s\neq 1$) , 当 ζ(s) =0 ($s\in C$ 且 $s\neq 1$),那么 $\zeta(\bar{s})$=0($s\in C$ 且 $s\neq 1$), 那么$\zeta(k-s)=\zeta(\bar{s})$=0($s\in C$ 且 $s\neq 1$). 并且因为当 ζ(s)=0 $\left(s\in C\right.$ 且 $\left.s\neq 1\right)$成立 , 那么 $\zeta(\bar{s})=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$) , 那么仅 $\zeta(1-s)=\zeta(\bar{s})$ =0 $\left(s\in C\right.$ 且 $s\neq$

$1\big)$成立，即 $\zeta(k-s)=\zeta(\overline{s})(s\in C \text{ and } s\neq 1, k\in R)$，因此仅k=1 成立．通过 ζ(s)=ζ(1-s) ($s\in C$ 且 $s\neq 1$)=0 和 ζ(s)=ζ($\overline{s}$)=ζ(1-$\overline{s}$)=0$\big(s\in C$ 且 $s\neq 1\big)$成立,那么 s=$\overline{s}$ 或者 s=1-s 或者 $\overline{s}$=1-s，因此 s∈R 且 s=-2n($n\in Z^+$)，或者 σ+ti=1-σ-ti ，或者σ-ti=1-σ-ti,因此 $s\in R$,或者 $\sigma=\frac{1}{2}$ and t=0，或者$\sigma=\frac{1}{2}$或者 t ∈R 或者 t≠ 0，因此 $t\in R$,或者s=$\frac{1}{2}$+0i ，或者s=$\frac{1}{2}$+ti(t ∈R 且 $t\neq 0$)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t ∈R 且 $t\neq 0$)。由于 $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\to+\infty, \zeta(1)\to+\infty$，ζ(1)是发散的, ζ($\frac{1}{2}$) 更是发散的，因此舍去 s=1 和 s=$\frac{1}{2}$。因为仅当 $\sigma=\frac{1}{2}$,下面三个等式: $\zeta(\sigma+\text{ti})=0$，$\zeta(1-\sigma-\text{ti})=0$，和 $\zeta(\sigma\text{-ti})=0$ 才都成立。 因此当 ζ(s)=0$\Big($ $t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq 0, s\neq -2n, n\in Z^+\Big)$，那么仅 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 $t\neq 0$)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 $t\neq 0$)成立．通过黎曼定义的等式

$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s\text{-}1)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1\right)$，因此 $\xi(s)=\xi(1-s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$，因为 $\Gamma(\frac{s}{2})=\overline{\Gamma(\frac{\overline{s}}{2})}$ ，且 $\pi^{-\frac{s}{2}}=\overline{\pi^{-\frac{\overline{s}}{2}}}$ ，并且因为 ζ(s)=$\overline{\zeta(\overline{s})}$(s∈C 且 s≠ 1)，因此 ξ(s)=$\overline{\xi(\overline{s})}$(s∈C 且 $s\neq 1$)。所以当 ζ(s)=0 ($s\in C$ 且 $s\neq 1$) ，那 么 ζ (s) =ζ $(1-s)=\zeta(\overline{s})=0$($s\in C$ ，s≠ 1) 且 ξ(s)=ξ$(1-s)$=ξ($\overline{s}$)=0(s∈C 且 s≠ 1) 必定成立，ζ(s)的零点除了平凡零点 s=-2n（n为自然数），由于恰好是ξ(s)=$\Gamma(\frac{s}{2}+1)$(s-1)$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$中的$\Gamma(\frac{s}{2}+1)$的极点，因而不是 ξ(s)的零点外，其余全都是 ξ(s)的零点，因此 ξ(s)的零点与黎曼ζ函数的非平凡零点相重合，因此黎曼函数 ζ(s)的非平凡零点和黎曼$\xi(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^+)$的函数的零点是相同的。换句话说，ξ(s)将黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点从全体零点中分离了出来。因为黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点满足 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 $t\neq 0$)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 $t\neq 0$)，因此黎曼引进的函数 ξ(s)=0($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq 0, s\neq -2n, n\in Z^+$)的复数根必定满足 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 $t\neq 0$)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 $t\neq 0$)，和黎曼黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点一致，ξ(t)=0 根也和黎曼 ζ(s)函数的非平凡零点的虚部一致，是一个实数。通过黎曼定义的函数

$\prod\frac{s}{2}(s\text{-}1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod\frac{(\frac{1}{2}+\text{ti})}{2}(-\frac{1}{2}+\text{ti})\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+\text{ti}}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+\text{ti})$=ξ(t)(s∈C 且s≠ 1, $t\in C$ 且 $t\neq 0$) 和黎曼定义的 s=$\frac{1}{2}$+ti($t\in C$ 且 $t\neq 0$)，因为 s≠1，且 $\prod\frac{s}{2}\neq$o，$\pi^{-\frac{s}{2}}\neq 0$，因此 $\prod\frac{s}{2}(s\text{-}1)\pi^{-\frac{s}{2}}\neq 0$(s∈C 且 s≠ 1)，

并且当 ξ(t)=0(t ∈ C 且 and t ≠ 0)，那么

$\prod\frac{s}{2}(s\text{-}1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)=0(s\in C$ 且$s\neq 1, t\in C$ 且 $t\neq 0)$，且

$\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\frac{\xi(t)}{\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}}=\frac{0}{\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}}=0(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1$，$s\neq -2n, n\in Z^{+})$，

so t∈R 且 t ≠ 0．因此等式

$\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)=\xi(t)(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+})$ 和等式

$4\int_{1}^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx=\xi(t)=0(t\in C$ 且 $t\neq 0)$和等式

$\xi(t)=\frac{1}{2}\text{-}(t^{2}+\frac{1}{4}\int_{1}^{\infty}\Psi(x)\ x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)=0(t\in C$ 且 $t\neq 0)$ 的根 t 必定是实数且 t ≠ 0。如果

$Re(s)=\frac{k}{2}(k\in R)$,那么 $\zeta(k\text{-}s)=2^{k-s}\pi^{-s}Cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)(s\in C$且$s\neq 1)$ 和

$\xi(k-s)=\frac{1}{2}s(s\text{-}k)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\left(t\in C\text{ 且 }t\neq 0, s\in C\text{ 且 }s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}\right)$都成立。因此

当 $\zeta(s)=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$,那么 $\zeta(s)=\zeta(k-s)=\zeta(\overline{s})=0(s\in C$ 且 $s\neq 1, s\in C)$且$\xi(s)=\xi(k-s)=\xi(\overline{s})=0(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq 0, s\neq -2n, n\in Z^{+})$ 必定都成立，且

$s=\frac{k}{2}+ti(k\in R$，$t\in R$ 且 $t\neq 0)$ 必定成立，因此$\prod\frac{s}{2}(s\text{-}k)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod\frac{(\frac{k}{2}+ti)}{2}(-k+\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{k}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{k}{2}+ti)=\xi(t)=0(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}, k\in R)$，并且 $\zeta(\frac{k}{2}+ti)=$

$\frac{\xi(t)}{\prod\frac{(\frac{k}{2}+ti)}{2}(-k+\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{k}{2}+ti}{2}}}=\frac{0}{\prod\frac{(\frac{k}{2}+ti)}{2}(-k+\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{k}{2}+ti}{2}}}=0(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}, k\in R)$,因此 t∈R 且 t ≠ 0。 因此等式$\prod\frac{s}{2}(s\text{-}k)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(\frac{k}{2}+ti)=\xi(t)=0(s\in C$ and $s\neq 1, t\in C$ and $t\neq 0, k\in R)$ 的根 t 必定是实数， 且 t≠ 0。但是黎曼 $\zeta(s)(s\in C$ and $s\neq 1)$函数仅满足

$\zeta(1\text{-}s)=2^{1-s}\pi^{-s}Cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)(s\in C$且$s\neq 1)$ 和 $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s\text{-}1)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\ (t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}, k\in R$，$t\in R)$ 和 $\xi(s)=\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}+1)\zeta(s)(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+})$，也就是说仅

ζ(1-s)=$2^{1-s}\pi^{-s}$Cos($\frac{\pi s}{2}$)Γ(s)ζ(s)(s∈C and s≠ 1) 和 $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ (s∈C且s≠ 1) 和

$\xi(s)=\prod\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}+1)\zeta(s)$($t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1$，$s\neq -2n, n\in Z^{+}$)成立，所以仅 Re(s)=$\frac{k}{2}$=$\frac{1}{2}$ 成立，所以仅 k=1 成立。黎曼猜想必须满足黎曼ζ(s)(s∈C and s≠ 1)函数和黎曼 $\xi(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$，$s\neq -2n, n\in Z^{+}$)函数的性质。黎曼ζ(s)（s∈C, s≠1）函数和黎曼ξ(s)（$s\in C$ 且 $s\neq 1$，$s\neq -2n, n\in Z^{+}$）函数的性质是基本的，黎曼猜想必须是正确的，这样才能正确反映黎曼ζ(s)（s∈C, s≠1）函数和黎曼ξ(s)（$s\in C$ 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}$）函数的性质，即黎曼ξ(t)（t∈C, t≠0）函数的根只能是实数，也就是说，Re(s)只能等于$\frac{1}{2}$, Im(s)必须是实数，且 Im(s)不等于 0。黎曼猜想必定成立，是完全正确的。

Reasoning 2:

下面是黎曼在他的论文中得到的一个结果：

2sin(πs)$\prod(s-1)$ζ(s)=$(2\pi)^{s}\sum n^{s-1}((-i)^{s-1}+i^{s-1})$ [1] (等式 3),

根据欧拉公式 $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ ($x\in R$)可以得到：

$e^{i(-\frac{\pi}{2})}$=cos($\frac{-\pi}{2}$) +isin($\frac{-\pi}{2}$) =0-i= -i ,

$e^{i(\frac{\pi}{2})}$=cos($\frac{\pi}{2}$)+isin($\frac{\pi}{2}$)=0+i=i ,

那么

$(-i)^{s-1}+i^{s-1}=(-i)^{-1}(-i)^{s}+(i)^{-1}(i)^{s}=(-i)^{-1}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)s}+i^{(-1)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)s}=$

$ie^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)s}-ie^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)s}$ =i(cos$\frac{-\pi s}{2}$+isin$\frac{-\pi s}{2}$)-i(cos$\frac{\pi s}{2}$+isin$\frac{\pi s}{2}$)=icos($\frac{\pi s}{2}$)-icos($\frac{\pi s}{2}$)+sin($\frac{\pi s}{2}$)+sin($\frac{\pi s}{2}$)

=2sin($\frac{\pi s}{2}$) (等式 4).

根据伽马函数 Γ(s)的性质 Π(s-1)=Γ(s)，并且

$\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}$=ζ(1-s)($n\in Z^{+}$ 并且n遍取所有的正整数,$s\in C$，并且 $s\neq 1$),

把上面(等式 4)的结果代入上面(等式 3)右边，将得到:

2sin(πs)Γ(s)ζ(s)=$(2\pi)^{s}\zeta(1-s)2\sin\frac{\pi s}{2}$(等式 5)。根据倍角公式 sin(πs)=2sin($\frac{\pi s}{2}$)cos($\frac{\pi s}{2}$) ，

如果把它代入 $2\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)=(2\pi)^s\zeta(1-s)2\sin\frac{\pi s}{2}$(等式 5)，

我们将得到: $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)(s\in C \text{ and } s\neq 1)$(等式 6),

因此当 $\zeta(s)=0\,(s\in C$ 且 $s\neq 1)$，那么 $\zeta(1\text{-}s)=0\left(s\in C\right.$ 且 $\left.s\neq 1\right)$，也就是 $\zeta(s)=\zeta(1\text{-}s)=0\left(s\in\right.$

C 且 $s\neq1$。

作如下变换$s\to1-s$,也就是把s当做 $1\text{-}s$代入等式 6，将得到:

$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)(s\in C$ 并且 $s\neq 1)$ (等式 7)。

这就是$\zeta(s)$的泛函方程$\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$. 为了将它改写成一种对称的形式，用伽玛函数的

余元公式

$\Gamma(Z)\Gamma(1\text{-}Z)=\frac{\pi}{\sin(\pi Z)}$ (等式 8)

和勒让德公式

$\Gamma(\frac{Z}{2})\Gamma(\frac{Z}{2}+\frac{1}{2})=2^{1-Z}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(Z)$ (等式 9)，

在 $\Gamma(Z)\Gamma(1\text{-}Z)=\frac{\pi}{\sin(\pi Z)}$ (等式 8) 中，令 $z=\frac{s}{2}$ ，将得到:

$\sin(\frac{\pi s}{2})=\frac{\pi}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}$ (等式 10)，

在 $\Gamma(\frac{Z}{2})\Gamma(\frac{Z}{2}+\frac{1}{2})=2^{1-Z}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(Z)$中，令 $z=1\text{-}s$，将得到:

$\Gamma(1\text{-}s)=2^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(1\text{-}\frac{s}{2})$ (等式 11)，

把 $\sin(\frac{\pi s}{2})=\frac{\pi}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}$ (等式 10) 和 $\Gamma(1\text{-}s)=2^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(1\text{-}\frac{s}{2})$ (等式 11) 的结果代入

$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)(s\in C$ 并且 $s\neq 1)$ (等式 7) 将得到:

$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$ (等式 12),

也就是说

$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$在变换$s\to1-s$下是不变的，这正是 Riemann 在他的论文中所说的。

也就是

$\prod(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\prod(\frac{1-s}{2}-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1\text{-}s)(s\in C$ 且 $s\neq 1)$。

同时 $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\mathrm{Sin}(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1\text{-}s)\zeta(1\text{-}s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$) (等式 7)在变换s→1- s下是不变的 将得到：

$\zeta(1\text{-}s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$)(等式 6)。

那么 $\zeta(1\text{-}s)=\frac{\zeta(s)}{2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)}$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1$), 当 $\zeta(s)=0$，如果

$\zeta(1\text{-}s)=\frac{\zeta(s)}{2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)}$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1$) 在单调函数中有意义 ,则分母$2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1\text{-}s)$ $\neq 0$。 显然 $2^s\neq 0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$), $\pi^{s-1}\neq 0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$), $\Gamma(1\text{-}s)\neq 0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$), 所以 $\sin(\frac{\pi s}{2})\neq 0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$),因此当 $\zeta(s)=0$，且 $s\neq 2n(n\in Z^+)$,且$s\neq 1$，那么$\zeta(1-s)=\zeta(s)=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n$，$n\in Z^+$)。

因为

$L(s, \chi(n))=\chi(n)\zeta(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1, n\in Z_+$ ，且n遍取得所有的正整数) 且

$L(1-s, \chi(n))=\chi(n)\zeta(1\text{-}s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1, n\in Z_+$ ，且n遍取得所有的正整数)，

根据 $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\mathrm{Sin}(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1\text{-}s)\zeta(1\text{-}s)$($s\in C$ and $s\neq 1$)(等式 7),

因此仅 $L(s, \chi(n))=2^s\pi^{s-1}\mathrm{Sin}(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1\text{-}s)L(1-s, \chi(n))$($s\in C$ 且 $s\neq 1, n\in Z^+$)成立。根据函数Γ(s) 和 指 数 函 数 非 零 的 性 质 ， 也 就 是 $\Gamma(\frac{1-s}{2})\neq 0$,且$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\neq 0$， 根 据 $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1\text{-}s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$) (Formula 12),数学家已经证明黎曼$\zeta(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$)函数的复自变量 s 的实部只有在满足 0<Re(s)<1 且 Im(s)≠0 时，$\zeta(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$,且$s\neq -2n, n\in Z^+$)的函数值才为零，所以我们应用 $\zeta(s)=\frac{\eta(s)}{(1-2^{1-s})}=\frac{1}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=-1n-11-21-sp1-p-s-1$($s\in C$ 且 $0<Rs(s)<1$ 且 $s\neq 1$ 且 $Im(s)\neq 0$，$n\in Z+, p\in Z+, s\in C$，n遍取得所有的正整数, p 遍取得所有的质数)。根据

$\zeta(1\text{-}s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$)(等式 6)和 $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\mathrm{Sin}(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1\text{-}s)\zeta(1\text{-}s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$)(等式 7)，既然黎曼已经知道且计算出黎曼 $\zeta(s)$($s\in C$ and $s\neq 1$)函数有非平凡零点,那我们就应用 $\zeta(1\text{-}s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s\in C$ 且 $0<Rs(s)<1$ 且 $s\neq 1$ ，且 $Im(s)\neq 0$,$n\in Z^+$,n遍取得所有的正整数）(等式 6)和 $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\mathrm{Sin}(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1\text{-}s)\zeta(1\text{-}s)$($s\in C$ 且 $0<Rs(s)<$

1 且 s ≠ 1，且$s \neq -2n$, 且 $\mathrm{Im}(s) \neq 0$,n∈ Z^+, n遍取得所有的正整数)(等式 7)，根据函数Γ(s)和指数函数非零的性质 ,也就是 $\Gamma(\frac{1-s}{2}) \neq 0$, 且 $\pi^{-\frac{1-s}{2}} \neq 0$,所以当 ζ(s)=0(s ∈ C 且 $0 < \mathrm{Rs}(s) < 1$ 且 s ≠ 1 ，$s \neq -2n$, 且 $\mathrm{Im}(s) \neq 0$,n ∈ Z^+, n遍取得所有的正整数)， 那 么 ζ(1-s)=0 (s ∈ C 且 $0 < \mathrm{Rs}(s) < 1$ 且 s ≠ 1，且$s \neq -2n$, 且 $\mathrm{Im}(s) \neq 0$,n∈ Z^+, n遍取得所有的正整数)，所以 ζ(s)=ζ(1-s)=0(s ∈ C 且 $0 < \mathrm{Rs}(s) < 1$ 且 s ≠ 1 , $s \neq -2n$, 且 $\mathrm{Im}(s) \neq 0$, ,n∈ Z^+, n遍取得所有的正整数)。

Because e $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \approx 2.7182818284...$ ， e 是自然常数， 且因为 $\sin(Z)=\frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2i}$, 假设 Z=s= σ+ti (σ ∈R,t∈R 且 t ≠ 0)，那么

$\sin(s)=\frac{e^{is}-e^{-is}}{2i} = \frac{e^{i(\sigma+ti)}-e^{-i(\sigma+ti)}}{2i}$,

$\sin(\overline{s})=\frac{e^{i\overline{s}}-e^{-i\overline{s}}}{2i} = \frac{e^{i(\sigma-ti)}-e^{-i(\sigma-ti)}}{2i}$,

根据 $x^s=x^{(\sigma+ti)}=x^\sigma x^{ti}=x^\sigma(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))^t=x^\sigma(\cos(t\ln x)+i\sin(t\ln x))(x>0)$，那么

$e^s=e^{(\sigma+ti)}=e^\sigma e^{ti}=e^\sigma(\cos(t)+i\sin(t)) = e^\sigma(\cos(t)+i\sin(t))$,
$e^{is}=e^{i(\sigma+ti)}=e^{\sigma i}(\cos(it)+i\sin(it)) = (\cos(\sigma)+i\sin(\sigma))(\cos(it)+i\sin(it))$,
$e^{i\overline{s}} = e^{i(\sigma-ti)}=e^{\sigma i}(\cos(-it)+i\sin(-it)) = (\cos(\sigma)+i\sin(\sigma))(\cos(it)-i\sin(it))$,
$e^{-is}=e^{-i(\sigma+ti)}=e^{-\sigma i}(\cos(-it)+i\sin(-it)) = (\cos(\sigma)-i\sin(\sigma))(\cos(it)-i\sin(it))$,
$e^{-i\overline{s}} = e^{-i(\sigma-ti)}=e^{-\sigma i}(\cos(it)+i\sin(it)) = (\cos(\sigma)-i\sin(\sigma))(\cos(it)+i\sin(it))$,
$2^s=2^{(\sigma+ti)}=2^\sigma 2^{ti}=2^\sigma(\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2))^t=2^\sigma(\cos(t\ln 2)+i\sin(t\ln 2))$,
$2^{\overline{s}}=2^{(\rho-ti)}=2^\sigma 2^{-ti}=2^\sigma(\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2))^{-t}=2^\sigma(\cos(t\ln 2)-i\sin(t\ln 2))$,
$\pi^{s-1}=\pi^{(\sigma-1+ti)}=\pi^{\sigma-1}\pi^{ti}=\pi^{\rho-1}(\cos(\ln\pi)+i\sin(\ln\pi))^t=\pi^{\sigma-1}(\cos(t\ln\pi)+i\sin(t\ln\pi))$,
$\pi^{\overline{s}-1}=\pi^{(\sigma-1-ti)}=\pi^{\sigma-1}\pi^{-ti}=\pi^{\sigma-1}(\cos(\ln\pi)+i\sin(\ln\pi))^{-t}=2^{\sigma-1}(\cos(t\ln\pi)-i\sin(t\ln\pi))$,

因此

$2^s=\overline{2^{\overline{s}}}$, $\pi^{s-1}=\overline{\pi^{\overline{s}-1}}$,

且

$\frac{e^{is}-e^{-is}}{2i} = \overline{\frac{e^{i\overline{s}}-e^{-i\overline{s}}}{2i}}$,

因此

$\sin(s)=\overline{\sin(\overline{s})}$,

且

$\sin(\frac{\pi s}{2})=\overline{\sin(\frac{\pi\bar{s}}{2})}$ 。

根据复数域上 Γ(s)函数的定义 ：

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}\, e^{-t}dt(s \in C)$，

在 Re(s)>0 中，该定义可由解析延拓原理推广到除非正整数外的整个复数域，

因此

$\Gamma(s)=\overline{\Gamma(\bar{s})}$ ，

且

$\Gamma(1-s)=\overline{\Gamma(1-\bar{s})}$.当

$\zeta(1-\bar{s})=\overline{\zeta(1-\bar{s})}=0$ 且 $\zeta(1-s)=\zeta(\bar{s})=0$ ($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数)，并根据 $\zeta(s)=2^{s}\pi^{s-1}\,Sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$ ($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数)，那么 $\zeta(s)=\overline{\zeta(\bar{s})}$($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数)成立,当 $\zeta(s)=\overline{\zeta(\bar{s})}=0$($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数）则 $\zeta(1-s)=\zeta(\bar{s})=0$ ($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数）也成立.因此仅有 $\zeta(\sigma+ti)=\zeta(\sigma-ti)=0$ 成立.根据 $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数)，既然黎曼已经知道且计算出黎曼 $\zeta(s)$($s \in C$ and $s \neq 1$)函数有非平凡零点，也就是说在 $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数)中， $\zeta(s)=0$ ($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数）成立，所以当 $\zeta(s)=0$($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数)，那么 $\zeta(s)=\zeta(1-s)=0$ ($s \in C$ 且 $0 < Rs(s) < 1$ 且 $s \neq 1$ ，且 $Im(s) \neq 0$,$n \in Z^{+}$,n遍取得所有的正整数)

成立. 在证明 ζ(s)=ζ(1-s)=0 和 ζ(s)=ζ($\overline{s}$)=0 的过程中，ζ(s)是一个泛函数。在我的分析中，ζ(s)=0, ζ(1-s)=0 和 ζ($\overline{s}$)=0 的函数表达式可以是相同的或等价的，都符合$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$($s \in$ C,且 $s \neq 1$，$n \in Z^+$，且n遍取得所有的正整数)，都可以取得零值。通过 ζ(s)$= 0\left(s \in \right.$ C,且 $\left. s \neq 1\right)$，可知函数 ζ(s)的自变量 s 与$\overline{s}$和 1-s 的关系只有C_3^2=3 种等值关系，也就是 s=$\overline{s}$ 或 s=1-s 或 $\overline{s}$=1-s.再加上 s 与 $\overline{s}$不相等但共轭，一共四种关系。正如下:通过 ζ(s)=ζ(1-s)=0($s \in$ C 且 $s \neq 1$)和 ζ(s)=ζ($\overline{s}$)=ζ(1-s)=0($s \in$ C 且 $s \neq 1$), 当ζ(s)=0 ，可知 ζ(s)= ζ(1-s)=0 表明 s 和 1-s 要对称，既可以关于点($\frac{1}{2}$, 0)对称，也可以在垂直于实数轴的直线上关于垂足($\frac{1}{2}$, 0 i)对称，而 ζ(s)= ζ($\overline{s}$)=0 表明要 s 和$\overline{s}$要共轭，而 s 和$\overline{s}$显然是复平面上位于垂直于实数轴的直线上的关于垂足$\left(\frac{1}{2}, 0\mathrm{i}\right)$对称的两个复数，s 和既要和$1-s$关于垂足($\frac{1}{2}$, 0i)对称 ,s 又要和 $\overline{s}$在垂直于实数轴的直线上关于垂足($\frac{1}{2}$, 0i)共轭，而 s 和$\overline{s}$ 共轭本身又包含了对称 ,那么只能有 1-s=$\overline{s}$成立。那么仅有 s=$\overline{s}$ 或 s=1-s 或 $\overline{s}$=1-s, 因此 s∈R 且 $s = -2n(n \in Z^+)$，或 σ+ti=1-σ-ti，或 σ-ti=1-σ $-$ ti $\neq 0$, 即 s∈R 且 $s = -2n(n \in Z^+)$，或 σ=$\frac{1}{2}$，$t \in R$且$t = 0$,或 σ=$\frac{1}{2}$，$t \in R$且$t \neq 0$。因为 $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \to +\infty, \zeta(1) \to +\infty$, ζ(1)是调和级数，它发散，而 $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$更是发散,因此它们都应该被舍去. 所以仅当 ρ=$\frac{1}{2}$，下面三个等式ζ(σ + ti)= 0, ζ(1 − σ − ti)= 0, 和 ζ(σ-ti)=0 才都成立。因此如果不考虑 $s = -2n(n \in Z^+)$，那仅有 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 $t \neq 0$) 和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R且 $t \neq 0$)成立。由于黎曼已经证明黎曼 ζ(s)($s \in$ C,且 $s \neq 1$)函数有零点，也就是说，在 ζ(1-s)=$2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s \in$ C and $s \neq 1$)(Formula 7)中，ζ(s)=0 ($s \in$ C,且 $s \neq 1$) 为真。根据黎曼得到得的这个等式 $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ $\left(s \in \mathrm{C}\right.$ 且$s \neq 1$，且 $s \neq -2n, n \in Z^+$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$, 因 此 $\xi(s) = \xi(1-s)$($s \in$ C 且$s \neq 1$,且 $s \neq -2n, n \in Z^+$，n 遍取所有正整数)。 因为 $\Gamma(\frac{s}{2}) = \overline{\Gamma(\frac{\overline{s}}{2})}$，且$\pi^{-\frac{s}{2}} = \overline{\pi^{-\frac{\overline{s}}{2}}}$,且因为ζ(s)=$\overline{\zeta(\overline{s})}$($s \in$ C,且 $s \neq 1$)，因此ξ(s)=$\overline{\xi(\overline{s})}$($s \in$ C,且 $s \neq 1$,且 $s \neq -2n, n \in$

Z^{+}，n 遍取所有正整数)。

根据, ξ(s)=ξ$(1-s)$和 ξ(s)=$\overline{\xi(\overline{s})}$$(s\in C$ 且$s\neq 1$, 且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数)，通过 ξ(s)= $0\left(s\in C\right.$ 且$s\neq 1$ 且$s\neq 0$ 且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$, 可知函数 ξ(s) $\left(s\in C\right.$ 且$s\neq 1$, 且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$的自变量 s 与 $\overline{s}$和 1-s 的关系只有 C_3^2=3 种等值关系，也就是 s=$\overline{s}$ 或 s=1-s 或 $\overline{s}$=1-s.再加上 s 与

$\overline{s}$不相等但共轭，一共四种关系。 正 如 通 过 ζ(s)=ζ(1-s)=0 $(s\in C$, 且 $s\neq 1)$ 和 ζ(s)=ζ($\overline{s}$)=ζ(1-s)=0$(s\in C$ 且 $s\neq 1)$,那么仅有 s=$\overline{s}$ 或 s=1-s 或 $\overline{s}$=1-s,因此 s∈R 且 $s=-2n(n\in Z^{+})$，或 σ+ti=1-σ-ti ，或 σ-ti=1-σ $-$ ti $\neq 0$，所以当 ζ(s)=0$(s\in C$, 且 $s\neq 1)$,那么 ζ(s)=ζ$(1-s)=\zeta(\overline{s})=0(s\in C$ 且 $s\neq 1)$ 和 ξ(s) = ξ$(1-s)$ = ξ($\overline{s}$) =0 $\left(s\in C\right.$ 且$s\neq 1$, 且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$)必定都正确。又由于黎曼 ζ(s) $(s\in C$, 且 $s\neq 1)$函数的平凡零点与 ξ(s)中的 $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$中的极点相抵消，所以黎曼 ζ(s) $(s\in C$, 且 $s\neq 1)$函数的非平凡零点和黎曼 ξ(s) $\left(s\in C\right.$ 且$s\neq 1$, 且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$ 函 数 的 零 点 是 相 同 的 。ζ(s)$(s\in C$ 且 $s\neq 1)$和黎曼ξ(s) $\left(s\in C\right.$ 且$s\neq 1$ 且$s\neq 0$ 且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}\left.\right)$函数中的复数根满足 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 t≠0)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 t≠0)。通过黎曼定义的函数$\prod\frac{s}{2}$(s-1)$\pi^{-\frac{s}{2}}$ζ(s)=ξ(t)$(t\in C$ 且 $t\neq 0, s\in C$ 且 $s\neq 1)$ 和黎曼定义的 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈C 且 $t\neq 0$), 因为 s≠1, 且 $\prod\frac{s}{2}\neq 0$, $\pi^{-\frac{s}{2}}\neq 0$, 因此 $\prod\frac{s}{2}$(s-1)$\pi^{-\frac{s}{2}}\neq 0$。当 ξ(t)= 0, 那么

$\prod\frac{s}{2}$(s-1)$\pi^{-\frac{s}{2}}$ζ(s)= $\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)$=ξ(t)=0, 且

ζ($\frac{1}{2}$+ti)= $\frac{\xi(t)}{\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}}$ = $\frac{0}{\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}}=0$ ，所以 $t\in R$ 且 $t\neq 0$。 所以方程 $\prod\frac{s}{2}$(s-1)$\pi^{-\frac{s}{2}}$ζ(s)= $\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}(-\frac{1}{2}+ti)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)$=ξ(t)=0 与方程 $4\int_1^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)$ dx=ξ(t)=0 $(t\in C$ 且 $t\neq 0)$和方程 ξ(t)=$\frac{1}{2}$ -$(t^2+\frac{1}{4})\int_1^{\infty}\Psi(x)\ x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)$=0$(t\in C$ 且 $t\neq 0)$的根必定是实数且 $t\neq 0$。如果 Re(s)=$\frac{k}{2}$$(k\in R)$,那么 ζ(k-s)=$2^{k-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)(s\in$

C 且 $\mathrm{s}\neq 1, \mathrm{k}\in \mathrm{R})$ 和 $\xi(\mathrm{k}-\mathrm{s})=\frac{1}{2}$ s(s-k) $\Gamma(\frac{\mathrm{s}}{2})\pi^{-\frac{\mathrm{s}}{2}}\zeta(\mathrm{s})(\Big(\mathrm{s}\in\mathrm{C}$ 且$s\neq 1$，且 $\mathrm{s}\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数$\Big), \mathrm{k}\in \mathrm{R})$都成立。因此当 $\zeta(\mathrm{s})=0(\mathrm{s}\in \mathrm{C}$,且 $\mathrm{s}\neq 1$,那么 $\zeta(\mathrm{s})=\zeta(\mathrm{k}-\mathrm{s})=\zeta(\overline{\mathrm{s}})=0(\mathrm{s}\in \mathrm{C}$,且 $\mathrm{s}\neq 1, \mathrm{k}\in \mathrm{R})$ 和 $\xi(\mathrm{s})=\xi(\mathrm{k}-\mathrm{s})=\xi(\overline{\mathrm{s}})=0$ $\Big(\mathrm{s}\in \mathrm{C}$ 且$s\neq 1$，且 $\mathrm{s}\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数, $\mathrm{k}\in \mathrm{R}\Big)$ 必定成立，且 $\mathrm{s}=\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti}(\mathrm{k}\in \mathrm{R}, \mathrm{t}\in \mathrm{R}$ and $\mathrm{t}\neq 1)$ 必定成立，那么

$\prod\frac{\mathrm{s}}{2}(\mathrm{s}-\mathrm{k})\pi^{-\frac{\mathrm{s}}{2}}\zeta(\mathrm{s})=\prod\frac{\mathrm{s}}{2}(-\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})\pi^{-\frac{\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti}}{2}}\zeta(\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})=\xi(\mathrm{t})=0(\mathrm{k}\in \mathrm{R}, \mathrm{t}\in \mathrm{R}$ 且 $\mathrm{t}\neq 0, \mathrm{k}\in \mathrm{R})$，且

$\zeta(\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})=\frac{\xi(\mathrm{t})}{\prod\frac{\mathrm{s}}{2}(-\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})\pi^{-\frac{\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti}}{2}}}=\frac{0}{\prod\frac{\mathrm{s}}{2}(-\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})\pi^{-\frac{\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti}}{2}}}=0(\mathrm{k}\in \mathrm{R}, \mathrm{t}\in \mathrm{R}$ 且 $\mathrm{t}\neq 0, \mathrm{s}\in \mathrm{C}$ 且 $\mathrm{s}\neq 1)$,因此 $\mathrm{t}\in \mathrm{R}$ 且 $\mathrm{t}\neq 0$. 所以方程

$\prod\frac{\mathrm{s}}{2}(\mathrm{s}-\mathrm{k})\pi^{-\frac{\mathrm{s}}{2}}\zeta(\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})=\prod\frac{\mathrm{s}}{2}(-\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})\pi^{-\frac{\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti}}{2}}\zeta(\frac{\mathrm{k}}{2}+\mathrm{ti})=\xi(\mathrm{t})=0(\mathrm{k}\in \mathrm{R}, \mathrm{t}\in \mathrm{R}$ 且 $\mathrm{t}\neq 0, s\in \mathrm{C}$ 且$s\neq 1$，且 $\mathrm{s}\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数)的根必定是实数且$\mathrm{t}\neq 0$。碟但是黎曼 $\zeta(\mathrm{s})$函数仅满足 $\zeta(1-\mathrm{s})=2^{1-\mathrm{s}}\pi^{-\mathrm{s}}\cos(\frac{\pi \mathrm{s}}{2})\Gamma(\mathrm{s})\zeta(\mathrm{s})(\mathrm{s}\in \mathrm{C}$ 且 $\mathrm{s}\neq 1)$ 和 $\xi(\mathrm{s})=\frac{1}{2}\mathrm{s}(\mathrm{s}-1)\Gamma\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)\pi^{-\frac{\mathrm{s}}{2}}\zeta(\mathrm{s})(s\in \mathrm{C}$ 且$s\neq 1$，且 $\mathrm{s}\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数)，也就是说仅 $\zeta(1-\mathrm{s})=2^{1-\mathrm{s}}\pi^{-\mathrm{s}}\cos(\frac{\pi \mathrm{s}}{2})\Gamma(\mathrm{s})\zeta(\mathrm{s})(\mathrm{s}\in \mathrm{C}$ and $\mathrm{s}\neq 1)$ 成立，因此仅 $\mathrm{Re}(\mathrm{s})=\frac{\mathrm{k}}{2}=\frac{1}{2}(\mathrm{k}\in \mathrm{R})$ 成立，所以仅 k=1 成立。黎曼猜想必须满足黎曼$\zeta(\mathrm{s})$（$\mathrm{s}\in\mathrm{C}, \mathrm{s}\neq 1$）函数和黎曼$\xi(\mathrm{s})$（$s\in \mathrm{C}$ 且$s\neq 1$ 且 $\mathrm{s}\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$）函数的性质，黎曼 $\zeta(\mathrm{s})$（$\mathrm{s}\in\mathrm{C}$ 且 $\mathrm{s}\neq 1$）函数和黎曼$\xi(\mathrm{s})$（$s\in \mathrm{C}$ 且$s\neq 1$ 且 $\mathrm{s}\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$）函数的性质是基本的，黎曼猜想必须是正确的，才能正确反映黎曼$\zeta(\mathrm{s})$（$\mathrm{s}\in\mathrm{C}$ 且 $\mathrm{s}\neq 1$）函数和黎曼$\xi(\mathrm{s})$（$s\in \mathrm{C}$ 且$s\neq 1$ 且 $\mathrm{s}\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数）函数的性质，即黎曼$\xi(\mathrm{t})$（$\mathrm{t}\in\mathrm{C}$ 且 $\mathrm{t}\neq 0$）函数的根只能是实数，即 $\mathrm{Re}(\mathrm{s})$只能等于$\frac{1}{2}$，且 $\mathrm{Im}(\mathrm{s})$必须是实数，并且 $\mathrm{Im}(\mathrm{s})$不等于零。所以黎曼猜想必定是正确的。

黎曼在他的论文中得到

$$\prod\left(\frac{\mathrm{s}}{2}-1\right)\pi^{-\frac{\mathrm{s}}{2}}\zeta(\mathrm{s})=\int_{1}^{\infty}\psi(x)\ x^{\frac{\mathrm{s}}{2}-1}\mathrm{d}x+\int_{1}^{\infty}\psi(\frac{1}{x})\ x^{\frac{\mathrm{s}-3}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x^{\frac{\mathrm{s}-3}{2}}-x^{\frac{\mathrm{s}}{2}-1})\mathrm{d}x$$

$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\psi(x)\,(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}})dx$(s∈C and s≠ 1)，因为 $\frac{1}{s(s-1)}$ 和

$\int_1^{\infty}\psi(x)(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}})dx$ 在变换 s→1-s 下都是不变的。如果我引入辅助函数 $\psi(s)=\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)(s\in C \text{ and } s\neq 1)$，那么我可以把它写成ψ(s)=ψ(1-s)。但是把因子 s(s-1)加到ψ(s)中引入系数 $\frac{1}{2}$ 会更方便，这正是黎曼所做的，就是要取 $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)(s\in C$ 且 $s\neq 1$，且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数)。因为因子（s-1）消掉了 s=1 时ζ(s)的第一个极点，因子 s 消掉了 $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ 在 s=0 时的极点，且 s 等于-2，-4,-6，…，和 $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ 的其余极点也抵消了，所以ξ(s)是一个整函数。而因子 s（s-1）在 s→1-s 变换下显然没有变化，所以我们仍有有函数方程ξ(s)=ξ(1-s)=0($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数)，同时根据 $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)(s\in C \text{ and } s\neq 1)$（等式 7），如果 ζ(s)=0 (s∈C 且 s≠ 1),那么必ζ(1-s)=0（s∈C 且 s≠ 1)成立，也就是说 ζ(s)=ζ(1-s)=0(s∈C 且 s≠ 1)。根据黎曼的假设 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in C$ 且 $t\neq 0)$, S 和 t 差一个线性变换，它是 90 度旋转加上 $\frac{1}{2}$ 的平移。所以 s 平面上的直线 Re(s)= $\frac{1}{2}$ 对应于 t 平面上的实数轴，黎曼 ζ(s)（s∈C,且 s≠1）函数和黎曼 ξ(s)（$s\in C$ 且 $s\neq 1$，且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$）函数在临界线上的的零点的虚部对应于函数ξ(t)（t∈C 且 t≠0）的实根，所以 $\xi(t)=0$ 中的 t 与 $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=0$ 中的 t 是一致的。在黎曼的函数ξ(t)(t ∈ C 且 t ≠ 0)中,函数方程 $\xi(s)=\xi(1-s)(s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数)变为方程 $\xi(t)=$
$\xi(-t)\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0\right)$。ξ(t)是一个偶函数，故而其幂级数展开只有偶次幂，它的零点在 $t=0$ 时关于零点(0,0)对称分布。$\xi(t)=0$ 中的 t，黎曼设计的函数ξ(t)（t∈C, 且 t≠0）和黎曼定义的 s= $\frac{1}{2}$+t(t∈C 且 t≠0)和ξ(s)=ξ(1-s)($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数）中的 t 等价于ξ(t)=ξ(-t)（t∈C 且 t≠0）中的 t。所以 $\xi(s)\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}\text{，n 遍取所有正整数}\right)$ 是个偶函数，

$\xi(s)\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}\text{，n 遍取所有正整数}\right)$ 在复平面上的零点对称地分布

在与复平面的实数轴相垂直的直线上。当 $\xi(t)=0\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0\right)$，也就是$\xi(t)=\xi(-t)=0\left(t\in C \text{ 且 } t\neq 0\right)$的零点是关于 $t=0$ 对称分布的,当 $\xi(s)=0\left(s\in C \text{ 且} s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}\right)$, 也就是 $\xi(s)=\xi(1-s)=0\left(s\in C \text{ 且} s\neq 1\right.$，且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$, $\xi(s)\left(s\in C \text{ 且} s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}\right.$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$ 的零点位于垂直于复平面实数轴的直线上，并关于点（$\frac{1}{2}$,0i）对称分布。所以当$\xi(s)=\xi(1-s)=0\left(s\in C \text{ 且} s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}\right.$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$，那么 s 和 1-s 是函数ξ(s)（ $s\in C \text{ 且} s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数）与复平面的实数轴垂直的直线上的关于点（$\frac{1}{2}$,0i）对称分布的一对零点。当 ζ(s)=0(s∈C 且 s≠ 1), 那么 ζ(1-s)=0(s∈C 且 s≠ 1) ,也就是说 ζ(s)=ζ(1-s)=0$\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1\right)$. ζ(s)=ζ(1-s)=0$\left(s\in C \text{ 且 } s\neq 1\right)$ 和 $\xi(s)=\xi(1-s)=0\left(s\in C \text{ 且} s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}\right.$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$只是函数的名字不一样的，这意味着函数 ζ(s)(s∈C,s≠1）和函数ξ(s)($s\in C \text{ 且} s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数）的零点的自变量 s 的值，除了负偶数，其余零点 s 的值都是完全相同的。因为复平面上的 ζ(s)(s∈C, s≠1）函数的非平凡零点位于与复平面实数轴相垂直的直线上，并关于点($\frac{1}{2}$,0i）对称分布， 因此当 $\xi(s)=\xi(1-s)=0\left(s\in C \text{ 且} s\neq 1 \text{ 且 } s\neq -2n, n\in Z^{+}\right.$，n 遍取所有正整数$\left.\right)$，则 s 和 $1-s$ 是函数 $\xi(s)\left(s\in\right.$ C 且s≠1 且 s≠$-2n,n$∈Z+，n 遍取所有正整数 1 是与复平面内实数轴相垂直的直线上关于点$\left(\frac{1}{2}, 0i\right)$对称的一对零

点。因为$\overline{\zeta(s)}=\zeta(\bar{s})$(s=$\sigma$+ti,$s\in C$ 且 $s\neq 1$),在黎曼定义的 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈C 且 $t\neq 0$) 中,s 是一个复数，而 $\overline{\zeta(s)}=\zeta(\bar{s})$(s=$\sigma$+ti, $\sigma\in R$, t ∈R and $t\neq 0$)中的s 与黎曼定义的s=$\frac{1}{2}$+ti($t\in C$ and $t\neq 0$))中的s 是一致的。当ζ(s)=ζ($\bar{s}$)=0(s=σ+ti, σ ∈R, t∈R, t≠0)，因为 s 和 $\bar{s}$是一对共轭复数，所以 s 和 $\bar{s}$必定是同一个复平面内经过点（σ,0i）与该复平面的实数轴相垂直的直线上关于点（σ,0i）对称的零点。s 是 1-s 的对称零点，又是$\bar{s}$的对称零点。s 既是 1-s 的对称零点，s 又是$\bar{s}$的对称零 点。黎曼 ζ(s)函数的同一个零点 s 在垂直于复平面的实数轴的直线上的对称零点怎么

会是既关于点($\frac{1}{2}$,0i)对称分布的一个零点 $1-s$，又是垂直于复平面实数轴的直线上关于点(σ,0i)对称分布的一个零点$\bar{s}$？除非σ和$\frac{1}{2}$是同一个值，即σ=$\frac{1}{2}$，而且仅有 1-s=$\bar{s}$成立，也就是 1-s 和 s 也共轭，否则绝无可能。这是由经过($\frac{1}{2}$,0i)垂直于复平面实数轴的直线上的黎曼 ζ(s)函数的零点关于该直线与复平面实数轴的垂足($\frac{1}{2}$,0i)对称分布的零点的唯一性决定的。在同一个复平面内，从零点 s 向复平面实数轴作垂线，仅能作出一条,垂足也只有一个。在同一个复平面，经过($\frac{1}{2}$,0i)垂直于复平面实数轴的直线上的 ζ(s)函数的同一个零点关于该直线与复平面实数轴的垂足($\frac{1}{2}$,0i)对称分布的零点只会有一个。 从方程的角度来考虑，因为$\overline{\zeta(s)}$=ζ($\bar{s}$) (s=σ+ti, σ∈R,t∈R 且 $t\neq 0$)，那么当 ζ(σ+ti)=0,则 ζ(σ-ti)=0，又因为 ζ(s)=ζ$(1-s)$=0，那么 ζ(1-σ-ti)=0。因为下面三个方程 ζ(σ+ti)=0， ζ(σ-ti)=0，ζ(1-σ-ti)=0 都成立，那么只能 1-σ=σ，σ=$\frac{1}{2}$。调和级数 ζ(1)是发散的，已由中世纪晚期法国学者奥雷姆(1323-1382)证明。 因为级数 ζ($\frac{1}{2}$)的各项的分母比级数ζ(1)的各对应项的分母更小，所以 ζ($\frac{1}{2}$)更是发散的。所以 s=$\frac{1}{2}$不是级数 ζ(s)的零点，舍去。当 ζ(s)=0，求解 1-s=s，也得到仅有 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 t≠0)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 t≠0)成立。所以当σ=$\frac{1}{2}$并且 ζ(s)=0(s∈C 且 s≠1)。黎曼假设的 s= $\frac{1}{2}$+ti(t∈C 且 $t\neq 0$) 必须等价于 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 t≠0)。黎曼的定义 s= $\frac{1}{2}$+ti(t∈C 且 $t\neq 0$)和黎曼猜想必须满足黎曼ζ(s)=0（s∈C, s≠1）函数和黎曼ξ(s)=0（$s\in\mathrm{C}$ 且$s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数）函数的性质，黎曼ζ(s)(s∈C, s≠1)函数和黎曼ξ(s)($s\in\mathrm{C}$ 且$s\neq 1$,且 $s\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数）函数的性质是基本的，黎曼猜想必须是正确的，才能反映黎曼ζ(s)（s∈C 且 s≠1）函数和黎曼ξ(s)($s\in\mathrm{C}$ 且$s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数)函数的性质，即黎曼ξ(t)(t∈C 且 t≠0) 函数的根只能是实数，即：Re(s)只能等于$\frac{1}{2}$，而 Im(s)必须是实数，而且 Im(s)不等于 0。所以黎曼猜想必定是正确的。黎曼在他的论文中得到了$\prod\frac{s}{2}$(s-1)$\pi^{-\frac{s}{2}}$ζ(s)=ξ(t)($s\in\mathrm{C}$ 且$s\neq 1$，且 $s\neq -2n, n\in \mathrm{Z}^{+}$，n 遍取所有正整数t∈R 且 $t\neq 0$,)和

ξ(t)=$\frac{1}{2}$ -$(t^2+\frac{1}{4})\int_1^{\infty}\Psi(x)\,x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{tln}x\right)dx$(t∈R 且 $t\neq 0$) ，或

$\prod\frac{s}{2}$ (s-1) $\pi^{-\frac{s}{2}}$ ζ(s)= $\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}$ ($-\frac{1}{2}$ +ti) $\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)$ =ξ(t)(t ∈ R and t ≠ 0, $s \in$ C 且 $s \neq 1$，且 s ≠ $-2n, n \in Z^{+}$) 和 ξ(t)=4 $\int_{1}^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)$) dx(t ∈ R 且 t ≠ 0） . 因 为 ζ($\frac{1}{2}$+ti)=0(t∈R 且 t ≠ 0), 所以方程

$\prod\frac{s}{2}$(s-1) $\pi^{-\frac{s}{2}}$ ζ(s) = $\prod\frac{(\frac{1}{2}+ti)}{2}$($-\frac{1}{2}$+ti) $\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta(\frac{1}{2}+ti)$ =ξ(t)= 0 (t ∈ R and t ≠ 0, $s \in$ C 且 $s \neq 1$ 且 s ≠ $-2n, n \in Z^{+}$) 和 4 $\int_{1}^{\infty}\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)dx$=ξ(t)= 0(t∈R and t ≠ 0) 和

ξ(t)=$\frac{1}{2}$ -($t^{2}+\frac{1}{4}$) $\int_{1}^{\infty}\Psi(x)\ x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\ln x)\,dx$=0(t ∈ R and t ≠ 0）的根必定实数。当ζ(s) = 0(s ∈ C 且 s ≠ 1) 且 ξ(t)=0(t ∈ C and t ≠ 0), 如果方程 ξ(t)=0(t∈C,and t ≠ 0)的根的实数部分在 0和 T 之间，那么方程ξ(t)=0 的实部在 0 到 T 之间的复数根的个数近似等于$\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ [1]，黎曼对零数估计的这个结果在 1895 年被曼戈尔特严格地证明了。那么，当ζ(s)=0（s∈C 且 s≠1）且ξ(t)=0（t∈C 且 t≠0）时，方程ξ(t)=0（t∈C 且 t≠0）的实部在 0 和 T 之间的实根个数年必须近似等于$\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ [1] ,因此当黎曼 ζ(s)（s∈C 且 s≠1）函数有非平凡零点时，黎曼猜想必定是完全正确的。N=$\lim_{T\to+\infty}(\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi})\to\infty$,所以黎曼ζ(s)（s∈C 且 s≠1）函数在 Re(s)= $\frac{1}{2}$的临界直线上的非平凡零点就有无穷多个，1921 年，英国数学家哈代已经证明黎曼ζ(s)（s∈C 且 s≠1）函数在 Re(s)=$\frac{1}{2}$的临界直线上的非平凡零点就有无穷多个，但他没有证明黎曼 ζ(s)（s∈C 且 s≠1）函数的非平凡零点全部都位 Re(s)= $\frac{1}{2}$的临界直线上。

根据黎曼论文中得到的 2sin(πs)$\prod(s-1)\zeta(s)=\int_{\infty}^{\infty}\frac{x^{s-1}dx}{e^{x}-1}$函数，我们知道黎曼 ζ(s)（s∈C, 且 s ≠1）函数是由二对一映射，甚至是由多对一映射的确定的泛函数，或者是一对二映射如果我们把黎曼ζ(s)s∈C 且 s≠1）函数看作是定义域包含实数的一般复数，那么 s=-2n（n 是正整数的是黎曼ζ(s)（s∈C 且 s≠1）函数的唯一的一类实数零点根，也是朗道-西格尔函数 L(β,1)(β∈R）唯一的一类实数零点根。如果我们把黎曼ζ(s)（s∈C 且 s≠1）函数看作是定义域不包含实数的一般复数，那么 s=$\frac{1}{2}$+ti（t∈R 且 t≠0）和 s=$\frac{1}{2}$-ti（t∈R 且 t≠0）是黎曼ζ(s)（s∈C, s≠1）

函数唯一的一类复数零点根，除了负偶数，朗道-西格尔函数 L(β, X(n))=0(β∈R 且$\beta\neq -2n, n$ 是正整数, X(n)= 1) 的实数根不存在。

定义:

假设 a(n)是一个单位积函数，则狄利克雷级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}\left(s\in C 且 s\neq 1, n\in Z^{+} 且 n 遍取得所有的正整数\right)$等于欧拉积$\prod_{p} P(p，s)\left(s\in\right.$ C 且 s≠1,p∈Z+ 且 p 遍取得所有的质数。将乘积作用于所有素数 p，可表示为：

1+$a(p)p^{-s}$+$a(p^{2})p^{-2s}$+...，这可以看作是一个形式生成函数，其中形式欧拉积展开的存在和 a(n)为积函数是相互充要条件。当 a(n)是完全积分函数时，得到一个重要的特例: 其中 $P(p，s)\left(s\in C 且 s\neq 1, p\in Z^{+} 且 p 遍取得所有的质数\right)$是一个几何级数，且$P(p,s)=\frac{1}{1-a(p)p^{-s}}$ $\left(s\in C 且 s\neq 1, p\in Z^{+}且 p 遍取得所有的质数\right)$。且 $P(p,s)=\frac{1}{1-a(p)p^{-s}}$ $\left(s\in C 且 s\neq 1, p\in Z^{+}且 p 遍取得所有的质数\right)$。当 a(n)=1($n\in Z^{+}$且 n 遍取得所有的正整数)时，它是黎曼ζ(s)(s∈C 且 s≠1）函数，更一般地说是狄利克雷特征。

欧拉积公式：对于任意复数 s，当

$Rs(s) > 1$ 且 $s\neq 1$,那么 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} =$

$\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}\left(s\in C 且 s\neq 1, p\in Z^{+} 且 p 遍取得所有的质数, n\in\right.$

$\left.Z^{+} 且 n 遍取得所有的正整数\right)$,且当 $Rs(s) > 1$ 黎曼 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ = $\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}$ ($s\in$

C 且 $Rs(s) > 0$ ，$s\neq 1$,n∈ Z^{+}, $p\in Z^{+}$, s ∈C ,且n遍取得所有的正整数, p 遍取得所有的质数)。

黎曼ζ函数表达式：ζ(s)=$1/1^{s}+1/2^{s}+1/3^{s}+...+1/m^{s}$ （m 趋于无穷，且 m 总是偶数）(1 式)，

(1 式)表达式两边同时乘以（$1/2^{s}$）那么，$(1/2^{s})\zeta(s)=1/1^{s}(1/2^{s})+1/2^{s}(1/2^{s})+1/3^{s}(1/2^{s})$ $+...+1/m^{s}(1/2^{s})=1/2^{s}+1/4^{s}+1/6^{s}+...+1/(2m)^{s}$ (2 式)，

(1 式) - (2 式)得:

$\zeta(s)-(1/2^{s})\zeta(s)=1/1^{s}+1/2^{s}+1/3^{s}+...+1/m^{s}-[1/2^{s}+1/4^{s}+1/6^{s}+...+1/(2m)^{s}]$，

欧拉积公式的推导如下：

$\zeta(s)$-$(1/2^s)\zeta(s)$=$1/1^s$+$1/3^s$+$1/5^s$+…+$1/(m-1)^s$。广义欧拉积公式：

假设 f(n)是一个满足 $f(n_1)f(n_2)$=$f(n_1 n_2)$ 且 $\sum_n |f(n)| < +\infty$ (n_1 和 n_2 都是正整数)，那么

$\sum_n f(n)$=$\prod_p[1+f(p)+f(p^2)+f(p^3)+\ldots]$。

欧拉积公式的证明很简单，唯一要注意的是处理无穷级数和无穷乘积时，不能随意使用有限级数和有限乘积的性质。下面我证明的是一个更一般的结果，欧拉积公式将作为这个结果的一个特例出现。

由于$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty$，so $1+f(p)+f(p^2)+f(p^3)+\ldots$ 绝对收敛。考虑连积（有限积）中 p<N 的部分，由于级数是绝对收敛的，乘积只有有限项，所以同样的结合律和分配律可以作为普通的有限求和和有限乘积。利用 f(n)的乘积性质，可得：

$\prod_{p<N}[1+f(p)+f(p^2)+f(p^3)+\ldots]$=$\sum f(n)$，对所有质因数小于 N 的自然数执行求和的右端（每个这样的自然数在求和中只出现一次，因为自然数的质因数分解是唯一的）。因为所有小于 N 的自然数显然只包含小于 N 的质数因子，因此 Σ'f(n) = $\sum_{n<N} f(n)$ + R(N),式中 R(N)是所有大于或等于 N 但只包含小于 N 的质数的自然数的和，由此得到：$\prod_{p<N}[1+f(p)+f(p^2)+$ f(p3)+…]=n$<N$ $f(n)$ + R(N)。要使广义欧拉积公式成立，只需要证明 limn→∞R(N)=0, 这很明显，因为|R(N)| $\leq \sum_{n\geq N} |f(n)|$,且$\sum_n |f(n)| < +\infty$ 导出

$\lim_{n\to\infty} \sum_{n\geq N} |F(n)|$=0,因此 $\lim_{n\to\infty}$ R(N)=0.因为 $1+f(p)+f(p^2)+f(p^3)+$…=$1+$ $f(p)$+$f(p)^2$+$f(p)^3$+…=$[1-f(p)]^{-1}$, 所以广义欧拉积公式也可以写成：$\sum_n f(n)=\prod_p[1-$ $f(p)]-1$。 在广义欧拉积公式中，取 f(n)=n−s，则显然 n fn<+∞，对应欧拉积公式中的条件 Rs(s)>1，将广义欧拉积公式化简为欧拉积公式。由以上证明可知，欧拉积公式的关键在于每一个自然数都有一个唯一的质因数分解的基本性质，即所谓算术基本定理。

对于任何复数 s，✗(n)是 Dirichlet 特征并且满足以下性质：

1: 存在一个正整数 q，使得✗(n+q)= ✗(n);

2: 当 n 和 q 不互素数时，✗(n)=0;

3: 对任意整数 a 和 b 来说，✗(a).✗(b)=✗(ab);

推论 3:

如果 $Re(s) > 1$ 且 $s \neq 1$,那么

L(s, ✗(n))=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{✗(n)}{n^s}$ ($n \in Z_+, p \in Z_+, s \in C$ 且 $s \neq 1$，n 遍取所有正整数, p 遍,遍取所有质数， ✗(n)∈R 且 $✗(n) \neq 0, a(n) = a(p) = ✗(n)), P(p，s) = \frac{1}{1-a(p)p^{-s}}$).

接下来我们证明广义黎曼猜想，当 Dirichlet 特征函数(n)是任何不等于零的实数时，

η (s)= $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ ($s \in C$ and $Rs(s) > 0$ 且 $(s \neq 1)$) 且 η (s)=(1- 2^{1-s}) $\zeta(s)$($s \in C$ 且 $Rs(s) > 0$ and $s \neq 1$), 黎曼 $\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{(1-2^{1-s})} = \frac{1}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$ ($s \in C$ and $Rs(s) > 0$ 且 $s \neq 1$，$n \in Z^+$， n 遍取所有正整数, $p \in Z^+$，p 遍,遍取所有质数, 因此

GRH(s, ✗(n))=L(s, ✗(n))=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{✗(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s} = \prod_p P(p,s) = \prod_p(\frac{1}{1-a(p)p^{-s}})$ ($n \in Z^+, p \in Z^+, s \in C$ 且 $s \neq 1$，n 遍取所有正整数, $p \in Z^+$，p 遍遍取所有质数, ✗(n)∈R 且 ($✗(n) \neq 0), a(n) = a(p) = ✗(n)$),$P(p，s) = \frac{1}{1-a(p)p^{-s}}$).

$a(p)p^{-s} = a(p)p^{-\sigma}\frac{1}{(\cos(tlnp)+i\sin(tlnp))} = a(p)(p^{-\sigma}(\cos(tlnp) - i\sin(tlnp))$($s \in C$ 且 $s \neq 1, t \in R$ 且 $t \neq 0$),

$(1 - a(p)p^{-s})$ =1- $a(p)(p^{-\sigma}(\cos(tlnp) - i\sin(tlnp)) = 1 - a(p)p^{-\sigma}\cos(tlnp) + ia(p)p^{-\sigma}\sin(tlnp)$($s \in C$ 且 $s \neq 1, t \in R$ 且 $t \neq 0$),

$a(p)p^{-\bar{s}} = a(p)p^{-\sigma}\frac{1}{(\cos(tlnp)-i\sin(tlnp))} = a(p)(p^{-\sigma}(\cos(tlnp) + i\sin(tlnp))$($s \in C$ 且 $s \neq 1, t \in R$ 且 $t \neq 0$),

$(1 - a(p)p^{-\bar{s}})$=1-$a(p)p^{-\sigma}\cos(tlnp) - ia(p)p^{-\sigma}\sin(tlnp)$($s \in C$ 且 $s \neq 1, t \in R$ 且 $t \neq 0$) ,因为

$(1- a(p)p^{-s}) = \overline{1 - a(p)p^{-\bar{s}}}$ ($s \in C$ 且 $s \neq 1, p \in Z^+$ 且 p 遍遍取所有质数),

因此

$(1-a(p)p^{-s})^{-1} = \overline{(1-a(p)p^{-\overline{s}})^{-1}}$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$ 且 p 遍遍取所有质数 ，$\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\neq 0$),

因此

$\prod_p(1-a(p)p^{-s})^{-1}=\overline{\prod_p(1-a(p)p^{-\overline{s}})^{-1}}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1, p\in Z^{+}$且 p 遍遍取所有质数) .

becuse L(s, χ(n))=$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} = \prod_p(1-a(p)p^{-s})^{-1}$和

L($\overline{s}$, χ(n))=$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-\overline{s}} = \prod_p\left(1-a(p)p^{-\overline{s}}\right)^{-1}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1$,且 $s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\neq 0$，$p\in Z^{+}$，且 p 遍取所有质数)。

对于广义黎曼 L(s, χ(n))=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1-a(p)p^{-s}}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\neq 0$，$p\in Z^{+}$，且 p 遍取所有质数,$a(n) = a(p)=\chi(n)$),

P(p，s) $= \frac{1}{1-a(p)p^{-s}}\Big($$s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\neq 0$，$p\in Z^{+}$，且 p 遍取所有质数$\Big)$,

因此 $L\left(s,\chi(n)\right)=\overline{L\left(\overline{s},\chi(n)\right)}$($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\neq 0$，$p\in Z^{+}$，且 p 遍取所有质数).

$a(p)p^{1-s} = a(p)p^{(1-\sigma-ti)} = a(p)p^{1-\sigma}x^{-ti} = a(p)p^{1-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{-t} = a(p)p^{1-\sigma}(\cos(t\ln p) - i\sin(t\ln p))$ $\Big($$s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\neq 0$，$p\in Z^{+}$，且 p 遍取所有质数$\Big)$,

$a(p)p^{1-\overline{s}} = a(p)p^{(1-\sigma+ti)} = a(p)p^{1-\sigma}p^{ti} = a(p)p^{1-\sigma}(p^{ti}) = a(p)p^{1-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{t} = a(p)p^{1-\sigma}(\cos(t\ln p) - i\sin(t\ln p))$ $\Big($$s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\neq 0$，$p\in Z^{+}$，且 p 遍取所有质数$\Big)$,

那么$a(p)p^{-(1-s)}$=$a(p)p^{\sigma-1}\frac{1}{(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))}$=$a(p)(p^{\sigma-1}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ $\Big($s $\in$ C 且 s $\neq$ 1 且 s $\neq -2n, n\in Z^+$，n 遍取所有正整数, ✗(n) $\in$ R 且✗(n) $\neq 0$，p $\in$ Z^+，且 p 遍取所有质数$\Big)$,

$(1-a(p)p^{-(1-s)})$ =1- $a(p)p^{\sigma-1}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ = $1-a(p)p^{\sigma-1}\cos(t\ln p)-a(p)p^{\sigma-1}i\sin(t\ln p)$ ，

(s $\in$ C 且 s $\neq$ 1 且 s $\neq -2n$, n 遍取所有正整数, ✗(n) $\in$ R 且✗(n) $\neq 0$，p $\in$ Z^+，且 p 遍取所有质数),

$(1-a(p)p^{-\bar{s}})$=1-$a(p)(p^{-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ =$1-a(p)p^{-\sigma}\cos(t\ln p)-ia(p)p^{-\sigma}\sin(t\ln p)$，

当 $\sigma=\frac{1}{2}$, 那么

$(1-a(p)p^{-(1-s)})$ =$(1-a(p)p^{-\bar{s}})$ $\big($s $\in$ C 且 s $\neq$ 1$\big)$,

$(1-a(p)p^{-(1-s)})^{-1}$=$(1-a(p)p^{-\bar{s}})^{-1}$(s $\in$ C 且 s $\neq$ 1),

因此 $\prod_p(1-a(p)p^{-(1-s)})^{-1}$=$\prod_p(1-a(p)p^{-\bar{s}})^{-1}$(s $\in$ C 且 s $\neq$ 1),

因为 $L\big(1-s,✗(n)\big)$=$\prod_p(1-a(p)p^{-(1-s)})^{-1}$ and $L\big(\bar{s},✗(n)\big)$=$\prod_p(1-a(p)p^{-\bar{s}})^{-1}$,

s $\in$ C 且 s $\neq$ 1 且 s $\neq$ 0,且 s $\neq -2n, n\in Z^+$，n 遍取所有正整数，p $\in$ Z^+，且 p 遍取所有质数，✗ (n)∈R 且 ✗(n) $\neq$ 0, a(n) = a(p)= ✗(n),P(p，s)=$\frac{1}{1-a(p)p^{-s}}$)。因此仅

L(1 − s, ✗(n)) = L($\bar{s}$, ✗(n))(s $\in$ C 且 s $\neq$ 1 且 s $\neq -2n, n\in Z^+$，n 遍取所有正整数, ✗(n) $\in$ R 且✗(n) $\neq$ 0),且

仅 L(1 − $\bar{s}$, ✗(n))=L(s, ✗(n))(s $\in$ C 且 s $\neq$ 1,且 s $\neq -2n, n\in Z^+$，n 遍取所有正整数，✗(n) $\in$ R 且✗(n) $\neq$ 0)成立,

因此L(s, ✗(n)) = ✗(n) ζ(s) (s $\in$ C 且 s $\neq$ 1 且 s $\neq -2n, n\in Z^+$， n 遍取所有正整数，✗(n) $\in$ R 且✗(n) $\neq$ 0),

L(1 − s, ✗(n))= ✗(n)ζ(1-s)(s $\in$ C 且 s $\neq$ 1 且 s $\neq -2n, n\in Z^+$， n 遍取所有正整数，✗(n) $\in$ R 且✗(n) $\neq$ 0),

且 $L(s,\chi(n))=\overline{L\left(\bar{s},\chi(n)\right)}$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1$,且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}$， n 遍取所有正整数，$\chi(n)\in R$

且 $\chi(n)\neq 0$),

且

$L(1-s,\chi(n))=L\left(\bar{s},\chi(n)\right)$ $\Big($ $s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n,n\in Z^{+}$， n 遍取所有正整数，$\chi(n)\in$

R 且 $\chi(n)\neq 0$ 必定成立,

Suppose k∈ R,

$a(p)p^{k-s}=a(p)p^{(k-\sigma-ti)}=a(p)p^{k-\sigma}x^{-ti}=a(p)p^{k-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{-t}=a(p)p^{k-\sigma}(\cos(t\ln p)-$

isintlnp ($s\in C$ 且 $s\neq 1,t\in C$ 且 $t\neq 0,k\in R$),

$a(p)p^{k-\bar{s}}=a(p)p^{(k-\sigma+ti)}=a(p)p^{k-\sigma}p^{ti}=a(p)p^{k-\sigma}(p^{ti})=a(p)p^{k-\sigma}(\cos(\ln p)+i\sin(\ln p))^{t}=$

$a(p)(p^{k-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$ ($s\in C$ 且 $s\neq 1$, $p\in Z^{+}$ 且 p 是质数,且 $s\neq -2n,n\in$

Z^{+}， n 遍取所有正整数，, $k\in R$),

那么

$a(p)p^{-(k-s)}=a(p)p^{\sigma-k}\frac{1}{(\cos(t\ln p)-i\sin(t\ln p))}=a(p)$

$(p^{\sigma-k}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))$($s\in C$ 且 $s\neq 1,t\in R$ 且 $t\neq 0,k\in R$) ,

$(1-a(p)p^{-(k-s)})=1-(a(p)p^{\sigma-k}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))=1-$

$a(p)p^{\sigma-k}\cos(t\ln p)-ip^{\sigma-k}\sin(t\ln p)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$,且 $s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $p\in$

Z^{+} 且 p 是质数, $k\in R$) ,

$(1-a(p)p^{-\bar{s}})=1-(a(p)p^{-\sigma}(\cos(t\ln p)+i\sin(t\ln p))=1-$

$a(p)p^{-\sigma}\cos(t\ln p)-ia(p)p^{-\sigma}\sin(t\ln p)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n$, n 遍取所有正整数，$p\in$

Z+ 且 p 是质数,) ,

当 $\sigma=\frac{k}{2}$(k∈ R) ,那么

$\left(1-a(p)p^{-(k-s)}\right)=\left(1-a(p)p^{-\bar{s}}\right)$

($s\in C$ 且 $s\neq 1$ ，且 $s\neq -2n$, $n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数 $p\in Z^{+}$ 且 p 是质数, $k\in R$),

$\left(1-a(p)p^{-(k-s)}\right)^{-1}=\left(1-a(p)p^{-\bar{s}}\right)^{-1}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1$,且 $s\neq -2n$, $n\in Z^{+}$，n 遍取所有正整数 $p\in Z^{+}$ 且 p 是质数，$k\in R$),

因此

$\prod_p(1-a(p)p^{-(k-s)})^{-1}$=$\prod_p\left(1-a(p)p^{-\bar{s}}\right)^{-1}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1$, 且 $s\neq -2n$, $n\in Z^{+}$, n 遍取所有正整数 $p\in Z^{+}$ 且 p 是质数 , $k\in R$),

becuse $L\left(k-s, ✗(n)\right)$=$\prod_p\left(1-a(p)p^{-(k-s)}\right)^{-1}$

($s\in C$ 且 $s\neq 1$, 且 $s\neq -2n, n\in Z^{+}$, n 遍取所有正整数 $p\in Z^{+}$ 且 p 是质数 , $k\in R$),

$L(\bar{s}, ✗(n))$=$\prod_p\left(1-a(p)p^{-\bar{s}}\right)$ ($s\in$ C 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $p\in$

Z+ 且 p 遍取所有质数 ,✗(n)∈R 且 ✗(n)≠0, a(n)=a(p)= ✗(n)),P(p ,s)= 1 1−a(p)p−s),

且

$L\left(s, ✗(n)\right)=$

$\prod_p\left(1-a(p)p^{-\bar{s}}\right)$ ($s\in$ C 且 $n\neq 1$ 且 $s\neq -2n$,

n∈Z+ ,n 遍取所有正整数,p∈Z+ 且 p 遍取所有质数 ,✗(n)∈R 且 ✗(n)≠0, a(n)=a(p)=

✗(n)),P(p , s)= 1 1−a(p)p−s)

因此

仅 $L\left(k-s, ✗(n)\right)$=$L\left(\bar{s}, ✗(n)\right)$

(s∈C 且 s≠ 1, $n\in Z^{+}$,且n遍取所有正整数, ✗(n) ∈ R 且✗(n) ≠ 0 , k ∈ R),

且 $L\left(k-\bar{s}, ✗(n)\right)$=$L\left(s, ✗(n)\right)$,

(s∈C 且 s≠ 1, $s\neq -2n, n\in Z^{+}$, 且n遍取所有正整数, ✗(n) ∈ R 且✗(n) ≠ 0 , k ∈ R),

因为$L\left(1-s, ✗(n)\right)$= $L\left(\bar{s}, ✗(n)\right)$

(s∈C 且 s≠ 1, $s\neq -2n$, $n\in Z^{+}$, 且n遍取所有正整数, ✗(n) ∈ R 且✗(n) ≠ 0 , k ∈ R),

,因此仅 k=1 成立.

$$\mathrm{GRH}\left(s,\, ✗(n)\right) = L\left(s,\, ✗(n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{✗(n)}{n^{s}} = \frac{✗(n)\eta(s)}{(1-2^{1-s})} = \frac{✗(n)}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s}}$$

$$= \frac{✗(n)}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma+ti}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)\left(\frac{1}{n^{\sigma}}\frac{1}{n^{ti}}\right) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)(n^{-\sigma})\frac{1}{(\cos\left(\ln((n)\right)+i\sin(\ln(n)))^{t}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)(n^{-\sigma}(\cos(\ln(n))+\ i\sin(\ln(n)))^{-t})$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)n^{-\sigma}(\cos(t\ln(n))-i\sin(t\ln(n))\ \ )$$

(s∈C 且 s≠ 1, $s \neq -2n, n \in Z^{+}$，且n遍取所有正整数, ✗(n) ∈ R 且✗(n) ≠ 0，k ∈ R),

✗(n) ∈ R 且✗(n) ≠ 0),

$$\mathrm{GRH}(\overline{s},\, ✗(n)) = L(\overline{s},\, ✗(n)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{✗(n)}{n^{\overline{s}}} = \frac{✗(n)\eta(\overline{s})}{(1-2^{1-\overline{s}})} = \frac{✗(n)}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\overline{s}}}$$

$$= \frac{✗(n)}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma-ti}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)(\frac{1}{n^{\sigma}}\frac{1}{n^{-ti}})$$

$$= \frac{1}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}(✗(n)\frac{1}{n^{\sigma}}\frac{1}{(\cos(\ln(n))+i\sin(\ln(n)))^{-t}})$$

$$= \frac{1}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}(✗(n)n^{-\sigma}(\cos(\ln(n))+\ i\sin(\ln(n)))^{t}) =$$

$$\frac{1}{(1-2^{1-\overline{s}})}\sum_{n=1}^{\infty}(✗(n)n^{-\sigma}(\cos(t\ln(n))+i\sin(t\ln(n)))$$

(s∈C 且 s≠ 1, $s \neq -2n, n \in Z^{+}$，且n遍取所有正整数, ✗(n) ∈ R 且✗(n) ≠ 0，k ∈ R),

✗(n) ∈ R 且✗(n) ≠ 0),

$$\mathrm{GRH}\left(1-\mathrm{s},\,\mathit{X}(\mathrm{n})\right)=\mathrm{L}\left(1-\mathrm{s},\,\mathit{X}(\mathrm{n})\right)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathit{X}(\mathrm{n})}{\mathrm{n}^{\mathrm{s}}}=\frac{\mathit{X}(\mathrm{n})\eta(1-\mathrm{s})}{(1-2^{\mathrm{s}})}=\frac{\mathit{X}(\mathrm{n})}{(1-2^{\mathrm{s}})}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}}{\mathrm{n}^{1-\sigma-\mathrm{ti}}}$$

$$=\frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}}{(1-2^{\mathrm{s}})}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathit{X}(\mathrm{n})\left(\frac{1}{\mathrm{n}^{1-\sigma}}\frac{1}{\mathrm{n}^{-\mathrm{ti}}}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}}{(1-2^{\mathrm{s}})}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathit{X}(\mathrm{n})\mathrm{n}^{\sigma-1}(\cos(\mathrm{tln}(\mathrm{n}))+\mathrm{i}\sin(\mathrm{tln}(\mathrm{n}))),$$

(s∈C 且 s≠ 1, $s\neq-2n,n\in Z^{+}$ ，且n遍取所有正整数, $X(n)\in R$ 且$X(n)\neq 0$，$k\in R$),

$X(n)\in R$ 且$X(n)\neq 0$),

假设

U=[$X(n)1^{-\sigma}$cos(tln1)− $X(n)2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $X(n)3^{-\sigma}$cos(tln3)− $X(n)\ 4^{-\sigma}$cos(tln4)+...],

V=[$X(n)1^{-\sigma}$Sin(tln1)− $X(n)2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $X(n)3^{-\sigma}$sin(tln3)− $X(n)4^{-\sigma}$sin(tln4)+...] ,

那么

$L\left(s,\,X(n)\right)=\overline{L\left(\overline{s},\,X(n)\right)}$

(s∈C 且 s≠ 1， $s\neq-2n,n\in Z^{+}$ ，且n遍取所有正整数, $X(n)\in R$ 且$X(n)\neq 0$，$k\in R$),

$X(n)\in R$ 且$X(n)\neq 0$),

，因此 n=1,2,3,... ,让我们把 n 代入

$L(s,\,X(n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X(n)}{n^{s}}$ =[$X(n)1^{-\sigma}$ cos(tln1) − $X(n)2^{-\sigma}$ cos(tln2)+ $X(n)3^{-\sigma}$ cos(tln3) − $X(n)\ 4^{-\sigma}$ cos(tln4)+...]-i[$X(n)1^{-\sigma}$ sin(tln1) − $X(n)2^{-\sigma}$ sin(tln2)+ $X(n)3^{-\sigma}$ sin(tln3) − $X(n)4^{-\sigma}$sin(tln4)+...]= U-Vi

($s\in C$ 且 $s\neq 1$ 且 $s\neq-2n,n\in Z^{+}$,且n遍取所有正整数， $X(n)\in R$ 且$X(n)\neq 0$),

U=[$X(n)1^{-\sigma}$cos(tln1)− $X(n)2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $X(n)3^{-\sigma}$cos(tln3)− $X(n)\ 4^{-\sigma}$cos(tln4)+...],

V=[$X(n)1^{-\sigma}$sin(tln1)− $X(n)2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $X(n)3^{-\sigma}$sin(tln3)− $X(n)4^{-\sigma}$sin(tln4)+...] ,

那么

$L(\overline{s}, \chi(n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{\overline{s}}}$=[$\chi(n)1^{-\sigma}$cos(tln1) − $\chi(n)2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $\chi(n)3^{-\sigma}$cos(tln3) − $4^{-\sigma}$cos(tln4)+...]+i[$\chi(n)1^{-\sigma}$sin(tln1) − $\chi(n)2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $\chi(n)3^{-\sigma}$sin(tln3) − $\chi(n)\ 4^{-\sigma}$sin(tln4)+ ...]= U+Vi,

(s∈C 且 s≠ 1， $s \neq -2n, n \in Z^{+}$，且n 遍取所有正整数, $\chi(n) \in R$ 且$\chi(n) \neq 0$，$k \in R$),

$\chi(n) \in R$ 且$\chi(n) \neq 0$),

U=[$\chi(n)1^{-\sigma}$cos(tln1) − $\chi(n)2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $\chi(n)3^{-\sigma}$cos(tln3) − $\chi(n)\ 4^{-\sigma}$cos(tln4)+...],

V=[$\chi(n)1^{-\sigma}$sin(tln1) − $\chi(n)2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $\chi(n)3^{-\sigma}$sin(tln3) − $\chi(n)4^{-\sigma}$sin(tln4)+...] ,

$L(s, \chi(n))$与$L(\overline{s}, \chi(n))$是共轭复数，即 $L(s, \chi(n))=\overline{L(\overline{s}, \chi(n))}$ 。

当 $\sigma=\frac{1}{2}$,

那么

$L(s, \chi(n))=L(1-s, \chi(n))=$ U-Vi,

(s∈C 且 s≠ 1，$s \neq -2n, n \in Z^{+}$，且n 遍取所有正整数, $\chi(n) \in R$ 且$\chi(n) \neq 0$，$k \in R$),

$\chi(n) \in R$ 且$\chi(n) \neq 0$),

U=[$\chi(n)1^{-\sigma}$cos(tln1) − $\chi(n)2^{-\sigma}$cos(tln2)+ $\chi(n)3^{-\sigma}$cos(tln3) − $\chi(n)\ 4^{-\sigma}$cos(tln4)+...],

V=[$\chi(n)1^{-\sigma}$sin(tln1) − $\chi(n)2^{-\sigma}$sin(tln2)+ $\chi(n)3^{-\sigma}$sin(tln3) − $\chi(n)4^{-\sigma}$sin(tln4)+...] .

且当 $\sigma=\frac{1}{2}$, 那么仅 $L\left(1-s, \chi(n)\right)=L\left(\overline{s}, \chi(n)\right)$

(s∈C 且 s≠ 1，$s \neq -2n, n \in Z^{+}$，且n 遍取所有正整数, $\chi(n) \in R$ 且$\chi(n) \neq 0$，$k \in R$),

$\chi(n) \in R$ 且$\chi(n) \neq 0$),

$GRH(k-s, \chi(n)) = L(k-s, \chi(n)) = \frac{\chi(n)\eta(k-s)}{(1-2^{1-k+s})} = \frac{\chi(n)}{(1-2^{1-k+s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k-\rho-ti}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-k+s})}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)(\frac{1}{n^{k-\sigma}}\frac{1}{n^{-ti}}) = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-k+s})}\sum_{n=1}^{\infty}(\chi(n)n^{\sigma-k}(\cos(t\ln(n)) + i\sin(t\ln(n)))$($s \in C$ 且 $s \neq 1$,$s \neq -2n, n \in Z^{+}$，且n 遍取所有正整数， $k \in R$, $\chi(n) \in R$且$\chi(n) \neq 0$) ,

W=[$\chi(n)1^{\sigma-k}$cos(tln1) − $\chi(n)2^{\sigma-k}$cos(tln2)+ $\chi(n)3^{\sigma-k}$cos(tln3) − $\chi(n)\ 4^{\sigma-k}$cos(tln4)+...]

U=[$\chi(n)1^{\sigma-k}$sin(tln1)− $\chi(n)2^{\sigma-k}$sin(tln2)+ $\chi(n)3^{\sigma-k}$sin(tln3)− $\chi(n)4^{\sigma-k}$sin(tln4)+...] .

当 $\sigma=\frac{k}{2}(k\in R)$,

那么

仅 $L(k-s,\chi(n))=L\left(\overline{s},\chi(n)\right)=W-Ui$

($s\in C$ 且 $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}$，且$n$遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且$\chi(n)\neq 0$，$k\in R$),

$\chi(n)\in R$ 且$\chi(n)\neq 0$),

但是黎曼 ζ(s) 函数仅满足 $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$ ($s\in C$ and $s\neq 1$), 因此当 $\zeta(s)=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$), t那么仅$\zeta(1-s)=\zeta(s)=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$),且当 $\zeta(\overline{s})=0$, 那么仅 $\zeta(1-s)=\zeta(\overline{s})=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$), 且 $\zeta(k-s)=\zeta(1-s)=\zeta(\overline{s})$($s\in C$ 且 $s\neq 1$),因此仅 k=1 成立，仅有 $Re(s)=\frac{k}{2}=\frac{1}{2}(k\in R)$。

因此仅 $L(1-s,\chi(n))=L(\overline{s},\chi(n))$($s\in C$ 且 $s\neq 1, n\in Z^{+}$，且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且$\chi(n)\neq 0$) 成立, 仅 k=1 成立。根据黎曼得到的方程 $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s\in C$ and $s\neq 1$)(Formula 7) 以及黎曼已经得到的黎曼 ζ(s)($s\in C$ and $s\neq 1$) 函数的零点，表明 ζ(s)($s\in C$ and $s\neq 1$) 函数的零点存在。那意味着在 $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1$) 中, $\zeta(s)=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$)中$\zeta(s)=0$成立。所以仅当 $\sigma=\frac{1}{2}$ 且 $\zeta(s)=0$($s\in C$且 $s\neq 1$)，那么

$L(s,\chi(n))=\chi(n)\zeta(s)=0$($s\in C$ 且 $s\neq 1$,且$s\neq -2n$, n遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$) 成立。

因为 $L(s,\chi(n))=\chi(n)\zeta(s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1, n\in Z^{+}$且n遍取所有正整数，$\chi(n)\in R$ 且$\chi(n)\neq 0$) 且 $L(1-s,\chi(n))=\chi(n)\zeta(1-s)$($s\in C$ 且 $s\neq 1, n\in Z^{+}$ 且n遍取所有正整数), 因此当 $\sigma=\frac{1}{2}$,

$L(s,\chi(n))=\overline{L\left(\overline{s},\chi(n)\right)}$($s\in C$且$s\neq 1$,且$s\neq -2n$, n遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$)必定成立, 且 $L(1-s,\chi(n))=L(\overline{s},\chi(n))$($s\in C$且

$s\neq 1$ ，且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R且$\chi(n)\neq 0$)必定成立．通过 $\zeta(1-s)$=ζ(s)=0(s∈C 且 s≠ 1) 且 $\zeta(s)=\zeta(\bar{s})$=0(s∈C 且 s≠ 1)和 $\zeta(s)=\zeta(1-\bar{s})$=0(s∈C 且 s≠ 1), 因此

$L(s,\chi(n))=L(1-s,\chi(n))$=0

(s∈C 且 s≠ 1, $s\neq -2n$,且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$，$k\in$ R),

$\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$),

和 $L(s,\chi(n))=L(\bar{s},\chi(n))=L(1-\bar{s},\chi(n))$=0

(s∈C 且 s≠ 1, $s\neq -2n$,且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$，$k\in$ R),

$\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$)成立,

那么 $s=\bar{s}$或 s=1-s 或 $\bar{s}$=1-s ,因此 s∈R 且 s=-2n($n\in Z^{+}$), 或σ+ti=1-σ-ti,或 σ-ti=1-σ-ti, 因此$s\in$ R且$s=-2n(n\in Z^{+})$,或$\sigma=\frac{1}{2}$且 t=0, 或$\sigma=\frac{1}{2}$且t∈R 且 $t\neq 0$, 因此 $s\in$ R且$s=-2n(n\in Z^{+})$ 或 s=$\frac{1}{2}$+0i ,或 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 $t\neq 0$) 与 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 $t\neq 0$)。因为$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\rightarrow +\infty$, $\zeta(1)\rightarrow +\infty$, $\zeta(1)$发散,$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$更是发散,因此将它们舍去。且因为仅当 $\sigma=\frac{1}{2}$,下面三个等式: $L\left(\sigma+ti,\chi(n)\right)$=0(t∈R 且 t≠ 0, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$ 且n遍取所有正整数),

和$L\left(1-\sigma-ti,\chi(n)\right)$=0(t∈R 且 t≠ 0, $n\in Z^{+}$,且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$)

和$L\left(\sigma-ti,\chi(n)\right)$=0 (t∈CR 且 t≠ 0, $n\in Z^{+}$ 且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$) 才全都成立。并且因为 $L(\frac{1}{2},\chi(n))>0$($n\in Z^{+}$ 且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$), 因此仅 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R 且 $t\neq 0$)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 $t\neq 0$)成立.广义黎曼$L(s,\chi(n)($ s∈C 且 s≠ 1, $s\neq -2n$,且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$，$k\in$ R)函数的性质是基本的，广义黎曼猜想必须是正确的， 以反映 L(s, $\chi(n)$)（s∈C 且

$s\neq 1$， $s\neq -2n$,且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$，$k\in$ R）函数的性质，L(s, $\chi(n)$)=0（s∈C 且 s≠ 1， $s\neq -2n$,且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in$ R 且$\chi(n)\neq 0$，$k\in$ R), 的根只能是 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R, t≠0)或 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R,t≠0)，也就是说，Re(s)必须只等于$\frac{1}{2}$，且 Im(s) 必定

是实数，因此广义黎曼猜想必定成立。根据 $L(1-s,\chi(n))=L(s,\chi(n))=0$(s∈C 且 $s\neq 1$，$s\neq -2n$,且n遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$ 且$\chi(n)\neq 0$，$k\in R$),所以$L(s,\chi(n))$)(s∈C 且 $s\neq 1$且$s\neq -2n$,且n 遍历所有正整数)函数的零点位于复平面内与实数轴垂直的实数线上且关于点（$\frac{1}{2}$,0i）对称分布，所以当$L\left(1-s,\chi(n)\right)=L\left(s,\chi(n)\right)=0\left(s\in C\text{且}s\neq 1\text{，且}s\neq -2n,n\text{遍取所有正整数},\chi(n)\in R\text{且}\chi(n)\neq 0\right)$，s 和 1-s 是函数$L\left(s,\chi(n)\right)$（$s\in C$且$s\neq 1$且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$）的一对零点，在与复平面实数轴垂直的直线上，相对于点（$\frac{1}{2}$,0i）对称分布。我们得到了 $\overline{L(s,\chi(n))}$ =$L(\bar{s},\chi(n))$($s\in C$且$s\neq 1$且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$) ,在下面的假设 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈C 且 $t\neq 0$)中，t 是一个复数, 那么

$\overline{L(s,\chi(n))}$=$L(\bar{s},\chi(n))$($s\in C$且$s\neq 1$且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$)中的 s 与下面的假设 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈C and $t\neq 0$)相匹配，所以仅$\sigma=\frac{1}{2}$正确.当$L(s,\chi(n))$=$L(\bar{s},\chi(n))=0$($s\in C$且$s\neq 1$且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$)，因为 s 和 $\bar{s}$ 是一对共轭复数，因此 s 和 $\bar{s}$ 一定是广义$L(s,\chi(n))$($s\in C$且$s\neq 1$且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$)函数的一对对称零点，在复平面上位于垂直于实数轴直线上，关于点（σ,0i）对称。S 是 1-s 的对称零点，也是$\bar{s}$的对称零点。根据复数的定义，广义黎曼函数$L(s,\chi(n))$($s\in C$且$s\neq 1$且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$)中的同一个自变量零点 s 在垂直于复平面实数轴的直线上既关于($\frac{1}{2}$,0i)和 1 −s 对称，又关于(σ, 0i)和$\bar{s}$对称？也就是$\sigma=\frac{1}{2}$ ，且仅有 1-s=$\bar{s}$ 正确, 仅 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈R且 $t\neq 0$,s∈C) 和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈R 且 $t\neq 0$,s∈C) 成立，否则不可能。这是由广义黎曼$L(s,\chi(n))$($s\in C$且$s\neq 1$且$s\neq -2n$, n 遍取所有正整数, $\chi(n)\in R$且$\chi(n)\neq 0$)函数的零点在经过该点($\frac{1}{2}$,0i)垂直于复平面实数轴的直线上关于该直线与复平面实数轴的垂足($\frac{1}{2}$,0i)对称分布的零点的唯一性决

定的 ,从零点 s 向复平面实数轴作垂线 ,仅能作出一条,垂足也只有一个。在同一个复平面，ζ(s)函数的同一个零点在经过该点($\frac{1}{2}$,0i)垂直于复平面实数轴的直线上关于该直线与复平面实数轴的垂足($\frac{1}{2}$,0i)对称分布的零点只会有一个。我已经证明了当狄利克雷特征函数✗(n)($s \in Z^{+}$，n 遍历所有正数)是任意的实数,且不等于零，则广义黎曼$L(s, ✗(n))$($s \in C$ 且 $s \neq 1$ 且 $s \neq -2n$, n 遍取所有正整数, ✗$(n) \in R$ 且✗$(n) \neq 0$) 函数的非平凡零点的都满足 Re(s)=$\frac{1}{2}$且 Im(s)≠0，都位于与实数轴垂直的临界线上。这些非平凡零点是满足 Re(s)=$\frac{1}{2}$且 Im(s)≠0 的一般复数，因此我证明了当 Dirichlet 特征函数✗(n) ($s \in Z^{+}$，n 遍历所有正数，✗$(n) \in R$ 且✗$(n) \neq 0$))是任何不等于零的实数时的广义黎曼猜想。广义黎曼猜想必须满足$L(s, ✗(n))$($s \in C$ 且 $s \neq 1$ 且 $s \neq -2n$, $n \in Z^{+}$，✗$(n) \in R$ 且✗$(n) \neq 0$)函数的基本性质，广义黎曼猜想必须是正确的 ,以反映$L(s, ✗(n))$(s∈C 且 s≠ 1, 且 $s \neq -2n$, $n \in Z^{+}$，✗$(n) \in R$ 且✗$(n) \neq 0$)函数的性质，即$L\left(s, ✗(n)\right) = 0$(s∈C 且 s≠ 1 且 $s \neq -2n$, n 遍取所有正整数, ✗$(n) \in R$ 且✗$(n) \neq 0$)的根只能是 s=$\frac{1}{2}$+ti(t∈ R,t≠0)和 s=$\frac{1}{2}$-ti(t∈ R,t≠0)，也就是说，Re(s)只能等于$\frac{1}{2}$，而且 Im(s)必须是实数，且 Im(s)不等于零。

推论 4:

对于任何复数 s，✗(n 是 Dirichlet 特征并且满足以下性质：

1: 存在一个正整数 q，使得✗(n+q)= ✗(n);

2: 当 n 和 q 不互素数时，✗(n)=0;

3: 对任意整数 a 和 b 来说，✗(a).✗(b)=✗(ab);

设 q=2k($k \in Z^{+}$)，如果 n 和 n+q 都是素数，并且如果✗(Y)=0 （Y 遍取所有正奇数）和✗$(n + q) =$ ✗(n) =0(n 和 $n + q$ 遍取所有正奇数),因为 n （n 遍历所有素数）和 q=2k($k \in Z^{+}$)不是互素，如果 n 和 n+q 都是素数，并且如果✗(Y)=0 （Y 遍取所有正奇数）和✗$(n + q) =$ ✗(n) =0(n 和 $n + q$ 遍取所有正奇数),因为 n(n 遍历所有素数）和 q=2k($k \in Z^{+}$)不是互素，那

么✗(n)=0（n∈Z^++和 n 和 n+q 遍历所有素数）并且对于任何素数 a 和 b ✗(a)·✗(b)= ✗(ab)（a∈ Z^+,b∈ Z^+，a 遍取所有素数，b 遍取所有素数），那么狄利克雷特征函数✗(n)所描述的三个性质（n∈ Z^+，并且 n 遍取所有素数）满足波利尼亚克猜想的定义，波利尼亚克猜想指出，对于所有自然数 k，存在无限多对素数（p,p+2k）（$k \in Z^+$）对。1849 年，法国数学家 A.波利尼亚克提出了这个猜想。当 k=1 时，波利涅克猜想等价于孪生素数猜想。换句话说，当 $L(s,✗(n)) = 0(s \in C$ 且 $s \neq 1, n \in Z^+$ 且 n 遍取所有正整数，$✗(n) \in R$ 且 $✗(n) \neq 0, a(n) = a(p)=✗(n)),P(p，s)=\frac{1}{1-a(p)p^{-s}}$)。广义黎曼猜想成立，那么波利尼亚克猜想几乎成立，并且如果波利尼亚克猜想成立，那么孪生素数猜想和哥德巴赫猜想也成立。

Reasoning 5:

为了解释为什么朗道-西格尔函数的零点在特殊条件下存在，我们需要从黎曼猜想开始。我已经解决了狄利克雷特征函数✗(n)≡1（$n \in Z^+$，且 n 遍历所有正整数）的黎曼猜想和狄利克雷特征函数✗(n)≠0（$n \in Z^+$，且 n 遍历所有正整数）的广义黎曼猜想，我提出了狄利克雷特征函数✗(p)≠0（$p \in Z^+$ 且 p 遍历所有素数）的一个特殊形式 L(s,✗(p))(s∈C 且 $s \neq 1$,✗(p) ∈R and ✗(p)≠0, $p \in Z^+$ 且 p 遍历所有素数，包括 1) 函数问题。让我先解释一下什么是朗道-西格尔零点猜想。你们可能知道，朗道-西格尔零点问题，以朗道和他的学生西格尔命名，归结为解决狄利克雷 L(β,1)(β ∈ R)函数中是否存在异常实零点。我们再来看一下狄利克雷 L 函数是什么。看看上面的证明过程，这是狄利克雷 L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1, $n \in Z^+$,且 n 遍历所有正整数)的表达式。我先介绍狄利克雷 L(s,✗(n))(s∈C且 $s \neq 1$, $n \in Z^+$，且 n 遍历所有正整数)函数并解释它与黎曼 ζ(s)(s∈C 且 $s \neq 1$)函数的关系。这里，✗(n)($n \in Z^+$ 且 n 遍历所有正整数)是一个狄利克雷函数的特征值，它是个实数，并且✗(n)($n \in Z^+$ 且 n 遍历所有正整数) 是一个实函数。L(s,✗(n))(s∈C 且 $s \neq 1$, ✗(n) ∈ R, n∈ Z^+ 且 n 遍历所有正整数)函数可以解析扩展为整个复平面上的亚纯函数。狄利克雷证明

了对于所有✗(n)(n∈Z^+ 且 n 遍历所有正整数))，L(1,✗(n))≠0(s∈C 且 s≠1，✗(n)∈R 且✗(n)≠0, n∈Z^+ 且 n 遍历所有正整数)），从而证明了狄利克雷定理。狄利克雷定理指出，对于任意正整数 a ,d ,存在无穷多种质数形式 ,如 a+nd ,其中 n 是正整数 ,即等差数列 a+d ,a+2d,a+3d ,... ,中素数有无限个，素数模块 d 和素数模块 a 都有无限个。如果 ✗(n)(n ∈ Z^+ 且 n 遍历所有正整数)) 是主特征，那么 L(s, ✗(n))(s∈C 且 s ≠ 1，✗(n)∈R, n∈Z^+且 n 遍历所有正整数) 在 s=1 处有一个单极特征。狄利克雷定义了狄利克雷函数 L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1, ✗(n) ∈R, n∈Z^+且 n 遍历所有正整数)）中的特征函数的 ✗(n)(n∈Z^+且 n 遍历所有正整数))的性质：

1：存在一个正整数 q，使得✗(n+q)=✗(n)(n∈Z^+且 n 遍取所有正整数)；

2:当 n(n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)和 q 是非互素数时 ,✗(n)≡0(n∈ Z^+ 且 n 遍取所有正整数)；

3：对于任何正整数 a 和 b, ✗(a) ✗(b)= ✗(ab)(a 是一个正整数, b 是一个正整数);

从狄利克雷函数 L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1,X(n)∈R, n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)的表达式，很容易看出，当 Dirichlet 特征实函数✗(n)=1(s∈C 且 s≠ 1, n∈Z^+且 n 遍取所有正整数)，这个狄利克雷函数 L(s,1)(s∈C 且 s≠ 1, ✗(n)∈R, n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数) 变成了黎曼 ζ(s)(s∈C and s≠ 1) 函数 ，因此黎曼 ζ(s)(s∈C 且 s≠ 1)是狄利克雷函数 L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1, ✗(n)∈R,n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)的一个特殊函数，所以当特征实函数 ✗(n)≡ 0(n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)时，也被称为狄利克雷函数 L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1, ✗(n) ∈R，n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)的平凡特征函数。当特征实函数✗(n)≡0(n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)时，也被称为狄利克雷函数 L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1, ✗(n) ∈R，n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)的平凡特征函数。当特征实函数✗(n)≠1(n∈ Z^+ 且 n 遍取所有正整数)时，它们被称为狄利克雷函数的非平凡特征函数。L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1, ✗(n) ∈R，n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)表达式中的自变量 s 是一个实数β时，那么对于

所有特征函数值✗(n)(n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)，L(β,✗(n))(β∈R,✗(n) ∈R, n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数) 被称为朗道-西格尔函数。可见朗道-西格尔函数 L(β,✗(n))(β∈R,✗(n)∈R, n∈ Z^+ 且 n 遍取所有正整数)是狄利克雷函数 L(s,✗(n))(s∈C 且 s≠ 1, ✗(n) ∈R，n∈Z^+ 且 n 遍取所有正整数)的一个特殊函数，朗道-西格尔零点猜想是指朗道-西格尔猜测 L(β, (n))(β ∈R,✗(n)∈R, n∈ Z^+ 且 n 遍取所有正整数)不为零 ,所以朗道-西格尔关于 L(β, (n))≠0(β∈R,≠-2n, n∈ Z^+ 且 n 遍取所有正整数) 的猜想很容易理解，对吧?好了,现在你们知道了朗道和西格尔零猜想是关于什么的，我们继续看一下如何证明朗道和西格尔零点猜想。看看上面得到的证明过程。因为：

$$\mathrm{GRH}\left(s, ✗(n)\right) = L\left(s, ✗(n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{✗(n)}{n^s} = \frac{✗(n)\eta(s)}{(1-2^{1-s})} = \frac{✗(n)}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

$$= \frac{✗(n)}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma+ti}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)\left(\frac{1}{n^{\sigma}}\frac{1}{n^{ti}}\right) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)(n^{-\sigma})\frac{1}{(\cos\left(\ln((n)\right) + i\sin(\ln(n)))^t}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)(n^{-\sigma}(\cos(\ln(n)) + i\sin(\ln(n)))^{-t})$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)n^{-\sigma}(\cos(t\ln(n)) - i\sin(t\ln(n))\ )$$

$(t \in C$ 且 $t \neq 0, s \in C$ 且 $s \neq 1, n \in Z^+$ 且 n 遍取所有正整数)，因为

ζ(s)=$2^s\pi^{s-1}$Sin($\frac{\pi s}{2}$)Γ(1-s)ζ(1-s)(s∈C 且 s≠ 1)(等式 7) ,因此，如果 β∈R and $\beta = -2n(n \in Z^+)$，那么 ζ(s)=0。因此

L(β, ✗(n))=$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\beta})}\sum_{n=1}^{\infty}✗(n)(n^{-\beta}(\cos(0\times\ln(n)) + i\sin(0\times\ln(n)))$=$\frac{(-1)^{n-1}}{(1-2^{1-\beta})}\sum_{n=1}^{\infty}(✗(n)n^{-\beta})$ =$\frac{1}{\left(1-2^{1-\beta}\right)}(✗(1)1^{-\beta} - ✗(2)2^{-\beta} + ✗(3)3^{-\beta} - ✗(4)4^{-\beta} + \cdots)$," × " 是用来表示相乘的符号,

因为以实数为底的实指数函数是一个大于零的函数值，因为✗(n) ∈ R 且 ✗(1) = ✗(2) =

$\chi(3)=\chi(3),\ldots$, 所 以 $n^{-\beta}>0\left(n\in Z^{+}\text{且 }n\text{ 遍取所有正整数}\right)$且 $1^{\beta}-2^{\beta}<0, 3^{\beta}-4^{\beta}<0, 5^{\beta}-6^{\beta}<0,\ldots,(n-1)^{\beta}-(n)^{\beta}<0,\ldots$,或 $1^{\beta}-2^{\beta}>0, 3^{\beta}-4^{\beta}>0, 5^{\beta}-6^{\beta}>0,\ldots,(n-1)^{\beta}-(n)^{\beta}>0$,且 $\frac{1}{\left(1-2^{1-\beta}\right)}\neq 0$,

如果 $\chi(n)\neq 0(\chi(n)\in R, n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有正整数) 且 $\beta\in R$ and $\beta\neq -2n(n\in Z^{+})$，那么 $L(\beta,\chi(n))\neq 0(\beta\in R$ 且 $\beta\neq -2n, n\in Z^{+}$, $\chi(n)\in R$ 且 $\chi(n)\equiv 1, n\in Z^{+}$ 且 n 遍取所有正整数) 且 $L(\beta,1)\neq 0(\beta\in R$ 且 $\beta\neq -2n, n\in Z^{+}$, 且 n 遍取所有正整数), 所以对于黎曼 $\zeta(s)$($s\in C$ and $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}$) 函数来说，如果$s\neq -2n(n\in Z^{+})$，那么它对应的朗道-西格尔函数 $L(\beta,1)(\beta\in R$ 且 $\beta\neq -2n$, $n\in Z^{+}$, 且 n 遍取所有正整数)不存在纯实数零点。如果 $s\neq -2n(n\in Z^{+})$，其它朗道-西格尔函数 $L(\beta,\chi(n))$ ($\beta\in R$ 且 $\beta\neq -2n$, $n\in Z^{+}$, 且 n 遍取所有正整数)也不存在纯实数零点，这意味着如果$s\neq -2n(n\in Z^{+})$，那么黎曼$\zeta(s)$ ($s\in C$ and $s\neq 1$and $s\neq -2n, n\in Z^{+}$)函数不存在变量为纯实数的零点，这意味着如果$s\neq -2n(n\in Z^{+})$，那么广义黎曼 $L(s,\chi(n))=0(s\in C$ and $s\neq 1$, and $s\neq -2n, n\in Z^{+}$, 且 n 遍取所有正整数) 函数也不存在变量 s 为纯实数的零点，同时广义黎曼 $L(s,\chi(n))=0(s\in C$ and $s\neq 1$, and $s\neq -2n, n\in Z^{+}$, $\chi(n)\in R$ 且 n 遍取所有正整数) 函数的零点满足 $s=\frac{1}{2}+ti(t\in R, t\neq 0)$ 和 $s=\frac{1}{2}-ti(t\in R, t\neq 0)$ ，表明孪生素数，波利尼亚克猜想和哥德巴赫猜想几乎成立。

如果 $\chi(n)=0(n\in Z^{+}$,且 n 遍取所有正整数) 或 $\beta\in R$ 且 $\beta=-2n$ ($n\in Z^{+}$), 那么 $L(\beta,\chi(n))=0(\beta\in R$ 且 $\beta\neq -2n, n\in Z^{+}$, $\chi(n)\in R$,且 n 遍取所有正整数) 且 $L(\beta,1)=0(\beta\in R$ and $\beta\neq -2n$, $n\in Z^{+}$,且 n 遍取所有正整数), 所以对于黎曼 $\zeta(s)$($s\in C$ and $s\neq 1, s\neq -2n, n\in Z^{+}$) 函数来说，如果$s=-2n(n\in Z^{+})$，那么它对应的朗道-西格尔函数 $L(\beta,1)(\beta\in R$ 且 $\beta\neq -2n, n\in Z^{+}$, 且 n 遍取所有正整数)就存在纯实数零点。这意味着如果$s=-2n(n\in Z^{+})$，那么广义黎曼 $L(s,\chi(n))=0(s\in C$ and $s\neq 1$, and $s\neq -2n, n\in Z^{+}, n\in Z^{+}$, 且 n

遍取所有正整数)函数也存在变量 s 为数纯实数的零点，同时广义黎曼 L(s,✗(n))=0(s∈C and $s \neq 1$, and $s = -2n$，✗(n)∈R ,$n \in Z^+$，且 n 遍取所有正整数) 函数的零点满足 $s=\frac{1}{2}+ti(t \in R, t \neq 0)$ 和 $s=\frac{1}{2}-ti(t \in R, t \neq 0)$，表明孪生素数，波利尼亚克猜想和哥德巴赫猜想都完全成立。

III. 结论

在黎曼假设和黎曼猜想以及广义黎曼假设和广义黎曼猜想被证明是完全有效之后，对黎曼猜想的研究质数分布和其他与黎曼假设和黎曼猜想有关的研究将起到推动作用。读者在这方面可以做很多事情。

IV.感谢

感谢你阅读本论文。

V.贡献

唯一的作者，提出研究问题，论证和证明问题。

VI.作者

姓名：廖腾（1509135693@139.com），本论文的唯一作者。

Setting: Tianzheng International Institute of Mathematics and Physics, Xiamen, China
Work unit address: 237 Airport Road, Weili Community, Huli District, Xiamen City
Zip Code: 361022

References

[1] Riemann :《On the Number of Prime Numbers Less than a Given Value》；

[2] John Derbyshire(America):《PRIME OBSESSION》P218,BERHARD RIEMANN AND THE GREATEST UNSOlVED PROBLEM IN MATHMATICS,Translated by Chen Weifeng, Shanghai Science and Technology Education Press, China,https://www.doc88.com/p-54887013707687.html;

[3] Xie Guofang: 《On the number of prime numbers less than a given value - Notes to Riemann's original paper proposing the Riemann conjecture》；

[4] Lu Changhai: 《A Ramble on the Riemann Conjecture》；