Autre Relation Entre Les Nombres Premiers Et La Fonction Zeta

Khazri Bouzid Fathi

Tunis

fethikhbouz@yahoo.com

Résumé : ce travail contient deux conclusions ;on vas établir une relations entre la fonction Zeta de Riemann et la fonction de compte des nombres premiers pour la suite des x_n=e^{n^s}où s est un réel s> 1 . ensuite La somme des inverses de la fonction de compte des nombres premiers est égal à la constante 1,48 pour une suite des nombres de x_n=e^n où n est un entier naturelle.

la fonction de Gauss de compte des nombres premiers par π(x)= $\frac{x}{log(x)}$ où log désigne la logarithme népérien. La fonction Zeta de Riemann est ξ(s) = $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^s}$ pour s un réel strictement positif.

1) Pour la suite x_n= e^{n^s} où n est un entier naturel non nul et s > 1

$$\pi(e^{n^s}) = \frac{e^{n^s}}{\log(e^{n^s})} = \frac{e^{n^s}}{n^s}.$$

$\frac{\pi(e^{n^s})}{e^{n^s}} = \frac{1}{n^s}$ ce qui donne $\sum_1^{+\infty}\frac{\pi(e^{n^s})}{n^s} = \sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ = ξ(s) pour s > 1.

Conclusion 1 : pour s > 1 ξ(s) = $\sum_1^{+\infty}\frac{\pi(e^{n^s})}{e^{n^s}}$ ou π est la fonction de comptes des nombres premiers de Gauss et ξ la fonction classique de Riemann.

2)Pour la suite $x_n = e^n$ où n est un entier naturel non nulle $\pi(e^n) = \frac{e^n}{\log(e^n)} = \frac{e^n}{n}$.

$\frac{1}{\pi(e^n)} = \frac{n}{e^n}$ si on fait la somme de n= 0 a l'infinie on obtient $\sum_0^{+\infty}\frac{1}{\pi(e^n)} = \sum_0^{+\infty}\frac{n}{e^n}$.

Pour calculer cette dernière somme on définit la suite de fonction f_n(t) = e^{-nt}.

$\frac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} = e^{-t}$ cette suite est géométrique et la somme converge lorsque $0 \leq e^{-t}<1$.

Alors pour t strictement positive on a :$\sum_0^N f_n(t) = f_0(t)\frac{1-e^{-(N+1)t}}{1-e^{-t}}$ avec $f_0(t) = 1$

lorsque N tend vers l'infinie $\sum_0^{+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1-e^{-t}}$. La dérivée de cette somme donne

$\sum_0^{+\infty} f'_n(t) = \frac{-e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}$ ce qui donne $\sum_0^{+\infty} -ne^{-nt} = \frac{-e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}$

Pour t = 1 on a $\sum_0^{+\infty} -ne^{-n} \;=\; \frac{-e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$

Ce qui donne $\sum_0^{+\infty} ne^{-n} \;=\; \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} \simeq$ 0,92067.

Ce qui donne $\sum_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(e^n)} = \sum_0^{+\infty} \frac{n}{e^n} \simeq$ 0,92067.

Pour améliorer cette résultat on vas substituer les neuf premiers de cette somme par leurs valeurs exactes de fonction compte des nombres premiers (le nombre des nombres premiers exact inferieurs à x), c'est-à-dire :

$\frac{1}{\pi(e^0)} = 0 \quad \frac{1}{\pi(e^1)} = 1 \quad \frac{1}{\pi(e^2)} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{\pi(e^3)} = \frac{1}{8} \quad \frac{1}{\pi(e^4)} = \frac{1}{16} \quad \frac{1}{\pi(e^5)} = \frac{1}{34}$

$\frac{1}{\pi(e^6)} = \frac{1}{79} \quad \frac{1}{\pi(e^7)} = \frac{1}{183} \quad \frac{1}{\pi(e^8)} = \frac{1}{407}$

Alors $\left(\sum_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(e^n)} - \left(\frac{1}{\pi(e^0)} + \frac{1}{\pi(e^1)} + \frac{1}{\pi(e^2)} + \frac{1}{\pi(e^3)} + \frac{1}{\pi(e^4)} + \frac{1}{\pi(e^5)} + \frac{1}{\pi(e^6)} + \frac{1}{\pi(e^7)} + \frac{1}{\pi(e^8)}\right)\right) +$

$$\left(0 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{34} + \frac{1}{79} + \frac{1}{183} + \frac{1}{407}\right) \simeq$$

$$0{,}92067 - \left(\frac{0}{e^0} + \frac{1}{e^1} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \frac{5}{e^5} + \frac{6}{e^6} + \frac{7}{e^7} + \frac{8}{e^8}\right) +$$

$$\left(0 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{34} + \frac{1}{79} + \frac{1}{183} + \frac{1}{407}\right) \simeq 1{,}48$$

Conclusion 2 : La somme des inverses de la fonction de compte des nombres premiers de Gauss $\pi(x) = \frac{x}{log(x)}$ est égal la constante 1,48 pour une suite de $x_n = e^n$ où n est un entiers naturelle. C'est à dire $\sum_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(e^n)} \simeq$ 1,48.

Bibliographie

Poussin, C. J. D. L. V. (1899). *Sur la fonction [zêta](s) de Riemann et le nombre des nombres premiers inferieurs à une limite donnée* (Vol. 51). Hayez.

Mawhin, J. (2000). Charles-Jean de La Vallée Poussin et le théoreme des nombres premiers.