

Note sur une Transformation des Coordonnées Géocentriques (X, Y, Z) aux Coordonnées $(\varphi, \lambda, h_e) - v2$.

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM* 

ABSTRACT. In this note, we present another method of passing from geocentric coordinates (X, Y, Z) to geodetic coordinates (φ, λ, h_e) with respect to an ellipsoid of revolution with parameters (a, e) where a and e are the semi-major axis and the first eccentricity, respectively.

RÉSUMÉ: Dans cette note, on présente une autre méthode de passage des coordonnées géocentriques (X, Y, Z) aux coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) par rapport à un ellipsoïde de révolution de paramètres (a, e) où a et e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité.

Keywords: coordonnées géocentriques, coordonnées géodésiques, résolution d'un polynôme du quatrième degré.

*A mes chers parents, à ma femme, à mes enfants,
à ma petite-fille Rayhane.*

1. INTRODUCTION

La méthode de passage des coordonnées géocentriques (X, Y, Z) par rapport à un système géodésique donné aux coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) , traitée dans nos précédentes publications est la méthode itérative (A. Ben Hadj Salem, [[1],[2],[3]]). Dans cette note, on présente une méthode directe de passage (X, Y, Z) aux coordonnées (φ, λ, h_e) .

L'expression des coordonnées géocentriques est:

$$(1.1) \quad X = (N + h_e) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$(1.2) \quad Y = (N + h_e) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$(1.3) \quad Z = (N(1 - e^2) + h_e) \sin \varphi$$

2. RÉOLUTION DU PROBLÈME

2.1. Calcul de la longitude. Des équations (1.1)-(1.2), on obtient la longitude géodésique λ par:

$$(2.4) \quad tg\lambda = \frac{Y}{X} \implies \text{d'où } \lambda$$

2.2. Calcul de la latitude géodésique. Posons:

$$(2.5) \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + h_e)\cos\varphi$$

Comme $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, alors $\cos\varphi \geq 0$ donc $p \geq 0$.

De l'équation (2.5), on a:

$$(2.6) \quad h_e = \frac{p}{\cos\varphi} - N$$

En remplaçant h_e dans l'équation (1.3), on :

$$(2.7) \quad Z = (N - e^2N + \frac{p}{\cos\varphi} - N)\sin\varphi$$

soit:

$$(2.8) \quad -e^2N\sin\varphi = Z - ptg\varphi$$

Comme

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}$$

on élève au carré les deux membres de (2.8), et on obtient l'équation:

$$(2.9) \quad (Z - ptg\varphi)^2 = \frac{e^4a^2\sin^2\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

Posons:

$$(2.10) \quad t = tg\varphi$$

Alors:

$$(2.11) \quad \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

L'équation (2.9) devient:

$$(2.12) \quad (Z - pt)^2 = \frac{a^2e^4t^2}{1 + k^2t^2}$$

$$(2.13) \quad \text{avec } k^2 = 1 - e^2$$

Pour déterminer t , l'équation (2.12) implique la résolution d'un polynôme du quatrième degré en t à savoir:

$$(2.14) \quad (Z - pt)^2(1 + k^2t^2) = a^2e^4t^2$$

$$(2.15) \quad \text{ou } p^2k^2t^4 - 2pZk^2t^3 + (k^2Z^2 + p^2 - a^2e^4)t^2 - 2pZt + Z^2 = 0$$

2.2.1. *Résolution de l'Equation du Quatrième Degré.* Pour résoudre l'équation (2.15), on commence par éliminer le terme en t^3 . Pour cela posons:

$$(2.16) \quad t = T + \frac{Z}{2p}$$

Alors l'équation (2.15) s'écrit avec comme nouvelle variable T :

$$(2.17) \quad p^2 k^2 T^4 + (p^2 - a^2 e^4 - \frac{k^2 Z^2}{2}) T^2 - Z(p + \frac{a^2 e^4}{p}) T + \frac{Z^2(4p^2 - 4a^2 e^4 + k^2)}{16p^2} = 0$$

On peut écrire l'équation (2.17) sous la forme:

$$(2.18) \quad T^4 + lT^2 + mT + n = 0$$

où l, m et n sont des constantes. Pour résoudre (2.17), on utilise la méthode de Cardan [4] qui consiste à écrire (2.17) sous la forme:

$$(2.19) \quad T^4 + lT^2 + mT + n = (T^2 + aT + b)(T^2 + cT + d) = 0$$

où a, b, c et d des constantes fonction de l, m, n . On trouve que a est solution d'un polynôme de 3ème degré. On a alors:

$$(2.20) \quad (T^2 + aT + b)(T^2 + cT + d) = T^4 + (a+c)T^3 + (ac+d+b)T^2 + (ad+bc)T + bd$$

D'où:

$$(2.21) \quad a + c = 0$$

$$(2.22) \quad ac + d + b = l$$

$$(2.23) \quad ad + bc = m$$

$$(2.24) \quad bd = n$$

De (2.21), on :

$$(2.25) \quad c = -a$$

de (2.22) et (2.23), on a:

$$d + b = l + a^2 d - b = \frac{m}{a}$$

ce qui donne:

$$(2.26) \quad d = \frac{al + a^3 + m}{2a}$$

$$(2.27) \quad b = \frac{al + a^3 - m}{2a}$$

On utilise l'équation (2.24) pour déterminer a ce qui donne:

$$\frac{al + a^3 + m}{2a} \cdot \frac{al + a^3 - m}{2a} = n$$

soit:

$$(2.28) \quad a^2(l + a^2)^2 - m^2 = 4a^2 n$$

Et en posant:

$$(2.29) \quad u = a^2$$

u vérifie alors:

$$(2.30) \quad u^3 + 2lu^2 + (l^2 - 4n)u - m^2 = 0$$

2.2.2. *Résolution de $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \delta = 0$. On pose:*

$$(2.31) \quad x = X - \frac{\alpha}{3}$$

L'équation $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \delta = 0$ devient:

$$(2.32) \quad X^3 + AX + B = 0$$

Pour résoudre (2.32), on pose:

$$(2.33) \quad X = v + w$$

Et (2.32) devient:

$$(2.34) \quad v^3 + w^3 + (v + w)(3vw + A) + B = 0$$

On choisit v et w telque :

$$(2.35) \quad 3vw + A = 0$$

Donc v^3 et w^3 sont solutions de l'équation du second degré:

$$(2.36) \quad \zeta^2 + B\zeta - \frac{A^3}{27} = 0$$

3. APPLICATION

On considère un point A de coordonnées géodésiques dans le système NTT:

$$(3.37) \quad \varphi = 41.2534 \text{ gr}$$

$$(3.38) \quad \lambda = 11.6587 \text{ gr}$$

$$(3.39) \quad h_e = 754.25 \text{ m}$$

On donne $a = 6378249.20 \text{ m}$ et $e^2 = 0.0068034877$ les paramètres de l'ellipsoïde de référence à savoir l'ellipsoïde de Clarke français 1880. En utilisant (1.1), (1.2) et (1.3), on obtient les coordonnées géocentriques:

$$(3.40) \quad X = 5\,007\,066.24 \text{ m}$$

$$(3.41) \quad Y = 927\,356.78 \text{ m}$$

$$(3.42) \quad Z = 3\,828\,912.09 \text{ m}$$

On suppose qu'on a (X, Y, Z) données par les valeurs (3.40), (3.41) et (3.42). On cherche à déterminer (φ, λ, h_e) .

3.1. Calcul de la longitude géodésique. Utilisant (1.1), on obtient:

$$(3.43) \quad \frac{927\,356.78}{5\,007\,066.24} = 0.185209609 \implies \lambda = 11.6586999 = 11.6587 \text{ gr}$$

3.2. Calcul de la latitude géodésique. On a :

$$(3.44) \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5\,092\,219.843 \text{ m}$$

3.2.1. *Calcul des coefficients l, m et n de (2.18).* On a posé $t = tg\varphi$. L'équation (2.12) devient numériquement:

$$(3.45) \quad (0.751914137 - t)^2 \cdot (1 + 0.993196513t^2) = 0.000057977t^2$$

ou encore:

$$(3.46) \quad t^4 - 1.503828274t^3 + 1.572151845t^2 - 1.514129635t + 0.569247739 = 0$$

Pour éliminer le coefficient de t^3 , on fait le changement de variables (2.16) ce qui donne numériquement:

$$(3.47) \quad t = T + 0.375957069$$

Par suite, on obtient:

$$(3.48) \quad T^4 + 0.724089547T^2 - 0.757119795T + 0.162279647 = 0$$

Ce qui donne les valeurs de l, m et n :

$$(3.49) \quad l = 0.724089541; \quad m = -0.757119795; \quad n = 0.162279647$$

3.2.2. *Calcul de a .* On a posé $u = a^2$ et u vérifie l'équation (2.30) soit numériquement:

$$(3.50) \quad u^3 + 1.448179082u^2 - 0.124812925u - 0.573230384 = 0$$

De la même façon, on élimine le coefficient de u^2 dans l'équation précédente en posant:

$$(3.51) \quad u = U - \frac{1.448179082}{3} = U - 0.482726361$$

L'équation (3.50) devient:

$$(3.52) \quad U^3 - 0.823887143U - 0.288005526 = 0$$

Résolution de l'équation du troisième degré (3.52). On a obtenu l'équation précédente sous la forme de l'équation (2.32) soit:

$$U^3 + A.U + B = 0$$

avec :

$$(3.53) \quad A = -0.823887143; \quad B = -0.288005526$$

On pose:

$$U = v + w$$

avec v^3 et w^3 vérifient l'équation:

$$\xi^2 + B\xi - \frac{A^3}{27} = 0$$

ou:

$$\xi^2 - 0.288005526\xi + 0.020712829 = 0$$

C'est une équation du second degré dont la solution est:

$$(3.54) \quad \xi_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$(3.55) \quad \xi_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$(3.56) \quad \text{avec } \Delta = B^2 + \frac{4A^3}{27} = 0.000095867$$

Ce qui donne numériquement:

$$(3.57) \quad \xi_1 = \frac{0.288005526 + 0.009791170}{2} = 0.148898348$$

$$(3.58) \quad \xi_2 = \frac{0.288005526 - 0.009791170}{2} = 0.139107178$$

$$(3.59)$$

Détermination des inconnues v et w . On a alors le système:

$$(3.60) \quad v^3 = \xi_1$$

$$(3.61) \quad w^3 = \xi_2$$

Rappel: les solutions de $z^3 = 1$ sont:

$$- z_1 = 1$$

$$- z_2 = j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$- z_3 = j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{avec : } 1 + j + j^2 = 0$$

Par suite, la résolution des équations (3.60) et (3.61) sont:

$$(3.62) \quad v_1 = \xi_1^{\frac{1}{3}}$$

$$(3.63) \quad v_2 = j \cdot \xi_1^{\frac{1}{3}}$$

$$(3.64) \quad v_3 = j^2 \cdot \xi_1^{\frac{1}{3}}$$

$$(3.65) \quad w_1 = \xi_2^{\frac{1}{3}}$$

$$(3.66) \quad w_2 = j \cdot \xi_2^{\frac{1}{3}}$$

$$(3.67) \quad w_3 = j^2 \cdot \xi_2^{\frac{1}{3}}$$

Comme $U = v + w > 0$ et que v, w vérifient la condition (2.35), on choisit :

$$(3.68) \quad v = v_1 = 0.530025332 \quad \text{et} \quad w = w_1 = 0.518143252$$

Ce qui donne:

$$(3.69) \quad vw = v_1 \cdot w_1 = \xi_1^{\frac{1}{3}} \cdot \xi_2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.148898348 \times 0.139107178} = 0.274629049 > 0$$

$$(3.70) \quad U = v + w = .530025332 + 0.518143252 = 1.048168584$$

En revenant à u , on a:

$$u = U - 0.482726361 = 0.565442223 = a^2 \Rightarrow a = \pm 0.751958924$$

Prenant la valeur positive de a . On a alors:

$$(3.71) \quad a = +.751958924$$

$$(3.72) \quad b = 1.148197500$$

$$(3.73) \quad c = -a = -0.751958924$$

$$(3.74) \quad d = 0.141334265$$

Contrôle $b.d = 0.162279650 \cong 0.162279647$ la valeur de n (équ. (3.49)).

3.2.3. *Calcul de la latitude géodésique φ .* On revient à la résolution du polynôme du quatrième degré en T . On a alors:

$$(3.75) \quad T^2 + a.T + b = 0 \Leftrightarrow T^2 + 0.751958924 \times T + 1.148197500 = 0$$

$$(3.76) \quad T^2 + c.T + d = 0 \Leftrightarrow T^2 - 0.751958924 \times T + 0.141334265 = 0$$

La première équation a des racines complexes, quant à la deuxième, elle a deux racines réelles distinctes à savoir:

$$(3.77) \quad 0.381106922 \Rightarrow t_1 = T_1 + \frac{Z}{2p} = 0.757063991 = tg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = 41.2533919 \text{ gr}$$

$$(3.78) \quad 0.370852002 \Rightarrow t_2 = T_2 + \frac{Z}{2p} = 0.746809071 = tg\varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 = 40.836343 \text{ gr}$$

Parmi φ_1, φ_2 que faut-il choisir? Il faut que la latitude géodésique choisie vérifie l'équation (2.8) soit

$$ptg\varphi - e^2 N \sin\varphi = Z$$

Or le calcul montre que φ_1 est la solution à choisir soit

$$(3.79) \quad \varphi = \varphi_1 = 41.2533919 \text{ gr}$$

3.2.4. *Calcul de l'altitude ellipsoïdique h_e .* Pour déterminer l'altitude ellipsoïdique h_e , on peut utiliser (1.1) ou (1.2). Prenant la première équation, on a:

$$(3.80) \quad h_e = \frac{X}{\cos\varphi \cdot \cos\lambda} - N(\varphi) = 753.635 \text{ m}$$

Finalement, les coordonnées du point M sont:

$$M \begin{cases} \varphi = 41.2533 \text{ } 919 \text{ gr} \\ \lambda = 11.6586 \text{ } 999 \text{ gr} \\ h_e = 753.63 \text{ m} \end{cases}$$

REFERENCES

- [1] **A. Ben Hadj Salem.** 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés*. Edité par NOOR Publishing, 340 pages, ISBN 978-3-330-96843-1, Imprimé en Allemagne.
- [2] **A. Ben Hadj Salem.** 2010. *Notions Fondamentales de Géodésie pour les Techniciens Topographes*. v1. Septembre 2010. 71p.
- [3] **A. Ben Hadj Salem.** 2005. *Les Systèmes Géodésiques et les représentations planes en Usage à l'OTC*. Cours de formation donné aux techniciens de l'OTC. Août - Juillet 2005. 30p.

A. BEN HADJ SALEM
RÉSIDENCE BOUSTEN 8, AV. MOSQUÉE RAOUDHA,
1181 SOUKRA RAOUDHA, SOUKRA, TUNISIA
Email address: abenhadjsale@gmail.com