TRANSCENDANCE DES DÉFORMATIONS DES FONCTIONS POLYLOGARITHMES EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

DAVID ADAM

Résumé. Soit p un nombre premier. Dans ce journal en 2005, dans le but de reprouver par la méthode de Wade la transcendance pour $n \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ de $\Gamma_\infty(n)$, où Γ_∞ est la factorielle de Carlitz-Goss, Yao introduit une classe indénombrables de déformations des fonctions polylogarithmes de Kochubei dont il montre la transcendance de leurs valeurs en 1 (ce qui est suffisant pour son objectif) et plus généralement en $1/T^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Dans ce présent article, nous répondons à la question de Yao d'étendre ce résultat en un algébrique non nul. Nous prouvons ce fait non seulement dans le cadre de la place infinie mais aussi dans celui des places finies. Nous montrons un résultat analogue pour les déformations de la fonction polylogarithme de Carlitz.

1. Introduction

Soit $q = p^f$ ($f \in \mathbb{N}^*$) une puissance d'un nombre premier p, $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)$ et Ω_∞ le complété pour la valuation $-\deg$ d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$ contenant $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Pour $r \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_{\infty,r}$ le disque

$$\mathcal{D}_{\infty,r} = \{z \in \Omega_\infty \mid \deg(z) < r\}.$$

Dans les année 1930, Carlitz a introduit [7] le premier exemple de module de Drinfeld. On appelle *module de Carlitz* défini sur Ω le $\mathbb{F}_q$-homomorphisme d'algèbres injectif

$$C : \mathbb{F}_q[T] \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q-\mathrm{lin}}(\mathbb{G}_a/\Omega)$$

défini par

$$C_T = T + \tau^q,$$

(en fait, Carlitz travaille plutôt avec $C_T = T - \tau^q$). Il existe une unique fonction entière sur Ω, appelée *exponentielle de Carlitz* et notée $\exp_{\mathcal{C}}$, vérifiant les deux propriétés suivantes : pour tout $z \in \Omega$

$$\exp'_{\mathcal{C}}(z) = 1 \text{ et pour tout } a \in \mathbb{F}_q[T],\ \exp_{\mathcal{C}}(az) = C_a(\exp_{\mathcal{C}}(z)). \tag{1}$$

Posons

$$[0] = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ [n] = T^{q^n} - T.$$

Une expression explicite de l'exponentielle de Carlitz se déduit facilement de l'Égalité 1 :

$$\forall\, z \in \Omega,\ \exp_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{D_n}$$

où l'on a posé

$$D_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = [n]D_{n-1}^q.$$

Dans [23, Theorem 7.1], Wade prouve que pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul, $\exp_{\mathcal{C}}(\beta)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$. Puisque $\exp'_{\mathcal{C}} = 1$, la série formelle $\exp_{\mathcal{C}}(Z)$ admet un inverse dans $\mathbb{F}_q(T)[[Z]]$, appelée *logarithme de Carlitz* et noté $\mathrm{Log}_{\mathcal{C}}$. Formellement, on a

$$\mathrm{Log}_{\mathcal{C}}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{L_n} Z^{q^n},$$

avec

$$L_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = [n]L_{n-1}.$$

La série formelle $\mathrm{Log}_{\mathcal{C}}(Z)$ induit une fonction définie sur $\mathcal{D}_{\infty,q/(q-1)}$ à valeurs dans Ω_∞. Le résultat de Wade implique que $\mathrm{Log}_{\mathcal{C}}(\beta)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$ dès que β est un élément non nul de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ pour lequel $\mathrm{Log}_{\mathcal{C}}(\beta)$ est défini. Dans toute la suite, s désignera un entier naturel non nul fixé une fois pour toute. Anderson et Thakur en étudiant le T-module $C^{\otimes s}$ ont été amenés à introduire un analogue $\mathrm{Log}_{s,\mathcal{C}}$ des fonctions polylogarithmes qui généralisent la fonction logarithme de Carlitz (voir [3]). Le s^{e} polylogarithme de Carlitz est la fonction définie sur $\mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ par : pour tout $z \in \mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$

$$\mathrm{Log}_{s,\mathcal{C}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{sn}}{L_n^s} z^{q^n}.$$

Dans [17], Kochubei introduit une deuxième sorte de fonctions polylogarithmes en posant

$$\mathrm{Log}_{s,\mathcal{K}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{[n]^s}.$$

Le s^{e} logarithme de Kochubei est défini sur $\mathcal{D}_{\infty,s}$. Harada [16, Theorem 0.5] montre que si α et β sont des éléments non nuls de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ tels que α et β appartiennent à $\mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ et $\mathcal{D}_{\infty,s}$ respectivement, alors $\mathrm{Log}_{s,\mathcal{C}}(\alpha)$ et $\mathrm{Log}_{s,\mathcal{K}}(\beta)$ sont $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$-linéairemnt indépendants. En particulier, ils sont transcendants sur $\mathbb{F}_q(T)$. Les cas $\mathrm{Log}_{1,\mathcal{K}}(1)$ et $\mathrm{Log}_{s,\mathcal{C}}(1)$ avaient déjà été obtenus par Wade ([23, Theorem 4.1] et [24]). Dans les années 1930, Carlitz (voir [8] ou [6]) a introduit un analogue de la factorielle pour $\mathbb{F}_q[T]$. Dans [14] (voir aussi [13]), Goss a prolongé cette factorielle à $\mathbb{Z}_p$ en fonction continue, notée $\Gamma_\infty(n)!_{\mathcal{C}}$. Dans le cadre de la recherche d'une démonstration par la méthode de Wade de la transcendance de $\Gamma_\infty(n)!_{\mathcal{C}}$ pour $n \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$, Yao a introduit une classe indénombrable de déformées des fonctions polylogarithmes de Carlitz et de Kochubei.

Soit $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{F}_q$. La *déformée de la fonction polylogarithme de Carlitz par la suite* $\underline{\varepsilon}$ est la fonction, notée $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}$, définie sur $\mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ par : pour tout $z \in \mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$

$$\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{z^{q^n}}{L_n^s}.$$

On définit de façon analogue la *déformée* $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}$ *de la fonction polylogarithme de Kochubei par la suite* $\underline{\varepsilon}$: pour tout $z \in \mathcal{D}_{\infty,sq}$

$$\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{z^{q^n}}{[n]^s}.$$

En utilisant la méthode de Wade, Yao a montré le

Théorème. [25, Theorem 3] *Si la suite* $\underline{\varepsilon}$ *n'est pas ultimement nulle, alors*

$$\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{[n]^s}$$

est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Yao pose la question suivante :

Question $\star$. Si la suite $\underline{\varepsilon}$ est non ultimement nulle, la valeur $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\alpha)$ est-elle transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)$ pour $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul ?

Yao annonce que la méthode automatique permet de montrer le

Théorème. [25, Theorem 4] *Si la suite* $\underline{\varepsilon}$ *n'est pas ultimement nulle, alors pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(T^{-k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{[n]^s} T^{-kq^n}$$

est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Yao constate que ces deux derniers Théorèmes sont les seuls résultats connus dans la direction d'une réponse à la Question $\star$. Concernant la fonction polylogarithme de Carlitz, Yao obtient le résultat plus faible suivant :

Théorème. [26, Theorem1] *Si la suite $\underline{\varepsilon}$ n'est pas ultimement nulle, la série formelle*

$$\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(Z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n\frac{Z^{q^n}}{L_n^s}.$$

est transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)(Z)$.

En fait, ce résultat est déjà une conséquence immédiate de l'analogue du théorème d'Eisenstein [5, Lemma 2.1]. Comme le remarque Wade [24], sa preuve de la transcendance de $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\infty}(1)$ peut être modifiée pour obtenir des résultats un peu plus généraux. En particulier, on peut obtenir le

Théorème (Wade adapté, [24])**.** *Si la suite $\underline{\varepsilon}$ n'est pas ultimement nulle, alors*

$$\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{L_n^s}$$

est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Le Théorème ci-dessus se déduit aussi de [19, Theorem 3].

Dans cet article, nous donnons une réponse positive à la Question $\star$. Nous prouvons le

Théorème 1. *Soit $\underline{\varepsilon}$ une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle. Alors, pour tout $\alpha\in\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul,* $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\alpha)$ *est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Nous montrons aussi que ce résultat est aussi valable pour les fonctions polylogarithmes de Carlitz :

Théorème 2. *Soit $\underline{\varepsilon}$ une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle. Alors, pour tout $\alpha\in\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul,* $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\alpha)$ *est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré d, $\mathbb{F}_q(T)_P$ le complété pour la topologie induite par la valuation v_P-adique de $\mathbb{F}_q(T)$ (normalisée par $v_P(P)=1$) et Ω_P le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)_P$ contenant $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Il existe un unique élément ω de Ω_P algébrique sur $\mathbb{F}_q$ de degré d tel que $v_P(T-\omega)=1$. On notera aussi Ω_ω pour Ω_P et v_ω la valuation v_P. On pose $\deg_\omega=-v_\omega$. Pour un réel r, on note

$$\mathcal{D}_{\omega,r}=\{z\in\Omega_\omega\mid\deg_\omega(z)<r\}.$$

Les séries formelles $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(Z)$ et $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(Z)$ induisent une fonction définie sur $\mathcal{D}_{\omega,0}$ à valeurs dans Ω_ω, que l'on notera respectivement $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C},\omega}(Z)$ et $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C},\omega}(Z)$. Nous montrons le

Théorème 3. *Soit $\underline{\varepsilon}$ une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle. Alors, pour tout $\beta\in\overline{\mathbb{F}_q(T)}\cap\mathcal{D}_{\omega,0}$ non nul,*

$$\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C},\omega}(\beta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n\frac{\beta^{q^n}}{L_n^s}\ \text{ et }\ \mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K},\omega}(\beta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n\frac{\beta^{q^n}}{[n]^s}$$

sont transcendants sur $\mathbb{F}_q(T)$.

L. Denis fit la remarquable observation que la méthode de Mahler était bien adaptée pour l'arithmétique des corps de fonctions (voir [9], [10] ou [21]). Malheureusement, celle-ci fut concommitante à la publication du célèbre critère **ABP** par Anderson, Brownawell et Papanikolas [4, Theorem 3.1] et n'a pas eu la publicité qu'elle méritait. Pour démontrer les Théorèmes 1, 2 et 3, nous utiliserons une modification d'une variante de la méthode de Mahler introduite par Kubota [18]. L'avantage de la méthode de Malher sur le critère **ABP** est qu'il n'est pas nécessaire que les fonctions en jeu satisfassent à un système d'équations « rigide ». Cette flexibilité permet d'obtenir des résultats de transcendance sur des classes indénombrables de fonctions, ce que ne peut obtenir le critère **ABP**. Cependant, il est bien que connu (voir [11]) que la méthode de Mahler en plusieurs variables aux places non-archimédiennes, comme nous l'utiliserons ici, présentent des difficultés structurelles. Un des apports principaux que l'on fera dans cet article est de montrer comment le fait de travailler en caractéristique non nulle et les propriétés très particulières des fonctions étudiées permettent de surpasser ces difficultés. Ceci répond (très partiellement) à la demande de Flicker de savoir si la méthode de Mahler peut être adaptée pour fonctionner dans le cadre de fonctions à plusieurs variables aux places non archimédiennes.

Dans toute le suite, $\underline{\varepsilon}$ désignera une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle, autrement dit que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_k \neq 0\}$ est infini. Notons $\eta_0 < \eta_1 < \cdots$ ses éléments. Pour γ un élément non nul de $\overline{\mathbb{F}_q}$, on note $\mathbb{F}_\gamma$ le corps $\mathbb{F}_q(\gamma)$. Soit u un élément non nul de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. On note $\rho(u)$ le polynôme unitaire de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré minimal tel que $\rho(u)u$ soit un entier de $\mathbb{F}_q(T)(u)$ c'est-à-dire appartient à la clôture intégrale de $\mathbb{F}_q[T]$ dans $\mathbb{F}_q(T)(u)$. Tout multiple non nul de $\rho(u)$ dans $\mathbb{F}_q[T]$ est appelé *dénominateur de u*. On définit la taille $t(u)$ de u par :

$$t(u) = \max\big(\max_{\sigma\in\mathcal{H}} \deg(\sigma(u)), \deg(\rho(u))\big),$$

où $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q(T)}/\mathbb{F}_q(T))$. Les propriétés de la taille peuvent être lues dans [20] pour la caractéristique 0 et leur transcription en caractéristique finie dans [2].

Pour uniformiser les démonstrations à venir, il sera pratique d'étendre les notations vues ci-dessus dans le cas des places finies au cas de la place infinie en posant $\omega = \infty$ et $\deg_\infty = \deg$. En particulier $\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}_q$. Ceci est compatible avec les notations présentées en début d'introduction.

L'inégalité de Liouville pour u s'écrit dans notre contexte (voir [27, Lemma 2.1] et [28, Lemma 4.2])

Proposition 4 (Inégalité de Liouville)**.** *Soit $K/\mathbb{F}_q(T)$ une extension finie de degré de séparabilité Ξ qui contient u. Alors, on a*

$$\deg_\omega(u) \geqslant -2\Xi t(u).$$

2. Le cas lacunaire

Dans ce paragraphe, on suppose que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$. La preuve de la transcendance des valeurs des polylogarithmes de Carlitz et Kochubei se situe dans le cadre des preuves de transcendance des séries lacunaires (voir [12] par exemple).

Théorème 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments non nuls d'une extension algébrique finie K de $\mathbb{F}_q(T)$. On suppose que*

(a) la suite $(\sum_{k=0}^n \deg_\omega(u_k))_n$ est négligeable devant la suite $(\deg_\omega(u_{n+1}))_n$;

(b) il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t(u_n) \leqslant C \deg_\omega(u_n)$;

(c) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\deg_\omega(u_n))_{n\geqslant N}$ est strictement négative et strictement décroissante ;

Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est un un élément de Ω_ω transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Démonstration. Clairement, $A = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien défini. On suppose que A est algébrique sur $\mathbb{F}_\omega(T)$ et on note Ξ_0 le degré de l'extension $(\mathbb{F}_q(T))(A)/\mathbb{F}_q(T)$. Pour tout entier n supérieur à N, soit A_n la n^{e} somme partielle de A : $A_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Par la stricte décroissance de la suite $(\deg_\omega(u_n))_n$, on a

$$\deg(A - A_n) = \deg(u_{n+1}).$$

Une majoration de la taille de $A - A_n$ est donnée par :

$$t(A - A_n) \leqslant t(A) + C\sum_{k=0}^n \deg_\omega(u_k).$$

L'inégalité de Liouville implique que

$$\deg_\omega(u_{n+1}) \geqslant -2\Xi_0(t(A) + C\sum_{k=0}^n \deg_\omega(u_k)).$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2\Xi_0(t(A) + C\sum_{k=0}^n \deg_\omega(u_k))}{\deg_\omega(u_{n+1})} = 0,$$

cela est impossible. □

Appliquant ce théorème aux fonctions polylogarithmes déformées de Carlitz et Kochubei, on obtient la transcendance de leurs valeurs en un élément algébrique lorsque ces fonctions sont lacunaires :

Théorème 6. *On suppose que* $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$. *Alors pour tout* $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ *tel que* $\deg(\beta) < s$ *(resp.* $\deg(\beta) < sq/(q-1)$*),* $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\beta)$ *(resp.* $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta)$*) est transcendant sur* $\mathbb{F}_q(T)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_{\mathcal{K},n} = \varepsilon_{\eta_n} \frac{\beta^{q^{\eta_n}}}{[\eta_n]}$ (resp. $u_{\mathcal{C},n} = \varepsilon_{\eta_n} \frac{\beta^{q^{\eta_n}}}{L_{\eta_n}}$). On a

$$\deg(u_{\mathcal{K},n}) = q^{\eta_n}(\deg(\beta) - s) \text{ et } t(u_{\mathcal{K},n}) \leqslant q^{\eta_n}(s + t(b))$$

(resp.

$$\deg(u_{\mathcal{C},n}) = q^{\eta_n}\deg(\beta) - s\frac{q^{\eta_n+1} - q}{q-1} \text{ et } t(u_{\mathcal{C},n}) \leqslant s\frac{q^{\eta_n+1} - q}{q-1} + q^{\eta_n}t(b)).$$

Puisque $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$, la suite $(u_{\mathcal{K},n})_n$ (resp. $(u_{\mathcal{C},n})_n$) vérifie les conditions du Théorème 5. Par conséquent, $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\mathcal{K},n}$ (resp. $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\mathcal{C},n}$) est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$. □

Si $\omega \neq \infty$ la transcendance des valeurs des polylogarithmes déformés de Carlitz et Kochubei, considérés comme fonctions de Ω_ω, en un élément algébrique s'obtient de manière identique.

Théorème 7. *On suppose que* $\omega \neq \infty$ *et* $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$. *Alors pour tout* $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ *tel que* $v_\omega(\beta) > 0$, $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K},\omega}(\beta)$ *et* $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C},\omega}(\beta)$ *sont transcendants sur* $\mathbb{F}_q(T)$.

3. Écarts bornés

Soit τ un entier strictement positif et $D \in \mathbb{F}_\omega[T]$. On note $\mathscr{M}_{\tau,D}$ l'ensemble des séries formelles de $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$

$$f(X,Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{i,j}X^iY^j \qquad (\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2\ f_{i,j} \in \mathbb{F}_\omega(T))$$

telles que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$

$$\deg(f_{i,j}) \leqslant \tau(i+j) \text{ et } D^{\tau(i+j)}f_{i,j} \in \mathbb{F}_\omega[T].$$

Remarque 8. Toute série formelle de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$ induit une fonction définie sur $(\mathcal{D}_{\omega,-\tau})^2$ à valeurs dans Ω_ω (voir [22, Exercice 23B]).

L'ordre en 0 d'une série formelle $f(X,Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{i,j}X^iY^i$ de $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$ est l'entier naturel $\mathrm{ord}_0(f)$ défini par

$$\mathrm{ord}_0(f) = \min\{i + j \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ f_{ij} \neq 0\},$$

si f est non nulle. Sinon, par convention, l'ordre en 0 de f est $+\infty$. Clairement, pour $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{ord}_0(f) \geqslant r \Longleftrightarrow f \in \mathcal{I}^r,$$

où $\mathcal{I} = (X,Y)$ est l'idéal de $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$ engendré par X et Y. L'ordre en 0 est une valuation de $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$ qui en fait un anneau complet pour la topologie induite. Une suite $(f_k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{k,i,j}X^iY^j)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$ converge vers

$$f = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{i,j}X^iY^j \in (\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$$

si et seulement si pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel pour tout $k \geqslant N$, $f_{k,i,j} = f_{i,j}$. En particulier, $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$ est un ensemble complet.

Lemme 9. *L'ensemble* $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$ *est un sous-anneau compact de* $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$.

Démonstration. Seules la compacité de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$ et sa stabilité pour la multiplication méritent que l'on s'y attarde. Soit $(f_k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{k,i,j}X^iY^j)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$ qui converge vers $f = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{i,j}X^iY^j$ dans $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel pour tout $k \geqslant N$, $f_{k,i,j} = f_{i,j}$. Ce qui implique que $D^{i+j}f_{i,j}$ appartient à $\mathbb{F}_\omega[T]$ et est de degré inférieur à $\tau(i+j)$. Par conséquent $f \in \mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$. Soit $f = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{i,j}X^iY^j$ et $g = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} g_{i,j}X^iY^j$ deux éléments de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$. Ecrivons

$$f(X,Y)g(X,Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} U_{i,j}X^iY^j \qquad (U_{i,j} \in \mathbb{F}_\omega(T))$$

On a pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$

$$U_{i,j} = \sum_{\substack{(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbb{N}^4 \\ l_1+l_3=i \\ l_2+l_4=j}} f_{l_1,l_2}g_{l_3,l_4}.$$

Comme

$$D^{\tau(i+j)}U_{i,j} = \sum_{\substack{(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbb{N}^4 \\ l_1+l_3=i \\ l_2+l_4=j}} D^{\tau(l_1+l_2)}f_{l_1,l_2}D^{\tau(l_3+l_4)}g_{l_3,l_4},$$

cela implique que $D^{\tau(i+j)}U_{i,j}$ appartient à $\mathbb{F}_\omega[T]$ et est de degré inférieur à $\tau(i+j)$. Ceci prouve que $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$ est fermé dans $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$ donc compact. □

Soit $f \in \mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on écrira

$$f^k(X,Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{k,i,j}X^iY^j.$$

D'après ce qu'il précède, f^k appartient à $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$.

On appelle *hauteur* d'un polynôme $P \in (\mathbb{F}_\omega(T))[X,Y]$,

$$P(X,Y) = \sum_{\substack{i\in[\![0,m_1]\!] \\ j\in[\![0,m_2]\!]}} p_{i,j}X^iY^j \qquad (p_{i,j} \in \mathbb{F}_\omega(T)),$$

le réel

$$\mathrm{ht}(P) = \max_{\substack{i\in[\![0,m_1]\!] \\ j\in[\![0,m_2]\!]}} \deg(p_{i,j}).$$

Fixons pour le moment un entier naturel δ.

Lemme 10. *Il existe un entier naturel $\mu_{\delta,\tau}$, tel que pour toute série formelle f de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$, il existe des polynômes $P_{\delta,0},\cdots,P_{\delta,\delta}$ non tous nuls de $(\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ et de hauteur inférieure à $\mu_{\delta,\tau}$ ayant la propriété que*

$$\mathrm{ord}_0(H_\delta(f(X,Y))) \geqslant E(\delta^{3/2}),$$

où $H_\delta(Z) = \sum_{k=0}^{\delta} P_{\delta,k}(X,Y)Z^k$ et $E(.)$ désigne la fonction partie entière.

Démonstration. Pour tout $k \in [\![0,\delta]\!]$, on considère les polynômes

$$P_{\delta,k}(X,Y) = \sum_{(l_1,l_2)\in[\![0,\delta]\!]^2} p_{\delta,k,l_1,l_2}X^{l_1}Y^{l_2} \qquad (p_{\delta,k,l_1,l_2} \in \mathbb{F}_\omega[T]).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\delta} P_{\delta,k}(X,Y)f^k(X,Y) &= \sum_{k=0}^{\delta}\Big(\sum_{(l_1,l_2)\in[\![0,\delta]\!]^2} p_{\delta,k,l_1,l_2}X^{l_1}Y^{l_2}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{k,i,j}X^iY^j\Big) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\Big(\sum_{k=0}^{\delta}\sum_{\substack{(l_1,l_2)\in[\![0,\delta]\!]^2 \\ l_1\leqslant i, l_2\leqslant j}} p_{\delta,k,l_1,l_2}f_{k,i-l_1,j-l_2}\Big)X^iY^j\end{aligned}$$

Ainsi, pour que la série formelle $\sum_{k=0}^{\delta} P_{\delta,k}(X,Y)f^k(X,Y)$ appartienne à $\mathcal{I}^{E(\delta^{3/2})}$, il suffit que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i+j < E(\delta^{3/2})$, on ait

$$\sum_{k=0}^{\delta} \sum_{\substack{(l_1,l_2)\in[\![0,\delta]\!]^2 \\ l_1\leqslant i, l_2\leqslant j}} p_{\delta,k,l_1,l_2} f_{k,i-l_1,j-l_2} = 0$$

Le Lemme 9 et un lemme de Siegel (voir [1, Lemme 11]) montrent qu'il existe $\mu_{\delta,\tau} \in \mathbb{N}$ et un polynôme non nul P_f de $((\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y])[Z]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ et de hauteur inférieure à $\mu_{\delta,\tau}$ tels que $\mathrm{ord}_0(P_f(f)) \geqslant E(\delta^{3/2})$. □

Dans toute preuve de transcendance, il est nécessaire de prouver que certaines quantités sont non nulles. C'est ce que l'on appelle un *lemme des zéros*. Le lemme des zéros que nous utiliserons dans notre situation est élémentaire :

Proposition 11. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $P_0, \cdots, P_\delta$ des polynômes de $\mathbb{K}[X,Y]$ non tous nuls, de degrés en X et Y inférieurs à δ, $(\alpha_i)_{i\in[\![0,\delta]\!]}$, $(\beta_i)_{i\in[\![0,\delta]\!]}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des familles d'éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$. Alors il existe une suite strictement croissante $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ et $(i_0,j_0) \in [\![0,\delta]\!]^2$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{l=0}^{\delta} P_l(\alpha_{i_0}^{q^{c_{i_k}}}, \beta_{j_0}^{q^{c_{i_k}}}) x_{c_{i_k}}^l \neq 0.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $(i,j,h) \in [\![0,\delta]\!]^3$, on ait

$$Q_{u,h}(\alpha_i^{q^{c_{u(\delta+1)+h}}}, \beta_j^{q^{c_{u(\delta+1)+h}}}) = 0,$$

où $Q_{u,h}(X,Y)$ est le polynôme de $\mathbb{K}[X,Y]$ défini par

$$Q_{u,h}(X,Y) := \sum_{l=0}^{\delta} P_l(X,Y) x_{c_{u(\delta+1)+h}}^l.$$

Par hypothèse, les ensembles $\{\alpha_i^{q^{c_{u(\delta+1)+h}}} \mid i \in [\![0,\delta]\!]\}$ et $\{\beta_i^{q^{c_{u(\delta+1)+h}}} \mid i \in [\![0,\delta]\!]\}$ sont de cardinal $\delta+1$. Le polynôme $Q_{u,h}(X,Y)$ est de degrés en X et Y inférieurs à δ et s'annule sur $\{\alpha_i^{q^{c_{u(\delta+1)+h}}} \mid i \in [\![0,\delta]\!]\} \times \{\beta_i^{q^{c_{u(\delta+1)+h}}} \mid i \in [\![0,\delta]\!]\}$, c'est le polynôme nul. Comme les éléments $x_{c_{u\delta}}, \cdots, x_{c_{(u+1)\delta}}$ sont distincts, le déterminant de Vandermonde

$$V(x_{c_{u(\delta+1)}}, x_{c_{u(\delta+1)+1}} \cdots, x_{c_{u(\delta+1)+\delta}})$$

est non nul, ce qui implique que tous les polynômes P_l ($l \in [\![0,\delta]\!]$) le sont ; ce qui n'est pas le cas. Ainsi, il existe $(i_u, j_u, h_u) \in [\![0,\delta]\!]^3$ tel que

$$\sum_{l=0}^{\delta} P_l(\alpha_{i_u}^{q^{c_{u(\delta+1)+h_u}}}, \beta_{j_u}^{q^{c_{u(\delta+1)+h_u}}}) x_{c_{u(\delta+1)+h_u}}^l \neq 0.$$

On conclut alors avec le principe des tiroirs. □

Lemme 12. *Soit $A = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable, C un ensemble fini de cardinal c, B un ensemble fini de cardinal strictement supérieur à $c\delta$ et φ une application de $A \times B$ dans C. Alors, il existe des sous-ensembles $\widetilde{A}$ de $\{\alpha_i \mid i \in [\![0, \delta c^{c\delta+1}]\!]\}$ et $\widetilde{B}$ de B de cardinal strictement supérieur à δ tels que φ est constante sur $\widetilde{A} \times \widetilde{B}$.*

Démonstration. Posons $A' = \{\alpha_i \mid i \in [\![0, \delta c^{c\delta+1}]\!]\}$, $B = \{b_i \mid i \in [\![0, n_B]\!]\}$ où n_B est un entier supérieur à $c\delta$ et $\tilde{c} = c\delta + 1$. Pour tout $a \in E'_1$, notons ℓ_a la liste de C de longueur $\tilde{c}$ définie par

$$\ell_a = \big(f(a,b_0), \cdots, f(a,b_{\tilde{c}})\big).$$

Puisque le nombre de listes de C de longueur $\tilde{c}$ est $c^{\tilde{c}}$ le principe des tiroirs implique qu'il existe au moins $\frac{\delta c^{\tilde{c}}+1}{c^{\tilde{c}}}$, c'est-à-dire au moins $\delta+1$ éléments $i_0, \cdots, i_\delta$ de $[\![0, \delta c^{\tilde{c}}]\!]$ tels que

$$\ell_{a_0} = \cdots = \ell_{a_\delta}.$$

Par conséquent, pour tout $j \in [\![0, c\delta]\!]$, il existe $c_j \in C$ tel que

$$c_j = f(a_{i_0}, b_j) = \cdots = f(a_{i_\delta}, b_j).$$

De nouveau, le principe des tiroirs implique qu'il existe au moins $\delta+1$ éléments $j_0,\cdots,j_\delta$ de $[\![0,\delta c]\!]$ tels que $c_{j_0}=\cdots=c_{j_\delta}$. Notons c'' cet élément. On a pour tout $(l_1,l_2)\in[\![0,\delta]\!]^2$, $f(a_{i_{l_1}},b_{j_{l_2}})=c''$, ce qui signifie que f est constante sur le produit cartésien

$$\{a_{i_{l_1}}\mid l_1\in[\![0,\delta]\!]\}\times\{b_{j_{l_2}}\mid l_2\in[\![0,\delta]\!]\}.$$

□

Pour simplifier les notations, on pose (rappelons que $d=[\mathbb{F}_\omega:\mathbb{F}_q]$)

$$c_{\delta,\tau}=q^{d(\delta+1)^3(\mu_{\delta,\tau}+1)},\ G_{\delta,\tau}=\delta c_{\delta,\tau}^{\delta c_{\delta,\tau}+1}\text{ et}$$

$$\mathcal{A}_{\omega,\delta,\tau}=\{H\in(\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y]\mid \deg_X H\leqslant\delta,\ \deg_Y H\leqslant\delta,\ \mathrm{ht}(H)\leqslant\mu_{\delta,\tau}\},$$

où $\mu_{\delta,\tau}$ a été défini au Lemme 10. On rappelle que l'ordre lexicogrpahique sur l'ensemble $\mathfrak{S}_{\delta,\tau}:=\mathbb{N}\times[\![0,c_{\delta,\tau}]\!]$, noté $\leqslant_{\mathfrak{S}_{\delta,\tau}}$, est défini par : pour tout $((u_1,v_1),(u_2,v_2))\in\left(\mathfrak{S}_{\delta,\tau}\right)^2$

$$(u_1,v_1)\leqslant_{\mathfrak{S}_{\delta,\tau}}(u_2,v_2)\Longleftrightarrow\begin{cases}u_1<u_2\text{ ou}\\ u_1=u_2\text{ et }v_1\leqslant v_2.\end{cases}$$

Remarquons que tout élément (u,v) de $\mathfrak{S}_{\delta,\tau}$ différent de $(0,0)$ admet un unique prédécesseur immédiat (voir [15, Section 14] pour la définition), que l'on notera $\widehat{(u,v)}$.

Proposition 13. *Pour tout $(i,j)\in[\![0,G_{\delta,\tau}]\!]^2$, soit $(f_{i,j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$. Alors, il existe des polynômes P_l ($l\in[\![0,\delta]\!]$) non tous nuls de $(\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ, deux familles $(i_u)_{u\in[\![0,\delta]\!]}$ et $(j_u)_{u\in[\![0,\delta]\!]}$ d'éléments distincts de $[\![0,G_{\delta,\tau}]\!]$ et une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ strictement croissante tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $(u,v)\in[\![0,\delta]\!]^2$*

$$\mathrm{ord}_0\left(\sum_{l=0}^{\delta}P_l(X,Y)f^l_{i_u,j_v,k_n}(X,Y)\right)\geqslant E(\delta^{3/2}).$$

Démonstration. D'après le Lemme 10 et le principe des tiroirs, il existe des polynômes $P_0^{(0,0)},\cdots,P_\delta^{(0,0)}$ de $\mathcal{A}_{\omega,\delta,\tau}$ non tous nuls et une suite $(k_n^{(0,0)})_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait

$$\mathrm{ord}_0\left(\sum_{l=0}^{\delta}P_l^{(0,0)}(X,Y)f^l_{0,0,k_n^{(0,0)}}(X,Y)\right)\geqslant E(\delta^{3/2}).$$

Posons $\widetilde{P^{(0,0)}}=\left(P_0^{(0,0)},\cdots,P_\delta^{(0,0)}\right)$. On construit par récurrence sur $(u,v)\in\mathfrak{S}_{\delta,\tau}$ une liste de polynômes $\widetilde{P^{(u,v)}}=\left(P_0^{(u,v)},\cdots,P_\delta^{(u,v)}\right)$ de $\mathcal{A}_{\omega,\delta,\tau}$ non tous nuls et une suite $(k_n^{(u,v)})_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait

$$\mathrm{ord}_0\left(\sum_{l=0}^{\delta}P_l^{(u,v)}(X,Y)f^l_{u,v,k_n^{(u,v)}}(X,Y)\right)\geqslant E(\delta^{3/2}).\qquad(\diamond)$$

Le cas $(u,v)=(0,0)$ est déjà traité. Si $(u,v)\neq(0,0)$, toujours par le Lemme 10 et le principe des tiroirs, il existe une suite extraite $(k_n^{(u,v)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(k_n^{\widehat{(u,v)}})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est donc strictement croissante et des polynômes $P_0^{(u,v)},\cdots,P_\delta^{(u,v)}$ non tous nuls de $\mathcal{A}_{\omega,\delta,\tau}$ satisfaisant pour tout $n\in\mathbb{N}$ à la Condition $\diamond$. Par le Lemme 12 et la construction de la suite $(k_n^{(G_{\delta,\tau},G_{\delta,\tau})})_{n\in\mathbb{N}}$, il existe des polynômes $P_0,\cdots,P_\delta$ non tous nuls de $\mathcal{A}_{\omega,\delta,\tau}$, deux sous-ensembles $\widehat{A}:=\{i_u\mid u\in[\![0,\delta]\!]\}$ et $\widehat{B}:=\{j_v\mid v\in[\![0,\delta]\!]\}$ de $[\![0,G_{\delta,\tau}]\!]$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $(u,v)\in\widehat{A}\times\widehat{B}$, on ait

$$\mathrm{ord}_0\left(\sum_{l=0}^{\delta}P_l(X,Y)f^l_{i_u,j_v,k_n^{(G_{\delta,\tau},G_{\delta,\tau})}}(X,Y)\right)\geqslant E(\delta^{3/2}).$$

□

Pour un sous-ensemble A de Ω_ω, on pose

$$m_{\omega,A}=\max\{\deg_\omega(x)\mid x\in A\}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}.$$

Proposition 14. *Soit $A = \{\alpha_i \mid i \in [\![0, G_{\delta,\tau}]\!]\}$ et $B = \{\beta_i \mid i \in [\![0, G_{\delta,\tau}]\!]\}$ deux sous-ensembles de $\overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\omega,0}$. Pour tout $(i,j) \in [\![0, G_{\delta,\tau}]\!]^2$, on considère une suite $(f_{i,j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$. Soit k un entier, $k > \log_q(-\tau/m_{\omega,A\cup B})$. On suppose que pour tout $(i',j') \in [\![0, G_{\delta,\tau}]\!]^2$, on a $f_{i,j,k}(\alpha_i^{q^k}, \beta_j^{q^k}) = f_{i',j',k}(\alpha_{i'}^{q^k}, \beta_{j'}^{q^k})$ et que pour tout entier $k' > k$, on ait*

$$f_{i,j,k}(\alpha_i^{q^k}, \beta_j^{q^k}) \neq f_{i,j,k'}(\alpha_i^{q^{k'}}, \beta_j^{q^{k'}}).$$

Alors, il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de $\mathbb{N}$, un couple (i_0, j_0) de $[\![0, G_{\delta,\tau}]\!]^2$ et des polynômes $P_0, \cdots, P_\delta$ non tous nuls de $\mathcal{A}_{\omega,\delta,\tau}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\sum_{l=0}^{\delta} P_l(\alpha_{i_0}^{q^{k_n}}, \beta_{j_0}^{q^{k_n}}) f_{i_0,j_0,k_n}^l(\alpha_{i_0}^{q^{k_n}}, \beta_{j_0}^{q^{k_n}}) \neq 0$$

et

$$\mathrm{ord}_0 \left(\sum_{l=0}^{\delta} P_l(X,Y) f_{i_0,j_0,k_n}^l(X,Y) \right) \geqslant E(\delta^{3/2}).$$

Démonstration. La condition sur k vise à s'assurer de l'existence de $f_{i,j,k}(\alpha_i^{q^k}, \beta_j^{q^k})$ pour tout $(i,j) \in [\![0, G_{\delta,\tau}]\!]^2$. Cela provient de la Remarque 8. La Proposition 13 nous assure l'existence de polynômes P_l ($l \in [\![0,\delta]\!]$) non tous nuls de $(\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ, deux familles $(i_u)_{u\in[\![0,\delta]\!]}$ et $(j_u)_{u\in[\![0,\delta]\!]}$ d'éléments distincts de $[\![0, G_{\delta,\tau}]\!]$ et une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ strictement croissante tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(u,v) \in [\![0,\delta]\!]^2$

$$\mathrm{ord}_0 \left(\sum_{l=0}^{\delta} P_l(X,Y) f_{i_u,j_v,k_n}^l(X,Y) \right) \geqslant E(\delta^{3/2}).$$

Posons $x_{k_n} = f_{i_u,j_v,k_n}(\alpha_{i_u}^{q^{k_n}}, \beta_{j_u}^{q^{k_n}})$ qui par hypothèse ne dépend pas de i_u et j_v. La suite $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est composée que d'éléments distincts. La Proposition 11 implique l'existence d'un couple $(u_0, v_0) \in [\![0,\delta]\!]^2$ et d'une suite d'entiers naturels $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\sum_{l=0}^{\delta} P_l(\alpha_{i_{u_0}}^{q^{k_{l_n}}}, \beta_{j_{v_0}}^{q^{k_{l_n}}}) f_{i_0,j_0,k_{l_n}}^l(\alpha_{i_{u_0}}^{q^{k_{l_n}}}, \beta_{j_{v_0}}^{q^{k_{l_n}}}) \neq 0.$$

□

On considère maintenant deux éléments α et β de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nuls.

Lemme 15. *Soit $K \in \mathbb{R}^+$, k un entier naturel, $P_0, \cdots, P_\delta$ des polynômes non tous nuls de $(\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ et x un élément algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ de taille inférieure à Kq^k. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$t\big(\sum_{j=0}^{\delta} P_j(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k}) x^j\big) \leqslant \max_{j\in[\![0,\delta]\!]} \mathrm{ht}(P_j) + \delta(t(\alpha) + t(\beta) + K) q^k.$$

Démonstration. Soit $j \in [\![0,\delta]\!]$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \deg\Big(\sigma\big(P_j(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k}) x^j\big)\Big) &\leqslant \mathrm{ht}(P_j) + \delta q^k \max(0, \boxed{\alpha}, \boxed{\beta}) + \delta K q^k \\ ) &\leqslant \max_{j\in[\![0,\delta]\!]} \mathrm{ht}(P_j) + \delta q^k \max(K, \boxed{\alpha}, \boxed{\beta}). \end{aligned}$$

De plus, $\big(\rho(\alpha)\rho(\beta)\big)^{\delta q^k} \rho^\delta(x)$ est un dénominateur de $\sum_{j=0}^{\delta} P_j(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k}) x^j$. Puisque

$$\deg\Big(\big(\rho(\alpha)\rho(\beta)\big)^{\delta q^k} \rho^\delta(x)\Big) \leqslant \delta q^k \big(t(\alpha) + t(\beta) + K\big),$$

le lemme s'en suit. □

Dorénavant, on suppose que $(\alpha, \beta) \in (\mathcal{D}_{\omega,0})^2$.

Proposition 16. *Soit $u \in \mathbb{N}^*$ et $P_0, \cdots, P_\delta$ des polynômes non tous nuls de $(\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ. Pour tout entier $k > \log_q(-\tau/m_{\omega,\{\alpha,\beta\}})$ et toute série formelle $f \in \mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$ ayant la propriété que*

$$\mathrm{ord}_0\left(\sum_{j=0}^{\delta} P_j(X,Y) f^j(X,Y)\right) = u,$$

on a

$$\deg_\omega\big(\sum_{j=0}^{\delta} P_j(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k}) f^j(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k})\big) \leqslant \max_{0 \leqslant l \leqslant \delta} \mathrm{ht}(P_l) + (\tau + q^k m_{\omega,\{\alpha,\beta\}})u.$$

Démonstration. Par hypothèse sur k, $f(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k})$ est bien défini. Ecrivons pour $l \in [\![0,\delta]\!]$,

$$P_l(X,Y) = \sum_{\substack{0 \leqslant l_1 \leqslant \delta \\ 0 \leqslant l_2 \leqslant \delta}} p_{l_1,l_2} X^{l_1} Y^{l_2}.$$

Posons

$$\widehat{A} = \sum_{l=0}^{\delta} P_l(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k}) f^l(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k}).$$

De l'égalité

$$\widehat{A} = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j \geqslant u}} \big(\sum_{l=0}^{\delta} \sum_{\substack{(l_1,l_2)\in[\![0,\delta]\!]^2 \\ l_1 \leqslant i, l_2 \leqslant j}} p_{\delta,l,l_1,l_2} f_{l,i-l_1,j-l_2}\big) \alpha^{iq^k} \beta^{jq^k},$$

il vient que

$$\begin{aligned}
\deg_\omega(\widehat{A}) &\leqslant \max_{0 \leqslant l \leqslant \delta} \mathrm{ht}(P_l) + \max_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j\geqslant u \\ l \in [\![0,\delta]\!]}} \max_{\substack{(l_1,l_2)\in[\![0,\delta]\!]^2 \\ l_1 \leqslant i, l_2 \leqslant j}} \deg(f_{l,i-l_1,j-l_2}) + \\
&\qquad q^k(i \deg_\omega(\alpha) + j \deg_\omega(\beta)) \\
&\leqslant \max_{0 \leqslant l \leqslant \delta} \mathrm{ht}(P_l) + \max_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j\geqslant u}} \tau(i+j) + q^k(i \deg_\omega(\alpha) + j \deg_\omega(\beta)) \\
&\leqslant \max_{0 \leqslant l \leqslant \delta} \mathrm{ht}(P_l) + (\tau + q^k m_{\omega,\{\alpha,\beta\}})(i+j).
\end{aligned}$$

On obtient, pour tout entier k tel que $\tau + q^k m_{\omega,\{\alpha,\beta\}} < 0$, que

$$\deg_\omega\left(\sum_{l=0}^{\delta} P_l(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k}) f^l(\alpha^{q^k}, \beta^{q^k})\right) \leqslant \max_{0 \leqslant l \leqslant \delta} \mathrm{ht}(P_l) + (\tau + q^k m_{\omega,\{\alpha,\beta\}})u.$$

□

Théorème 17. *Soit K un réel, Ξ un entier naturel, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_{\omega,\tau,D}$ et $\big((\alpha_\delta, \beta_\delta)\big)_{\delta\in\mathbb{N}}$ une suite de $(\overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\omega,0})^2$ telle que les suites $\big([\mathbb{F}_q(T)(\alpha_\delta,\beta_\delta) : \mathbb{F}_q(T)]_s\big)_{\delta\in\mathbb{N}}$, $\big(\deg_\omega(\alpha_\delta)\big)_{\delta\in\mathbb{N}}$, $\big(\deg_\omega(\beta_\delta)\big)_{\delta\in\mathbb{N}}$, $(t(\alpha_\delta))_{\delta\in\mathbb{N}}$ et $(t(\beta_\delta))_{\delta\in\mathbb{N}}$ sont bornées. On suppose que pour tout $\delta \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k > \log_q(-\tau/m_{\omega,\{\alpha_\delta,\beta_\delta\}})$, $f_k({\alpha_\delta}^{q^k}, {\beta_\delta}^{q^k})$ est algébrique de degré de séparabilité inférieure à Ξ et de taille inférieure à Kq^k. Alors l'ensemble des entiers naturels δ tels qu'il existe des polynômes $P_0, \cdots, P_\delta$ de $(\mathbb{F}_\omega[T])[X,Y]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ, un entier naturel $u \geqslant E(\delta^{3/2})$ et une suite strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait*

$$\mathrm{ord}_0\left(\sum_{l=0}^{\delta} P_l(X,Y) f_{k_n}^l(X,Y)\right) = u$$

et

$$\sum_{l=0}^{\delta} P_l({\alpha_\delta}^{q^{k_n}}, {\beta_\delta}^{q^{k_n}}) f_{k_n}^l({\alpha_\delta}^{q^{k_n}}, {\beta_\delta}^{q^{k_n}}) \neq 0.$$

est borné.

Démonstration. Soit $\delta \in \mathbb{N}$. Par le Lemme 15, pour tout entier $k > \log_q(-\tau/m_{\omega,\{\alpha_\delta,\beta_\delta\}})$ on a

$$t\Big(\sum_{l=0}^{\delta} P_l({\alpha_\delta}^{q^k},{\beta_\delta}^{q^k})f_k^l({\alpha_\delta}^{q^k},{\beta_\delta}^{q^k})\Big) \leqslant \max_{l\in[\![0,\delta]\!]} \mathrm{ht}(P_l) + q^k\delta(t(\alpha_\delta)+t(\beta_\delta)+K),$$

La Proposition 16 implique quant à elle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg_\omega\Big(\sum_{l=0}^{\delta} P_l({\alpha_\delta}^{q^{k_n}},{\beta_\delta}^{q^{k_n}})f_{k_n}^l({\alpha_\delta}^{q^{k_n}},{\beta_\delta}^{q^{k_n}})\Big) \leqslant \max_{0\leqslant l\leqslant\delta} \mathrm{ht}(P_l) + (\tau + q^{k_n}m_{\omega,\{\alpha_\delta,\beta_\delta\}})u.$$

Par hypothèse, la suite $\Big(\big[\mathbb{F}_q(T)(\alpha_\delta,\beta_\delta,f_{k_n}({\alpha_\delta}^{q^{k_n}},{\beta_\delta}^{q^{k_n}})) : \mathbb{F}_q(T)\big]_s\Big)_{(\delta,n)\in\mathbb{N}^2}$ est bornée. Notons $\widetilde{\Xi}$ un de ses majorants. Puisque $\sum_{l=0}^{\delta} P_l({\alpha_\delta}^{q^{k_n}},{\beta_\delta}^{q^{k_n}})f_{k_n}^l({\alpha_\delta}^{q^{k_n}},{\beta_\delta}^{q^{k_n}})$ est non nul, l'inégalité de Liouville mêne à la majoration (rappelons que $d = [\mathbb{F}_\omega : \mathbb{F}_q]$)

$$\begin{aligned}-2d\widetilde{\Xi}(\max_{l\in[\![0,\delta]\!]} \mathrm{ht}(P_l) + \delta q^{k_n}(t(\alpha_\delta)+t(\beta_\delta)+K)) &\leqslant \max_{0\leqslant l\leqslant\delta} \mathrm{ht}(P_l) + (\tau + q^{k_n}m_{\omega,\{\alpha_\delta,\beta_\delta\}})u\\ &\leqslant \max_{0\leqslant l\leqslant\delta} \mathrm{ht}(P_l) + (\tau + q^{k_n}m_{\omega,\{\alpha_\delta,\beta_\delta\}})E(\delta^{3/2}).\end{aligned}$$

Comme $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers, elle diverge vers $+\infty$. Il vient que

$$-2d\delta\widetilde{\Xi}(t(\alpha_\delta)+t(\beta_\delta)+K) \leqslant m_{\omega,\{\alpha_\delta,\beta_\delta\}}E(\delta^{3/2}).$$

Par conséquent, on obtient que

$$E(\delta^{3/2})/\delta \leqslant -2d\widetilde{\Xi}(2\tilde{t}+K)/\tilde{m},$$

où $\tilde{m}$ est un minorant de l'ensemble $\{\deg_\omega(\alpha_\delta), \deg_\omega(\beta_\delta) \mid \delta\in\mathbb{N}\}$ et $\tilde{t}$ est un majorant de l'ensemble $\{t(\alpha_\delta), t(\beta_\delta) \mid \delta \in \mathbb{N}\}$. On en déduit que

$$\delta \leqslant \left(1 + \frac{-2d\widetilde{\Xi}(\tilde{t}+K)}{\tilde{m}}\right)^2.$$

□

Soit $(j_1,j_2,k)\in\mathbb{N}^3$. Clairement,

$$\mathscr{F}_{\mathcal{K},j_1,j_2,k}(X,Y) = \sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_{n+k}\frac{Y^{q^{j_1+n}}}{\big(1-TX^{q^{j_2+n}}\big)^s}$$

et

$$\mathscr{F}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}(X,Y) = \sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_{n+k}\frac{Y^{q^{j_1+n}}}{\prod_{l=1}^{n}\big(1-TX^{q^{j_2+l}}\big)^s}$$

sont des séries formelles de $(\mathbb{F}_q(T))[[X,Y]]$ puisque le dénominateur de chaque fraction rationnelle est inversible dans $(\mathbb{F}_q(T))[[X,Y]]$. De même,

$$\mathscr{G}_{\mathcal{K},j_1,j_2,k}(X,Y) = \sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_{n+k}\frac{Y^{q^{j_1+n}}}{\big(X^{q^{j_2+n}}+\omega^{q^{j_2+k+n}}-T\big)^s}$$

et

$$\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}(X,Y) = \sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_{n+k}\frac{Y^{q^{j_1+n}}}{\prod_{l=1}^{n}\big(X^{q^{j_2+l}}+\omega^{q^{j_2+k+l}}-T\big)^s}$$

sont des séries formelles de $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$.

Lemme 18. *Les séries formelles $\mathscr{F}_{\mathcal{K},j_1,j_2,k}$, $\mathscr{F}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}$, $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}$ et $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}$ appartiennent à $\mathscr{M}_{\omega,2s,T^{q^d}-T}$.*

Démonstration. Nous nous contentons de fournir une preuve pour $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}$, les autres vérifications se faisant de manière identique. Dans $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$, on a pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$

$$\prod_{l=1}^{n}(X^{q^{j_2+k+l}} - T + \omega^{q^{j_2+k+l}})^{-s} = \frac{(-1)^n}{\prod_{l=1}^{n}(T-\omega^{q^{j_2+k+l}})^s} \sum_{(l_1,\cdots,l_n)\in\mathbb{N}^n} \prod_{u=1}^{n} \binom{-s}{l_u} \left(\frac{X^{q^{j_2+k+u}}}{T-\omega^{q^{j_2+k+u}}}\right)^{l_u}.$$

Soit I, $l_1,\cdots,l_n$ des entiers naturels tels que $I = \sum_{u=1}^{n} l_u q^{j_2+u}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fraction rationnelle

$$(T^{q^d} - T)^{2s(I+q^{j_1+n})} \varepsilon_{n+k} \prod_{u=1}^{n} \binom{-s}{l_u} \frac{(-1)^n}{(T-\omega^{q^{j_2+k+u}})^{l_u+s}}$$

est en fait un polynôme de $\mathbb{F}_\omega[T]$. De plus, on a

$$\deg\left(\varepsilon_{n+k} \prod_{u=1}^{n} \binom{-s}{l_u} \frac{(-1)^n}{(T-\omega^{q^{j_2+u}})^{l_u+s}}\right) \leqslant 0.$$

Ceci prouve que $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}$ appartient à $\mathscr{M}_{\omega,2s,T^{q^d}-T}$. □

Rappelons que dans tout ce paragraphe, on a supposé que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \eta_{n+1} - \eta_n$ est fini. On note cet entier naturel $\ell_{\underline{\varepsilon}}$. Pour deux entiers naturels k et n, on pose

$$\widetilde{E_{n,k}} = \frac{\varepsilon_{n+k} Y^{q^{j_1+n}}}{\prod_{l=1}^{n}\left(X^{q^{j_2+l}} + \omega^{q^{j_2+k+l}} - T\right)^s}.$$

Définition 19. Soit $(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2$ et $L \in \mathbb{N}^*$. On dira que $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_1}$ et $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_2}$ sont *congru à l'ordre* L si pour tout $n \in [\![0, L\ell_{\underline{\varepsilon}}[\![$, on a $\widetilde{E_{n,k_1}} = \widetilde{E_{n,k_2}}$.

Proposition 20. *Soit* $(j_1,j_2) \in \mathbb{N}^2$. *Toute suite extraite de* $(\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ *admet une valeur d'adhérence transcendante sur* $(\mathbb{F}_q(T))(X,Y)$. *Il en est de même pour des suites extraites de* $(\mathscr{F}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mathscr{F}_{\mathcal{K},j_1,j_2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathscr{G}_{\mathcal{K},j_1,j_2,k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit $(k_n)_n$ une suite d'entiers naturels. L'ensemble $\{\widetilde{E_{n,k}} \mid k \in \mathbb{N}\}$ étant fini, par le principe des tiroirs, il existe $j_1 \in \mathbb{N}$ et une suite extraite $(k_n^{(1)})_n$ de la suite $(k_n)_n$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_{j_1}}$ et $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_n^{(1)}}$ sont congrus à l'ordre 1. En réitérant ce procédé, on montre que pour tout entier l supérieur à 2, il existe $j_l \in \mathbb{N}$ et une suite extraite $(k_n^{(l)})_n$ de la suite $(k_n^{(l-1)})_n$ tels que $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_{j_l}}$ soit congru à l'ordre l avec $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_n^{(l)}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par construction, on a pour $l \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{ord}_0(\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_{j_{l+1}}} - \mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_{j_l}}) \geqslant q^{l\ell_{\underline{\varepsilon}}+j_2}.$$

Par conséquent, la suite $\left(\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k_{j_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $(\mathbb{F}_\omega(T))[[X,Y]]$, disons vers Θ. Il existe une suite extraite $(\widetilde{j_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de la suite $(j_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(k_{\widetilde{j_l}} \pmod d)_{l\in\mathbb{N}}$ soit constante. On note $\tilde{k}$ le représentant dans $[\![0,d[\![$ des $k_{\widetilde{j_l}} \pmod d$ $(l \in \mathbb{N})$. Supposons que Θ soit algébrique sur $(\mathbb{F}_q(T))(X,Y)$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et des polynômes $P_0,\cdots,P_N$ non tous nuls de $(\mathbb{F}_\omega(T))(X,Y)$ tels que

$$P_0(X,Y) + P_1(X,Y)\Theta(X,Y) + \cdots + P_N(X,Y)\Theta^n(X,Y) = 0.$$

Considérons un entier naturel N_1 tel que pour tour tout entier $m \geqslant N_1$ le polynôme

$$P_0(T^{q^m} - \omega^{q^{\tilde{k}}}, Y) \cdots P_N(T^{q^m} - \omega^{q^{\tilde{k}}}, Y)$$

soit non nul. Posons $m_0 = \max(2s, N_1) + 1$. Puisque Θ appartient à $\mathscr{M}_{\omega,2s,T^{q^d}-T}$, Θ est évaluable en $T^{q^{m_0}} - \omega^{q^{\tilde{k}}}$ en une série formelle Θ_Y de $(\mathbb{F}_\omega(T))[[Y]]$ qui est algébrique sur $(\mathbb{F}_q(T))(Y)$. Comme tous les $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}$ $(k \in \mathbb{N})$ sont $\mathbb{F}_q$-linéaire en Y, il en est de même pour Θ et Θ_Y l'est aussi. On peut écrire

$$\Theta_Y = \sum_{n\geqslant 0} a_n Y^{q^n} \qquad (a_n \in \mathbb{F}_\omega(T)).$$

Soi $l \in \mathbb{N}$. Les égalités

$$\begin{aligned}\Theta_Y &= \sum_{n=0}^{(\widetilde{j_l}+1)\ell_{\underline{\varepsilon}}-1} \widetilde{E_{n,k_{\widetilde{j_l}}}}(T^{q^{m_0}} - \omega^{q^{\tilde{k}}}, Y) + \sum_{n \geqslant (\widetilde{j_l}+1)\ell_{\underline{\varepsilon}}} a_n Y^n \\ &= \sum_{n=0}^{(\widetilde{j_l}+1)\ell_{\underline{\varepsilon}}-1} \frac{\varepsilon_{n+k_{\widetilde{j_l}}} Y^{q^{j_1+n}}}{\prod_{l=1}^n \left(T^{q^{m_0+j_2+l}} - T\right)^s} + \sum_{n \geqslant (\widetilde{j_l}+1)\ell_{\underline{\varepsilon}}} a_n Y^n.\end{aligned}$$

impliquent que tous les a_n $(n \in \mathbb{N})$ sont dans $\mathbb{F}_q(T)$. D'après [5, Lemma 2.1], il existe des polynômes non nuls C_1 et C_2 de $\mathbb{F}_q[T]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_1 C_2^n a_n$ appartient à $\mathbb{F}_q[T]$. Notons v le maximum des degrés des facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_q[T]$ de C_1C_2 et l_0 un entier naturel tel que $\widetilde{j_{l_0}}$ est strictement supérieur à v. Par définition de $\ell_{\underline{\varepsilon}}$, il existe $n \in [\![\widetilde{j_{l_0}}\ell_{\underline{\varepsilon}}, (\widetilde{j_{l_0}}+1)\ell_{\underline{\varepsilon}}[\![$ tel que $\varepsilon_{n+k_{\widetilde{j_{l_0}}}}$ est non nul. Alors $T^{q^{m_0+j_2+n}} - T$ admet un facteur irréductible dans $\mathbb{F}_q[T]$ de degré $m_0 + j_2 + n$, c'est-à-dire supérieur à v. Cette preuve s'adapte facilement aux trois autres fonctions pour obtenir la conclusion souhaitée. $\square$

Théorème 21. *Soit $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$. On suppose que $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \eta_{n+1} - \eta_n$ est finie.*

(1) Si $\deg(\beta) < s$ (resp. $\deg(\beta) < sq/(q-1)$), $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\beta)$ (resp. $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta)$) est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

(2) Si $\omega \neq \infty$, alors pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ tel que $v_\omega(\beta) > 0$, $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K},\omega}(\beta)$ et $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C},\omega}(\beta)$ sont transcendants sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Démonstration. Supposons que $\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ et notons Ξ son degré de séparabilité. Soit $i \in \mathbb{N}$. Posons $\alpha_i = \sqrt[q^i]{\alpha}$ et $\beta_i = \sqrt[q^i]{1/T}$ avec $\alpha = \beta / T^{sq/(q-1)}$. On a $t(\sqrt[q^i]{\beta_i}) = 1$ et $t(\alpha_i) \leqslant t(\alpha)$ puisque $\rho(\alpha_i)$ divise $\rho(\alpha)$. L'extension $\mathbb{F}_q(T)(\alpha_i, \beta_i)/\mathbb{F}_q(T)$ est de degré de séparabilité Ξ_α où Ξ_α est le degré de séparabilité de l'extension $\mathbb{F}_q(T)(\alpha)/\mathbb{F}_q(T)$. On remarque que pour tout $(j_1, j_2, k) \in \mathbb{N}^2$, on a l'égalité

$$\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}(\alpha_{j_1}^{q^k}, \beta_{j_2}^{q^k}) = T^{-\frac{sq}{q-1}} \prod_{j=1}^k \left(T^{q^j} - T\right)^s \left(\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_n \beta^{q^n}}{\prod_{j=1}^n \left(T^{q^j} - T\right)^s}\right)$$

Ainsi, il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout entier naturel k, $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}(\alpha_{j_1}^{q^k}, \beta_{j_2}^{q^k})$ soit de taille inférieure à Kq^k. De plus, $\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,k}(\alpha_{j_1}^{q^k}, \beta_{j_2}^{q^k})$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ de degré de séparabilité inférieur à $\Xi\Xi_\alpha + (q-1)$. Puisque la suite $\left(q^n \deg(\beta) - s\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et que η_k est non nul, on a

$$\begin{aligned}\deg\left(\mathrm{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta) - \sum_{n=0}^{\eta_k-1} \frac{\varepsilon_n \beta^{q^n}}{\prod_{j=1}^n \left(T^{q^j} - T\right)^s}\right) &= \deg\left(\sum_{n=\eta_k}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n \beta^{q^n}}{\prod_{j=1}^n \left(T^{q^j} - T\right)^s}\right) \\ &= q^{\eta_k} \deg(\beta) - s\frac{q^{\eta_k+1} - q}{q-1}.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\deg\left(\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,\eta_k}(\alpha_{j_1}^{q^{\eta_k}}, \beta_{j_2}^{q^{\eta_k}})\right) = q^{\eta_k} \deg(\beta).$$

On en déduit que pour tous entiers naturels distincts k et k', on a

$$\mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,\eta_k}(\alpha_{j_1}^{q^{\eta_k}}, \beta_{j_2}^{q^{\eta_k}}) \neq \mathscr{G}_{\mathcal{C},j_1,j_2,\eta_{k'}}(\alpha_{j_1}^{q^{\eta_{k'}}}, \beta_{j_2}^{q^{\eta_{k'}}}).$$

Considérons un entier δ. La Proposition 14 nous assure l'existence d'un couple (i_0, j_0) de $\mathbb{N}^2$, de polynômes non tous nuls $P_0, \cdots, P_\delta$ de $(\mathbb{F}_\omega[T])[X, Y]$ de degrés en X et Y inférieurs à δ et d'une suite d'entiers naturels $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ strictement croissante tels que

$$\sum_{h=0}^{\delta} P_h(\alpha_{i_0}^{q^{\eta_{k_l}}}, \beta_{j_0}^{q^{\eta_{k_l}}}) \mathscr{G}_{\mathcal{C},i_0,j_0,\eta_{k_l}}^h(\alpha_{i_0}^{q^{\eta_{k_l}}}, \beta_{j_0}^{q^{\eta_{k_l}}}) \neq 0$$

et

$$\operatorname{ord}_0\left(\sum_{h=0}^{\delta} P_h(X,Y)\mathscr{G}^h_{\mathcal{C},i_0,j_0,\eta_{k_l}}(X,Y)\right) \geqslant E(\delta^{3/2}).$$

Supposons que la suite $\left(\operatorname{ord}_0\left(\sum_{l=0}^{\delta} P_l(X,Y)\mathscr{G}^l_{\mathcal{C},i_0,j_0,\eta_{k_l}}(X,Y)\right)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Il existe un entier naturel $u \geqslant E(\delta^{3/2})$ et une suite extraite $(k_{l_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de la suite $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on ait

$$\sum_{h=0}^{\delta} P_h(\alpha_{i_0}^{q^{\eta_{k_{l_j}}}}, \beta_{j_0}^{q^{\eta_{k_{l_j}}}})\mathscr{G}^l_{\mathcal{C},i_0,j_0,\eta_{k_{k_{l_j}}}}(\alpha_{i_0}^{q^{\eta_{k_{l_j}}}}, \beta_{j_0}^{q^{\eta_{k_{l_j}}}}) \neq 0$$

et

$$\operatorname{ord}_0\left(\sum_{h=0}^{\delta} P_h(X,Y)\mathscr{G}^h_{\mathcal{C},i_0,j_0,\eta_{k_{l_j}}}(X,Y)\right) = u.$$

Puisque δ est quelconque, c'est impossible d'après le Théorème 17. Ceci permet d'affirmer que la suite $\left(\operatorname{ord}_0\left(\sum_{h=0}^{\delta} P_h(X,Y)\mathscr{G}^h_{\mathcal{C},i_0,j_0,\eta_{k_l}}(X,Y)\right)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est non majorée. Notons $\widetilde{\mathscr{G}}$ une valeur d'adhérence de la suite $\left(\mathscr{G}_{\mathcal{C},i_0,j_0,\eta_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$. Alors $P(\widetilde{\mathscr{G}}) = 0$, où P est le polynôme non nul

$$P(Z) = \sum_{h=0}^{\delta} P_h(X,Y)Z^h,$$

en contradiction avec la Proposition 20. Cela conclut la preuve. Les autres assertions se prouvent de manière similaire. □

Conjointement, les Théorèmes 21, 6 et 7 donnent les Theorèmes 1 et 2 :

Théorème 22. *Soit $\underline{\varepsilon}$ une suite non ultimement nulle de $\mathbb{F}_q$ et $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$.*

(1) Si $\deg(\beta) < s$ (resp. $\deg(\beta) < sq/(q-1)$), $\operatorname{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\beta)$ (resp. $\operatorname{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta)$) est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

(2) Si $\omega \neq \infty$, alors pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ tel que $v_\omega(\beta) > 0$, $\operatorname{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K},\omega}(\beta)$ et $\operatorname{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C},\omega}(\beta)$ sont transcendants sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Rappelons (voir Introduction) que Harada a montré que si α et β sont deux éléments non nuls de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}\setminus\{0\}$ de degrés respectifs strictement inférieurs à $\frac{sq}{q-1}$ et 0, alors $\operatorname{Log}_{\mathcal{C}}(\alpha)$ et $\operatorname{Log}_{\mathcal{K}}(\beta)$ sont $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$-linéairement indépendants. Il serait intéressant de prouver ce résultat pour les déformées de fonctions polylogarithmes de Carlitz et Kochubei. Plus généralement, il est d'un certain intérêt de déterminer les relations algébriques entre ces déformations de logarithmes. Dans cet optique, nous proposons ces deux conjectures :

Conjecture 23. *Soit $\underline{\varepsilon}_1$ et $\underline{\varepsilon}_2$ deux suites non ultimement nulles de $\mathbb{F}_q$, s_1, s_2, n_1, n_2 quatre entiers naturels non nuls, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}\}$ un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ et $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n_2}\}$ un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\infty,0}$. Alors, les seules relations algébriques possibles entre les valeurs prises par les fonctions $\operatorname{Log}_{\mathcal{C},\underline{\varepsilon}_1,s}$ sur A_1 et $\operatorname{Log}_{\mathcal{K},\underline{\varepsilon}_1,s}$ sur A_2 sont :*

(1) les relations de dépendance $\mathbb{F}_q$-linéaires entre éléments de chaque ensemble A_1 et A_2 et

(2) les relations de $\mathbb{F}_q(T)$-linéarité entre éléments de A_1 si $\underline{\varepsilon}_1$ est ultimement con tante et entre éléments de A_2 si $\underline{\varepsilon}_2$ est ultimement constante.

Conjecture 24. *Soit $\underline{\varepsilon}_1$ et $\underline{\varepsilon}_2$ deux suites non ultimement nulles de $\mathbb{F}_q$, s_1, s_2, n_1, n_2 quatre entiers naturels non nuls, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}\}$ et $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n_2}\}$ deux sous-ensembles de $\overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\omega,0}$. Alors, les seules relations algébriques possibles entre les valeurs prises par les fonctions $\operatorname{Log}_{\mathcal{C},\underline{\varepsilon}_1,s}$ sur A_1 et $\operatorname{Log}_{\mathcal{K},\underline{\varepsilon}_1,s}$ sur A_2 sont :*

(1) les relations de dépendance $\mathbb{F}_q$-linéaires entre éléments de chaque ensemble A_1 et A_2 et

(2) les relations de $\mathbb{F}_q(T)$-linéarité entre éléments de A_1 si $\underline{\varepsilon}_1$ est ultimement constante et entre éléments de A_2 si $\underline{\varepsilon}_2$ est ultimement constante.

Références

[1] M. Ably, L. Denis, F. Recher, *Transcendance de l'invariant modulaire en caractéristique finie*, Math. Zeitschrift **231** (1999), 75–89.

[2] D. Adam, *Transcendance des factorielles de Carlitz-Goss aux places finies*, manuscrit.

[3] G. W. Anderson, D. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. Math.**132.1** (1990), 159–191.

[4] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* Γ*-values*, Ann. Math. **160.2** (2004), 237–313.

[5] J. Bell, N. Bruin, M. Coons, *Transcendence of generating functions whose coefficients are multiplicative*, Trans. American Math. Soc. **364.2**, 933–959.

[6] P.J. Cahen, J.L. Chabert, *Old problems and new questions around integer-valued polynomials and factorial sequences*, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra, Springer (2006), 89–108.

[7] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Mathematical Journal **1** (1935), 137–168.

[8] L. Carlitz, *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Mathematical Journal **3.3** (1937), 503–517.

[9] L Denis, *Indépendance algébrique des dérivées d'une période du module de Carlitz*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **69.1** (2000), 8–18.

[10] L. Denis, *Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique p*, Bull. Austral. Math. Soc. **74.3** (2006), 461–470.

[11] Y. Flicker, *Algebraic independence by a method of Mahler*, J. Australian Math. Soc. **27.2** (1979), 173–188.

[12] J.M. Geijsel, *Transcendence in fields of positive characteristic*, Acad. Proefsch., Amsterdam, (1978).

[13] D. Goss, *The* Γ*-function in the arithmetic of function fields*, Duke Math. J. **66** (1988), 163–191.

[14] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **35**, Springer Berlin (1996).

[15] P. Halmos, *Naive set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

[16] R. Harada, *On the period interpretation for some special values of Thakur hypergeometric functions*, pré-publication.

[17] A.N. Kochubei, *Polylogarithms and a zeta function for finite places of a function field*, Ultrametric functional analysis, Contemp. Math. **384** (2005) Amer. Math. Soc., 157–165.

[18] K.K. Kubota, *On a transcendence problem of K. Mahler*, Canadian J. Math. **29.3** (1977), 638–647.

[19] V. Laohakosol, K. Kongsakorn, P. Ubolsri, *Some transcendental elements in positive characteristic*, Science Asia **26** (2000), 39–48.

[20] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics **1631** (1996).

[21] F. Pellarin, *An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence*, *t*-Motives : Hodge structures, transcendence and other motivic aspects, European Math. Soc. pub. (2020), 297–349.

[22] W.H. Schikhof, *Ultrametric Calculus* Cambridge University Press (1982).

[23] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over* $GF(p^n, x)$, Duke Math. J. **8.4** (1941), 701–720.

[24] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over* $GF(p^n, x)$*, II*, Duke Math. J. **10** (1943), 587–594.

[25] J.Y. Yao, *Carlitz-Goss gamma function, Wade's method, and transcendence*, Journal f/ur die reine und angewandte Mathematik **579** (2005), 175–193.

[26] J.Y. Yao, *Some transcendental functions over function fields with positive characteristic*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **334** (2002), 939–943.

[27] J. Yu, *Transcendence theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517–527.

[28] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p*, Annals Math. **134.1** (1991), 1–23.

Tahiti, France
Email address : `david.adam.tahiti@outlook.fr`