

Алгебраическая модель генетического кода и биоспин.

С.Я. Котковский

На основе алгебры бикватернионов в изотропном базисе нами построена модель генетического кода ДНК, описывающая нуклеотиды, дуплеты и триплеты. Каждый нуклеотид в этой модели представлен своим бикватернионом. Вместе эта четвёрка бикватернионов нуклеотидов образует базис всего бикватернионного пространства. В рамках модели обосновывается группирование триплетов, кодирующих одни и те же аминокислоты. Можно проследить прямые соответствия между алгебраическими структурами нашей модели и спиновыми волновыми функциями, изучаемыми в квантовой релятивистской теории поля. Это даёт основание предположить особую квантово-подобную природу структур генетического кода. Приводится новое бикватернионное представление уравнения Дирака, установление связей с которым позволяет увидеть киральные состояния в структуре ДНК. Математическая природа, характеризующая генетический код, задаёт особый кососимметрический тип помехоустойчивости, в основе которой лежит работа параллельных взаимодополнительных каналов реализации кода.

Ключевые слова: ДНК, генетический код, бикватернионы, изотропный базис, алгебраическая модель, биоспин, уравнение Дирака, вырожденность, симметрия, кососимметрия, кососимметрическая помехоустойчивость, киральность.

Введение.

Исследования структур генетического кода ДНК твёрдо выявили их математическую природу, которая обеспечивает необходимые свойства непрерывного воссоздания живого, передачи наследственности и обеспечения соответствующей помехоустойчивости [6][7][8]. В то же время по-прежнему остаётся открытым вопрос о создании целостной математической модели генетического кода и выяснении той реальности, которая за этим стоит.

Центральным моментом в работе генетического кода является его алгебраически *вырожденный* характер. Вырожденность помехоустойчивого кода вообще является неизменным атрибутом последнего, обеспечивающим обнаружение и исправление ошибок при тех или иных нарушениях как самого кода, так и его исполнения [18][20]. В генетическом коде одна и та же аминокислота кодируется различными триплетами. Этот факт очевидным образом повышает надёжность передачи генетической информации, поскольку изменение последней буквы в триплете часто не отражается на конечном результате – производимой аминокислоте. Но это простейший из сценариев, составляющих более сложную картину. Её описание единственно возможно в терминах кососимметрии – определённого сочетания симметрии и антисимметрии. Знаменательно, что вырожденность оказывается более универсальным свойством, чем сам генетический код: последний имеет множество различных вариантов, тогда как свойства вырожденности одни и те же для всех вариантов кода [18].

К настоящему времени было сделано немало попыток описания симметрической природы генетического кода с помощью различных математических моделей [18]. В их числе модели, основанные на группах Ли с частично нарушенной симметрией, модели, использующие квантовые группы, модели, основанные на кватернионном аппарате. В работе [27] модель генокода оперирует аппаратом целочисленных кватернионов для моделирования механизмов образования аминокислот и пространственного сворачивания белков. Наша модель наследственного ДНК также построена на кватернионах, точнее на их комплексном расширении, называемом бикватернионами. Однако, при этом мы используем принципиально иные подходы и методы, чем те, которые применяются в указанной работе. Общим остаётся то, что каждое азотистое основание математически формализуется при помощи своего кватерниона (в работе [27]) или своего бикватерниона (в настоящей работе).

Как известно, дуплеты нуклеотидов¹, по другому называемые корнями, обладают модальностью – они могут быть *сильными* или *слабыми*. Модальность корня-дуплета определяется тем, кодируют ли его триплеты одну аминокислоту или две различных аминокислоты. Руководствуясь этим же принципом, мы вводим в рассмотрение две «идеальные» группы триплетов нуклеотидов, или кодонов – сильную и слабую. В реальности же имеет место определённое нарушение симметрии этих групп, которое должно быть учтено на следующих шагах развития модели.

Наша алгебраическая модель нуклеотидных структур гена основана на бикватернионах. Предлагаемое представление алгебры бикватернионов и новые способы их умножения и сопряжения дают возможности для адекватного описания базовой схемы кодирования аминокислот. Вместе с тем оказывается, что алгебраические величины, характеризующие нуклеотиды и их мультиплеты, имеют вид подобный спиновым волновым функциям квантовой теории поля. Нами приводится новое бикватернионное представление уравнения Дирака, установление связей с которым позволяет увидеть киральные состояния в структуре ДНК. Таким образом, наша модель даёт основание для создания квантово-подобной теории ДНК.

Статья разделена на две основные части. Первая часть, включая соответствующие приложения, математическая – она посвящена новым методам алгебры бикватернионов, в частности использованию изотропного базиса бикватернионного пространства, построенного на основе нулькватернионов. В этой части вводятся ранее неизвестные способы бикватернионного умножения и сопряжения и определяются бикватернионы, обладающие особыми свойствами проективности и алгебраической вырожденности. Во второй части полученные математические методы применяются к моделированию генетического кода, а именно к алгебраическому представлению нуклеотидов, дуплетов, триплетов и кодируемых ими аминокислот.

¹ Для краткости «нуклеотидами» мы называем азотистые основания нуклеотидов ДНК.

Часть 1. Алгебра бикватернионов.

Бикватернионы были открыты В. Гамильтоном вслед за открытием им кватернионов, как комплекснозначное расширение последних [28]. Л. Зильберштейном была выяснена та центральная роль, которую играют бикватернионы в релятивистской теории, или теории единого пространства-времени [29]. Им же было введено наиболее удобное и наглядное скалярно-векторное представление бикватернионов [30]. В скалярно-векторном представлении бикватернионы имеют вид [1][4]:

$$\mathcal{B} = (s, \mathbf{u}), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3 \quad (1)$$

Как правило, мы будем обозначать бикватернионы заглавными буквами латинского алфавита, тогда как скаляры и векторы прописными. Как следует из определения (1), бикватернион это пара, состоящая из комплексного числа s , называемого скаляром, и комплекснозначного трёхмерного вектора \mathbf{u} . s и \mathbf{u} есть скалярная и векторная части бикватерниона \mathcal{B} соответственно. Сумма двух бикватернионов вычисляется покомпонентно, отдельно для скалярной и для векторной частей. Обычное, или *внешнее*, произведение двух бикватернионов $\mathcal{B}_1 = (s_1, \mathbf{u}_1)$ и $\mathcal{B}_2 = (s_2, \mathbf{u}_2)$ вычисляется согласно формуле:

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \odot \mathcal{B}_2 = (s_1 s_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2, s_1 \mathbf{u}_2 + s_2 \mathbf{u}_1 + i \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2), \quad (2)$$

где $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ – скалярное и векторное произведения \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 соответственно, i – мнимая единица. В отличие от других типов произведений бикватернионов, которые будут рассмотрены ниже, для обычного (внешнего) произведения мы будем использовать оба эквивалентных обозначения $\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_1 \odot \mathcal{B}_2$. Произведение бикватернионов некоммутативное – оно зависит от порядка следования сомножителей.

Произвольный комплексный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ представляет собой частный случай бикватерниона – у которого скалярная часть равна нулю:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

Комплексное сопряжение бикватерниона $\mathcal{B} = (s, \mathbf{u})$ имеет вид:

$$\mathcal{B}^* = (s^*, \mathbf{u}^*) \quad (4)$$

Комплексное сопряжение бикватернионов соответствует эрмитовому сопряжению матричной алгебры (Приложение 1).

*Векторное сопряжение*² бикватерниона $\mathcal{B} = (s, \mathbf{u})$ имеет вид:

² Сопряжение, именуемое здесь «векторным», часто называют просто сопряжением или «бикватернионным сопряжением». Название «векторное сопряжение» применяется нами для того, чтобы чётко отличать этот вид от других видов сопряжений.

$$\bar{B} = (s, -\mathbf{u}) \quad (5)$$

Одновременное применение комплексного и векторного сопряжений даёт *двойное сопряжение* бикватерниона:

$$\bar{B}^* = (s^*, -\mathbf{u}^*) \quad (6)$$

Два бикватерниона называются *эквивалентными*, если они равны друг другу с точностью до скалярного (комплексно-числового) множителя:

$$B_1 \approx B_2: B_1 = \lambda B_2, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \quad (7)$$

Квадрат модуля бикватерниона $B = (s, \mathbf{u})$ есть комплексное число, определяемое формулой:

$$|B|^2 = B\bar{B} = s^2 - \mathbf{u}^2, \quad |B|^2 \in \mathbb{C} \quad (8)$$

Изотропный базис.

Приводимый в этом разделе изотропный базис пространства бикватернионов имеет исключительное значение в алгебрах, описывающих спин элементарных частиц в физике. По нашему предположению этот же базис служит прекрасным инструментом для построения алгебр генетического кода в математической биологии. Речь идёт о базисе, построенном на бикватернионах, имеющих нулевой квадрат модуля. В физике такие величины обычно описывают свет и называются изотропными, что и определяет название базиса.

Рассмотрим более подробно два возможных типа бикватернионов Q , имеющих нулевой квадрат модуля (8): $|Q| = 0$. В нашей терминологии такие бикватернионы называются нулькватернионами [1]. Первый из рассматриваемых типов нулькватернионов это нульвекторы³, т.е. трёхмерные комплексные векторы, квадрат которых равен нулю. Каждый нульвектор \mathbf{q} раскладывается в комплексную сумму двух взаимно-ортогональных векторов \mathbf{A} и $i\mathbf{B}$ (Рис.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \\ \mathbf{q} &\in \mathbb{C}^3, \quad \mathbf{q}^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Вектор \mathbf{q}^* , комплексно сопряжённый данному нульвектору \mathbf{q} , также является нульвектором. Нульвектором является и вектор $\lambda\mathbf{q}$, где λ – произвольное, отличное от нуля, комплексное число.

Второй тип нулькватернионов составляют однородные нулькватернионы N , каждый из которых можно получить из соответствующего вещественного вектора единичной длины

³ Нульвекторы также называют изотропными векторами.

n:

$$N = \lambda(1, \mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{n}^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C} \quad N\bar{N} = 0 \quad (10)$$

Векторное сопряжение однородного нулькватерниона N снова даёт однородный нулькватернион $\bar{N} = \lambda(1, -\mathbf{n})$.

Изотропный базис бикватернионного пространства состоит из следующих четырёх фиксированных элементов, каждый из которых является нулькватернионом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + i \mathbf{B}) \\ \mathbf{q}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - i \mathbf{B}) \\ N = \frac{1}{2}(1, \mathbf{n}) \\ \bar{N} = \frac{1}{2}(1, -\mathbf{n}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{q}, \mathbf{q}^*, N, \bar{N} = const \\ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = \mathbf{n}^2 = 1 \end{array} \quad (11)$$

Первые два из этих элементов это нульвекторы, а оставшиеся два – однородные нулькватернионы. Нульвекторы \mathbf{q} и \mathbf{q}^* лежат в одной плоскости Π (*поперечная плоскость*). В поперечной плоскости также лежат составляющие \mathbf{q} и \mathbf{q}^* вещественные векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} . Единичный *продольный* вещественный вектор \mathbf{n} нормален этой плоскости. Изотропный базис, таким образом, задаётся некоторым постоянным направлением в пространстве (вектор \mathbf{n}) и фиксированным углом поворота в плоскости Π (пара связанных векторов \mathbf{A} и \mathbf{B}). Нульвекторы \mathbf{q} и \mathbf{q}^* и однородные нулькватернионы N и \bar{N} связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^* = N, \quad \mathbf{q}^*\mathbf{q} = \bar{N} \quad (12)$$

$\mathbf{q}\mathbf{q}^*$ и $\mathbf{q}^*\mathbf{q}$ – обычные, или внешние, бикватернионные произведения (2). Одновременно с этим имеет место векторная связь: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{n}$, где $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ обозначает векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} . Различные варианты попарных произведений элементов изотропного базиса приведены в Приложении 2. Рис. 2 даёт схематическое изображение этого базиса.

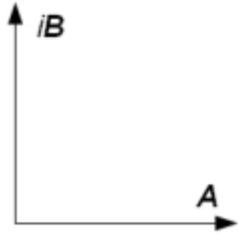


Рис.1. Нульвектор \mathbf{q}
(плоскость Π).

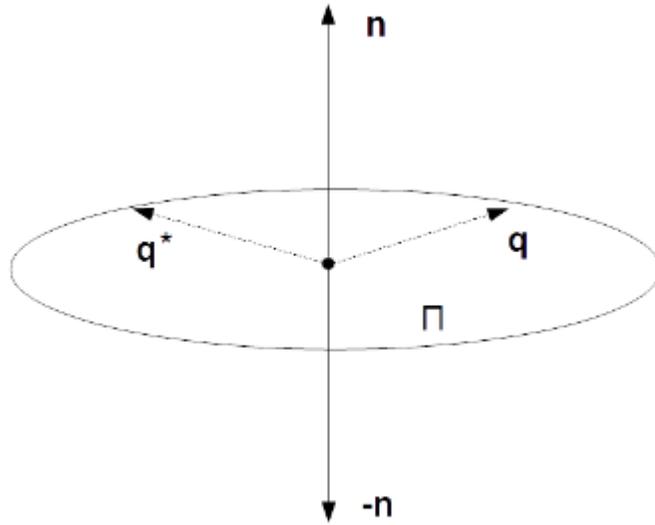


Рис.2. Изотропный базис.

В обычном ортонормальном базисе, построенном на вещественных векторах $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{n}$, векторы $\mathbf{n}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^*$ имеют следующие комплексные декартовы координаты:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Произвольный бикватернион \mathcal{B} раскладывается по изотропному базису с помощью комплексно-числовых координат α, β, ξ, η :

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi \mathbf{n} + \eta \bar{\mathbf{n}}, \quad \alpha, \beta, \xi, \eta \in \mathbb{C} \quad (14)$$

Легко показывается единственность этого разложения.

Разложим бикватернион \mathcal{B} (14) на две составляющие:

$$\mathcal{B} = \mathbf{u} + \mathcal{P}, \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* \\ \mathcal{P} = \xi \mathbf{n} + \eta \bar{\mathbf{n}} \end{cases} \quad (15)$$

Первая составляющая \mathbf{u} , назовём её *поперечником*, это комплексный вектор, лежащий в плоскости Π . Вторая составляющая \mathcal{P} , назовём её *продольником*, это бикватернион, векторная часть которого параллельна нормали \mathbf{n} к плоскости Π . Разложение (15), таким образом, даёт *продольно-поперечное* представление бикватерниона \mathcal{B} .

Рассмотрим некоторую точку бикватернионного пространства, рассматриваемого как пространство-времени. Пусть эта точка описывается декартовыми координатами, включая время: t, x, y, z . Связь декартовых и изотропных координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha = x - iy \\ \beta = x + iy \\ \xi = t + z \\ \eta = t - z \end{cases} \quad (16)$$

Соотношения типа (16) применимы не только к положению точки, но и к компонентам любого другого бикватерниона.

Знаковые бикватернионы и проекторы.

Сгруппируем члены разложения (14) так, чтобы представить его следующим образом:

$$B = B_+ + B_- , \quad \begin{cases} B_+ = \alpha \mathbf{q} + \eta \bar{N} \\ B_- = \beta \mathbf{q}^* + \xi N \end{cases} \quad (17)$$

Бикватернионы вида B_+ и B_- назовём *знаковыми* – положительным и отрицательным соответственно. Тот факт, что некоторый бикватернион B является положительным знаковым, мы будем обозначать в символической форме как $B = B_+$, а отрицательным знаковым – соответственно как $B = B_-$.

Разложим теперь тот же бикватернион B (14) по-другому:

$$B = B^+ + B^- , \quad \begin{cases} B^- = \alpha \mathbf{q} + \xi N \\ B^+ = \beta \mathbf{q}^* + \eta \bar{N} \end{cases} \quad (18)$$

Бикватернионы вида B^- и B^+ назовём *проекторами* – отрицательным и положительным соответственно. Из однозначности разложения по изотропному базису следует, что каждый бикватернион однозначным образом раскладывается как в сумму знаковых бикватернионов, так и в сумму проекторов.

Знаковые бикватернионы и проекторы связаны между собой операцией векторного сопряжения (5):

$$\begin{cases} \overline{B_+} = B'^- \\ \overline{B_-} = B'^+ \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{B^-} = B'^+ \\ \overline{B^+} = B'^- \end{cases} \quad (19)$$

Из соответствия (19) следует изоморфизм между знаковыми бикватернионами и проекторами по внешнему умножению с учётом того, что произведение двух проекторов должно братья в порядке обратном произведению знаковых бикватернионов. Следует обратить внимание на то, что хотя оба рассматриваемых типа бикватернионов – проекторы и знаковые бикватернионы – обладают знаковой характеристикой, термин «знаковый» и

«знаковость» применяется нами только к первым. Как показано в Приложении 4, киральные⁴ (право- или левосторонний) бикватернионы являются знаковыми⁵.

Умножение бикватернионов.

Помимо обычного, или внешнего, способа умножения бикватернионов (2) мы вводим в рассмотрение и другие способы их умножения. В настоящей работе используются четыре различных способа умножения бикватернионов. Ниже приводится вид произведений этих типов для двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 , представленных в продольно-поперечном представлении и в изотропном базисе как

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathcal{P}_1 = \alpha_1 \mathbf{q} + \beta_1 \mathbf{q}^* + \xi_1 N + \eta_1 \bar{N} \\ \mathcal{B}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathcal{P}_2 = \alpha_2 \mathbf{q} + \beta_2 \mathbf{q}^* + \xi_2 N + \eta_2 \bar{N} \end{cases} \quad (20)$$

В соответствии с (17) каждый из этих бикватернионов можно разложить на знаковые части:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{1+} + \mathcal{B}_{1-} \\ \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{2+} + \mathcal{B}_{2-} \end{cases} \quad (21)$$

Первые два из приводимых ниже типов умножения бикватернионов, внешнее и внутреннее, отвечают двум возможным способам умножения квадратных матриц второго порядка – при помощи сложения либо при помощи вычитания произведений элементов строк первой матрицы на элементы столбцов второй матрицы (см. Приложение 1).

1) Внешнее произведение \odot

Внешнее⁶, или обычное, произведение бикватернионов было определено выше в формуле (2). В изотропном базисе внешнее произведение двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 выражается как

$$\mathcal{B}_1 \odot \mathcal{B}_2 = (\xi_1 \alpha_2 + \alpha_1 \eta_2) \mathbf{q} + (\eta_1 \beta_2 + \beta_1 \xi_2) \mathbf{q}^* + (\alpha_1 \beta_2 + \xi_1 \xi_2) N + (\beta_1 \alpha_2 + \eta_1 \eta_2) \bar{N} \quad (22)$$

2) Внутреннее произведение \otimes

В изотропном базисе внутреннее произведение двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 выражается как

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = (\alpha_1 \alpha_2 + \xi_1 \eta_2) \mathbf{q} + (\beta_1 \beta_2 + \eta_1 \xi_2) \mathbf{q}^* + (\beta_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_1) N + (\alpha_1 \eta_2 + \beta_2 \eta_1) \bar{N} \quad (23)$$

Как показывает матричное представление (см. Приложение 1), внешнее и внутреннее умножения кососимметрическим образом дополняют друг друга. Определяемые ниже

⁴ Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что *киральность* здесь понимается в смысле симметрии, изучаемой в теории спина, а не как тип пространственной закрученности биологических молекул. Последний мы обозначаем термином *хиральность*.

⁵ Обратное неверно: не всякий знаковый бикватернион является киральным.

⁶ Используемые в настоящей работе термины *внешнее* и *внутреннее произведения* имеют иной смысл, чем в алгебре Грассмана.

параллельное и перекрёстное произведения определённым образом соединяют в себе внешнее и внутренне произведения.

3) *Параллельное произведение* \square

$$\mathcal{B}_1 \square \mathcal{B}_2 = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathcal{P}_1 \odot \mathcal{P}_2 \quad (24)$$

$$\mathcal{B}_1 \square \mathcal{B}_2 = \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{q} + \beta_1 \beta_2 \mathbf{q}^* + \xi_1 \xi_2 N + \eta_1 \eta_2 \bar{N} \quad (25)$$

Как мы видим, в случае параллельного умножения имеет место полное разделение переменных.

4) Перекрёстное произведение \diamond

$$\mathcal{B}_1 \diamond \mathcal{B}_2 = \mathbf{u}_1 \odot \mathbf{u}_2 + \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 \quad (26)$$

$$\mathcal{B}_1 \diamond \mathcal{B}_2 = \eta_1 \xi_2 \mathbf{q} + \xi_1 \eta_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \beta_2 N + \beta_1 \alpha_2 \bar{N} \quad (27)$$

Операции параллельного и перекрёстного умножения также взаимно дополняют друг друга: первое разделяет переменные, второе их перемешивает.

Перекрёстное произведение положительного проектора (слева) на любой бикватернион (справа) всегда даёт положительный знаковый бикватернион, а перекрёстное произведение (слева) отрицательного проектора на любой бикватернион (справа) всегда даёт отрицательный знаковый бикватернион. Аналогичные свойства имеют произведения проекторов справа на бикватернионы слева. Запишем все четыре возможных варианта произведений проекторов разных знаков P^\pm на произвольный бикватернион \mathcal{B} слева и справа:

$$\forall \mathcal{B}: \begin{cases} B_1^+ \diamond \mathcal{B} = B_{2+} \\ B_1^- \diamond \mathcal{B} = B_{2-} \\ \mathcal{B} \diamond B_1^+ = B_{2-} \\ \mathcal{B} \diamond B_1^- = B_{2+} \end{cases} \quad (28)$$

(28) обуславливают само их название: бикватернионы этого типа проецируют произвольный бикватернион на положительный или отрицательный знаковый бикватернион. Заметим, что имеют место и аналогичные (28) соотношения, в которых знаковые бикватернионы имеют проекционные свойства по отношению к самим проекторам. Итак, проекторы и знаковые бикватернионы взаимосвязаны друг с другом – во-первых, посредством векторного сопряжения (19), а, во-вторых, через проекционные отношения (27).

Сопряжения бикватернионов.

Выше были рассмотрены классические типы сопряжений бикватернионов: комплексное \mathcal{B}^* (4) и векторное $\bar{\mathcal{B}}$ (5). Важная особенность обеих этих операций заключается в том, что будучи применёнными к произведению бикватернионов, они обращают порядок сомножителей: $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$, $\overline{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}} \bar{\mathcal{A}}$. Для того или иного типа сопряжения поведение по отношению к обращению сомножителей в произведениях будем считать характеристическим свойством этого сопряжения. Помимо приведённых выше сопряжений можно ввести и другие их типы, к изучению которых мы непосредственно приступаем.

1) Символьное сопряжение \mathcal{B}^* .

Определим символьное сопряжение сначала для знаковых бикватернионов:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+ &= \alpha \mathbf{q} + \eta \bar{N} & \rightarrow & \mathcal{B}_+^* = \alpha \mathbf{q}^* + \eta N = \mathcal{B}_- \\ \mathcal{B}_- &= \beta \mathbf{q}^* + \xi N & \rightarrow & \mathcal{B}_-^* = \beta \mathbf{q} + \xi \bar{N} = \mathcal{B}_+ \end{aligned} \quad (29)$$

Как следует из (29), операция символьного сопряжения сводится к взаимной замене \mathbf{q} на \mathbf{q}^* и взаимной замене N на \bar{N} в данном выражении. Как видно из (29), при символьном сопряжении положительные знаковые бикватернионы переходят в отрицательные и наоборот. Согласно (17) каждый бикватернион раскладывается в сумму положительного и отрицательного бикватернионов, откуда несложно получить формулу символьного сопряжения для произвольного бикватерниона \mathcal{B} :

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \eta \bar{N} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N \quad \rightarrow \quad \mathcal{B}^* = \alpha \mathbf{q}^* + \eta N + \beta \mathbf{q} + \xi \bar{N} \quad (30)$$

Операция символьного сопряжения симметрична: $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1^* \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2^*$. При применении символьного сопряжения к внутреннему произведению продольников происходит обращение сомножителей: $(\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2)^* = \mathcal{P}_2 \otimes \mathcal{P}_1$. Последнее соотношение служит характеристической чертой этого сопряжения.

2) Обменное сопряжение $\tilde{\mathcal{B}}$.

Введём операцию *обменного сопряжения* сначала для знаковых бикватернионов:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+ &= \alpha \mathbf{q} + \eta \bar{N} & \rightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_+ = \eta \mathbf{q}^* + \alpha N = \mathcal{B}_- \\ \mathcal{B}_- &= \beta \mathbf{q}^* + \xi N & \rightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_- = \xi \mathbf{q} + \beta \bar{N} = \mathcal{B}_+ \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) следует, что обменное сопряжение переводит положительные знаковые бикватернионы в отрицательные и наоборот. На основании формул (31) и (17) не представляет труда выписать формулу обменного сопряжения для произвольного бикватерниона:

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \eta \bar{N} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathcal{B}} = \xi \mathbf{q} + \beta \bar{N} + \eta \mathbf{q}^* + \alpha N \quad (32)$$

Операция обменного сопряжения также симметрична: $\mathcal{B}_2 = \tilde{\mathcal{B}}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_2$.

В отношении внешнего и внутреннего произведения знаковые бикватернионы обладают особыми идеало-подобными свойствами вырожденности, имеющими особое значение для строимой модели генокода. Для произвольных знаковых бикватернионов \mathcal{A}_+ , \mathcal{A}_- , \mathcal{B}_+ , \mathcal{B}_- имеют место следующие легко проверяемые соотношения с участием внешнего умножения:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}_+ \odot \mathcal{B}_+ &\approx \mathcal{A}_+ \\ \mathcal{A}_- \odot \mathcal{B}_- &\approx \mathcal{A}_- \\ \mathcal{A}_- \odot \mathcal{B}_+ &\approx \tilde{\mathcal{A}}_- \\ \mathcal{A}_+ \odot \mathcal{B}_- &\approx \tilde{\mathcal{A}}_+ \end{aligned} \right. \quad (33)$$

Эти соотношения используют определение эквивалентности бикватернионов, данное нами выше в (7). Пользуясь свойством симметрии обменного сопряжения последние два тождества из (33) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{A}}_- \odot B_+ \approx \mathcal{A}_- \\ \widetilde{\mathcal{A}}_+ \odot B_- \approx \mathcal{A}_+ \end{cases} \quad (34)$$

Для внутреннего умножения имеют место аналогичные соотношения.

Кроме рассмотренных выше видов сопряжений бикватернионов, в Приложении 4 мы также вводим ещё один тип бикватернионного сопряжения – циклическое сопряжение (53), играющий ключевую роль в формулировке бикватернионного уравнения Дирака.

Часть 2. Алгебраическая модель генетического кода.

В нашей алгебраической модели генетического кода все три рассматриваемых уровня (нуклеотиды, дуплеты, триплеты) представлены одним и тем же математическим объектом – бикватернионом. Изначально мы задаём конкретный вид бикватернионов нуклеотидов, а затем из них с помощью произведений специального вида строим сначала бикватернионы дуплетов, а после этого бикватернионы триплетов-кодонов. Главное требование к создаваемой математической модели заключается в том, чтобы кодоны обеспечивали необходимое многообразие аминокислот и при этом обладали свойствами схождения к одной и той же аминокислоте (алгебраической вырожденности).

Представление нуклеотидов.

Напомним, что под нуклеотидами мы понимаем азотистые основания нуклеотидов ДНК: аденин (A), цитозин (C), тимин (T), гуанин (G). В нашей модели каждый из четырёх нуклеотидов представлен своим бикватернионом:

$$\begin{cases} A = \alpha_2 q + \xi_2 N \\ G = \alpha_1 q + \xi_1 N \end{cases} \quad \begin{cases} C = \beta_1 q^* + \eta_1 \bar{N} \\ T = \beta_2 q^* + \eta_2 \bar{N} \end{cases} \quad (35)$$

Координаты разложения по изотропному базису каждого из бикватернионов-нуклеотидов (35) являются фиксированными комплексными числами: $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \xi_{1,2}, \eta_{1,2}$, которые можно рассматривать как параметры модели. По своему определению каждый из этих бикватернионов представляет собой положительный либо отрицательный проектор (обозначим эти проекторы буквой P с соответствующими индексами):

$$\begin{cases} A = P_2^- \\ G = P_1^- \end{cases} \quad \begin{cases} C = P_1^+ \\ T = P_2^+ \end{cases} \quad (36)$$

Как мы увидим дальше, именно проекторная природа бикватернионов нуклеотидов наделяет их требуемыми характеристиками для генерации требуемого разнообразия мультиплетов, в то же время обеспечивая и соответствующие уровни алгебраического вырождения, имеющего место при кодировании аминокислот. Вспоминая свойства проекторов (19), выпишем векторные сопряжения бикватернионов нуклеотидов (35):

$$\begin{cases} \bar{A} = \overline{P_2^-} = B_{2+} \\ \bar{G} = \overline{P_1^-} = B_{1+} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{C} = \overline{P_1^+} = B_{1-} \\ \bar{T} = \overline{P_2^+} = B_{2-} \end{cases} \quad (37)$$

Как следует из (37), нуклеотиды разбиваются на две пары. Первая пара \bar{A}, \bar{G} является собою положительные знаковые бикватернионы, а вторая пара \bar{C}, \bar{T} – отрицательные.

Четвёрка бикватернионов нуклеотидов (35) и четвёрка бикватернионов изотропного базиса (11) линейно связаны друг с другом. Из характера этой связи следует, что четвёрка бикватернионов нуклеотидов представляет собою базис бикватернионного пространства, если исключить определённые специальные условия для параметров $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \xi_{1,2}, \eta_{1,2}$.

В представляемой модели пирамидины (нуклеотиды, состоящие из одного ароматического кольца) представлены положительными проекторами, в то время как

пурины (состоящие из двух колец) – отрицательными проекторами (36). В сопряжённой же форме каждый из нуклеотидов представлен знаковым бикватернионом (37).

Представление дуплетов.

Под дуплетом мы понимаем не любую пару последовательных нуклеотидов единичной цепи ДНК, а именно ту, с которой начинается тот или иной триплет, кодирующий соответствующую аминокислоту. Дуплеты по-другому называются корнями. Под *модальностью* дуплета мы будем понимать, является ли он сильным (f) или слабым (p). Сильный дуплет однозначно определяет аминокислоту, производимую его триплетами. Слабый же дуплет даёт на выходе две различные аминокислоты. Это бинарное разделение на сильные и слабые корни было названо румеровским в честь Ю.Б. Румера, автора первой работы [11], в которой этот принцип был открыт и применён для изучения симметрий генокода [19][22][23]. Румеровское разделение было независимо открыто С.В. Петуховым и стало основой его теории базисных матриц генетического наследования, или генетических матриц [5][6][7]. Геноматрицы Петухова в наглядной форме показывают иерархическую фрактало-подобную систему генетического кода, основанную на взаимосвязанных симметрических ансамблях мультиплетов азотистых оснований различных уровней.

В таблице 1 все имеющиеся дуплеты нуклеотидов разделены на две группы (классы вырожденности) по их модальности.

Таблица 1. Сильные и слабые дуплеты.

Сильные корни (f)	Слабые корни (p)
AC	CA
GT	TG
CC, GG	AA, TT
TC, CT	GA, AG
CG, GC	AT, TA

Выразим каждый из дуплетов как бикватернион \mathcal{D} , получающийся в результате перекрёстного произведения входящих в этот дуплет бикватернионов-нуклеотидов \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 согласно формуле:

$$\mathcal{D} = \mathcal{N}_1 \diamond \mathcal{N}_2 \quad (38)$$

Произведение (38) *контекстное*: в качестве конкретного бикватерниона, представляющего данный нуклеотид может браться как его бикватернион (36) $P_{1,2}^\pm$, так и символично сопряжённый ему бикватернион $P_{1,2}^{\pm*}$. Соответствующий выбор определяется требованием ненулевого результата произведения: $\mathcal{N}_1 \diamond \mathcal{N}_2 \neq 0$. Так, в качестве произведения

бикватернионов-нуклеотидов AA берётся $P_2^- \diamond P_2^{-*}$, поскольку $P_2^- \diamond P_2^- = 0$. Для примера вычислим по формуле (26) указанное произведение:

$$AA = P_2^- \diamond P_2^{-*} = (\alpha_2 \mathbf{q} + \xi_2 N) \diamond (\alpha_2 \mathbf{q}^* + \xi_2 \bar{N}) = \xi_2^2 \mathbf{q}^* + \alpha_2^2 N$$

Получаемые согласно формуле (38) бикватернионы дуплетов представлены в таблице 2. Для последних четырёх дуплетов в этой таблице дан их вид как знаковых бикватернионов \mathcal{D}_\pm (пояснения ниже в статье).

Таблица 2. Бикватернионное представление дуплетов (\mathcal{D}).

$\begin{cases} AA = P_2^- \diamond P_2^{-*} = \xi_2^2 \mathbf{q}^* + \alpha_2^2 N = p \\ TT = P_2^+ \diamond P_2^{+*} = \eta_2^2 \mathbf{q} + \beta_2^2 \bar{N} = p \\ CC = P_1^+ \diamond P_1^{+*} = \eta_1^2 \mathbf{q} + \beta_1^2 \bar{N} = f \\ GG = P_1^- \diamond P_1^{-*} = \xi_1^2 \mathbf{q}^* + \alpha_1^2 N = f \end{cases}$	$\begin{cases} AT = P_2^- \diamond P_2^+ = \xi_2 \eta_2 \mathbf{q}^* + \alpha_2 \beta_2 N = p \\ TA = P_2^+ \diamond P_2^- = \xi_2 \eta_2 \mathbf{q} + \alpha_2 \beta_2 \bar{N} = p \end{cases}$	$\begin{cases} CG = P_1^+ \diamond P_1^- = \xi_1 \eta_1 \mathbf{q} + \alpha_1 \beta_1 \bar{N} = f \\ GC = P_1^- \diamond P_1^+ = \xi_1 \eta_1 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \beta_1 N = f \end{cases}$
$\begin{cases} AG = P_2^- \diamond P_1^- = \xi_1 \xi_2 \mathbf{q} + \alpha_1 \alpha_2 \bar{N} = p \\ GA = P_1^- \diamond P_2^{-*} = \xi_1 \xi_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \alpha_2 N = p \end{cases}$	$\begin{cases} TC = P_2^{+*} \diamond P_1^+ = \eta_1 \eta_2 \mathbf{q}^* + \beta_1 \beta_2 N = f \\ CT = P_1^+ \diamond P_2^{+*} = \eta_1 \eta_2 \mathbf{q} + \beta_1 \beta_2 \bar{N} = f \end{cases}$	
$\begin{cases} AC = P_2^- \diamond P_1^+ = \eta_1 \xi_2 \mathbf{q}^* + \beta_1 \alpha_2 N = \mathcal{D}_- = f \\ CA = P_1^+ \diamond P_2^- = \eta_1 \xi_2 \mathbf{q} + \beta_1 \alpha_2 \bar{N} = \mathcal{D}_+ = p \end{cases}$	$\begin{cases} GT = P_1^- \diamond P_2^+ = \xi_1 \eta_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \beta_2 N = \mathcal{D}_- = f \\ TG = P_2^+ \diamond P_1^- = \xi_1 \eta_2 \mathbf{q} + \alpha_1 \beta_2 \bar{N} = \mathcal{D}_+ = p \end{cases}$	

При параметрах модели достаточно общего вида с учётом определённых ограничений никакие из различных бикватернионов-дуплетов, представленных в таблице 2, не совпадают друг с другом. Это является необходимым условием невырожденности (несовпадения) бикватернионов-триплетов, кодирующих различные аминокислоты. Более подробно этот вопрос разобран в Приложении 3.

В таблице 2 первые четыре дуплета однородные – образованные одним и тем же нуклеотидом. Остальные дуплеты сгруппированы по парам. Каждая пара состоит из двух дуплетов, получаемых друг из друга перестановкой нуклеотидов. Дуплеты внутри каждой из перестановочных пар в таблице 2 связаны между собой символьным сопряжением:

$$\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 = (\mathcal{N}_2 \mathcal{N}_1)^* \quad (39)$$

Так, для *парных* дуплетов AG,GA:

$$AG = (GA)^* \Leftrightarrow \xi_1 \xi_2 \mathbf{q} + \alpha_1 \alpha_2 \bar{N} = (\xi_1 \xi_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \alpha_2 N)^*$$

Поскольку дуплеты построены на бикватернионах-нуклеотидах, выражаемых проекторами, то согласно проекционному свойству (28) все бикватернионы-дуплеты оказываются знаковыми. Введём для них своё обозначение \mathcal{D}_\pm .

$$\forall \mathcal{D}: \mathcal{D} = \mathcal{D}_\pm \quad (40)$$

\mathcal{D}_+ , \mathcal{D}_- – положительный и отрицательный знаковые бикватернины соответственно. Для дальнейших целей выпишем в отдельной таблице 3 знаковые бикватернионы для каждого из дуплетов.

Таблица 3. Знаковость бикватернионов дуплетов.

$\left\{ \begin{array}{l} AA = \mathcal{D}_+ \\ TT = \mathcal{D}_- \\ CC = \mathcal{D}_+ \\ GG = \mathcal{D}_- \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} AT = \mathcal{D}_- \\ TA = \mathcal{D}_+ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} CG = \mathcal{D}_- \\ GC = \mathcal{D}_+ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} AG = \mathcal{D}_+ \\ GA = \mathcal{D}_- \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} TC = \mathcal{D}_- \\ CT = \mathcal{D}_+ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} AC = \mathcal{D}_- \\ CA = \mathcal{D}_+ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} GT = \mathcal{D}_- \\ TG = \mathcal{D}_+ \end{array} \right.$

Определение модальности дуплетов.

Из анализа бикватернионов-дуплетов, входящих в первые четыре пары считая сверху в таблице 2 (после однородных дуплетов), следуют по крайней мере два возможных способа алгебраического определения их модальности: по вещественной либо по мнимой части коэффициента, стоящего перед продольным элементом (N или \bar{N}). В нашей модели для этого определения мы будем использовать мнимую часть: модальность $Mod(\mathcal{D})$ дуплета \mathcal{D} будет определяться согласно формуле:

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D} = \mathbf{u} + \lambda N \\ \mathcal{D} = \mathbf{u} + \lambda \bar{N} \end{array} \right. \Rightarrow Mod(\mathcal{D}) = Sgn(Im(\lambda)), \quad (41)$$

где функция $Sgn(x)$ выражает знак вещественного числа x , а $Im(\lambda)$ это мнимая часть комплексного числа λ . Квадратная скобка обозначает альтернативный выбор (или/или). Положительные значения $Mod(\mathcal{D})$ соответствуют сильной модальности, а отрицательные слабой. Так, для пары слабых дуплетов $\{AT, TA\}$ требуется $Im(\lambda) = Im(\alpha_2 \beta_2) < 0$. Для пары сильных дуплетов $\{CG, GC\}$ требуется выполнение противоположного условия $Im(\lambda) = Im(\alpha_1 \beta_1) < 0$.

Впрочем, правила определения модальности (41) оказывается недостаточно для различной модальности дуплетов внутри пар $\{AC, CA\}$ и $\{GT, TG\}$. Так, в паре $\{GT, TG\}$ каждый из бикватернионов дуплетов имеет одно и то же значение λ , но тем не менее GT сильный, а TG слабый дуплет. Это означает, что для этой пары должно выполняться условие $Im(\lambda) = 0 \Rightarrow Im(\alpha_1 \beta_2) = 0$. Аналогичное условие $Im(\lambda) = 0$ для пары $\{AC, CA\}$ выливается в тождество $Im(\beta_1 \alpha_2) = 0$. Кроме того в парах $\{AC, CA\}$ и $\{GT, TG\}$ должно работать ещё одно

дополнительное к (41) правило. В качестве второго правила естественно принять определение модальности по знаковости бикватерниона: $\mathcal{D}_- = f, \mathcal{D}_+ = p$ (см. таблицу 2, пары {AC, CA}, {GT, TG}). Итак, чтобы определение модальности дуплетов было возможно, требуется выполнение двух условий:

$$\begin{cases} \text{Im}(\alpha_1\beta_2) = 0 \\ \text{Im}(\beta_1\alpha_2) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Наложим на комплексные координаты бикватернионов-нуклеотидов $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \xi_{1,2}, \eta_{1,2}$ следующие кососимметрические условия, при которых (42) будет заведомо выполняться:

$$\begin{cases} \beta_1 = -\alpha_2^* \\ \beta_2 = -\alpha_1^* \\ \eta_1 = \xi_2^* \\ \eta_2 = \xi_1^* \end{cases} \quad (43)$$

Тогда, как следует из (35), бикватернионы нуклеотидов принимают следующий вид:

$$\begin{cases} G = \alpha_1 \mathbf{q} + \xi_1 N \\ A = \alpha_2 \mathbf{q} + \xi_2 N \\ C = -\alpha_2^* \mathbf{q}^* + \xi_2^* \bar{N} \\ T = -\alpha_1^* \mathbf{q}^* + \xi_1^* \bar{N} \end{cases} \quad (44)$$

Итак, условия дифференциации дуплетов по модальности привели нас к определённой, хотя и неполной, конкретизации исходных параметров модели $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \xi_{1,2}, \eta_{1,2}$. Согласно (44) модель параметризуется четырьмя комплексными параметрами $\alpha_{1,2}, \xi_{1,2}$ или восемью вещественными числами. Условия, накладываемые на эти параметры требованиями определенности модальности, рассмотрены более подробно в Приложении 3.

Как известно, нуклеотиды, обладающие одним и тем же числом водородных связей (две или три связи), образуют ватсон-криковские комплементарные пары: C-G, A-T. Из (44) следует, что преобразование, переводящее комплементарные нуклеотиды друг в друга, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A \leftrightarrow T \\ C \leftrightarrow G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{q}^* \\ N \leftrightarrow \bar{N} \\ \alpha_2 \leftrightarrow -\alpha_1^* \\ \xi_2 \leftrightarrow \xi_1^* \end{cases} \quad (45)$$

Из (44) следует, что преобразование Румера (амино \leftrightarrow амино, кето \leftrightarrow кето) [17][22] в бикватернионах имеет вид двойного сопряжения (6):

$$\begin{cases} A \leftrightarrow C \\ T \leftrightarrow G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \bar{A}^* \\ T = \bar{G}^* \end{cases}$$

Из каждой из взаимно-комплементарных пар нуклеотидов A-T и G-C можно образовать *динуклеотид*, описываемый полным бикватернионом, содержащим в себе обе знаковые составляющие:

$$\begin{cases} B_1 = \{AT\} = A + T = \alpha_2 \mathbf{q} + \xi_2 N - \alpha_1^* \mathbf{q}^* + \xi_1^* \bar{N} \\ B_2 = \{GC\} = G + T = \alpha_1 \mathbf{q} + \xi_1 N - \alpha_1^* \mathbf{q}^* + \xi_1^* \bar{N} \end{cases}$$

Преобразование Румера (двойное сопряжение в нашей модели) осуществляет переход между двумя различными динуклеотидами: $B_2 = \overline{B_1^*}$.

Идеальные группы кодонов.

Как и выше в случае определения дуплета, под триплетом мы понимаем не любую последовательную тройку нуклеотидов, а именно ту, которая кодирует аминокислоту. Так понимаемый триплет также называется кодоном.

В работах С.В. Петухова [6][7] было предложено рассмотреть две условные группы кодонов, определяемые сильными и слабыми дуплетами; каждая из этих групп содержит 32 триплета. Назовём эти две группы *идеальными* группами кодонов. Между этими двумя группами в их матрично-тензорном алфавитном представлении была обнаружена определённая симметрия расположения элементов, которая наследует симметрию соответствующих групп дуплетов и нуклеотидов. В этом свойстве мы видим указание на наличие внутренней симметрии нуклеотидов, наследуемой в образуемых ими мультиплетах. В таблице 4 показаны две идеальные группы кодонов, объединённые в серии согласно кодируемым ими аминокислотам⁷.

Таблица 4. Идеальные группы кодонов.

I. Сильные кодоны (<i>f</i>)				II. Слабые кодоны (<i>p</i>)	
TCC	CTC	GCC	GGC	AGC	AGA
TCA	CTA	GCA	GGA	AGT	AGG
TCT	CTT	GCT	GGT	TTC	TTA
TCG	CTG	GCG	GGG	TTT	TTG
CCC	CGC	GTC	ACC	TAC	TAA
CCA	CGA	GTA	ACA	TAT	TAG
CCT	CGT	GTT	ACT	TGC	TGA
CCG	CGG	GTG	ACG	TGT	TGG
				ATC	ATA
				ATT	ATG
				AAC	AAA
				AAT	AAG
				GAC	GAA
				GAT	GAG
				CAC	CAA
				CAT	CAG

Исходно митохондриальный код обладает тремя группами вырожденности 1,2 и 3 соответственно количеству пар кодонов, кодирующих одну и ту же аминокислоту. В частности аминокислоты *Ser* и *Leu* кодируются тремя парами триплетов, и поэтому имеют вырожденность 3. Прибегнув к идеальным группам кодонов, мы можем на время

⁷ Приведённая здесь схема кодирования аминокислот основана на считающемся наиболее древним и симметричным митохондриальном коде позвоночных [7][25].

«избавиться» от вырожденности 3, присущей кодомам аминокислот *Ser* и *Leu*, и свести задачу к двум кососимметричным по отношению друг к другу группам вырожденностей.

Группа I состоит из «сильных» кодонов-триплетов, образованных от сильных корней, а группа II состоит из «слабых» кодонов-триплетов, образованных от слабых корней. Каждая из аминокислот или стоп-кодонов группы II кодируется парой кодонов, которая заканчивается третьим нуклеотидом С и Т (напр. *Phe*) либо третьим нуклеотидом А и G (напр. *Lys*). Заметим, что пара С,Т описывается положительными проекторами, а пара А,G – отрицательными проекторами (36). В группе II две пары кодонов кодируют не аминокислоты, а стоп-кодоны. Пара кодонов аминокислоты *Met* содержит в себе старт-кодон АТG. Исключительные аминокислоты *Ser* и *Leu*, каждая из которых кодируется шестью кодонами, имеют свои кодоны в обоих идеальных группах.

Выпишем формулу, по которой в нашей модели вычисляется бикватернион \mathcal{T} триплета, состоящего из дуплета \mathcal{D} и третьего нуклеотида $\bar{\mathcal{N}}_3$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{D} * \bar{\mathcal{N}}_3 \quad (46)$$

Знак * в этой формуле обозначает внешнее \odot , но контекстное произведение: в зависимости от модальности дуплета и знаковых типов сомножителей в качестве первого сомножителя может выступать как сам бикватернион дуплета \mathcal{D} , вычисляемый согласно таблице 2, так и обменно-сопряжённый ему бикватернион $\tilde{\mathcal{D}}$. Вспомним, что при этом сам бикватернион-дуплет всегда есть знаковый бикватернион ((40), таблица 3), т.е. может существовать только в одной из двух форм \mathcal{D}_\pm . Также и третий нуклеотид триплета в его обменно-сопряжённой форме есть знаковый бикватернион: $\bar{\mathcal{N}}_3 = \mathcal{B}_\pm$. Таким образом, оба сомножителя в (46) есть знаковые бикватернионы. Как мы видели выше в (33),(34), последние обладают идеалоподобными свойствами.

Таблица 5. Правила вычисления бикватернионов-триплетов

$$\mathcal{T} = \mathcal{D} * \bar{\mathcal{N}}_3, \mathcal{D} = \mathcal{D}_\pm, \bar{\mathcal{N}}_3 = \mathcal{B}_\pm$$

\mathcal{D}	$\bar{\mathcal{N}}_3$	$\mathcal{D} * \bar{\mathcal{N}}_3$	Сильные корни \mathcal{D} (f)	Слабые корни \mathcal{D} (p)
\mathcal{D}_+	\mathcal{B}_+	$\mathcal{D}_+ * \mathcal{B}_+$	$\mathcal{D}_+ \odot \mathcal{B}_+ \approx \mathcal{D}_+$	$\mathcal{D}_+ \odot \mathcal{B}_+ \approx \mathcal{D}_+$
\mathcal{D}_+	\mathcal{B}_-	$\mathcal{D}_+ * \mathcal{B}_-$	$\tilde{\mathcal{D}}_+ \odot \mathcal{B}_- \approx \mathcal{D}_+$	$\mathcal{D}_+ \odot \mathcal{B}_- \approx \tilde{\mathcal{D}}_+$
\mathcal{D}_-	\mathcal{B}_-	$\mathcal{D}_- * \mathcal{B}_-$	$\mathcal{D}_- \odot \mathcal{B}_- \approx \mathcal{D}_-$	$\mathcal{D}_- \odot \mathcal{B}_- \approx \mathcal{D}_-$
\mathcal{D}_-	\mathcal{B}_+	$\mathcal{D}_- * \mathcal{B}_+$	$\tilde{\mathcal{D}}_- \odot \mathcal{B}_+ \approx \mathcal{D}_-$	$\mathcal{D}_- \odot \mathcal{B}_+ \approx \tilde{\mathcal{D}}_-$

Согласно правилам таблицы 5, если дуплет сильный, то первый сомножитель в произведении (46) определяется соотношением «знаков» обоих сомножителей, а если дуплет слабый, то в качестве первого сомножителя в (46) всегда берётся \mathcal{D} . В этой же таблице показаны с точностью до класса эквивалентности (7) результаты соответствующих произведений. Из указанных правил вытекает, что слабые дуплеты дают (с точностью до

класса эквивалентности) в качестве кодонов-триплетов два различных бикватерниона, а сильные дуплеты только один. Другими словами, слабые дуплеты дают на выходе две аминокислоты, а сильные дуплеты только одну. Запишем в общей форме результаты кодонных произведений для сильных (\mathcal{D}_f) и слабых (\mathcal{D}_p) корней:

$$\mathcal{D}_f * \bar{\mathcal{N}}_3 \approx \mathcal{D}_f \quad \mathcal{D}_p * \bar{\mathcal{N}}_3 \approx \begin{cases} \mathcal{D}_p \\ \tilde{\mathcal{D}}_p \end{cases} \quad (47)$$

Важно подчеркнуть, что из таблицы 5 следует кососимметрический характер отношения между сильными и слабыми дуплетами. Например, правило $\tilde{\mathcal{D}}_+ \odot \mathcal{B}_- \approx \mathcal{D}_+$ для сильных дуплетов заменяется на правило $\mathcal{D}_+ \odot \mathcal{B}_- \approx \tilde{\mathcal{D}}_+$ для слабых. Это алгебраическое правило служит обоснованием разделения дуплетов по модальности в рамках нашей модели.

Пользуясь правилами вычисления триплетов ((46), таблица 5) можно получить конкретные значения бикватернионов-кодонов и кодируемых ими аминокислот в каждой из идеальных групп. Выпишем для примера бикватернионное выражение для сильного кодона GTC. Из таблицы 2 дуплет-бикватернион $GT = \xi_1 \eta_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \beta_2 N = \mathcal{D}_-$. Для третьего нуклеотида C: $\bar{\mathcal{N}}_3 = \bar{P}_1^+ = \mathcal{B}_-$. Из формулы (46) и таблицы 5 бикватернион одного из триплетов, образуемых этим дуплетом: $GTC = \mathcal{D}_- * \mathcal{B}_- = \mathcal{D}_- \odot \mathcal{B}_- \approx \mathcal{D}_-$. Бикватернион кодона GTC оказывается эквивалентен бикватерниону самого дуплета $GT = \xi_1 \eta_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \beta_2 N$. Вычисленные подобным образом бикватернионы аминокислот, соответствующие кодонам идеальных групп, показаны в таблице 6. Аминокислота *Ser* условно разделена на две аминокислоты Ser_1 и Ser_2 , принадлежащие каждая своей идеальной группе. Аминокислота *Leu* аналогичным образом условно разделена на Leu_1 и Leu_2 .

Таблица 6. Бикватернионное представление аминокислот в идеальных группах.

Группа I (f)	Группа II (p)
$Ser_1 \approx TC = \xi_1^* \xi_2^* \mathbf{q}^* + \alpha_1^* \alpha_2^* N$	$Ser_2 = AGC, AGT \approx \widetilde{AG} = \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{q}^* + \xi_1 \xi_2 N$
$Leu_1 \approx CT = \xi_1^* \xi_2^* \mathbf{q} + \alpha_1^* \alpha_2^* \bar{N}$	$stop_1 = AGA, AGG \approx AG = \xi_1 \xi_2 \mathbf{q} + \alpha_1 \alpha_2 \bar{N}$
$Ala \approx GC = \xi_1 \xi_2^* \mathbf{q}^* - \alpha_1 \alpha_2^* N$	$Leu_2 = TTA, TTG \approx TT = \xi_1^{*2} \mathbf{q} + \alpha_1^{*2} \bar{N}$
$Gly \approx GG = \xi_1^2 \mathbf{q}^* + \alpha_1^2 N$	$Phe = TTC, TTT \approx \widetilde{TT} = \alpha_1^{*2} \mathbf{q}^* + \xi_1^{*2} N$
$Pro \approx CC = \xi_2^{*2} \mathbf{q} + \alpha_2^{*2} \bar{N}$	$Tyr = TAC, TAT \approx \widetilde{TA} = -\alpha_1^* \alpha_2 \mathbf{q}^* + \xi_1^* \xi_2 N$
$Arg \approx CG = \xi_1 \xi_2^* \mathbf{q} - \alpha_1 \alpha_2^* \bar{N}$	$stop_2 = TAA, TAG \approx TA = \xi_1^* \xi_2 \mathbf{q} - \alpha_1^* \alpha_2 \bar{N}$
$Val \approx GT = \xi_1 ^2 \mathbf{q}^* - \alpha_1 ^2 N$	$Cys = TGC, TGT \approx \widetilde{TG} = - \alpha_1 ^2 \mathbf{q}^* + \xi_1 ^2 N$
$Thr \approx AC = \xi_2 ^2 \mathbf{q}^* - \alpha_2 ^2 N$	$Trp = TGA, TGG \approx TG = \xi_1 ^2 \mathbf{q} - \alpha_1 ^2 \bar{N}$
	$Ile = ATC, ATT \approx AT = \xi_1^* \xi_2 \mathbf{q}^* - \alpha_1^* \alpha_2 N$
	$Met/start = ATA, ATG \approx \widetilde{AT} = -\alpha_1^* \alpha_2 \mathbf{q} + \xi_1^* \xi_2 \bar{N}$
	$Asn = AAC, AAT \approx AA = \xi_2^2 \mathbf{q}^* + \alpha_2^2 N$
	$Lys = AAA, AAG \approx \widetilde{AA} = \alpha_2^2 \mathbf{q} + \xi_2^2 \bar{N}$
	$Asp = GAC, GAT \approx GA = \xi_1 \xi_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \alpha_2 N$
	$Glu = GAA, GAG \approx \widetilde{GA} = \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{q} + \xi_1 \xi_2 \bar{N}$
	$His = CAC, CAT \approx CA = \xi_2 ^2 \mathbf{q} - \alpha_2 ^2 \bar{N}$
	$Gln = CAA, CAG \approx \widetilde{CA} = - \alpha_2 ^2 \mathbf{q}^* + \xi_2 ^2 N$

В нашей схеме каждая аминокислота в своей идеальной группе описывается единственным бикватернионом (Приложение 3). Для ясности подчеркнём, что бикватернион аминокислоты равен бикватерниону любого из её кодонов, с учётом условного разделения аминокислот Ser и Leu . Та или иная аминокислота определяется, главным образом, её корнем-дуплетом, тогда как от третьего сопряжённого бикватерниона-нуклеотида берётся только его знаковость. Напомним, что векторно сопряжённые бикватернионы-нуклеотиды \bar{C}, \bar{T} знаково-положительные, а \bar{G}, \bar{A} знаково-отрицательные (37).

В силу своего построения таблица 6 отражает на алгебраическом языке известные симметрии кодонов, связанные с комплементарностью, преобразованием Румера и количеством водородных связей нуклеотидов. Более того в этой таблице можно проследить и другие симметрии, выявленные В. Щербаком в работе [17] и названные там *кооперативными*. Пример такой симметрии дают пара стоп-кодонов $stop_2 = TAA, TAG$ и пара кодонов ATA, ATG . Последние кодируют аминокислоту Met ; ATG является также старт-

кодоном. Замечательным образом эти две пары описываются в модели симметричными бикватернионами $Met/start \approx -\alpha_1^* \alpha_2 \mathbf{q} + \xi_1^* \xi_2 \bar{N}$ и $stop_2 \approx \xi_1^* \xi_2 \mathbf{q} - \alpha_1^* \alpha_2 \bar{N}$. Заметим, что по-прежнему остаётся открытым вопрос, какие механизмы стоят за отведением отдельным триплетам и их парам ролей $start$ и $stop$.

Суммируя вышесказанное, выпишем общую формулу вычисления бикватерниона кодона по бикватернионам составляющих его нуклеотидов $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$. Для этого объединим (38) и (46) в одну формулу:

$$\mathcal{T} = (\mathcal{N}_1 \diamond \mathcal{N}_2) \odot \bar{\mathcal{N}}_3 \quad (48)$$

Напомним, что оба произведения \diamond и \odot в формуле (48) контекстные – выбор их конкретного вида зависит от сомножителей. Формула (48) даёт краткое содержание нашей модели.

Нарушение идеальной симметрии.

В этом параграфе мы лишь наметим некоторые направления будущего развития излагаемой модели в плане перехода от рассмотренных выше идеальных групп кодонов и аминокислот к реальным. Две пары кодонов из идеальной слабой группы II (таблица 4) $\{AGC, AGT\}$ и $\{TTA, TTG\}$ нарушают идеальную симметрию: они кодируют аминокислоты Ser и Leu , остальные кодоны которых лежат в сильной группе II. Заметим, что в сильной группе эти две аминокислоты определяются парными (перестановочными) дуплетами, алгебраически связанными друг с другом посредством символьного сопряжения (39): $TC = CT^*$.

Как показано в Приложении 3, бикватернионы кодонов Ser_1 и Ser_2 из групп I и II (таблица 6) невозможно сделать равными друг другу. Это же относится и к бикватернионам кодонов Leu_1 и Leu_2 из этих двух групп. Поэтому требуется некоторое дополнительное преобразование нарушения идеальной симметрии кодонов, которое изменяет бикватернионы указанных кодонов групп I или II, так, чтобы сделать их равными друг другу: $Leu_1 := Leu_2, Ser_1 := Ser_2$.

Вероятно, нарушение симметрии идеальных групп также отражается на пространственной закрученности (хиральности) получаемых аминокислот и отвечает за то, что одна из 20-ти аминокислот глицин обладает молекулой правой хиральности (R-конфигурация), тогда как все остальные имеют левую (L-конфигурация). Ещё раз подчеркнём отличие понятий хиральности биологических молекул от киральности спиновых волновых функций, которые изучаются в настоящей статье.

Мы ограничились рассмотрением считающегося наиболее симметричным и древним генетического кода, каковым является митохондриальный код позвоночных. Переход от митохондриального к ядерному генокоду предполагает другое нарушение симметрии, вероятно возникшее эволюционно [23].

Концепция биоспина.

В ряде работ предполагалась квантово-подобная природа генетического кода и ДНК в целом [9][34][35][36]. Так, в статье [34] генокод рассматривается как передатчик, а производимый белок как получатель квантовой информации, выражаемой гамильтоновой матрицей. Квантово-подобие ставится некоторыми исследователями также в основу построения вариантов новой теории биологического поля [35][36]. Исходя из предлагаемой модели генокода мы приходим к близкой идее: ДНК обладает квантово-подобной биологической природой, в основе которой лежит аналог физического спина, который мы называем *биоспином*.

Представленная нами модель генокода базируется на представлении нуклеотидов и их мультиплетов в виде бикватернионов. Но, как показано в работе [24], существует изоморфизм между дираковскими биспинорами, описывающими квантовые волновые функции фермионов (электрона, позитрона, нейтрино и т.д.) и бикватернионами. В Приложении 4 мы предлагаем к рассмотрению нашу собственную версию бикватернионного представления уравнения Дирака отличную от предложенной в [24]. При помощи этого представления также устанавливается изоморфизм между биспинорами и бикватернионами (58) - (60). После этого различные операции алгебры бикватернионов обретают «физический» смысл, или смысл в отношении внутренних симметрий.

Выше мы ввели бикватернионное выражение нуклеотидов, дуплетов и триплетов. С другой стороны, согласно «физической» логике, этим бикватернионным величинам отвечают некоторые квази-спинорные волновые функции, которые, в свою очередь, должны иметь свои динамические инварианты. Это означает, что для каждого из нуклеотидов, дуплетов и триплетов могут существовать свои аналоги заряда, массы, спина и других физических характеристик. В формуле (48) можно видеть выражение квантово-подобного соотношения между неявными «волновыми функциями» нуклеотидов $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ и «наблюдаемой величиной» (*смыслом*), которую олицетворяет конечная аминокислота \mathcal{T} .

В физике фермионов возможны два случая: массивные дираковские спиноры, описывающие электрон или безмассовые майорановские спиноры, описывающие нейтрино. Для нашей модели требуется именно первый случай, когда имеют место сингулярные объекты, обладающие зарядом и массой. Алгебра, соответствующая майорановским спинорам, не может быть применена к генокоду, поскольку не может дать на выходе всего многообразия дуплетов и кодонов.

Отношение генетического кода к спину также следует из рассмотрения правил умножения генетических матриц, предложенных С.В. Петуховым в работе [8]. Эти правила совпадают с правилами умножения сплит-кватернионов. С другой стороны, как показано в работе [26], пары сплит-кватернионов предоставляют альтернативное дираковским биспинорам описание релятивистского спина. В этом соотношении мы видим дополнительное указание на наличие спино-подобных структур, лежащих в основе ДНК. Более того, сплит-кватернионы это частный специальный случай бикватернионов, на которых базируется наша модель.

В нашей модели мы ограничились нуклеотидными структурами третьего порядка, т.е. кодонами-триплетами. Однако, эта модель может быть продолжена и далее на более

длинные последовательности нуклеотидов, включая сами гены. Бикватернионная алгебра и идея биоспина могут помочь развитию таких направлений как код без запятых [20], круговые коды [21], циклические коды Грея в наследуемых биоструктурах [7]. В отношении последних двух особую роль может сыграть циклическое сопряжение, которым оперирует бикватернионное уравнение Дирака. Напомним, что циклическое сопряжение производит циклическую перестановку изотропных координат рассматриваемого бикватерниона (54).

В работе М. Ремпеля и соавторов [33] рассматривается гипотеза, согласно которой резонансы ДНК служат источниками морфогенетического (биологического) поля [16]. Концепция биоспина подводит определённые теоретические основания под эти гипотезы. Действительно, подобно физическому спину и магнитному моменту, предполагаемая нами биоспиновая структура должна нести в себе вращение и быть источником и приёмником некоторого поля. Последнее естественно отождествить с биологическим полем, отвечающим за целостный план строительства организма и его движения-локомоции.

Основы теории биологического (морфогенетического) поля были заложены А.Г. Гурвичем [15]. Максимальное концептуальное развитие эта теория получила, на наш взгляд, в книгах Р. Шелдрейка [16]. Этот исследователь связывает прошлое данной особи с его настоящим. Эта связь осуществляется через т.н. морфический резонанс. Таким образом, живой организм выступает как цельное пространственно-временное образование. В концепции Шелдрейка также находит своё объяснение феномен дифференциации работы одного и того же ДНК в клетках различного типа. Это ключевое для развития каждого организма явление можно объяснить тем, что морфогенетическое поле организма осуществляет обратное влияние на его ДНК. Наше предположение о биоспиновой природе ДНК и его физико-подобных свойствах, таких как квази-заряды и квази-магнитные моменты, указывает на более конкретные пути описания взаимодействий между морфогенетическим полем и ДНК.

Кососимметрическая помехоустойчивость.

По образному выражению С.В. Петухова генетический код цепи молекулы ДНК написан одновременно на трёх алфавитах: его можно представить в виде трёх бинарных последовательностей: последовательность водородных связей нуклеотидов (2 или 3), последовательность пуринов (А,Г) и пиридинов (С,Т), последовательность кето-молекул (G,Т) и amino-молекул (А,С) [5]. Рассмотрение алгебраических соотношений между этими тремя типами эквивалентности (или сопряжения) нуклеотидов указывает на кососимметрический характер связей между соответствующими каналами реализации генетического кода.

Кососимметрия как фундаментальный физический принцип была глубоко изучена в работах В.В. Щенникова [12][13]. В самом общем виде кососимметрия есть определённое сочетание симметрии и антисимметрии. Таким образом, кососимметрия есть более высокий уровень организационной сложности по отношению к простой симметрии. Кососимметрия есть симметрия в более широком смысле. Являясь выражением взаимодополненности и взаимодействия, кососимметрия лежит в основе фундаментальных уравнений физики и математики, включая условия Коши-Римана и изучаемое на этих страницах уравнение

Дирака [3]. На наш взгляд, последнее уравнение в своей целостной мозаичной сложности является самым красивым из всех имеющихся выражений кососимметрических отношений.

Конкретика кососимметрии как отношения симметрии и антисимметрии зависит от характера математических объектов, с которыми мы имеем дело, и от используемого представления. Общим для всех кососимметрических структур и отношений является фактор внутреннего кручения или цикличности [12][13], что особенно отчётливо проявляется в природе спина – собственного момента вращения частицы. На своей внутренней кососимметрии базируется и генетический код.

В качестве преобразования антисимметрии может выступать обращение знака, смена левого оператора на правый, обращение направления обхода цикла и т.д. Различные типы сопряжений бикватернионов, рассмотренные нами выше, дают те или иные формы кососимметрических преобразований, тем самым являясь *кососопряжениями*. Самый известный и значимый тип математического кососопряжения это комплексное сопряжение. Пример кососопряжения из обычной жизни даёт наше зеркальное отражение. Два типа умножения, внешнее и внутреннее, также связаны между собой через кососопряжение. В матричном представлении (Приложение 1) оно выражается во взаимной замене сложения произведений элементов матриц на вычитание. В качестве антисимметричного преобразования здесь выступает обращение знака второго слагаемого. Симметричное преобразование в этом случае, очевидно, есть сохранение знака первого слагаемого. Вместе эти два преобразования осуществляют кососимметрический переход от внешнего умножения матриц (или бикватернионов) к их внутреннему умножению.

Математическая природа генетического кода задаёт особый кососимметрический тип помехоустойчивости, в основе которой лежит работа нескольких параллельных взаимодополняющих каналов реализации кода. Схема этого типа помехоустойчивости приведена на рисунке 3. Горизонтальные линии со стрелками изображают четыре канала исполнения кода. Каждый канал исполняет свой код (который сам может изменяться со временем). Все четыре канала связаны между собой кососимметрическими связями, показанными вертикальными пунктирными линиями. В случае, если в одном из каналов происходят ошибки или сбои, то код и исполняемая им программа восстанавливается исходя из остальных каналов с помощью операций кососимметрического дополнения.

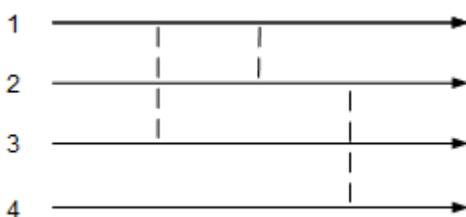


Рис. 3. Кососимметрическая помехоустойчивость.

Как обнаружено автором на личном опыте, кососимметрическая помехоустойчивость эффективно помогает в работе с вычислениями. В качестве четырёх каналов исполнения кода могут выступать четыре различных представления уравнения Дирака. При поиске решений одного из этих уравнений, например, в виде плоских или сферических волн,

возможные ошибки обнаруживаются и исправляются путём сличения этого решения с аналогичными решениями в трёх остальных «каналах». Подобные механизмы помехоустойчивости работают и в генетическом коде, характеризующим своей многоуровневой кососимметрией. На самом базовом уровне кососимметрическая помехоустойчивость генокода реализуется с помощью двух комплементарно дополненных цепочек ДНК. В отличие от систем дублирования, основанных на простой симметрии, кососимметрическое дополнение намного более надёжно. Одна и та же мутация более вероятна в одинаковых элементах, но менее вероятна в различных, хотя и связанных между собой, элементах.

Помехоустойчивость есть механизм поддержания цельности сложной системы, примером которой является система организма. Для общей организации подобных систем исключительно важна их масштабируемость. И здесь принципиальную роль играет кососимметрический характер базовых процессов организации и непрерывного воссоздания живого. Как показано в книге [5], геноматрицы обладают симметриями особого масштабируемого характера. В качестве одной из своих будущих исследовательских задач мы видим установление соответствия между геноматрицами Петухова и бикватернионами генетического кода настоящей модели.

С.В. Петуховым в работе [9] развивается квантово-информационный подход к изучению генетического кода, основанный на применении к генокоду волновых функций. Подобные волновые функции определяют вероятности появления в данной цепи ДНК тех или иных последовательностей нуклеотидов. Примечательно, что в качестве вычислительного базиса этой модели служат 2-кубитовые системы нуклеотидов, что в свою очередь указывает на некую спиново-подобную природу азотистых оснований и их мультиплетов. Мы также надеемся связать между собой концепцию биоспина с квантово-информационным подходом Петухова.

Приложения.

1. Матричное представление бикватернионов.

Между бикватернионами и квадратными матрицами второго порядка существует изоморфизм [32]. Зафиксируем в пространстве бикватернионов некоторый изотропный базис (11). Тогда каждому бикватерниону \mathcal{B} , представленному в этом базисе согласно (14), можно поставить во взаимно-однозначное соответствие квадратную матрицу второго порядка M :

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \xi & \alpha \\ \beta & \eta \end{pmatrix} \quad (49)$$

Согласно этому правилу соответствия между бикватернионами и квадратными матрицами второго порядка существует изоморфизм по сложению и обычному умножению. Обычное правило умножения матриц, обозначим его как и у бикватернионов символом \odot , имеет известный вид:

$$M_1 \odot M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Если для бикватернионов обычное (внешнее) умножение \odot заменить на внутреннее \otimes , то между ними и матрицами также устанавливается изоморфизм:

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \xi & \alpha \\ -\beta & -\eta \end{pmatrix} \quad (50)$$

Однако, для этого требуется поменять правило умножения для матриц на следующее:

$$M_1 \otimes M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} - a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21} - a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} - a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21} - a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что внешнее умножение бикватернионов соответствует обычному умножению матриц, а внутреннее умножение – умножению матриц, при котором произведения элементов строк первой матрицы на элементы столбцов второй матрицы не складываются, а вычитаются. В настоящей работе используется представление бикватернионов, основанное на изоморфизме первого типа. В силу этого внешнее произведение бикватернионов обладает обычными свойствами умножения матриц, включая ассоциативность. Внутреннее произведение бикватернионов, в отличие от внешнего, не обладает ассоциативностью произведения. Также оказывается, что внешнее произведение бикватернионов не зависит от выбранного базиса, тогда как их внутреннее произведение базисно-зависимое. Между тем можно использовать альтернативное представление бикватернионов, в котором внутреннее произведение будет ассоциативным и базисно-независимым, а внешнее – неассоциативным и базисно-зависимым.

2. Таблица умножения элементов изотропного базиса.

В таблице 7 приведены различные возможные комбинации произведений элементов бикватернионного изотропного базиса для двух базовых типов умножения: внешнего \odot и внутреннего \otimes .

Таблица 7. Таблица умножения элементов изотропного базиса.

Внешнее (обычное) произведение \odot		Внутреннее произведение \otimes	
$\mathbf{q} \odot \mathbf{q} = 0$	$\mathbf{q}^* \odot \mathbf{q}^* = 0$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = 0$	$\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = 0$
$N \odot \bar{N} = 0$	$\bar{N} \odot N = 0$	$N \otimes N = 0$	$\bar{N} \otimes \bar{N} = 0$
$\mathbf{q} \odot \mathbf{q}^* = N$	$\mathbf{q}^* \odot \mathbf{q} = \bar{N}$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}$	$\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*$
$N \odot N = N$	$\bar{N} \odot \bar{N} = \bar{N}$	$N \otimes \bar{N} = \mathbf{q}^*$	$\bar{N} \otimes N = \mathbf{q}$
$\mathbf{q} \odot N = 0$	$\mathbf{q}^* \odot \bar{N} = 0$	$\mathbf{q} \otimes N = 0$	$\mathbf{q}^* \otimes \bar{N} = 0$
$N \odot \mathbf{q} = 0$	$\bar{N} \odot \mathbf{q}^* = 0$	$\bar{N} \otimes \mathbf{q} = 0$	$N \otimes \mathbf{q}^* = 0$
$\mathbf{q} \odot \bar{N} = \mathbf{q}$	$\mathbf{q}^* \odot N = \mathbf{q}^*$	$\mathbf{q} \otimes \bar{N} = \bar{N}$	$\mathbf{q}^* \otimes N = N$
$N \odot \mathbf{q} = \mathbf{q}$	$\bar{N} \odot \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*$	$N \otimes \mathbf{q} = N$	$\bar{N} \otimes \mathbf{q}^* = \bar{N}$

Из этой таблицы в частности следует, что элементы N, \bar{N} являются идемпотентами по внешнему умножению \odot и нильпотентами по внутреннему, а элементы \mathbf{q}, \mathbf{q}^* – нильпотентами по внутреннему умножению \otimes и идемпотентами по внешнему. Переход от одного типа умножения к другому переводит идемпотенты и нильпотенты друг в друга.

3. Параметры модели.

1) *Уникальность бикватернионов аминокислот.* Покажем в общих чертах, что, за исключением специальных условий, бикватернионы различных аминокислот (таблица 6) не пересекаются между собой, т.е. каждая аминокислота описывается своим собственным бикватернионом. Для этого, очевидно, требуется, чтобы все параметры $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \xi_{1,2}, \eta_{1,2}$ были разные, т.е. никакие два из них не были тождественны друг другу. Далее, если взять первый по списку бикватернион аминокислоты $Ser_1 \approx TC = \xi_1^* \xi_2^* \mathbf{q}^* + \alpha_1^* \alpha_2^* N$ и потребовать, чтобы он отличался от всех остальных, то мы получим ряд неравенств: $\xi_1^* \xi_2^* \neq \xi_1^2, \alpha_1^* \alpha_2^* \neq -\alpha_1^2, \xi_1^* \xi_2^* \neq \alpha_1^{*2}$ и т.д. Все эти неравенства выполняются почти всегда, за исключением специальных условий, определяемых обратными им равенствами. Аналогичным образом обстоит дело и со сравнением остальных бикватернионов аминокислот. Таким образом, в самом общем случае бикватернионы всех аминокислот разные.

2) *Необходимость нарушения идеальной симметрии.* Как мы видели выше, две аминокислоты Ser и Leu представлены своими кодонами одновременно в каждой из идеальных групп I и II. Как следствие вышеназванных требований к параметрам модели,

бикватернионы, описывающие одну и ту же аминокислоту *Leu* в группах I и II (Leu_1 и Leu_2), не могут быть равны друг другу. Аналогичная ситуация имеет место и для второй исключительной аминокислоты *Ser*. Поэтому требуется дополнительное преобразование нарушения идеальной симметрии – его обсуждению посвящён соответствующий параграф статьи.

4. Бикватернионное уравнение Дирака.

Уравнение Дирака занимает центральное положение в квантовой теории поля. Это уравнение описывает волновые функции элементарных частиц полуцелого спина. В контексте настоящей работы важно то обстоятельство, что уравнение Дирака и наша модель генокода оперируют одними и теми же алгебраическими средствами и обладают общими типами кососимметрии.

Выше мы указывали на представление уравнения Дирака в бикватернионном виде, приведённое в работе [24]. Здесь мы приводим полученное нами альтернативное бикватернионное представление уравнения Дирака⁸:

$$F^- \odot \bar{D} + D \otimes F^+ = im\hat{F} \quad (51)$$

В уравнении (51) F есть бикватернионная волновая функция фермиона, раскладываемая согласно (18) в виде суммы её проекторных составляющих: $F = F^+ + F^-$, m – масса частицы, \hat{D} – бикватернионный оператор градиента, а $\widehat{\bar{D}}$ – оператор векторно сопряжённый к \hat{D} :

$$\begin{cases} \hat{D} = \mathbf{q}\partial_\beta + \mathbf{q}^*\partial_\alpha + N\partial_\xi + \bar{N}\partial_\eta \\ \widehat{\bar{D}} = -\mathbf{q}\partial_\beta - \mathbf{q}^*\partial_\alpha + N\partial_\eta + \bar{N}\partial_\xi \end{cases} \quad (52)$$

\widehat{F} в уравнении (51) обозначает *циклическое сопряжение* от бикватерниона F , определяемое согласно формуле:

$$F = \mathbf{q}f_\alpha + \mathbf{q}^*f_\beta + Nf_\xi + \bar{N}f_\eta \quad \rightarrow \quad \widehat{F} = \mathbf{q}f_\beta + \mathbf{q}^*f_\xi + Nf_\eta + \bar{N}f_\alpha \quad (53)$$

Циклическое сопряжение (53) можно выразить посредством следующей схемы, на которой показана циклическая перестановка координат для данного бикватерниона F , дающая на выходе \widehat{F} :

$$F = Nf_\xi + \mathbf{q}^*f_\beta + \mathbf{q}f_\alpha + \bar{N}f_\eta \quad \rightarrow \quad \widehat{F} \quad (54)$$

С помощью преобразования координат, обратного к (16), можно убедиться, что в декартовых координатах циклическое сопряжение выражается через комплексную матрицу Адамара H_4 :

⁸ Форма уравнения Дирака (51) публикуется впервые.

$$F = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_t \end{pmatrix} \rightarrow \widehat{F} = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \\ f'_t \end{pmatrix} = H_4 \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_t \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 1 \\ i & -1 & -i & -i \\ -1 & i & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В формуле выше мы выразили ту же самую функцию F через её составляющие в декартовом базисе f_x, f_y, f_z, f_t .

Как известно, матрицы Адамара работают в помехоустойчивых алгоритмах, в том числе в структурах ДНК [(5)].

Помимо (51) существуют ещё три аналогичных представления уравнения Дирака, использующих свои типы циклических сопряжений. Детальное рассмотрение всех типов этих уравнений и циклических сопряжений выходит за рамки данной статьи. Циклические сопряжения всех четырёх типов тесно связаны с символическим и обменным сопряжениями (30),(32). Приведём выражение для циклического сопряжения (53) через эти виды сопряжений:

$$\widehat{F} = (F^+ + \widetilde{F}^-) * \quad (56)$$

Как мы видим, уравнение Дирака в бикватернионной формулировке использует те же операции внутреннего и внешнего умножения, а также символического и обменного сопряжений, на основе которых построена наша модель генетического кода.

Покажем, что уравнение (51) эквивалентно обычному уравнению Дирака в представлении спиноров Вейля. Последнее записывается как [31]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\psi_L - im\psi_R \\ \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = +(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\psi_R - im\psi_L \end{cases} \quad (57)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – трёхмерный вектор, составленный из матриц Паули; $\boldsymbol{\nabla}$ – трёхмерный оператор набла; ψ_L и ψ_R – вейлевские трёхмерные спиноры, представляющие собой левостороннее и правостороннее киральные состояния соответственно:

$$\begin{cases} \psi_L = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \psi_R = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \end{cases} \quad u, v, u', v' \in \mathbb{C} \quad (58)$$

Соответствие между вейлевскими спинорами ψ_L и ψ_R (58) и бикватернионной волновой функцией, разложенной по изотропному базису (14), $F = \mathbf{q}f_\alpha + \mathbf{q}^*f_\beta + Nf_\xi + \bar{N}f_\eta$ даётся следующей формулой:

$$\begin{cases} u = f_\alpha & u' = -f_\beta \\ v = -f_\xi & v' = f_\eta \end{cases} \quad (59)$$

или

$$F = \mathbf{q}u - \mathbf{q}^*u' - Nv + \bar{N}v' \quad (60)$$

Из (59),(60) следует, что киральные состояния представляются проекторами. Положительный проектор F^+ описывает правостороннее киральное состояние, а отрицательный проектор F^- – левостороннее киральное состояние:

$$\begin{cases} F^- \sim \psi_L \\ F^+ \sim \psi_R \end{cases} \quad (61)$$

Действительно, положительный проектор $F^+ = -\mathbf{q}^*u' + \bar{N}v'$ образован из тех же компонент u', v' , что составляют правокиральное состояние ψ_R (58). Аналогичным образом отрицательный проектор $F^- = \mathbf{q}u - Nv$ образован из компонент u, v , составляющих левокиральное состояние ψ_L . Более того, можно убедиться в том, что проекторы и вейлевские спиноры при преобразованиях Лоренца ведут себя одинаково. Приведём здесь формулу преобразования Лоренца (буста со скоростью $V = th2\theta$ в направлении вектора \mathbf{n}) для волновой функции F , разложенной на проекторы:

$$F = F^+ + F^- \rightarrow F' = F^+ \odot \bar{L} - \bar{R} \otimes F^- \quad (62)$$

$$\begin{cases} L = Ne^{-\theta} + \bar{N}e^\theta \\ R = \mathbf{q}e^{-\theta} + \mathbf{q}^*e^\theta \end{cases}$$

Как мы видим, в бикватернионном представлении лоренцевы преобразования также выражаются с помощью операций внешнего и внутреннего произведений. Итак, сделаем важный вывод: построенные соответствующим образом проекторы есть киральные состояния.

Обсуждение и выводы.

Обрисует основные черты приведённой нами модели генетического кода. Эта модель построена с помощью новых методов алгебры бикватернионов с использованием изотропного базиса и применением внутреннего, внешнего и других типов умножения, а также различных типов сопряжения бикватернионов. В модели каждый нуклеотид представлен своим бикватернионом. Вместе эта четвёрка бикватернионов нуклеотидов образует базис всего бикватернионного пространства. С помощью произведений различных типов из бикватернионов нуклеотидов строятся их дуплеты и триплеты. Двигаясь этим путём можно разделить все нуклеотидные дуплеты, а затем и триплеты (в идеализации), на две группы модальности – сильные и слабые.

В бикватернионном виде каждый кодон записывается в виде особого тройного произведения бикватернионов нуклеотидов. В рамках модели обосновывается вырожденность, т.е. группирование кодонов, кодирующих одни и те же аминокислоты. Вырожденность мультиплетов генетического кода обусловлена идеало-подобными свойствами моделирующих их бикватернионов. Эти бикватернионы либо знаковые (включая те, что описывают киральные состояния), либо связанные с ними проективные. Таким образом, киральные состояния могут играть главенствующую роль в работе генного кода. Приобретают алгебраическую воплощение известные симметрии кодонов, связанные с комплементарностью, преобразование Румера и количеством водородных связей нуклеотидов.

Исторически спиновый формализм уже применялся к областям отличным от исходной теории спина. Так в теоретической физике была предложена и успешно применена для описания внутренних симметрий барионов теория изотопического спина, повлёкшая за собой создание кварковой модели [37]. Предлагаемая алгебраическая модель генетического кода указывает на квантово-подобную природу нуклеотидов и гена в целом. Действительно, бикватернионы дают альтернативное представление спиновых волновых функций фермионов в релятивистской квантовой теории. Бикватернионы, представляющие нуклеотиды, можно рассматривать как их волновые функции, из совокупности которых собирается полная волновая функция гена. В будущем бикватернионный формализм может быть также применён к описанию некодирующей части ДНК.

Получаемые в алгебре бикватернионов свойства нуклеотидов ДНК подобны физическим свойствам элементарных частиц и полей, таким как спин, заряд, масса. Однако было бы опрометчиво пытаться напрямую отождествить эти характеристики для двух рассматриваемых групп объектов. При описании генетического кода и составляющих его нуклеотидов и их мультиплетов речь идёт не о физическом спине, заряде, массе и т.д., а о спино-, зарядо-, массо- подобных свойствах соответствующих структур и их элементов. В основе квантово-подобной биологической природы ДНК лежит аналог физического спина, который мы назвали биоспином.

Вероятно, для генетических структур и живого организма в целом будет уместно говорить о своём собственном биологическом пространстве состояний, в котором эти

свойства реализуются. При этом физическое пространство-время и предполагаемое биологическое пространство должны быть некоторым образом связаны между собой.

Можно предположить, что установленная в рамках нашей модели кососимметрия распределения кодонов аминокислот в идеальных группах имеет своим происхождением хорошо известную асимметрию в живой природе [14]. Такое предположение основано на квази-спиновом характере полученных алгебраических структур. «Сила» или «слабость» дуплетов и кодонов в идеальных группах в многом определяется «киральностью» составляющих их нуклеотидов. Более того между сильными и слабыми корнями мы наблюдаем нарушение киральной симметрии, подобное тому, которое имеет место в физике слабых взаимодействий. Действительно, распределение знаковых (возможно описывающих киральные состояния) бикватернионов неравномерно между этими двумя группами: существует три положительных \mathcal{D}_+ и пять отрицательных \mathcal{D}_- сильных корней, и, наоборот, пять положительных и три отрицательных слабых корней (см. таблицы 1 и 3). Внутренняя «киральность» нуклеотидов должна также отвечать за правосторонний характер пространственной закрученности спирали ДНК.

В нашей предыдущей работе [1][2] было выявлено алгебраическое свойство, которое указывает на подобие математических и биологических объектов: нульвекторов и генов. На это указывает т.н. нульвекторная факторизация: при умножении друг на друга нулькватернионы дают произведению каждый по своей структурной половине. При половом скрещивании половина генетической информации родителя передаётся потомку. В случае нулькватернионов в качестве такой половины выступает либо левая, либо правая структурная половина, в зависимости от порядка следования двух нулькватернионов в их произведении. Получается, что в произведении двух нулькватернионов сохраняется одна из двух структурных половин каждого из сомножителей. Последнее обстоятельство указывает на замечательное сходство нульвекторной алгебры с генетикой: произведение нульвекторов подобно соединению аллельных генов в хромосоме. Произведение нулькватернионов оказывается математическим аналогом диплоидного генетического скрещивания. Построенная в настоящей работе модель также базируется на нулькватернионах, что даёт дополнительное свидетельство тому, что нулькватернионы играют ключевую роль в математике живого.

Предлагаемая модель по-своему отвечает на многие вопросы, всегда стоявшие перед исследователями генетического кода: почему нуклеотидов ДНК именно четыре вида, откуда берётся разделение на сильные и слабые корни-дуплеты, почему триплеты-кодона группируются определённым образом при кодировании аминокислот. В работах [5][10] было показано проявление древнего восточного принципа Инь-Ян в его математическом выражении в структурах генетического кода. Созвучно этому главный вывод, который мы можем здесь сделать о генной природе ДНК и организма в целом это то, что в основе их работы лежит принцип взаимодополненности, на математическом языке выражаемый отношениями кососимметрии.

Бикватернионная алгебра в изотропном базисе даёт новый математический язык для описания кососимметрических структур. Предложенная выше модель являет собою, вероятно, не единственно возможный вариант моделей генетического кода, которые можно

построить с помощью этого языка. Однако, модель это всегда лишь ступенька к созданию теории. И такая теория, описывающая биологическую и информационную природу ДНК, как мы считаем, должна быть по своему характеру полевой и квантово-подобной.

Автор искренне благодарит Сергея Валентиновича Петухова, без знакомства с работами которого и совместного обсуждения многих глубоких вопросов математической биологии не стало бы возможным написание этой статьи.

Список литературы.

1. С.Я. Котковский. «Нульвекторная алгебра». Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2(23) 12, с.159-172. 2015
2. С.Я.Котковский. «Кватернионы, нульвекторы и векторные циклы в физике и биологии». Доклад на семинаре «Алгебраическая биология и теория систем». 2020.
<https://www.youtube.com/watch?v=LtxxrNWG6hs>
3. С.Я.Котковский. «Золото-комплексное сечение. Кососимметрия. Дуальные поля». Доклад на Конгрессе «Теория систем, алгебраическая биология, искусственный интеллект». 2023.
<https://www.youtube.com/watch?v=ul5ioOFHuok>
4. С.Я. Котковский. «Бивекторная алгебра». Препринт. <https://vixra.org/abs/2108.0015>, 2021.
5. С.В. Петухов. «Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость». М., изд-во Регулярная и хаотическая динамика, 2008.
6. С.В. Петухов. «Вибрационная генетическая биомеханика и наследуемые системы биологических резонансов». Медицина и высокие технологии, 2015, N2, с.16-28.
7. Petoukhov, S. «Cyclic Gray Codes in Modeling Inherited Cyclic Biostructures and Analysis of Statistical Rules of Genomic DNAs». Preprints 2024, 2024020713.
8. С.В. Петухов. «Гиперкомплексные числа и алгебраическая система генетических алфавитов. Элементы алгебраической биологии». Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, том 8, №2(16), стр. 122, 2011.
9. Sergey Petoukhov. The rules of long DNA-sequences and tetra-groups of oligonucleotides. arXiv:1709.04943 [q-bio.OT]. 2017.
10. С.В.Петухов. Бипериодическая таблица генетического кода и число протонов, М., Наука, 2001.
11. Ю.Б. Румер «Систематизация кодонов в генетическом коде». Докл. Академии наук СССР. 21 апреля 1966 г.; 167(6):1393-4.
12. О.М. Белоцерковский, В.В. Щенников. «Кинематика операционного пространства». 2006.
<http://integralsd.com/otp>
13. В.В. Щенников. «Феномен «нелинейного» времени в рамках Общей теории представлений». 2006. <http://integralsd.com/otp>

14. Г.Вейль. «Симметрия».
15. А.Г. Гурвич. Теория биологического поля. М. Советская наука. 1944.
16. R. Sheldrake. "A New Science of Life: The Hypothesis of Morphic Resonance." Park Street Press. 1995.
17. Shcherbak, Vladimir I.. "Rumer's rule and transformation in the context of the co-operative symmetry of the genetic code." *Journal of theoretical biology* 139 2 (1989): 271-6 .
18. Jestin, J.L.; Kempf, A. Degeneracy in the genetic code: How and why? *Genes Genomes Genom.* 2007, 1, 100–103.
19. Fimmel E, Strüngmann L. Yury Borisovich Rumer and his 'biological papers' on the genetic code. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci.* 2016 Mar 13.
20. Fimmel E, Strüngmann L. Codon Distribution in Error-Detecting Circular Codes. *Life (Basel).* 2016 Mar 15;6(1):14.
21. Arquès, D.G.; Michel, C.J. A complementary circular code in the protein coding genes. *J. Theor. Biol.* 1996, 182, 45–58.
22. Gonzalez DL, Giannerini S, Rosa R. Rumer's transformation: A symmetry puzzle standing for half a century. *Biosystems.* 2020 Jan.
23. Gonzalez, Diego & Giannerini, Simone & Rosa, Roco. (2012). On the origin of the mitochondrial genetic code: Towards a unified mathematical framework for the management of genetic information. *Nature Precedings.* 10.1038/npre.2012.7136.
24. A. Nofech. «Biquaternionic Dirac Equation Predicts Zero Mass for Majorana Fermions». *Symmetry*, 2020, 12. 1144. 10.3390/sym12071144.
25. М. Франк-Каменецкий. «Самая главная молекула». М: Наука. 1988
26. F. Antonuccio, «Split-Quaternions and the Dirac Equation», arXiv:1405.0187 [physics.gen-ph]. 2014
27. C. Manuel Carlevaro, Ramiro M. Irastorza, Fernando Vericat. «Quaternionic representation of the genetic code». arXiv:1505.04656 [q-bio.OT]. 2015
28. W.R. Hamilton. "On the geometrical interpretation of some results obtained (by calculation with biquaternions)", *Proc. Roy. Irish Acad.*, Vol. 5, pp. 388 – 390, 1853.
29. L. Silberstein. «Quaternionic Form of Relativity», *Philos. Mag. S., 6*, Vol. 23, №137, pp. 790–809, 1912.
30. А.А. Алексеева. «Дифференциальная алгебра бикватернионов. Преобразования Лоренца биволновых уравнений». *Математический журнал, Алматы*, Vol. 10, № 35, 2010, pp. 33 – 41.
31. I. Bialynicki-Birula, "Photon Wave Function", *Progress in Optics*, 36 (1996). p. 15.
32. L. Dickson. «Equivalence of the complex quaternion and matrix algebras». *Linear Algebras*, 1914, p. 13.

33. Savelev, I.V., Miller, R.A., Myakishev-Rempel, M. (2022). How the Biofield is Created by DNA Resonance. In: Bandyopadhyay, A., Ray, K. (eds) Rhythmic Advantages in Big Data and Machine Learning . Studies in Rhythm Engineering. Springer, Singapore.
34. Karafyllidis, Ioannis. (2008). Quantum Mechanical Model for Information Transfer from DNA to Protein. Bio Systems. 93. 191-8. 10.1016/j.biosystems.2008.04.002.
35. Kafatos MC, Chevalier G, Chopra D, Hubacher J, Kak S, Theise ND. Biofield Science: Current Physics Perspectives. Glob Adv Health Med. 2015 Nov;4(Suppl):25-34. doi: 10.7453/gahmj.2015.011.suppl. Epub 2015 Nov 1.
36. Grandpierre, Attila & Chopra, Deepak & Kafatos, Menas. (2014). The Universal Principle of Biology: Determinism, Quantum Physics and Spontaneity. NeuroQuantology. 12. 364-373. 10.14704/nq.2014.12.3.747.
37. ru.wikipedia.org/wiki/Изотопический_спин

14 октября, 2024 г.
s_kotkovsky@mail.ru