

Title: Análisis del experimento del rotor mossbauer con relatividad especial de campos

Abstract

Análisis del experimento del rotor mossbauer y posible explicación de su desviación de GR.

Autor: Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Este proyecto precisa de financiación, no dude en contactar para apoyarlo.

Málaga, 10 de Abril de 2024. Revisado a 30 de Agosto de 2025.

Table of Contents

Introducción.....	2
Análisis del experimento.....	2
Sistema simplificado: resultados de relatividad general.....	4
Sistema completo: relatividad especial de campos.....	4
Resultados.....	5
Descubrimientos recientes.....	6
Mecánica relativa.....	6
Emisor interno.....	6
Observador absoluto.....	6
Observador relativo.....	7
Emisor externo.....	8
Observador absoluto.....	8
Observador relativo.....	8
Experimentos tipo Kundig.....	9
Rayos rectos.....	9
Rayos curvados.....	10
Receptor y emisor ven el mismo ángulo con la horizontal.....	10
Emisión paralela al eje x.....	11
Recepción paralela al eje x.....	12
Experimento tipo Friedman.....	13
Posición próxima con rayos rectos.....	14
Posición alejada con rayos curvos.....	14
Análisis completo del efecto doppler longitudinal.....	15
Anexo I: Efecto Sagnac.....	16
Referencias.....	19

Introducción

El efecto mossbauer es una emisión/recepción de onda gamma sin retroceso del átomo (un isótopo radiactivo) captador/emisor. Esto significa que la energía que se emite/absorbe está controlada estrechamente, en particular su frecuencia; a esta frecuencia se denomina frecuencia de resonancia. Por eso se usa en medidas de redshift, donde hay que detectar un cambio de frecuencia mínimo.

El experimento denominado rotor mossbauer^[1] es un test de relatividad general que se centra en el principio de equivalencia de Einstein; sucintamente, propone la equivalencia entre un campo gravitatorio y una aceleración. Aunque este test no supone nada nuevo comparado con los otros tests de relatividad general (GR) analizados previamente, resulta muy instructivo ver la aplicación del principio de equivalencia y sus sorprendentes resultados.

En los experimentos de rotor mossbauer se dispone un emisor (o fuente) en el centro de un disco giratorio, una centrifugadora, y un absorbedor (o receptor) en el extremo del disco. Midiendo con un contador el número de fotones que atraviesan el absorbedor se determina si la frecuencia de los fotones es la de resonancia, porque a la frecuencia de resonancia, el número de fotones disminuye en el contador apreciablemente. El test que vamos a analizar mide el corrimiento de frecuencia al azul (blueshift) de un fotón, dicho blueshift es provocado por las fuerzas de inercia.

En los experimentos de Kundig, se añade un selector de fotones; básicamente, se da al emisor una velocidad lineal (muy pequeña, con un dispositivo piezoeléctrico) que compense por efecto doppler longitudinal el blueshift que sufren los fotones por fuerzas de inercia, con un redshift de la misma magnitud. Por eso podemos decir que selecciona la energía de los fotones que serán absorbidos.

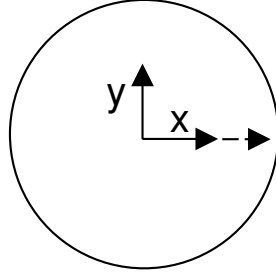
Un problema que presentan los experimentos de rotor mossbauer es que la curva de absorción se aplana con la velocidad de rotación, y hace imposible hacer una detección precisa de la frecuencia de resonancia. Kundig fue uno de los primeros (si no el primero) en notar este problema de precisión, que los tests anteriores sufrieron.

Actualmente hay tests que disponen el emisor fuera del disco, permaneciendo el absorbedor en la periferia del disco. Usando para la emisión luz sincrotrón, más focalizada y orientable. Veremos qué problemas soluciona y cuáles se introducen con esta variante.

Vamos a hacer un análisis preliminar el experimento exponiendo todas las ecuaciones, para pasar a un análisis más exhaustivo de cada aspecto del test; para el análisis exhaustivo, se va a seguir la nomenclatura de la referencia [5], con la que suponemos al lector familiarizado.

Análisis del experimento

Suponemos el sistema coordinado en el centro del rotor, solidario con él en su giro; con el eje x en la dirección que apunta desde el emisor hacia el receptor, y el eje z marcando la dirección del vector de rotación el disco. Los ejes quedan como indica la figura.



Si el vector de rotación sigue la dirección 'z', la velocidad del receptor tendrá componente 'y'.

La aceleración en el sistema móvil la obtenemos derivando dos veces el vector de posición el fotón emitido,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y}, \\ \vec{v} &= (v_x - y w) \hat{x} + (v_y + x w) \hat{y}, \\ \vec{a} &= (-2 v_y w - x w^2) \hat{x} + (2 v_x w - y w^2) \hat{y}.\end{aligned}$$

Donde w es el módulo de la velocidad de rotación el rotor.

La aceleración tiene los dos términos que esperamos, uno de arrastre (conservativo) y otro de coriolis (no conservativo). El análisis del problema con el término no conservativo evita obtener una expresión cerrada y por ello suele despreciarse. Nosotros lo vamos a mantener en la simulación numérica.

Para aplicar el principio de equivalencia, empezamos por cambiar el signo a la aceleración para que adquiera el carácter de fuerza de inercia.

$$\vec{a}_i = (2 v_y w + x w^2) \hat{x} + (-2 v_x w + y w^2) \hat{y}.$$

La parte conservativa se puede expresar como un potencial (análogo a un potencial gravitatorio; esto expresa el principio de equivalencia),

$$V = -\frac{w^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Con una fuerza no conservativa,

$$\vec{F}_{NC} = 2 v_y w \hat{x} - 2 v_x w \hat{y}.$$

La parte no conservativa entra directamente a la ecuación de Euler-Lagrange (E-L),

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = \vec{F}_{NC}, \quad q_i = \{x, y\}, \quad v_i = \{v_x, v_y\}$$

Nótese que el trabajo de la aceleración de coriolis es nulo,

$$W_{NC} = \vec{F}_{NC} \cdot \vec{v} = (2 v_y w \hat{x} - 2 v_x w \hat{y}) \cdot (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) = 0.$$

Por lo que podemos usar para la ecuación del redshift^[2],

$$z = \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right) - 1.$$

Que será una cantidad negativa, ya que vamos a medir un blueshift.

Sistema simplificado: resultados de relatividad general

Si despreciamos la parte del potencial debido a la componente y ,

$$V = -\frac{w^2 x^2}{2}.$$

Y despreciamos la aceleración de coriolis, ya podemos evaluar el redshift entre $x=0$ y $x=r_a$, como la diferencia de potencial entre ambos puntos,

$$\Delta V = -\frac{w^2 r_a^2}{2}.$$

El valor del producto w por r_a representa al módulo de la velocidad tangencial en ese punto,

$$\Delta V = -\frac{v_a^2}{2}.$$

Y el redshift, notando que la diferencia de potencial es un número muy pequeño (tiende a cero),

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1 \approx \frac{\Delta U}{c^2}.$$

Nos resulta,

$$z = -\frac{v_a^2}{2c^2}.$$

Si llamamos beta al cociente entre la velocidad y la velocidad de la luz,

$$z = -\frac{\beta^2}{2}.$$

Que es el resultado de relatividad general.

Sistema completo: relatividad especial de campos

Para resolver el sistema completo vamos a seguir el primer método (mecánica newtoniana) dado en la referencia [3], que se resume en plantear el lagrangiano newtoniano con la restricción de velocidad constante e igual a la del fotón (consideramos que las fuerzas de inercia no requieren escalado temporal; realmente sólo afecta a la deflexión, el resultado es el mismo para los desplazamientos),

$$L = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}\lambda(v_x^2 + v_y^2 - c^2).$$

Y obtendremos las ecuaciones dinámicas usando la ecuación de E-L,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= w^2 x, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= w^2 y, \\ \frac{\partial L}{\partial v_x} &= v_x(1 + \lambda) = p, \\ \frac{\partial L}{\partial v_y} &= v_y(1 + \lambda) = q.\end{aligned}$$

Y, resolviendo el valor del multiplicador de lagrange entre las dos últimas,

$$\begin{aligned}\frac{d p}{d t} &= 2 w v_y + w^2 x, \\ \frac{d q}{d t} &= -2 w v_x + w^2 y, \\ \frac{d x}{d t} &= \frac{p c}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ \frac{d y}{d t} &= \frac{q c}{\sqrt{p^2 + q^2}}.\end{aligned}$$

Y sustituyendo las velocidades para tener un esquema explícito,

$$\begin{aligned}\frac{d p}{d t} &= 2 w \frac{q c}{\sqrt{p^2 + q^2}} + w^2 x, \\ \frac{d q}{d t} &= -2 w \frac{p c}{\sqrt{p^2 + q^2}} + w^2 y, \\ \frac{d x}{d t} &= \frac{p c}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ \frac{d y}{d t} &= \frac{q c}{\sqrt{p^2 + q^2}}.\end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales (t=0),

$$\begin{aligned}p &= c, \\ q &= 0, \\ x &= 0, \\ y &= 0.\end{aligned}$$

El sistema se simula durante $t_f = r_a/c$.

Con los valores,

$$\begin{aligned}c &= 299,792,458 \text{ m/s}, \\ r_a &= 0.1611 \text{ m}, \\ w &= 35000 \text{ rpm} = \frac{350 \pi}{18}.\end{aligned}$$

Resultados

Para dar los resultados se toma el valor de GR como referencia, sustituyendo el factor 1/2 por la constante k,

$$z = -k \beta^2.$$

Así, el resultado de GR es k=0.5.

El que obtenemos por nuestra integración es 0.52, ligeramente superior por el término de coriolis que siempre supone un blueshift extra (estamos suponiendo que el receptor tiene forma rectangular, de modo que el fotón viaja un poco más allá de lo que serían los límites del disco).

Descubrimientos recientes

Existe cierta polémica entorno a un nuevo análisis de los experimentos de Kündig (considerados los mejores realizados) que parecen contradecir los resultados de GR. Con un valor de $k=0.69 \pm 0.02$. Ver las referencias [1],[4].

Vamos a dar aquí una posible explicación al fenómeno; dado que la expresión que usamos para obtener la ecuación del redshift^[2],

$$\frac{dW_t}{2} = \frac{1}{2} \vec{F}_t \cdot d\vec{x} = h df,$$

es equivalente a decir que,

$$dW_t = h df_v + h df_h,$$

y cuando la frecuencia de las dos polarizaciones coinciden (f), se tiene el resultado de equipartición de la energía disponible (que es lo que parece cuadrar con los ejemplos).

Pero supongamos que si las frecuencias son diferentes, el reparto podría no ser equitativo; si,

$$\begin{aligned} f_v &= r f, \\ f_h &= f, \end{aligned}$$

que podría corresponder a una polarización elíptica; en este caso el reparto podría ser,

$$dW_t = h r df + h df = (1+r) h df,$$

ó,

$$\frac{dW_t}{1+r} = h df.$$

Para el caso límite en que $r=0$ (falta una de las polarizaciones, la vertical en este ejemplo) toda la energía podría ser invertida en una sola de las dos polarizaciones. Por lo que eso implicaría $k=1.2$ aproximadamente (si consideramos la contribución del blueshift de coriolis) o cualquier posible combinación dado un valor de r distinto de cero. Suponemos $0 \leq r \leq 1$.

Mecánica relativa

Vamos a ver la diferencia de enfoque desde el punto de vista del observador absoluto y del observador relativo (el absorbedor o receptor) según que el emisor sea externo o interno al disco. Se aconseja revisar el apartado de mecánica relativa de la referencia [5] Para seguir la explicación, ya que los sistemas en rotación son ligeramente más complicados que los de velocidad lineal.

Emisor interno

En el experimento de Kundig, el emisor se encuentra en el centro del disco.

Observador absoluto

Suponiendo rayos rectilíneos, por simplicidad, vamos a calcular lo que el observador absoluto ve. El observador absoluto no ve fuerzas de inercia, y aprecia las velocidades lineales de cada parte del rotor,

$$\begin{aligned}
t=0, \quad \vec{v}_s &= \vec{0}, \\
t=\frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= w r_a \hat{y} = v_a \hat{y}, \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_a \hat{y} \rightarrow \hat{v} = \hat{y}, \\
\vec{r} &= \vec{r}_s - \vec{r}_r = -r_a \hat{x} \rightarrow \hat{r} = -\hat{x}, \\
\hat{v} \cdot \hat{r} &= 0, \\
\beta &= \frac{v_a}{c} = \beta_a, \\
\Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = 0.
\end{aligned}$$

Donde 'r' es el absorbedor y 's' el emisor. Esto se sustituye en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)}.$$

Dando,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_a^2}},$$

expresión que comparamos ahora con el observador relativo.

Observador relativo

El observador relativo ve fuerzas de inercia y, siguiendo lo establecido en la referencia [5], debemos sumar al sistema la velocidad de rotación w opuesta a la del receptor, por lo que el emisor y receptor quedan en reposo de la rotación circular y el receptor tiene ahora velocidad lineal cero. Dicho de otro modo, el receptor no ve que el emisor se mueva (y viceversa), pero para analizar el sistema tenemos que tener en cuenta las fuerzas de inercia,

$$\begin{aligned}
t=0, \quad \vec{v}_s &= \vec{0}, \\
t=\frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = \vec{0}, \\
\vec{r} &= \vec{r}_s - \vec{r}_r = -r_a \hat{x} \rightarrow \hat{r} = -\hat{x}, \\
\hat{v} \cdot \hat{r} &= 0, \\
\beta &= 0, \\
\Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-\beta_a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Donde el potencial se calcula en R y S, sólo que en S es cero por estar sobre el eje de rotación.

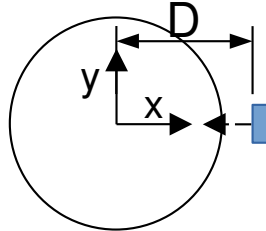
Esto se sustituye en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$ (esta información sólo puede salir del observador absoluto, ver referencia [5]), dando,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1}{\exp\left(\frac{-\beta_a^2}{2}\right)},$$

Donde los resultados sólo coinciden en primer orden, que es lo que se mide con el experimento del rotor mossbauer. El único punto de vista válido es el del receptor u observador relativo. La diferencia en primer orden aparece sólo en el experimento con emisor externo.

Emisor externo

Es el experimento de Friedman^[6], el emisor se encuentra en el exterior del disco, sobre el eje x, a una distancia D del centro del disco.



Como muestra el esquema.

Observador absoluto

Nuevamente, el observador absoluto no ve fuerzas de inercia, y aprecia las velocidades lineales de cada parte del rotor,

$$\begin{aligned}
 t=0, \quad \vec{v}_s &= \vec{0}, \\
 t = \frac{D-r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= w r_a \hat{y} = v_a \hat{y}, \\
 \vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_a \hat{y} \rightarrow \hat{v} = \hat{y}, \\
 \vec{r} &= \vec{r}_s - \vec{r}_r = D \hat{x} - r_a \hat{x} = (D-r_a) \hat{x} \rightarrow \hat{r} = \hat{x}, \\
 \hat{v} \cdot \hat{r} &= 0, \\
 \beta &= \frac{v_a}{c} = \beta_a, \\
 \Delta U &= 0.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$, dando el mismo resultado que con el emisor interno,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_a^2}},$$

expresión que comparamos ahora con el observador relativo.

Observador relativo

Nuevamente, el observador relativo ve fuerzas de inercia y, al sumar al sistema un vector de rotación sobre -z de valor w, deja al absorbedor inmóvil y al emisor con la rotación sobre -z. Eso es lo que ve el absorbedor, que el emisor rota alrededor suyo con velocidad angular w,

$$\begin{aligned}
t=0, \quad \vec{v}_s &= -w D \hat{y} = -v_s \hat{y}, \\
t = \frac{D-r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_s \hat{y} \rightarrow \hat{v} = \hat{y}, \\
\vec{r} = \vec{r}_s - \vec{r}_r &= D \hat{x} - r_a \hat{x} = (D-r_a) \hat{x} \rightarrow \hat{r} = \hat{x}, \\
\hat{v} \cdot \hat{r} &= 0, \\
\beta &= \frac{v_s}{c} = \beta_s, \\
\Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{\beta_s^2}{2}.
\end{aligned}$$

Donde el potencial se calcula en S, porque suponemos que R es la referencia de potencial (cero).

Esto se sustituye en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$, dando,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_s^2} - 1 + \exp\left(\frac{\beta_s^2}{2}\right)},$$

Donde los resultados ya no coinciden ni en primer orden, ni siquiera los beta son iguales.

Experimentos tipo Kundig

Rayos rectos

Vamos a analizar el experimento como se realiza desde el punto de vista del experimentador, que no mide un redshift; lo que él observa es cuándo se igualan la frecuencia de emisor y receptor a la frecuencia de resonancia (porque el conteo de fotones disminuye). Y vamos a considerar la velocidad lineal que se usa en el emisor para igualar estas frecuencias.

También vamos a considerar el efecto shapiro que modifica la velocidad de la fuente, ver la referencia [5].

Empezamos definiendo las velocidades como antes; el emisor tendría una velocidad v_s sobre el eje ‘-x’ para producir un redshift que compense el blueshift de las fuerzas de inercia,

$$\begin{aligned}
t=0, \quad \vec{v}_s &= -v_s \hat{x}, \\
t = \frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_s \hat{x} \rightarrow \hat{v} = \hat{x}, \\
\vec{r} = \vec{r}_s - \vec{r}_r &= -r_a \hat{x} \rightarrow \hat{r} = -\hat{x}, \\
\hat{v} \cdot \hat{r} &= -1, \\
\beta &= \frac{v_s}{c} = \beta_s, \\
\Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-\beta_a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Esto se sustituye en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$ (esto se cumple porque la velocidad lineal es muy inferior a la velocidad lineal de la rotación, lo sé porque estoy copiando de una hoja y he mirado el final),

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)},$$

dando,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 - \beta_s \left(2 - \exp \left(\beta_a^2 \right) \right)}{\sqrt{1 - \beta_s^2} - 1 + \exp \left(\frac{-\beta_a^2}{2} \right)},$$

que igualamos a 1 para imponer que las frecuencias de receptor y emisor coinciden, tomando ahora infinitésimos a orden 2,

$$1 + \frac{\beta_a^2}{2} + \beta_s \left(-1 + \frac{\beta_a^2}{2} \right) + \frac{\beta_s^2}{2} (1 + \beta_a^2) = 1,$$

despreciando los términos del beta del emisor al cuadrado, y despejando el término lineal,

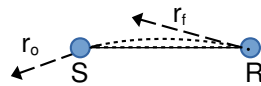
$$\beta_s = \frac{\frac{-\beta_a^2}{2}}{-1 + \frac{\beta_a^2}{2}} \simeq \frac{\beta_a^2}{2}.$$

Donde hemos tomado infinitésimos de nuevo. Y como beta del adsorbedor es mucho menor que cero, el cuadrado dividido por dos es aún más pequeño, cumpliendo $v_r > v_s$. En este caso el efecto shapiro no modifica el resultado que se obtiene.

Rayos curvados

Receptor y emisor ven el mismo ángulo con la horizontal

La línea que los une se encuentra alineada con la horizontal, según el esquema siguiente,



Para que la posición final coincida con la inicial sobre el eje y, debe cumplirse,

$$\begin{aligned} \frac{v_{oy} r_a}{c} + \frac{1}{2} (-2 w c) \left(\frac{r_a}{c} \right)^2 &= 0, \\ v_{oy} &= \frac{c}{r_a} w c \left(\frac{r_a}{c} \right)^2 = w r_a = v_a, \end{aligned}$$

Donde v_{oy} es la velocidad inicial sobre el eje y.

Por tanto el vector de velocidad de la luz y los vectores unitarios tangentes a la trayectoria,

$$\begin{aligned} \vec{v}_{luz}(t=0) &= \sqrt{c^2 - v_a^2} \hat{x} + v_a \hat{y} = c \left(\sqrt{1 - \beta_a^2} \hat{x} + \beta_a \hat{y} \right), \\ \hat{r}_o &= -\sqrt{1 - \beta_a^2} \hat{x} - \beta_a \hat{y}, \\ \hat{r}_f &= -\sqrt{1 - \beta_a^2} \hat{x} + \beta_a \hat{y}, \end{aligned}$$

Y las velocidades,

$$\begin{aligned}
 t=0, \quad \vec{v}_s &= -v_s \hat{x}, \\
 t=\frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\
 \vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_s \hat{x}, \\
 \beta &= \frac{v_s}{c} = \beta_s, \\
 \frac{-1}{c} \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o &= \beta_s \hat{x} \cdot (-\sqrt{1-\beta_a^2} \hat{x} - \beta_a \hat{y}) = -\beta_s \sqrt{1-\beta_a^2}, \\
 \Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-\beta_a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

que sustituimos en la expresión del efecto doppler con rayos curvados y $v_r > v_s$,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)},$$

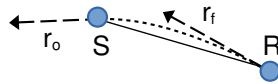
dando,

$$\begin{aligned}
 \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 - \beta_s \sqrt{1-\beta_a^2} \left(2 - \exp(\beta_a^2) \right)}{\sqrt{1-\beta_s^2} - 1 + \exp \left(\frac{-\beta_a^2}{2} \right)} \simeq 1 - \beta_s + \frac{\beta_s^2}{2} + (1 + 2\beta_s + \beta_s^2) \frac{\beta_a^2}{2} = 1, \\
 -\beta_s + (1 + 2\beta_s) \frac{\beta_a^2}{2} &= 0, \\
 \beta_s &= \frac{\frac{\beta_a^2}{2}}{1 - \beta_a^2} \simeq \frac{\beta_a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Donde hemos despreciado términos de ' β_s ' al cuadrado. El resultado es el mismo que el del apartado anterior.

Emisión paralela al eje x

Según el esquema siguiente,



La posición del receptor sobre el eje y debe ser 'delta y', dada por,

$$\delta_y = \frac{1}{2} (-2 \omega c) \left(\frac{r_a}{c} \right)^2 = -\beta_a r_a.$$

Porque la velocidad inicial sobre el eje y es cero.

Por tanto el vector de velocidad de la luz y los vectores unitarios tangentes a la trayectoria,

$$\begin{aligned}
v_y &= -2wc \frac{r_a}{c} = -2v_a, \\
\vec{v}_{luz}(t=t_f) &= \sqrt{c^2 - 4v_a^2} \hat{x} - 2v_a \hat{y} = c(\sqrt{1-4\beta_a^2} \hat{x} - 2\beta_a \hat{y}), \\
\hat{r}_o &= -\hat{x}, \\
\hat{r}_f &= -\sqrt{1-4\beta_a^2} \hat{x} + 2\beta_a \hat{y},
\end{aligned}$$

Y las velocidades,

$$\begin{aligned}
t=0, \quad \vec{v}_s &= -v_s \hat{x}, \\
t=\frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_s \hat{x}, \\
\beta &= \frac{v_s}{c} = \beta_s, \\
\frac{-1}{c} \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o &= \beta_s \hat{x} \cdot (-\hat{x}) = -\beta_s, \\
\Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-\beta_a^2}{2}.
\end{aligned}$$

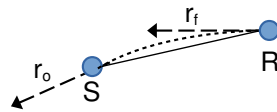
que sustituimos en la expresión del efecto doppler con rayos curvados y $v_r > v_s$, dando,

$$\begin{aligned}
\frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 - \beta_s(2 - \exp(\beta_a^2))}{\sqrt{1 - \beta_s^2} - 1 + \exp\left(\frac{-\beta_a^2}{2}\right)} \simeq 1 + \frac{\beta_a^2}{2} + \left(-1 + \frac{\beta_a^2}{2}\right)\beta_s + (1 + \beta_a^2)\frac{\beta_s^2}{2} = 1, \\
\frac{\beta_a^2}{2} + \left(-1 + \frac{\beta_a^2}{2}\right)\beta_s &= 0, \\
\beta_s &= \frac{\frac{\beta_a^2}{2}}{1 - \frac{\beta_a^2}{2}} \simeq \frac{\beta_a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Que es el mismo resultado previo.

Recepción paralela al eje x

Según el esquema siguiente,



La posición del receptor sobre el eje y debe ser ‘delta y’, dada por,

$$\begin{aligned}
\delta_y &= \frac{w r_a^2}{c} = \beta_a r_a, \\
\frac{v_{oy} r_a}{c} + \frac{1}{2}(-2wc) \left(\frac{r_a}{c}\right)^2 &= \beta_a r_a, \\
v_{oy} &= \frac{c}{r_a} \left(wc \left(\frac{r_a}{c}\right)^2 + \beta_a r_a \right) = 2v_a,
\end{aligned}$$

Donde v_{oy} es la velocidad inicial sobre el eje y.

Por tanto el vector de velocidad de la luz y los vectores unitarios tangentes a la trayectoria,

$$\begin{aligned}\vec{v}_{luz} &= \sqrt{c^2 - 4v_a^2} \hat{x} + 2v_a \hat{y} = c \left(\sqrt{1 - 4\beta_a^2} \hat{x} + 2\beta_a \hat{y} \right), \\ \hat{r}_o &= -\sqrt{1 - 4\beta_a^2} \hat{x} - 2\beta_a \hat{y}, \\ \hat{r}_f &= -\hat{x},\end{aligned}$$

Y las velocidades,

$$\begin{aligned}t=0, \quad \vec{v}_s &= -v_s \hat{x}, \\ t=\frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\ \vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_s \hat{x}, \\ \beta &= \frac{v_s}{c} = \beta_s, \\ \frac{-1}{c} \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o &= \beta_s \hat{x} \cdot (-\sqrt{1 - 4\beta_a^2} \hat{x} - 2\beta_a \hat{y}) = -\beta_s \sqrt{1 - 4\beta_a^2}, \\ \Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{-\beta_a^2}{2}.\end{aligned}$$

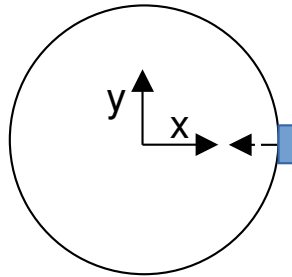
que sustituimos en la expresión del efecto doppler con rayos curvados y $v_r > v_s$, dando,

$$\begin{aligned}\frac{f_r}{f_s} &= \frac{1 - \beta_s \sqrt{1 - 4\beta_a^2} (2 - \exp(\beta_a^2))}{\sqrt{1 - \beta_s^2} - 1 + \exp\left(\frac{-\beta_a^2}{2}\right)} \simeq 1 + \frac{\beta_a^2}{2} + \left(-1 + \frac{5}{2}\beta_a^2\right)\beta_s + (1 + \beta_a^2)\frac{\beta_s^2}{2} = 1, \\ \frac{\beta_a^2}{2} + \left(-1 + \frac{5}{2}\beta_a^2\right)\beta_s &= 0, \\ \beta_s &= \frac{\frac{\beta_a^2}{2}}{1 - \frac{5}{2}\beta_a^2} \simeq \frac{\beta_a^2}{2}.\end{aligned}$$

Que es el mismo resultado previo, lo que prueba la resiliencia del test.

Experimento tipo Friedman

Vamos a analizar tanto la posición más alejada de la fuente (con rayos curvados) como la próxima (con rayos rectos). En ambas suponemos que la distancia D es equivalente al radio del disco r_a , esto implica sobre el potencial que lo consideramos cero, porque si fuente y receptor coinciden, no hay trabajo de las fuerzas de inercia ya que no hay distancia recorrida.



Como indicamos, la rotación hay que transferirla a la fuente con signo contrario.

Posición próxima con rayos rectos

El receptor se encuentra en $x=r_a$. Las velocidades quedan,

$$\begin{aligned} t=0, \quad \vec{v}_s &= -w r_a \hat{y} = -v_a \hat{y}, \\ t=\frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\ \vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_a \hat{y} \rightarrow \hat{v} = \hat{y}, \\ \vec{r} &= \vec{r}_s - \vec{r}_r = (r_a + \delta) \hat{x} - r_a \hat{x} \rightarrow \hat{r} = \hat{x}, \\ \hat{v} \cdot \hat{r} &= 0, \\ \beta &= \frac{v_a}{c} = \beta_a, \\ \Delta U &= 0. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \left(\vec{v}_r - \vec{v}_s \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c^2} \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)},$$

dando,

$$\begin{aligned} \frac{f_r}{f_s} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_a^2}}, \\ z &= \sqrt{1 - \beta_a^2} - 1 \simeq -\frac{\beta_a^2}{2}. \end{aligned}$$

Que es el mismo resultado que para los experimentos de Kundig.

Posición alejada con rayos curvos

El receptor se encuentra en $x=-r_a$. La deflexión y velocidad final del rayo sobre el eje y,

$$\begin{aligned} \delta_y &= \frac{1}{2} (-2 w c) \left(\frac{2 r_a}{c} \right)^2 = -4 \beta_a r_a, \\ v_y &= -2 w c \frac{2 r_a}{c} = -4 v_a, \end{aligned}$$

Que dan los vectores,

$$\begin{aligned} \vec{v}_{luz} &= -\sqrt{c^2 - 16 v_a^2} \hat{x} - 4 v_a \hat{y} = c \left(-\sqrt{1 - 16 \beta_a^2} \hat{x} - 4 \beta_a \hat{y} \right), \\ \hat{r}_o &= -\hat{x}, \\ \hat{r}_f &= \sqrt{1 - 16 \beta_a^2} \hat{x} + 4 \beta_a \hat{y}, \end{aligned}$$

Las velocidades quedan,

$$\begin{aligned}
t=0, \quad \vec{v}_s &= -w r_a \hat{y} = -v_a \hat{y}, \\
t = \frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = v_a \hat{y}, \\
\beta &= \frac{v_a}{c} = \beta_a, \\
\frac{-1}{c} \hat{r}_o \cdot \vec{v}_s &= -\hat{x} \cdot \beta_a \hat{y} = 0, \\
\Delta U &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \frac{1}{c} \left(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o \left(2 - \exp \left(\frac{-2 \Delta U}{c} \right) \right) \right)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right)},$$

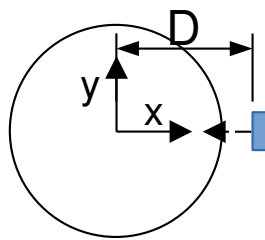
dando,

$$\begin{aligned}
\frac{f_r}{f_s} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_a^2}}, \\
z &= \sqrt{1 - \beta_a^2} - 1 \simeq \frac{-\beta_a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Que mantiene el blueshift anterior. Para ambos test, el retardo shapiro no modifica el resultado.

Análisis completo del efecto doppler longitudinal

El experimento de Friedman utiliza un absorbedor semicircular, evitando el trabajo extra de las fuerzas de inercia cuando el rayo se deflecta por las mismas. Pero, a mi modo de ver, presenta el problema de no controlar la distancia de la fuente al disco. Como vamos a mostrar, suponiendo una distancia D, podemos probar algunos de los resultados obtenidos en el test.



Esta vez vamos a escribir los vectores de forma genérica, para que sirvan en todo el recorrido del disco, y vamos a suponer rayos rectos,

$$\begin{aligned}
\vec{r}_s &= D(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}), \\
\vec{r}_r &= R \hat{x}, \\
\vec{w}_s &= -w \hat{z}, \\
t=0, \quad \vec{v}_s &= \vec{w}_s \wedge \vec{r}_s = Dw(\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}), \\
t = \frac{r_a}{c}, \quad \vec{v}_r &= \vec{0}, \\
\vec{v} &= \vec{v}_r - \vec{v}_s = -Dw(\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}) \rightarrow \hat{v} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}, \\
\vec{r} &= \vec{r}_s - \vec{r}_r = (D \cos \theta - R) \hat{x} + D \sin \theta \hat{y} \rightarrow \hat{r} = \frac{(D \cos \theta - R) \hat{x} + D \sin \theta \hat{y}}{\sqrt{(D \cos \theta - R)^2 + D^2 \sin^2 \theta}}, \\
\hat{v} \cdot \hat{r} &= \frac{-(D \cos \theta - R) \sin \theta + D \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{(D \cos \theta - R)^2 + D^2 \sin^2 \theta}} = \frac{R \sin \theta}{\sqrt{(D \cos \theta - R)^2 + D^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 2 \frac{D}{R} \cos \theta + 1}}, \\
\beta &= \frac{v_s}{c} = \beta_s, \\
\Delta U &= U_r - U_s \rightarrow \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{\beta_s^2}{2}.
\end{aligned}$$

Como están separados fuente y receptor, consideramos no nulo el potencial. Ahora sustituimos en la expresión del efecto doppler con $v_r > v_s$,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \beta \hat{v} \cdot \hat{r}}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)},$$

obteniendo,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{1 + \beta_s \hat{v} \cdot \hat{r}}{\sqrt{1 - \beta_s^2} - 1 + \exp\left(\frac{\beta_s^2}{2}\right)}.$$

Que resulta en el redshift z ,

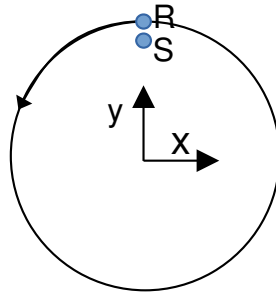
$$z = \frac{\sqrt{1 - \beta_s^2} - 1 + \exp\left(\frac{\beta_s^2}{2}\right)}{1 + \beta_s \hat{v} \cdot \hat{r}} - 1 \simeq \frac{-\beta_s \sin \theta}{\sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 2 \frac{D}{R} \cos \theta + 1}} + \frac{\beta_s^2 \sin^2 \theta}{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 2 \frac{D}{R} \cos \theta + 1}.$$

Que es un redshift nulo hasta orden 2 cuando el ángulo es cero y, además, distingue el sentido de la rotación, porque el producto del vector unitario de posición, 'r', por el vector unitario de la velocidad, 'v', cambia de signo si cambiamos el signo de w. Como se indica en la referencia [6].

Anexo I: Efecto Sagnac

Este efecto se presenta en circuitos circulares por los que viaja la luz, por ejemplo, guiada por un cable de fibra óptica; y cuyo circuito tiene una rotación constante. Se comparan los tiempos en recorrer el circuito de un rayo de luz que viaja a favor de la rotación, con el tiempo de un rayo que viaja en contra de la rotación (es una medida interferométrica).

El sistema presenta el esquema mostrado en la figura,

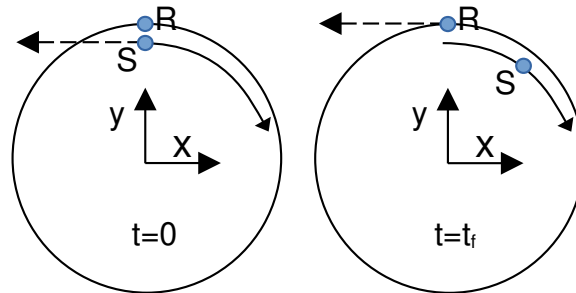


Donde la rotación es como se indica, paralela al eje z sobre receptor, R; consideramos que la fuente, S, permanece inmóvil, para establecer la base de tiempos. Empezamos calculando el tiempo de cada rayo comparado con la fuente, luego establecemos la diferencia de tiempos entre ambos. Como pasaba con el experimento de Friedman. Al estar R y S en la periferia del disco, a pesar de ver R fuerzas de inercia, el potencial es nulo.

Vamos a usar fórmulas para rayos curvos con $v_r > v_s$,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{T_s}{T_r} = \frac{1 + \frac{1}{c}(\vec{v}_r \cdot \hat{r}_f - \vec{v}_s \cdot \hat{r}_o)}{\frac{1}{\gamma} - 1 + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)},$$

empezamos por invertir la rotación de R sobre S; comencemos por el rayo que viaja a favor del movimiento del circuito,



en el instante inicial el rayo sale de S, para en el instante final alcanzar R, como se indica en la figura, quedan los vectores,

$$\vec{v}_{luz}(t=0) = -\hat{x},$$

$$\hat{r}_o = \hat{x},$$

las velocidades quedan,

$$t=0, \quad \vec{v}_s = v \hat{x},$$

$$t=t_f, \quad \vec{v}_r = \vec{0},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_r - \vec{v}_s = -v \hat{x},$$

$$\beta = \frac{v}{c},$$

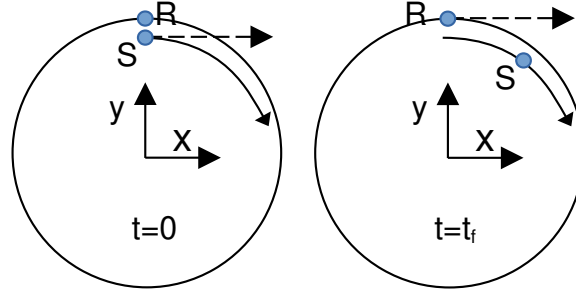
$$\frac{-1}{c} \hat{r}_o \cdot \vec{v}_s = -(\hat{x}) \cdot (\beta \hat{x}) = -\beta,$$

$$\Delta U = 0.$$

donde el potencial es nulo por no haber distancia recorrida de los fotones respecto al centro del disco. Sustituyendo,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{T_s}{T_r} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1-\beta,$$

para el rayo que viaja contra la rotación, en el instante inicial el rayo sale de S, para en el instante final alcanzar R, como se indica en la figura,



dando los vectores,

$$\vec{v}_{luz}(t=0) = \hat{x},$$

$$\hat{r}_o = -\hat{x},$$

las velocidades quedan igual que antes,

$$t=0, \quad \vec{v}_s = v \hat{x},$$

$$t=t_f, \quad \vec{v}_r = \vec{0},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_r - \vec{v}_s = -v \hat{x},$$

$$\beta = \frac{v}{c},$$

$$\frac{-1}{c} \hat{r}_o \cdot \vec{v}_s = -(-\hat{x}) \cdot (v \hat{x}) = \beta,$$

$$\Delta U = 0.$$

nuevamente, donde el potencial es nulo. Sustituyendo,

$$\frac{f_r}{f_s} = \frac{T_s}{T_r'} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1+\beta.$$

Ahora sumamos el tiempo del rayo a favor menos el rayo en contra,

$$T_r - T_r' = \frac{T_s}{1-\beta} - \frac{T_s}{1+\beta} = T_s \left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1+\beta} \right),$$

$$T_s = \frac{2\pi r}{c},$$

$$T_r - T_r' = \frac{2\pi r}{c} \left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1+\beta} \right) = 2\pi r \left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} \right) = 2\pi r \frac{2v}{c^2 - v^2},$$

que es la expresión que se identifica con el efecto Sagnac^[7], pero sólo es el efecto a primer orden. Para el efecto completo debemos usar,

$$\frac{T_r}{T_s} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta},$$

$$\frac{T_r'}{T_s} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta},$$

$$\frac{T_r - T_r'}{T_s} = \sqrt{1-\beta^2} \left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1+\beta} \right) = \frac{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Para el desplazamiento en frecuencia de cada rayo queda,

$$z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} - 1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \simeq \beta,$$
$$z' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} - 1 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - 1 \simeq -\beta.$$

Dando que el rayo a favor experimenta un redshift y el rayo en contra un blueshift.

Referencias

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_general_relativity
- [2] Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos. <https://vixra.org/abs/2404.0013>
- [3] Deflection of photons in gravitational field. <https://vixra.org/abs/2211.0075>
- [4] Novel Mössbauer experiment in a rotating system and the extraenergy shift between emission and absorption lines. T, Yarman et al. 2015. <https://arxiv.org/abs/1503.05853>
- [5] Efecto doppler en relatividad especial de campos. <https://vixra.org/abs/2509.0132>
- [6] The validity of an experiment testing the influence of acceleration on time dilation using a rotating Mössbauer absorber and a Synchrotron Mössbauer Source. Friedman et al. JSR, 24 May 2018.
- [7] https://en.wikipedia.org/wiki/Sagnac_effect