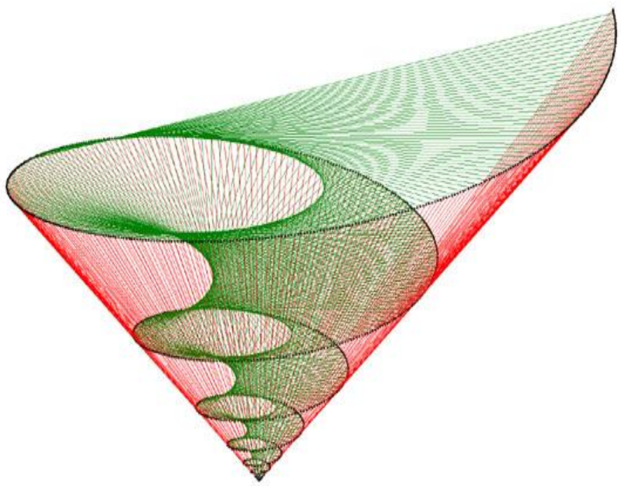


CONJECTURE DE SYRACUSE

DEMONSTRATION

RÉSUMÉ

IL s'agit d'une séquence très simple d'opérations sur les nombres qui ramène toujours au même endroit, le nombre 1. D'abord un amusement, cette étonnante suite est devenue troublante pour les mathématiciens qui ne se lassent pas de l'explorer sans avoir encore réussi à la domestique

Auteur

MOSTAFA SENHAJI

I. Introduction

La conjecture de Syracuse, également connue sous le nom de conjecture de Collatz ou conjecture d'Ulam, est une proposition mathématique formulée par le mathématicien allemand Lothar Collatz en 1937. Cette conjecture explore une séquence de nombres générée par une règle de transformation simple appliquée à chaque terme de la séquence. Bien que la conjecture semble intuitive, démontrer sa validité demeure un problème ouvert en mathématiques, malgré des tests approfondis et des simulations informatiques.

II. Origine

L'origine de la conjecture remonte à 1928, lorsque Lothar Collatz manifesta un intérêt marqué pour les itérations dans les nombres entiers. En 1952, la conjecture fut partagée avec Helmut Hasse et diffusée à l'université de Syracuse par ce dernier. La renommée de la conjecture s'étendit grâce aux efforts du mathématicien polonais Stanislas Ulam au Laboratoire national de Los Alamos et de Shizuo Kakutani dans les universités de Yale et de Chicago.

III. Première approche de la conjecture

La suite de Syracuse d'un nombre entier N > 0 est définie par récurrence (k) , de la manière suivante :

-$U_0 = N$

-et pour tout entier n, $U_{n+1} = U_n / 2$ si U_n est pair ou $U_n = 3U_n + 1$ si U_n est impair

- Énoncé de la conjecture

La conjecture affirme que pour tout entier N > 0, il existe un indice n tel que Un = 1

- Exemple de la suite pour N = 15

U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	$\underline{U_{10}}$	U_{11}	U_{12}	U_{13}	U_{14}	U_{15}	U_{16}	U_{17}	U_{18}	U_{19}	U_{20}	
15	46	23	70	35	106	53	160	80	40	20	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	…

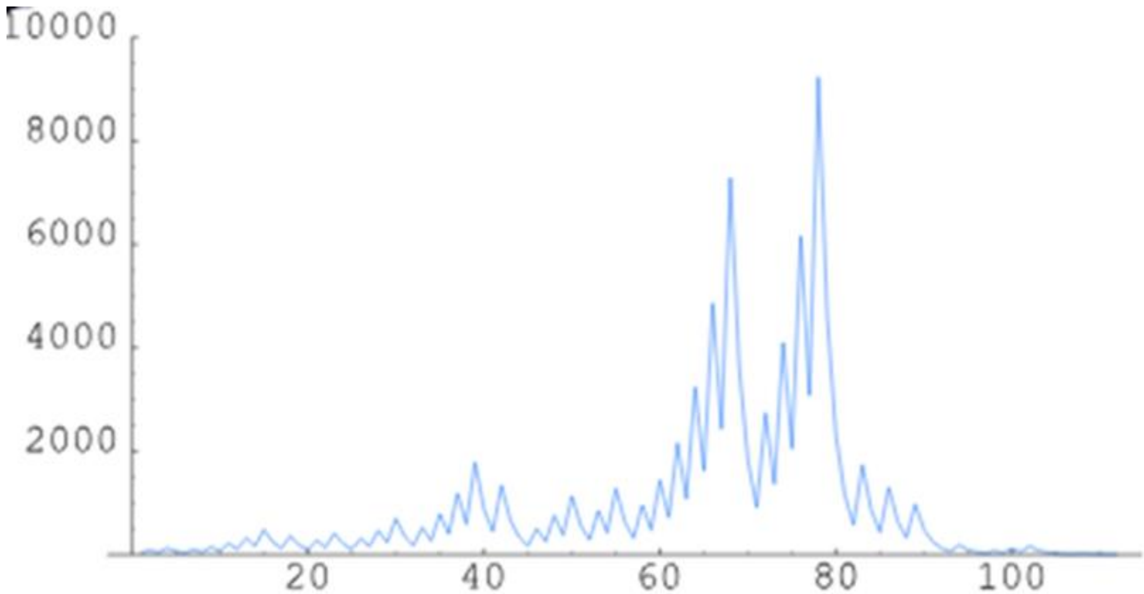
- Vocabulaire

- Le temps de vol : représenté par le plus petit indice $U_n=1$.

- Le temps de vol en altitude : défini comme le plus petit indice n tel que $U_n<U_0$.

- L'altitude maximale : correspond à la valeur maximale atteinte par la suite

- Représentation graphique de la suite pour N = 27



En examinant graphiquement l'évolution de la suite pour *N*=15 et N=27, on peut constater que la suite atteint des valeurs élevées avant de revenir à des niveaux plus bas. Les représentations graphiques évoquent l'image d'une chute irrégulière semblable à celle d'une grêle en descente ou à la trajectoire sinueuse d'une feuille emportée par le vent. Cette observation a inspiré l'utilisation d'un langage imagé, introduisant ainsi le concept poétique du 'vol' de la suite

IV. <u>Etude et Analyse</u>

La suite de Syracuse, est intéressante en raison de son comportement apparemment chaotique malgré la simplicité de sa règle de formation. La monotonie de la suite de Syracuse dépend de la valeur initiale choisie (le terme initial n).

- **Observation**

Par définition de la suite de Syracuse, on peut mentionner que lorsque la division par 2 atteint un terme impair, on applique l'opération (3n+1) pour obtenir un terme pair, ce qui permet de continuer le processus et de créer les termes suivants de la suite de Syracuse. Donc la suite de Syracuse dépend obligatoirement de l’opération (3n+1) pour sa continuation

- **Monotonie pour les Termes Pairs** :

Si le terme initial n est pair, alors chaque terme suivant de la suite est obtenu en divisant n par 2. Cette opération conduit à une diminution monotone des termes de la suite jusqu'à atteindre 1, où la suite reste constante.

- **Monotonie pour les Termes Impairs** :

Si le terme initial n est impair, alors chaque terme suivant est obtenu en multipliant n par 3 et en ajoutant 1. Cela peut conduire à des valeurs qui alternent entre impaires et paires. Cependant, même dans ce cas, il est possible que la suite finisse par entrer dans une séquence de termes décroissants avant d'atteindre le cycle {4, 2, 1}.

- Variabilité :

Bien que la suite puisse présenter une monotonie locale (c'est-à-dire des séquences décroissantes occasionnelles), elle peut aussi générer des comportements imprévisibles et des sauts entre valeurs très grandes et très petites.

V. Démonstration

1) Démontrons que la suite de Syracuse atteint une finitude de termes

La démonstration que la suite de Syracuse atteint une finitude de termes nécessite une approche par l'absurde. L'idée générale est de supposer que la suite est infinie, puis de dériver une contradiction à partir de cette hypothèse. Voici comment cela peut être formulé :

Supposons par l'absurde que la suite de Syracuse, à partir d'un certain entier initial (N_0), est infinie. Cela signifie qu'il n'y a pas de <u>répétition de termes et que chaque terme est distinct.</u>

Ensuite, chaque terme de la suite dépend du terme précédent selon les règles suivantes

- Si le terme est pair, divisez-le par 2.

- Si le terme est impair, multipliez-le par 3 et ajoutez 1.

On'a :

Pour tout entier naturel strictement positif N, il existe un entier m ≥ 2 ,tel que N est compris entre 0 et 2^m . En d'autres termes, chaque entier naturel peut être inclus dans un intervalle de la forme [0, 2^m).
Donc pour qu'il que soit n entier naturel il existe un entier naturel m ≥ 2 / 1 ≤ U_n ≤ 2^m.

<u>et</u>

De plus en sait qu'il il y a un nombre fini d'entiers naturels dans n'importe quel intervalle donné.

<u>**Donc on peut conclure que le nombre des termes de la suite de Syracuse est fini**</u>

2) <u>Démontrant que la suite de Syracuse converge inévitablement vers un cycle</u>

Le principe des tiroirs, également appelé principe de Dirichlet (m), est un principe fondamental en théorie des nombres. Il stipule que :

Si l'on répartit (n + 1) objets dans (n) tiroirs, alors au moins l'un des tiroirs doit contenir au moins deux objets.

Appliquons Le principe des tiroirs, à notre situation avec la conjecture de Syracuse. Supposons par l'absurde que pour une certaine valeur initiale (N_0), la suite de Syracuse ne converge pas vers un cycle, créant ainsi une séquence infinie d'entiers distincts.

Maintenant, considérons ces entiers comme des "objets" que nous devons répartir dans des "tiroirs". Les "tiroirs" dans notre contexte sont les valeurs possibles que peuvent prendre les termes de la suite de Syracuse.

Selon la conjecture de Syracuse, chaque terme dépend du précédent selon des règles déterministes (division par 2 ou multiplication par 3 et ajout de 1). Cela signifie que chaque terme est déterminé par le terme qui le précède

Maintenant, si nous avons une séquence infinie de termes distincts, cela signifierait que nous avons une infinité d'objets à placer dans un nombre fini de tiroirs (les différentes valeurs possibles des termes de la suite qui sont en nombre fini). En d'autres termes, nous répartissons une infinité d'objets dans un nombre fini de tiroirs.

Le principe des tiroirs stipule alors qu'au moins un des tiroirs doit contenir au moins deux objets. Dans le contexte de la suite de Syracuse, cela signifierait **<u>qu'il existe deux termes distincts dans la séquence qui ont la même valeur, créant ainsi une répétition.</u>**

Cependant, cela contredirait notre hypothèse initiale selon laquelle la suite ne converge pas et produit une séquence infinie de termes distincts. Par conséquent, l'hypothèse initiale doit être fausse, et **<u>la suite de Syracuse converge inévitablement vers un cycle.</u>**

3) <u>Démontrons que ce cycle ne peut être que (4,2,1)</u>

La démonstration que la suite de Syracuse converge inévitablement vers un cycle ne prouve pas directement que ce cycle ne peut être que (4, 2, 1). Cependant, on peut intégrer cette conclusion en utilisant la nature des opérations impliquées dans la suite de Syracuse.

Considérons ce cycle comme (a, b, c), où a, b, et c sont des entiers positifs distincts.Puisque la suite de Syracuse converge, cela signifie que pour chaque terme U_n, il existe un indice n tel que $U_n = U_{n+k,}$ où k est la longueur du cycle.

Maintenant, examinons le dernier terme du cycle, c. Selon la règle de la suite de Syracuse, si c est impair, le terme suivant est 3c + 1, et s'il est pair, le terme suivant est c/2.

- **<u>Si c est pair</u>**

O ’na donc a=c/2, (b=c/4 ou b= 3c/2 + 1) donc c=(c/4)/2 ou c=3(c/4) +1 ou c=(3c/2+1)/2

1- c=(c/4)/2=c/8 donc c=8c donc on’a 8=1 ce qui’est faux

2- c=3(c/4)+1=3c/4 + 1= (3c+4)/4 donc 4c=3c+4 donc c=4 donc a=2 et b=1
on’a alors **le cycle (2,1,4)**

3- c=(3c/2+1)/2=((3c+2)/2)/2=3c+2/4 donc 4c=3c+2 donc c=2 donc a=1 et b=4

ona alors **le cycle (1,4,2)**

Donc ce cas on aboutit au cycle (2,1,4) qu’est identique au cycle (1,4,2)

- **Si c est impair**

Donc o’ na : a=3c+1, b=3c+1/2 et (c=b/2 ou c=3b+1) donc (c=3c+1/4 ou c=3x(3c+1/2) +1)

1- c=3x(3c+1/2)+1 donc c=(9c+3/2)+1 donc 2c=9c+3+2 donc 7c=-5 donc c=-5/7 qui n’est pas un entier naturel et en plus négatif

2- c=3c+1/4 donc 4c=3c+1 donc c=1 donc a=4 et b=2

Dans ce cas on aboutit au **cycle (4,2,1)**

Dans tous les cas on arrive respectivement au cycle (2,1,4), (1,4,2), (4,2,1) qui sont identiques

4) Conclusion

En résumé, la nature des opérations dans la suite de Syracuse et la nécessité d'une répétition cohérente conduisent à la conclusion que le seul cycle possible est (4, 2, 1).

Après avoir démontré la conjecture de Syracuse, il est intéressant de souligner les domaines scientifiques où elle peut être appliquée. Voici une synthèse à cet effet :

VI. Synthèse : Applications de la Conjecture de Syracuse dans les Domaines Scientifiques

La résolution de la Conjecture de Syracuse, également connue sous le nom de conjecture de Collatz, offre des perspectives fascinantes dans plusieurs domaines scientifiques. Voici quelques-unes des applications potentielles de cette conjecture démontrée :

1. **Théorie des Nombres : La Conjecture de Syracuse repose sur des principes fondamentaux de la théorie des nombres, et sa démonstration contribue à notre compréhension des propriétés des suites numériques. Cette avancée pourrait inspirer de nouvelles recherches dans le domaine de la théorie des nombres et des séquences arithmétiques.

2. **Informatique Théorique : La nature itérative de la suite de Syracuse et sa convergence vers le cycle (4, 2, 1) pour tout entier initial offrent des applications potentielles en informatique théorique. Les propriétés de cette suite pourraient être exploitées dans la conception d'algorithmes ou dans des problèmes liés à la complexité des calculs.

3. **Modélisation Mathématique : La suite de Syracuse, malgré sa simplicité de règles, exhibe un comportement apparemment chaotique. Son étude et sa démonstration fournissent des éléments pour la modélisation mathématique de phénomènes chaotiques dans divers domaines scientifiques, tels que la météorologie ou la dynamique des populations.

4. **Éducation Mathématique : La conjecture de Syracuse peut être utilisée comme un exemple concret et engageant pour enseigner des concepts mathématiques tels que les suites, la divisibilité, et les cycles numériques. Son histoire intéressante et sa démonstration ajoutent une dimension pédagogique aux cours de mathématiques.

5. **Algorithmique Éducative : La résolution de la conjecture de Syracuse peut servir de base pour des exercices d'algorithmique éducative, encourageant les étudiants à développer des compétences en résolution de problèmes et en programmation.

En conclusion, la démonstration de la Conjecture de Syracuse ouvre la voie à diverses applications dans des domaines scientifiques variés, renforçant ainsi notre compréhension des mathématiques et offrant des opportunités pour des avancées futures.

 # Notes et Références

- **Conjecture : En mathématiques, une assertion non démontrée mais croyant être vraie.

- **Lothar Collatz : Mathématicien allemand à l'origine de la conjecture en 1937.

- **Stanisław Ulam : Mathématicien polono-américain ayant contribué à la théorie des nombres.

- **Hypergraphes : Objets mathématiques généralisant la notion de graphe.

- **Helmut Hasse : Mathématicien allemand ayant diffusé la conjecture à l'université de Syracuse.

- **Université de Syracuse : Institution où la conjecture a été baptisée "suite de Syracuse".

- **Laboratoire national de Los Alamos :** Laboratoire du département de l'Énergie des États-Unis ayant contribué à la propagation de la conjecture.

- **Shizuo Kakutani :** Mathématicien nippo-américain ayant repris le problème dans les universités de Yale et de Chicago.