Eléments Complémentaires de la Théorie des Surfaces

Par

Abdelmajid Ben Hadj Salem
Ingénieur Géographe Général

Abstract : In this fascicle, we give some complementary elements concerning the theory of surfaces like the lines of curvature, the asymptotic lines.

- Version 1 - Février 2024 -

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

A Mon Collègue et Ami Mohamed CHARFI, Ingénieur Géographe Général

Table des matières

Chapitre 1

Les Courbes

Sommaire

He who understands geometry may understand anything in this world.

Galileo Galilée (1564 - 1642)

1.1 COURBES PLANES - COURBURE

Définition 1.1 *Une courbe plane (µ) est une application de* $\mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}^2$ *entièrement déterminée par la donnée d'une fonction vectorielle* $\boldsymbol{M}(t)$ *d'un paramètre* t *:*

$t \in \mathbb{R} \longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{OM}(x, y) = x(t).\boldsymbol{i} + y(t).\boldsymbol{j}$

où $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ *la base orthonormée du plan* XOY*.*

1.1.1 Longueur d'un arc de la courbe

L'élément élémentaire de longueur d'un arc est la quantité ds telle que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (x'^2 + y'^2).dt^2$$

avec x' et y' désignent les dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à la variable t, d'où :

$$ds = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}.dt$$

Soit pour $t = t_0$, M_0 le point origine de l'arc, d'où en intégrant s, on obtient :

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'^2 + y'^2)}.dt = F(t, t_0) \tag{1.1}$$

De l'équation (1.1), on peut exprimer t en fonction de s. On peut alors adopter comme paramètre la longueur d'un arc de (μ) d'origine M_0 c'est-à-dire s (l'abscisse curviligne) et de considérer la courbe définie par $M(s)$.

1.1.2 La Tangente

Au point M, la courbe admet une tangente définie par le vecteur unitaire $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{M}}{ds} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{ds} \\ \dfrac{dy}{ds} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

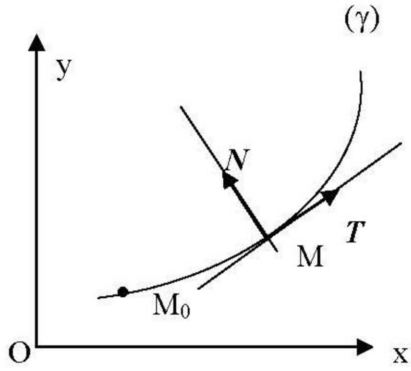

FIG. 1.1 Courbe Plane

1.1.3 Normale et Courbure

Définition 1.2 *La dérivée de* $\boldsymbol{T}$ *par rapport à* s *(lorsqu'elle existe et n'est pas nulle) définit une direction orthogonale à la tangente portant le vecteur unitaire* $\mathbf{N}$ *dite la normale au point* M*. On a alors :*

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\alpha}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \tag{1.3}$$

avec :

$$\boxed{\alpha = \left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{R}} \tag{1.4}$$

R *est appelé rayon de courbure au point* M *et* α *est la courbure.*

Soit G de centre de courbure, alors les coordonnées du point G sont données par l'équation vectorielle :

$$\boldsymbol{OG} = \boldsymbol{OM} + R.\boldsymbol{N} = \boldsymbol{OM} + R^2.\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \tag{1.5}$$

1.2 COURBES GAUCHES

1.2.1 Trièdre de Frenêt - Courbure - Torsion

[1]

Définition 1.3 *Une courbe gauche* (μ) *est une application de* $\mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}^3$ *entièrement déterminée par la donnée d'une fonction vectorielle* ***OM(t)*** *d'un paramètre* t *:*

$$t \in \mathbb{R} \Longrightarrow (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; / \, \boldsymbol{OM}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

1.2.2 Longueur d'un arc de la courbe

L'élément élémentaire de longueur d'un arc est la quantité ds telle que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2).dt^2$$

avec x', y' et z' désignent les dérivées de $x(t), y(t)$ et $z(t)$ par rapport à la variable t, d'où :

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$$

Soit pour $t = t_0$, M_0 le point origine de l'arc, d'où en intégrant s, on obtient :

$$s = F(t, t_0) \tag{1.7}$$

De l'équation (1.7), on peut exprimer t en fonction de s. On peut alors adopter comme paramètre la longueur d'un arc de (μ) d'origine M_0 c'est-à-dire s (l'abscisse curviligne) et de considérer la courbe gauche définie par $M(s)$.

1.2.3 La Tangente

Au point M, la courbe admet une tangente définie par le vecteur unitaire $\boldsymbol{T}$.

1. **Jean Frédéric Frenêt** (1816-1900) : mathématicien, astronome et météorologue français.

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{M}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

1.2.4 La Normale - Courbure

Définition 1.4 *La dérivée de* $\boldsymbol{T}$ *par rapport à* s*, lorsqu'elle existe et n'est pas nulle, définit une direction orthogonale à la tangente portant le vecteur unitaire* $\boldsymbol{N}$ *dite la normale au point* M*. On a alors :*

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\alpha}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \tag{1.9}$$

avec :

$$\boxed{\alpha = \left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{R}} \tag{1.10}$$

R est appelé rayon de courbure .

En effet, $\|\boldsymbol{T}\| = 1 \Rightarrow \boldsymbol{T}.\boldsymbol{T} = 1 \Rightarrow 2\boldsymbol{T}.\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 0$. Donc : le vecteur $\boldsymbol{T}$ est orthogonal à $\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$.

1.2.5 Binormale

Définition 1.5 *La binormale est la droite passant par le point* M *et de direction le vecteur* $\boldsymbol{B}$ *défini par :*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N} \tag{1.11}$$

On a évidemment : $\|\boldsymbol{B}\| = 1$. Le triplet $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ est direct et forme un trièdre dénommé le trièdre de Frenêt.

Définition 1.6 *Les plans définis par les vecteurs* $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N})$, $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ *et* $(B,\boldsymbol{T})$ *sont appelés respectivement plan osculateur, plan normal et plan rectifiant.*

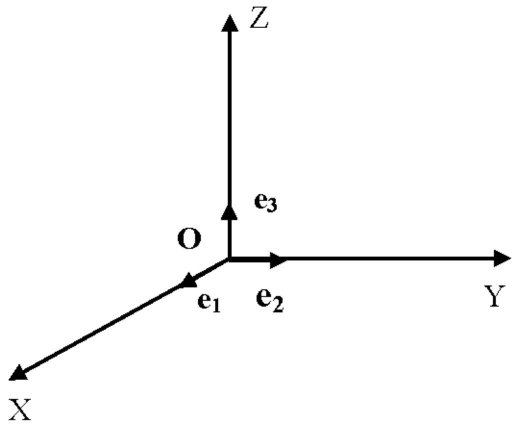

FIG. 1.2 Le Trièdre de Frenêt

1.2.6 Torsion

On calcule la dérivée du vecteur $\boldsymbol{B}$ par rapport à s, on obtient :

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \wedge \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} \wedge \frac{d\boldsymbol{N}}{ds}$$

car $\boldsymbol{T}$ et $\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}$ sont colinéaires, par conséquent $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ est orthogonal à $\boldsymbol{T}$. Comme $\boldsymbol{B}$ est unitaire, $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ est aussi orthogonal à $\boldsymbol{B}$, donc $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ est colinéaire à $\boldsymbol{N}$. On pose :

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \frac{-1}{\tau(s)}\boldsymbol{N}} \tag{1.12}$$

Définition 1.7 *Le réel* $1/\tau(s)$ *est appelé torsion de* (μ) *au point* $M(s)$.

On calcule la dérivée du vecteur $\boldsymbol{N}$. Comme $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{T}$, on obtient :

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} \wedge \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \wedge \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{-1}{\tau(s)}\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \wedge \frac{\boldsymbol{N}}{R}$$

donc :

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \frac{-\boldsymbol{T}}{R} + \frac{\boldsymbol{B}}{\tau(s)}} \tag{1.13}$$

Les trois relations exprimant les dérivées premières des vecteurs du repère de Frenêt peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\boxed{\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{-1}{R} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & \frac{-1}{\tau} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}} \tag{1.14}$$

1.3 PROBLÈMES ET EXERCICES

Problème 1.1 *Soit la courbe (C) définie par les formules :*

$$M \begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \\ z = \frac{9}{16}at^4 \quad \text{avec} \quad a > 0 \end{cases}$$

1. Calculer l'abscisse curviligne s d'un point M quelconque de cette courbe lorsqu'on prend pour origine des arcs l'origine des coordonnées et qu'on prend pour sens des arcs croissants celui des y croissants.

2. Déterminer au point M les vecteurs unitaires du trièdre de Frenêt.

3. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

4. Evaluer la torsion en M.

Problème 1.2 *Soit la courbe plane :*

$$M(t) \begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = acost \qquad \text{avec} \quad a > 0 \end{cases}$$

1. Calculer $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

2. Montrer que la longueur de la courbe entre les points M_1 et M_2 vaut $4a$.

3. Calculer les coordonnées du point G centre de courbure, pour $t > 0$.

Problème 1.3 *Soit $\Gamma(t)$ la courbe définie dans $\mathbb{R}$ paramétrée par :*

$$\Gamma(t) = \begin{cases} x = e^t cost \\ y = e^t sint \\ z = e^t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Dessiner l'allure de la courbe $\Gamma(t)$.

2. Soit $0 < \lambda_0 < \lambda_1$, *donner la longueur de l'arc de* $\Gamma(t)$ *qui se trouve entre les plans* $z = \lambda_0$ *et* $z = \lambda_1$.

3. Montrer que la courbure et la torson de $\Gamma(t)$ *sont les deux inversement proportionnelles à* e^t.

Exercice 1.1 *Soit la courbe* Γ *définie par :*

$$x = acost, \quad y = asint, \quad z = acos2t, \quad a > 0$$

1. Calculer ds.

2. Calculer les composantes des vecteurs, ***T*** *et* ***N****.*

3. Donner les coordonnées du centre de courbure.

Exercice 1.2 *On considère la courbe* $\Gamma(t)$ *définie comme suit :*

$$x = cosht, \quad y = sinh, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Montrer que la courbure et la torsion de Γ *sont données par les expressions :*

$$\kappa = \frac{1}{2cosh^2 t}, \quad \tau = -\frac{1}{2cosh^2 t}$$

Chapitre 2

Les Deux Formes Fondamentales de la Théorie des Surfaces

Sommaire

2.1 DÉFINITION D'UNE SURFACE

Définition 2.1 *Une surface* (σ) *de* $\mathbb{R}^3$ *est une application d'un domaine* $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ *à* $(u_1,u_2) \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ *fait correspond un triplet* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *où* x_1,x_2,x_3 *sont des fonctions continues des deux paramètres* (u_1,u_2) *:*

$$(u_1,u_2) \in \mathscr{D} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{OM}(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} x_1 = x_1(u_1,u_2) \\ x_2 = x_2(u_1,u_2) \\ x_3 = x_3(u_1,u_2) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Donc $(u_1,u_2) \in \mathscr{D} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3) \in (\sigma)$.

Si la fonction $\boldsymbol{OM}(u_1,u_2)$ est dérivable dans le domaine $\mathscr{D}$, on peut définir en tout point de (σ) un plan tangent et une normale.

Soient $\boldsymbol{M}'_{u_1}$ et $\boldsymbol{M}'_{v_1}$ les deux vecteurs dérivées au point M avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial u_1}(u_1,u_2) = \boldsymbol{M'}_{u_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \right)^T \\ \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial u_2}(u_1,u_2) = \boldsymbol{M'}_{u_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right)^T \end{aligned} \tag{2.2}$$

Alors l'équation du plan tangent est définie par :

$$\boldsymbol{MP}.(\boldsymbol{M}'_{u_1} \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2}) = 0$$

P est un point courant du plan tangent. On pose :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{M}'_{u_1} \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2}}{\|\boldsymbol{M}'_{u_1} \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2}\|} \tag{2.3}$$

un vecteur unitaire porté par la normale à la surface (σ) au point M.

Les paramètres (u_1,u_2) sont dits les *coordonnées curvilignes* sur la surface (σ). Une courbe tracée sur la surface est définie par une relation $g(u_1,u_2) = 0$ ou par $u_1 = u_1(t)$; $u_2 = u_2(t)$ avec t un paramètre. En particulier, les courbes $u_1 =$ constante et $u_2 =$ constante sont dites les *courbes coordonnées*.

2.2 LA PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE

L'élément linéaire ds sur la surface (σ) est la distance de deux points infiniment voisins, le carré de ds est le carré scalaire de $d\boldsymbol{M}$ soit :

$$ds^2 = d\boldsymbol{M}.d\boldsymbol{M} = d\boldsymbol{M}^2 = \|d\boldsymbol{M}\|^2 \tag{2.4}$$

Or :

$$\boldsymbol{OM}(u_1,u_2)\begin{pmatrix} x(u_1,u_2) \\ x_2(u_1,u_2) \\ x_3(u_1,u_2)\end{pmatrix} \Longrightarrow d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'_{u_1}du_1 + \boldsymbol{M}'_{u_2}du_2 = \begin{pmatrix} dx_1 = x'_{1u_1}du_1 + x'_{1u_2}du_2 \\ dx_2 = x'_{2u_1}du_1 + x'_{2u_2}du_2 \\ dx_3 = x'_{3u_1}du_1 + x'_{3u_2}du_2 \end{pmatrix}$$

Par suite :

$$d\boldsymbol{M}^2 = ds^2 = \boldsymbol{M}'_{u_1}.\boldsymbol{M}'_{u_1}du_1{}^2 + 2\boldsymbol{M}'_{u_1}.\boldsymbol{M}'_{u_2}du_1du_2 + \boldsymbol{M}'_{u_2}.\boldsymbol{M}'_{u_2}du_2{}^2$$

On pose :

$$\begin{cases} E = \boldsymbol{M}'_{u_1}.\boldsymbol{M}'_{u_1} \\ F = \boldsymbol{M}'_{u_1}.\boldsymbol{M}'_{u_2} \\ G = \boldsymbol{M}'_{u_2}.\boldsymbol{M}'_{u_2} \end{cases} \tag{2.5}$$

alors ds^2 s'écrit :

$$\boxed{ds^2 = E.du_1{}^2 + 2.F.du_1du_2 + G.du_2{}^2} \tag{2.6}$$

(2.6) est dite la première forme fondamentale, elle définit la métrique de la surface (σ).

2.2.1 Ecriture matricielle de la première forme fondamentale

On appelle $g = (g_{ij})$ la matrice carrée 2×2 telle que :

$$\begin{aligned} g_{11} &= E \\ g_{12} = g_{21} &= F \\ g_{22} &= G \end{aligned}$$

Soit :

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Alors l'équation (2.6) s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = (du_1, du_2).g.\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} = (du_1, du_2).\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

La matrice g s'appelle la matrice du tenseur métrique.

2.2.2 Angles de deux courbes coordonnées et Elément d'aire

* On a : $F = \boldsymbol{M}'_{u_1}.\boldsymbol{M}'_{u_2} = \|\boldsymbol{M}'_{u_1}\|.\|\boldsymbol{M}'_{u_2}\| cos\theta$, d'où :

$$cos\theta = \frac{F}{\|\boldsymbol{M}'_{u_1}\|.\|\boldsymbol{M}'_{u_2}\|} = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

et en considérant $\theta \in [0, \pi]$:

$$sin\theta = \sqrt{1 - cos\theta^2} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{E.G}} = \sqrt{\frac{E.G - F^2}{E.G}}$$

On pose parfois :

$$H = \sqrt{E.G - F^2} = h^2(u_1, u_2) \tag{2.9}$$

soit :

$$H = \|\boldsymbol{M}'_{u_1} \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2}\| = \|\boldsymbol{M}'_{u_1}\|.\|\boldsymbol{M}'_{u_2}\| sin\theta \tag{2.10}$$

Par suite, le vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ a pour expression :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{M}'_{u_1} \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2}}{\|\boldsymbol{M}'_{u_1} \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2}\|} = \frac{\boldsymbol{M}'_{u_1} \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2}}{H} \tag{2.11}$$

* En considérant maintenant le parallélogramme curviligne de sommet $M(u_1, u_2)$ et de côtés les vecteurs $\boldsymbol{M}'_{u_1} du_1$ et $\boldsymbol{M}'_{u_2} du_2$, alors l'élément infinitésimal d'aire $d\mathscr{A}$ a pour expression :

$$d\mathscr{A} = ||\boldsymbol{M}'_{u_1} du_1 \wedge \boldsymbol{M}'_{u_2} du_2|| = ||\boldsymbol{M}'_{u_1}||.||\boldsymbol{M}'_{u_2}|| du_1.du_2.sin\theta = \sqrt{E.G - F^2} du_1 du_2 = H du_1 du_2$$

On le note aussi :

$$\boxed{d\mathscr{A} = \sqrt{E.G - F^2} du_1 \wedge du_2 = H du_1 \wedge du_2} \tag{2.12}$$

2.2.3 Coordonnées Orthogonales et Coordonnées Symétriques

Les coordonnées (u_1, u_2) sont dites **orthogonales** si $F = \boldsymbol{M}'_{u_1}.\boldsymbol{M}'_{u_2} = 0$, soit $cos\theta = 0$, donc θ est un angle droit.

Les coordonnées orthogonales sont dites **coordonnées symétriques** si de plus $E = G$. Alors la première forme quadratique s'écrit :

$$ds^2 = Edu_1{}^2 + Gdu_2{}^2 = E(du_1{}^2 + du_2{}^2) = H(du_1{}^2 + du_2{}^2) = h^2(u_1, u_2)(du_1{}^2 + du_2{}^2)$$

Exemple :

On considère une sphère de rayon R qu'on note (σ), elle est paramétrée par :

$$\boldsymbol{OM}\left|\begin{array}{l} Rcos\varphi cos\lambda \\ Rcos\varphi sin\lambda \\ Rsin\varphi \end{array}\right.$$

avec $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], \lambda \in [0, +2\pi[$. Les courbes coordonnées de (σ) sont les méridiens $\lambda = constante$ et les parallèles $\varphi = constante$. On remarque qu'elles se coupent en un angle droit. On calcule la première forme fondamentale de la sphère :

$$\boldsymbol{OM}'_\varphi = \left|\begin{array}{l} -Rsin\varphi cos\lambda \\ -Rsin\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi \end{array}\right. , \quad \boldsymbol{OM}'_\lambda = \left|\begin{array}{l} -Rcos\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi cos\lambda \\ 0 \end{array}\right. \tag{2.13}$$

D'où :

$$\begin{aligned} E &= \boldsymbol{OM}'_\varphi.\boldsymbol{OM}'_\varphi = R^2 \\ F &= \boldsymbol{OM}'_\varphi.\boldsymbol{OM}'_\lambda = 0 \\ G &= \boldsymbol{OM}'_\lambda.\boldsymbol{OM}'_\lambda = R^2cos^2\varphi \end{aligned}$$

$F = 0$ justifie ce qui a été dit ci-dessus sur l'orthogonalité des courbes coordonnées. Ces dernières sont orthogonales mais non symétriques. En effet :

$$ds^2 = R^2d\varphi^2 + R^2cos^2\varphi d\lambda^2 = R^2cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi^2}{cos^2\varphi} + d\lambda^2\right)$$

La variable L telle que :

$$dL = \frac{d\varphi}{cos\varphi} \tag{2.14}$$

forme avec λ un couple de coordonnées symétriques, car :

$$ds^2 = R^2cos^2\varphi(dL^2 + d\lambda^2) \tag{2.15}$$

L est appelée **latitude croissante** ou **latitude ou variable de Marcator** [1]. On pose :

$$t = tg\frac{\varphi}{2} \Longrightarrow cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

d'où :

$$dt = (1+t^2)\frac{d\varphi}{2} \Longrightarrow d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}$$

De (2.14), on obtient L vérifiant $L(0) = 0$:

$$L = \int_0^{\varphi} \frac{dw}{cosw} = \int_0^{tg\frac{\varphi}{2}} \frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{1-t^2} = \int_0^{tg\frac{\varphi}{2}} \frac{2dt}{1-t^2} \tag{2.16}$$

On se restreint à $\varphi \in [-\varphi_1, +\varphi_1]$ où $0 < \varphi_1 < \pi/2$. L'équation (2.16) s'écrit :

$$L = \int_0^{\varphi} \frac{dw}{cosw} = \int_0^{tg\frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{1+t} + \int_0^{tg\frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{1-t} = \left[Log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{tg\frac{\varphi}{2}} =$$
$$Log\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right| = Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \tag{2.17}$$

car $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) > 0$, donc :

$$\boxed{L = Logtg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \tag{2.18}$$

D'où :

$$tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = exp(L) = e^L$$

Soit l'expression de la latitude φ en fonction de L :

$$\varphi = 2Arctg(e^L) - \frac{\pi}{2}$$

2.3 La Deuxième Forme Fondamentale

On calcule maintenant le vecteur $d^2\boldsymbol{M}$ la différentielle seconde de $\boldsymbol{OM}$. On a alors :

$$d^2\boldsymbol{M} = d(d\boldsymbol{M}) = d(\boldsymbol{OM}'_{u_1}.du_1 + \boldsymbol{OM}'_{u_2}.du_2) = d\boldsymbol{OM}'_{u_1}.du_1 + d\boldsymbol{OM}'_{u_2}.du_2$$

1. **Gerhardus Mercator** (1512-1594) : cartographe, astronome et ingénieur belge. Son nom était donné à la représentation cylindrique conforme proposée par lui-même.

$$= (\boldsymbol{OM}''_{u_1u_1}.du_1 + \boldsymbol{OM}''_{u_1u_2}.du_2).du_1 + (\boldsymbol{OM}''_{u_1u_2}.du_1 + \boldsymbol{OM}''_{u_2u_2}.du_2)du_2$$

soit :

$$d^2\boldsymbol{M} = \boldsymbol{OM}''_{u_1u_1}.(du_1)^2 + 2.\boldsymbol{OM}''_{u_1u_2}.du_1.du_2 + \boldsymbol{OM}''_{u_2u_2}.(du_2)^2$$

car $\boldsymbol{OM}''_{u_1u_2} = \boldsymbol{OM}''_{u_2u_1}$. On peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$d^2\boldsymbol{M} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial {u_1}^2}{du_1}^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u_1 \partial u_2}du_1du_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial {u_2}^2}{du_2}^2 \tag{2.19}$$

Soit (γ) une courbe tracée sur la surface (σ), définie par $u_1 = u_1(s), u_2 = u_2(s)$ où s désigne l'abscisse curviligne. Soit $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal à la surface et $\boldsymbol{N}$ le vecteur unitaire porté par la normale principale à la courbe (γ). Si $\boldsymbol{T}$ est le vecteur porté par la tangente à (γ) au point $M(u_1, u_2)$, d'après les formules de Frenêt, on a :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{\boldsymbol{N}}{R}$$

où $\dfrac{1}{R}$ est *la courbure* de (γ) au point M. Or $d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{T}ds$, par suite :

$$d(d\boldsymbol{M}) = d^2\boldsymbol{M} = d(\boldsymbol{T}ds) = ds.d\boldsymbol{T} = ds.\left(\boldsymbol{N}\frac{ds}{R}\right) \tag{2.20}$$

On multiplie vectoriellement l'équation (2.19) par le vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$, on obtient :

$$\boldsymbol{n}.d^2\boldsymbol{M} = \boldsymbol{n}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial {u_1}^2}{du_1}^2 + 2\boldsymbol{n}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u_1 \partial u_2}du_1du_2 + \boldsymbol{n}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial {u_2}^2}{du_2}^2 \tag{2.21}$$

On pose :

$$\boxed{\begin{cases} L = \boldsymbol{n}.\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial {u_1}^2} \\[2ex] M = \boldsymbol{n}.\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u_1 \partial u_2} \\[2ex] N = \boldsymbol{n}.\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial {u_2}^2} \end{cases}} \tag{2.22}$$

(2.21) s'écrit alors :

$$\boldsymbol{n}.d^2\boldsymbol{M} = L{du_1}^2 + 2Mdu_1du_2 + N{du_2}^2 \tag{2.23}$$

On multiplie aussi l'équation (2.20) par le vecteur $\boldsymbol{n}$ d'où :

$$\boldsymbol{n}.d^2\boldsymbol{M} = \boldsymbol{n}.ds.\left(\boldsymbol{N}\frac{ds}{R}\right) = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{N}\frac{ds^2}{R}$$

Soit θ l'angle formé par $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{N}$, d'où :

$$\boldsymbol{n}.d^2\boldsymbol{M} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{N}\frac{ds^2}{R} = \frac{cos\theta}{R}ds^2 \tag{2.24}$$

Comme (2.23) est égal à (2.24), on obtient :

$$\frac{cos\theta}{R}ds^2 = Ldu_1{}^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2{}^2 = \Phi(u_1, u_2)$$

soit :

$$\frac{cos\theta}{R} = \frac{Ldu_1{}^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2{}^2}{ds^2}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{cos\theta}{R} = \frac{Ldu_1{}^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2{}^2}{Edu_1{}^2 + 2Fdu_1du_2 + Gdu_2{}^2} = \frac{II(u_1, u_2)}{I(u_1, u_2)}} \tag{2.25}$$

avec $I(u_1, u_2)$ la première forme fondamentale et l'expression :

$$\boxed{II(u_1, u_2) = Ldu_1{}^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2{}^2 = \Phi(u_1, u_2)} \tag{2.26}$$

est appelée ***la deuxième forme fondamentale***. D'où :

Théorème 2.1 *Le produit de la courbure en un point donné d'une courbe tracée sur une surface dans l'espace à trois dimensions par le cosinus de l'angle entre la normale à la surface et la normale principale à la courbe est égale au rapport de la deuxième et la première formes fondamentales du vecteur tangent à la courbe en ce point.*

Définition 2.2 *La quantité* $\frac{cos\theta}{R}$ *invariante pour toutes les courbes ayant même vecteur tangent* $\boldsymbol{T}$ *en un point donné est dite la courbure normale de la surface en ce point.*

Proposition 2.1 *Si la courbe est la section d'une surface par un plan normal, on a :*

$$\boxed{\theta = 0 \; ou \; \theta = \pi \Rightarrow cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \pm\frac{1}{R} = \frac{Ldu_1{}^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2{}^2}{Edu_1{}^2 + 2Fdu_1du_2 + Gdu_2{}^2}} \tag{2.27}$$

2.3.1 Trièdre de Darboux - Ribaucour

[2] Soit (γ) une courbe tracée sur une surface (σ) pour laquelle on sait définir en un point donné M le repère de Frénet $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$.

Définition 2.3 *On appelle repère de Darboux - Ribaucour $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{g})$ le repère orthonormé formé par les vecteurs $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{n}$ et le vecteur $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{n}$.*

La position relative des deux repères est donnée par l'angle :

$$\theta = \widehat{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{n}} \tag{2.28}$$

2.3.2 Section Normale

Définition 2.4 *Soit la courbe (γ) tracée sur (σ) et définie comme intersection de (σ) et du plan passant par le point M et de directions $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{T}$, alors (γ) est appelée section normale de (σ) en M dans la direction $\boldsymbol{T}$.*

La normale principale de (γ) est la droite portée par le vecteur $\boldsymbol{n}$. Si R_n est le rayon de courbure de (γ) au point M, on a par définition :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{R_n}$$

par suite :

$$\boldsymbol{n}.\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{1}{R_n}$$

or (2.20) donne :

$$d\boldsymbol{T} = \frac{d^2\boldsymbol{M}}{ds}$$

d'où :

$$\boldsymbol{n}.\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \boldsymbol{n}.\frac{d^2\boldsymbol{M}}{ds^2} = \frac{1}{R_n} = \frac{II(u_1, v_2)}{I(u_1, u_2)}$$

soit :

$$\frac{1}{R_n} = \frac{L du_1{}^2 + 2M du_1 du_2 + N du_2{}^2}{E du_1{}^2 + 2F du_1 du_2 + G du_1{}^2} = \frac{II(u_1, u_2)}{I(u_1, u_2)} \tag{2.29}$$

2. **Jean Gaston Darboux** (1842-1917) : mathématicien français.
Albert Ribaucour (1845-1893) : ingénieur et mathématicien français.

En comparant l'équation ci-dessus avec l'équation (2.25), on obtient :

$$\boxed{R = R_n.cos\theta} \tag{2.30}$$

D'où le deuxième théorème de Meusnier [3] :

Théorème 2.2 *Le rayon de courbure R d'une courbe (γ) tracée sur une surface (σ) et ayant même tangente de direction $\boldsymbol{T}$ est égal au produit de R_n rayon de courbure de la section normale par le cosinus de l'angle θ entre les vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{N}$.*

2.3.3 Indicatrice de Dupin

[4] On considère le repère orthonormé $\mathscr{R}$ au point M défini par les vecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_2}$$

Définition 2.5 *L'indicatrice de Dupin est l'ensemble des points P du plan tangent en M vérifiant :*

$$\boldsymbol{MP} = \sqrt{R_n}\boldsymbol{T} \tag{2.31}$$

quand $\boldsymbol{T}$ varie autour de M.

Soit un point $P(\gamma,\delta)$ dans $\mathscr{R}$, on a alors :

$$\boldsymbol{MP} = \frac{\gamma}{\sqrt{E}}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_1} + \frac{\delta}{\sqrt{G}}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_2}$$

$$\boldsymbol{MP} = \sqrt{R_n}\boldsymbol{T} = \sqrt{R_n}\left(\frac{du_1}{ds}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_1} + \frac{du_2}{ds}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_2}\right)$$

d'où :

$$\frac{du_1}{ds} = \frac{\gamma}{\sqrt{ER_n}} \quad \text{et} \quad \frac{du_2}{ds} = \frac{\delta}{\sqrt{GR_n}}$$

En utilisant la deuxième forme quadratique, on a :

$$\frac{1}{R_n} = L\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du_1}{ds}\frac{du_2}{ds} + N\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2 \Rightarrow$$

3. **Jean Baptiste Meusnier** (1754-1793) : militaire, géomètre et mathématicien français.
4. **Charles Dupin** (1784-1873) : ingénieur et mathématicien français.

$$\frac{1}{R_n} = L\frac{\gamma^2}{ER_n} + 2M\frac{\gamma\delta}{R_n\sqrt{EG}} + N\frac{\delta^2}{GR_n}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{L}{E}\gamma^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}\gamma\delta + \frac{N}{G}\delta^2 = 1} \tag{2.32}$$

C'est l'équation d'une conique (ellipse, parabole, hyperbole) suivant le signe du discriminant $\frac{M^2 - LN}{EG}$ ou $M^2 - LN$ respectivement (négatif, nul ou positif).

2.3.4 Les Directions principales

On suppose que $M^2 - LN < 0$.

Définition 2.6 *On appelle directions principales les directions des axes de symétrie de l'indicatrice de Dupin.*

Définition 2.7 *On appelle les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 les rayons de courbure normale dans les deux directions principales.*

Les directions principales sont orthogonales.

2.3.5 Formule d'Euler

[5] En supposant que l'indicatrice de Dupin est une ellipse d'équation :

$$\frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\delta^2}{b^2} = 1 \tag{2.33}$$

où a, b sont les 2 rayons de courbure normale principaux, on peut écrire :

$$\boldsymbol{MP} = \sqrt{R_n}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{i}\sqrt{R_n}cos\psi + \boldsymbol{j}\sqrt{R_n}sin\psi$$

avec $\psi = \widehat{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{i}}$, or : $\boldsymbol{MP} = \gamma\boldsymbol{i} + \delta\boldsymbol{j}$, avec l'équation (2.33), on obtient alors la formule d'Euler :

5. **Leonhard Euler** (1707-1783) : mathématicien et physicien suisse.

$$\frac{R_n cos^2\psi}{a^2} + \frac{R_n sin^2\psi}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{R_n} = \frac{cos^2\psi}{a^2} + \frac{sin^2\psi}{b^2}$$

D'où :

Théorème 2.3 *(**Formule d'Euler**) :La courbure de la section normale $\frac{1}{R_n}$ en un point donné est égale à :*

$$\boxed{\frac{1}{R_n} = \frac{cos^2\psi}{a^2} + \frac{sin^2\psi}{b^2}} \tag{2.34}$$

où $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ sont les courbures principales au point considéré et ψ l'angle sur la surface entre le vecteur tangent à la section normale et la direction principale correspondante.

Définition 2.8 *Le produit des courbures principales est la courbure de Gauss*[6] *ou courbure totale de la surface et la courbure moyenne* <u>*la somme*</u> *des courbures principales.*

Pour la première forme fondamentale ds^2, on a déjà noté (2.7) :

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

et concernant la deuxième forme fondamentale $\Phi(u_1, u_2)$ donnée par l'équation (2.26), elle peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi = \Phi(u_1, u_2) = (du_1, du_2).\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

où par abus de notation, on a noté par Φ la matrice ci-dessus.

Alors, on annonce les deux théorèmes suivants sans les démontrer (*B. Doubrovine - S. Novikov - A. Fomenko,* 1982) :

Théorème 2.4 *La courbure totale K en un point d'une surface est égale au rapport des déterminants de ses deuxième et première formes fondamentales :*

$$\boxed{K = \frac{Dét\Phi}{Détg} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}} \tag{2.36}$$

6. **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) : mathématicien et géomètre prussien, fondateur de la théorie des surfaces.

et :

Théorème 2.5 *La courbure moyenne H en un point d'une surface est égale à la trace de la matrice $g^{-1}.\Phi$:*

$$\boxed{H = Tr(g^{-1}.\Phi)} \tag{2.37}$$

2.4 PROBLÈMES ET EXERCICES

Problème 2.1 *Soit l'ellipse (E) définie par les équations paramétriques :*

$$M \begin{cases} x = acosu \\ y = bsinu \\ avec \quad a > b > 0 \end{cases}$$

On pose :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

1. Calculer la position sur l'axe des abscisses des deux points F et F' appelés foyers tels que $MF + MF' = 2a$.

2. Montrer que le produit des distances des foyers à la tangente à l'ellipse en M est indépendant de u.

3. Donner l'expression de ds.

*4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires **T** et **N** et en déduire le rayon de coubure de l'ellipse.*

5. Montrer qu'il passe par M deux cercles tangents en ce point à la courbe et centrés sur Ox, Oy respectivement (appelés cercles surosculateurs).

6. Que deviennent ces cercles lorsque M est un sommet de l'ellipse.

Problème 2.2 *On définit une surface (S) par les équations :*

$$M(u,v) \begin{cases} X = u^2 + v \\ Y = u + v^2 \\ Z = uv \end{cases}$$

1. Calculer les composantes des vecteurs $\mathbf{OM}'_u$ et $\mathbf{OM}'_v$.

2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (S).

3. En déduire l'expression de ds^2.

4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

5. Calculer un vecteur normal de (S).

Problème 2.3 *On définit une surface (Σ) par les équations :*

$$M(u,v)\begin{cases} X = a.cosu.cosv \\ Y = a.cosu.sinv \\ Z = b.sinu \end{cases}$$

avec a, b deux constantes positives.

1. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.

2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ).

3. En déduire l'expression de ds^2.

4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

5. Calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de (Σ).

6. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

7. Calculer les coefficients L, M et N.

Problème 2.4 *On considère la surface (Γ) définie par les équations :*

$$M(u,v)\begin{cases} X = sinu.cosv \\ Y = sinu.sinv \\ Z = cosu + Logtg\dfrac{u}{2} + \psi(v) \end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe C^1 de v.

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ).

2. Montrer que les courbes coordonnées $v = constante$ constituent une famille de courbes planes de (Γ) et que leur plan coupe (Γ) sous un angle constant.

3. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.

4. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ).

5. En déduire l'expression de ds^2.

6. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$, calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de Γ.

8. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

9. Calculer les coefficients L, M et N.

10. En déduire l'expression des courbures moyenne et totale.

Problème 2.5 *Soit la surface (Γ) définie paramétriquement par :*

$$M(u,v)\begin{cases} X = thu.cosv \\ Y = thu.sinv \\ Z = \dfrac{1}{chu} + Logth\dfrac{u}{2} \end{cases}$$

avec chu et thu sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par :

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ).

2. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.

3. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ).

4. En déduire l'expression de ds^2.

5. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

6. Calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de (Γ).

7. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

8. Calculer les coefficients L, M et N.

9. Déterminer les coubures moyenne et totale.

Problème 2.6 *Montrer que les courbures totale K et moyenne H en un point $M(x,y,z)$ d'une surface paramétrée par $z = f(x,y)$, où f est une fonction lisse, sont données par :*

$$K = \frac{f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy}}{(1 + f'^2_x + f'^2_y)^2}$$

et :

$$H = \frac{(1 + f'^2_x)f''_{xx} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + (1 + f'^2_x)f''_{yy}}{(1 + f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{3}{2}}}$$

Problème 2.7 *Soit (Σ) une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $OM(u,v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit : $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$*

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) - $\dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0,$

ii) - le vecteur $\dfrac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ *est parallèle au vecteur normal N à la surface,*

iii) - les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées (u,v) ont même longueurs.

2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de (Σ) forment un réseau de Tchebychev.[7] *Montrer que dans ce cas, on peut paramétrer la surface par $(\tilde{u},\tilde{v})$ telle que ds^2 s'écrit :*

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

où θ est une fonction de $(\tilde{u},\tilde{v})$. Montrer que θ est l'angle entre les courbes coordonnées $\tilde{u},\tilde{v}$.

3. Montrer que l'expression de la courbure totale est donnée par :

7. **Pafnouti Tchebychev** (1821 - 1894) : mathématicien russe.

$$K = \frac{1}{sin\theta}.\frac{\partial^2\theta}{\partial\tilde{u}\partial\tilde{v}}$$

4. On pose :

$$\hat{u} = \tilde{u} + \tilde{v}$$
$$\hat{v} = \tilde{u} - \tilde{v}$$

Montrer que ds^2 s'écrit avec les nouvelles variables $(\hat{u}, \hat{v})$:

$$ds^2 = cos^2\omega d\hat{u}^2 + sin^2\omega d\hat{v}^2$$

avec $\omega = \theta/2$. (A.N. Pressley, 2010)

Problème 2.8 *Soit $(\mathscr{F})$ une surface définie dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par la fonction vectorielle $\boldsymbol{OM} = F(u,v)$ telle que :*

$$F(u,v) \left| \begin{array}{l} x = F_1(u,v) \\ y = F_2(u,v) \\ z = F_3(u,v) \end{array} \right.$$

F est dite une paramétrisation conforme de $(\mathscr{F})$ si on a les deux conditions suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial F}{\partial v} = e^{\Phi(u,v)} \quad et \quad \frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

1. Ecrire la première forme fondamentale de $(\mathscr{F})$.

2. Soit n Le vecteur normal unitaire.

$$n = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial F}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial F}{\partial v} \right\|}$$

Quand le point M varie sur la surface $(\mathscr{F})$, le repère $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$ est un repère mobile. La deuxième forme fondamentale de $(\mathscr{F})$ est définie par :

$$n.d^2F = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

Si cette deuxième forme fondamentale s'écrit sous la forme :

$$-n.d^2F = e^{\Phi(u,v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right)$$

alors, la paramétrisation de $(\mathscr{F})$ est dite isotherme. Dans ce cas, ρ_1, ρ_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface $(\mathscr{F})$. Une surface qui admet des coordonnées isothermes est dite isotherme.

3. On considère que $(\mathscr{F})$ *est la sphère définie par :* $M = \left| \begin{array}{l} x = R\cos\varphi\cos\lambda \\ y = R\cos\varphi\sin\lambda \quad R > 0 \\ z = R\sin\varphi \end{array} \right.$

Soit $\mathscr{L}_M$ *la variable de Mercator. Montrer que la sphère paramétrée par* $(\mathscr{L}_M, \lambda)$ *est une surface isotherme.*

4. On considère $\mathscr{B}$ *la base du repère mobile* $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$. *Exprimer les dérivées partielles* $\frac{\partial}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial}{\partial u}$ *des vecteurs de* $\mathscr{B}$ *dans* $\mathscr{B}$*, en tenant compte que la surface est isotherme c'est-à-dire qu'on a l'équation :*

$$-n.d^2F = e^{\Phi(u,v)}\left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2}\right) = -(L.du^2 + 2Mdu.dv + N.dv^2)$$

5. Montrer qu'on peut écrire les résultats de 4. sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_u}{2} & \frac{-\Phi'_v}{2} & -\frac{e^{\Phi}}{\rho_1} \\ \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ -\frac{\Phi'_u}{2} & \frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^{\Phi}}{\rho_2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix}$$

Les deux dernières expressions ci-dessus sont appellées les équations de Gauss-Weingarten[8] *de la surface* $(\mathscr{F})$.

Exercice 2.1 *Soit* (Γ) *la surface paramétrée par* (u, v) *dans* $\mathbb{R}^2$ *telle que :*

$$M(u,v)\begin{cases} X = u(1-u^2)\cos v \\ Y = u(1-u^2)\sin v \\ Z = 1-u^2 \end{cases}$$

1. Calculer l'expression de ds^2.

2. Montrer que l'équation cartésienne de (Γ) *est :*

8. **Julius Weingarten** (1836 - 1910) : mathématicien allemand.

$$x^2+y^2=(1-z)z^2$$

Exercice 2.2 *Soit la surface d'Enneper :*

$$M(u,v)\begin{cases} X=u-\dfrac{u^3}{3}+uv^2 \\ Y=v-\dfrac{v^3}{3}+vu^2 \\ Z=u^2-v^2 \end{cases}$$

1. Montrer que :

$$ds^2=(1+u^2+v^2)^2.(du^2+dv^2)$$

2. Calculer un vecteur unitaire normal à la surface.

3. Montrer que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point.

Exercice 2.3 *On suppose que la métrique d'une surface donnée est :*

$$ds^2=A^2du^2+B^2dv^2, \quad A=A(u,v), \quad B=B(u,v)$$

1. Montrer alors que l'expression de la courbure totale est :

$$K=-\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A'_v}{B}\right)'_v+\left(\frac{B'_u}{A}\right)'_u\right]$$

$'$ *désigne la dérivation partielle.*

Chapitre 3

Les Lignes Géodésiques

Sommaire

" A côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où l'on rencontrerait cette difficulté principale, mais où l'on serait affranchis de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des **lignes géodésiques** d'une surface; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique. "

(**H. Poincaré** [1], 1905)

Après avoir défini les lignes géodésiques d'une surface, on établit les équations des géodésiques pour une surface donnée. Comme application, on détaille celles de l'ellipsoïde de révolution. On fera l'intégration de ces équations.

3.1 Introduction et Notations

Soit (S) une surface définie par les paramètres (u,v) avec $(u,v)\in\mathscr{D}$ un domaine $\subset\mathbb{R}^2$. Un point $M\in(S)$ vérifie :

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OM}(u,v)\left|\begin{array}{l}x(u,v)\\y(u,v)\\z(u,v)\end{array}\right. \tag{3.1}$$

On introduit les notations usuelles :

$$\begin{aligned}E&=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial u}=\left\|\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial u}\right\|^2\\F&=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial v}\\G&=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial v}=\left\|\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial v}\right\|^2\end{aligned}\tag{3.2}$$

Des équations (3.2), on obtient les équations :

1. **Henri Poincaré** (1854-1912) : mathématicien français, parmi les plus grands du XIXème siècle.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial u} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2} \\
\frac{\partial E}{\partial v} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial G}{\partial u} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial G}{\partial v} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Soit $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normal en $M(u,v)$ à la surface (S), $\boldsymbol{n}$ est donné par :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}}{H} \tag{3.4}$$

avec :

$$H = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \right\| \tag{3.5}$$

D'où :

$$ds^2 = E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2 \tag{3.6}$$

L'équation (3.6) représente le carré infinitésimal de la longueur de l'arc.

Soit une courbe (Γ) tracée sur (S) et $\boldsymbol{N}$ est le vecteur unitaire de la normale principale le long de (Γ).

Définition 3.1 *Une courbe* (Γ) *est dite ligne géodésique de la surface* (S) *si et seulement si les vecteurs* **n** *et* **N** *sont colinéaires.*

On démontre par le calcul des variations (*P. Petersen,* 1998) que la ligne géodésique entre deux points d'une surface (S) lorsqu'elle existe est la courbe de longueur minimale joignant les deux points.

3.2 Les Equations Différentielles des Lignes Géodésiques

On calcule l'expression de $\boldsymbol{N}$, on obtient :

$$\boldsymbol{N} = R\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$$

or :

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{M}}{ds} = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

d'où :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

La condition $\boldsymbol{n} \,//\, \boldsymbol{N}$ peut être écrite :

$$\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{n} = 0$$

soit :

$$R\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \wedge \left(\frac{\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}}{H}\right) = 0 \tag{3.7}$$

Utilisant la formule du produit vectoriel :

$$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{3.8}$$

on obtient :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} - \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = 0$$

Or $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}$ forment une base du plan tangent en M, d'où les deux conditions :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} = 0 \tag{3.9}$$

Ce qui donne deux équations différentielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2u}{ds^2} + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + G\frac{d^2v}{ds^2} = 0 \tag{3.10}$$

et :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2v}{ds^2} + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + E\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \tag{3.11}$$

On pose :

$$\begin{aligned} E'_u = \frac{\partial E}{\partial u}; \quad E'_v = \frac{\partial E}{\partial v}; \quad F'_u = \frac{\partial F}{\partial u} \\ F'_v = \frac{\partial F}{\partial v}; \quad G'_u = \frac{\partial G}{\partial u}; \quad G'_v = \frac{\partial G}{\partial v} \end{aligned} \tag{3.12}$$

et on utilise les équations (3.3), (3.10) et 3.11), ces 2 dernières équations peuvent être écrites :

$$\boxed{(F'_u - \frac{E'_v}{2})\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2u}{ds^2} + G'_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{G'_v}{2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + G\frac{d^2v}{ds^2} = 0} \tag{3.13}$$

$$\boxed{(F'_v - \frac{G'_u}{2})\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2v}{ds^2} + E'_v\frac{dv}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{E'_u}{2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + E\frac{d^2u}{ds^2} = 0} \tag{3.14}$$

3.3 DÉTERMINATION DES LIGNES GÉODÉSIQUES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

On considère maintenant comme surface l'ellipsoïde de révolution qu'on paramètre comme suit :

$$\begin{aligned} X &= N.cos\varphi cos\lambda \\ Y &= Ncos\varphi sin\lambda \\ Z &= N(1-e^2)sin\varphi \end{aligned} \tag{3.15}$$

où :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} = aW^{-1/2}$$

est le rayon de courbure de la grande normale avec :

$$W = 1 - e^2sin^2\varphi$$

On note :

$$r = Ncos\varphi$$

le rayon du parallèle de latitude φ et ρ le rayon de courbure de la méridienne donné par :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} = a(1-e^2)W^{-3/2}$$

Alors la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 \tag{3.16}$$

En prenant comme variables $u = \varphi$ et $v = \lambda$, on obtient :

$$E = E(\varphi) = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \tag{3.17}$$

$$E'_\varphi = 2\rho\rho', E'_\lambda = 0, F'_\varphi = F'_\lambda = 0, G'_\varphi = 2rr' = -2r\rho sin\varphi, G'_\lambda = 0 \tag{3.18}$$

Alors les équations (3.13) et (3.14) deviennent :

$$-2r\rho sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + r^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0 \tag{3.19}$$

$$r\rho sin\varphi \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \rho\rho'\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \rho^2\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0 \tag{3.20}$$

La première équation s'écrit :

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\lambda}{ds}\right) = 0 \tag{3.21}$$

dont l'intégration donne :

$$r^2\frac{d\lambda}{ds} = C = constante \tag{3.22}$$

On retrouve alors la relation de Clairaut (*J. Lemenestrel*, 1980) : [2]

$$\boxed{r.sinAz = constante = C = asinAze} \tag{3.23}$$

où Az est l'azimut de la géodésique au point M et Aze son azimut initial au point M_0 à l'équateur.

L'équation (3.20) s'écrit :

$$\rho\left(rsin\varphi\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \rho'\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \rho\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right) = 0 \tag{3.24}$$

Ce qui donne :

2. **Alexis Claude de Clairaut** (1713-1765) : mathématicien, astronome et géophysicien français.

- $\rho = 0$ le point M est sur l'équateur : $\varphi = 0$ et $r = a$ le demi-grand axe de l'ellipsoïde et l'équation (3.19) devient :

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0 \tag{3.25}$$

dont l'intégration donne :

$$\lambda - \lambda_0 = l(s - s_0) \tag{3.26}$$

le point M décrit l'équateur et la géodésique est le grand cercle de rayon a.

- $\rho \neq 0$, le point M n'est pas sur l'équateur, l'équation (3.20) s'écrit comme suit :

$$\rho\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \rho'\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + rsin\varphi\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 0 \tag{3.27}$$

Pour intégrer (3.27), on utilise une nouvelle fonction, soit :

$$Z = \frac{d\lambda}{d\varphi} \tag{3.28}$$

De (3.22), on obtient :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{r^2}\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{C}{r^2 Z}$$

soit :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{C}{r^2 Z} \tag{3.29}$$

On exprime maintenant la dérivée seconde $d^2\varphi/ds^2$:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \tag{3.30}$$

L'équation (3.27) s'écrit en utilisant (3.22) et (3.30) :

$$\frac{\rho}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right] + \rho'\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + sin\varphi\left(\frac{C^2}{r^3}\right) = 0 \tag{3.31}$$

On pose :

$$U = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \tag{3.32}$$

L'équation (3.31) devient :

$$\frac{\rho}{2}\frac{dU}{d\varphi} + \rho' U = -\frac{C^2 sin\varphi}{r^3} \tag{3.33}$$

L'équation (3.33) est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Sa résolution sans second membre donne :

$$U = \frac{k}{\rho^2} \tag{3.34}$$

En utilisant le second membre de (3.33), on considère que k est une fonction de φ, on a alors :

$$U = \frac{1}{\rho^2}\left(k_0 - \frac{C^2}{r^2}\right) = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} \tag{3.35}$$

avec k_0 la constante d'intégration. U étant une fonction positive, on doit avoir :

$$k_0 r^2 - C^2 > 0 \tag{3.36}$$

En revenant à l'équation (3.32), on obtient :

$$U = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} \tag{3.37}$$

On utilise les équations (3.29) et (3.37), on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} = \left(\frac{C}{r^2 Z}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4 Z^2} = \frac{C^2}{r^4}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \tag{3.38}$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2}\frac{C^2}{k_0 r^2 - C^2} \tag{3.39}$$

Pour déterminer la valeur de k_0, on exprime $\dfrac{d\lambda}{ds}$ en utilisant les équations (3.22) et (3.39). On écrit ds^2 :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = \frac{r^2(k_0 r^2 - C^2)}{C^2} d\lambda^2 + r^2 d\lambda^2$$

soit :

$$ds^2 = \frac{r^4 k_0}{C^2} d\lambda^2 \Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{C^2}{k_0 r^4} \tag{3.40}$$

Or d'après (3.22) :

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}$$

d'où alors $k_0 = 1$ et par suite :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2}\frac{C^2}{r^2 - C^2} \tag{3.41}$$

Pour pouvoir intégrer l'équation précédente, on exprime $r^2 - C^2$, d'où :

$$r^2 - C^2 = N^2 cos^2\varphi - C^2 = \frac{a^2 cos^2\varphi}{1 - e^2 sin^2\varphi} - C^2 =$$
$$\frac{(a^2 - C^2)\left(1 - \frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2} sin^2\varphi\right)}{W} \tag{3.42}$$

On pose :

$$k^2 = \frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2} \tag{3.43}$$

D'où :

$$r^2 - C^2 = (a^2 - C^2)(1 - k^2 sin^2\varphi)/W \tag{3.44}$$

On remarque que le coefficient k est supérieur à 1, donc la latitude géodésique φ reste inférieure à la latitude φ_1 définie par $sin\varphi_1 = 1/k$.

Alors l'équation (3.41) s'écrit :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(1 - e^2)^2 C^2}{(a^2 - C^2)cos^2\varphi(1 - e^2 sin^2\varphi)(1 - k^2 sin^2\varphi)} \tag{3.45}$$

D'où en remplaçant C par $a.sin(Aze)$ et comme $tg(Aze)$ est de même signe que $(d\lambda/d\varphi)$, on peut écrire alors :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{(1 - e^2)tg(Aze)}{cos\varphi\sqrt{(1 - e^2 sin^2\varphi)(1 - k^2 sin^2\varphi)}} \tag{3.46}$$

Soit en intégrant entre 0 et φ :

$$\lambda - \lambda_e = \int_0^{\varphi} \frac{(1 - e^2)tg(Aze)}{cost\sqrt{(1 - e^2 sin^2 t)(1 - k^2 sin^2 t)}} dt =$$
$$(1 - e^2)tg(Aze)\int_0^{\varphi} \frac{dt}{cost\sqrt{(1 - e^2 sin^2 t)(1 - k^2 sin^2 t)}}$$

ou encore :

$$\lambda - \lambda_e = (1 - e^2)tg(Aze)\int_0^{\varphi} \frac{dt}{cost\sqrt{(1 - e^2 sin^2 t)(1 - k^2 sin^2 t)}} \tag{3.47}$$

En prenant comme variable $w = sint$, l'intégrale (3.47) devient :

$$\boxed{\lambda - \lambda_e = (1 - e^2)tg(Aze)\int_0^{sin\varphi} \frac{dw}{(1 - w^2)\sqrt{(1 - e^2 w^2)(1 - k^2 w^2)}}} \tag{3.48}$$

On cherche maintenant à exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de φ. Or l'expression de ds^2 est égale à :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = \rho^2 d\varphi^2 + \frac{C^2}{r^2} ds^2$$

soit :

$$ds^2 = \frac{r^2\rho^2 d\varphi^2}{r^2 - C^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2 cos^2\varphi d\varphi^2}{cos^2(Aze)(1-e^2 sin^2\varphi)^3(1-k^2 sin^2\varphi)} \tag{3.49}$$

D'où :

$$ds = \frac{a(1-e^2)cos\varphi d\varphi}{cos(Aze)(1-e^2 sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)(1-e^2 sin^2\varphi)}} \tag{3.50}$$

En prenant $t = sin\varphi$ comme nouvelle variable, l'intégrale de (3.50) donne en prenant comme origine de l'abscisse curviligne s un point de l'équateur :

$$\boxed{s = \frac{a(1-e^2)}{cosAze}\int_0^{sin\varphi} \frac{dt}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}}} \tag{3.51}$$

Les intégrales (3.48) et (3.51) sont dites des intégrales elliptiques de troisième espèce.

3.4 APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DIRECT ET INVERSE DU CALCUL DES LIGNES GÉODÉSIQUES

Dans cette deuxième partie, on va traiter numériquement l'application des formules précédentes dans la résolution des problèmes dits respectivement direct et inverse du calcul des lignes géodésiques.

3.4.1 Le Problème Direct

On donne :

- (φ_1, λ_1) d'un point M_1 ;

- la longueur s de la géodésique de M_1 à M_2 ;

- l'azimut géodésique Az_1 de la ligne géodésique de M_1 à M_2.

On demande de calculer :

- les coordonnées géodésiques (φ_2, λ_2) de M_2 ;

- l'azimut géodésique Az_2 en M_2.

Solution : 1. Calcul de la constante C, $C = N(\varphi_1).cos\varphi_1.sinAz_1 = a.sin(Aze)$ d'où Aze et k.

2. Détermination de φ_2 à partir de :

$$\Delta s = \frac{a(1-e^2)}{cosAze} \frac{cos\varphi_1 \Delta\varphi}{(1-e^2 sin^2\varphi_1)\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi_1)(1-e^2 sin^2\varphi_1)}}$$

avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

3. Ayant φ_2, on calcule λ_2 par :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (1-e^2)tg(Aze)\int_{sin\varphi_1}^{sin\varphi_2} \frac{dw}{(1-w^2)\sqrt{(1-e^2w^2)(1-k^2w^2)}}$$

4. Le calcul de Az_2 se fait par $sin(Az_2) = C/r(\varphi_2)$.

3.4.2 Le Problème Inverse

On donne les coordonnées (φ_1, λ_1) et (φ_2, λ_2) de deux points M_1 et M_2. On demande de calculer :

- la longueur s de la ligne géodésique de M_1 à M_2 ;

- l'azimut Az_1 en M_1 ;

- l'azimut géodésique Az_2 en M_2.

Solution :

1. On doit calculer la constante C. A partir de l'équation (3.41), on peut écrire que :

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2(\varphi_1)}{r^2(\varphi_1)} \frac{C^2}{(r^2(\varphi_1) - C^2)} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}$$

ce qui donne C :

$$C = \frac{\frac{r^2}{\rho}\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}}{\sqrt{1+\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\right)^2}}$$

En considérant l'azimut compris entre 0 et π, donc Az est positif, C est positif. En le calculant pour φ_1 et φ_2, on obtient C par la valeur moyenne :

$$C = \frac{C_1(\varphi_1)+C_2(\varphi_2)}{2}$$

2. Par suite, on obtient la valeur de k par (3.43) :

$$k = \frac{a^2 - C^2e^2}{a^2 - C^2}$$

3. Ayant C, on a par (3.23), Az_1 et Az_2 :

$$sinAz_1 = \frac{C}{r(\varphi_1)} \quad \text{et} \quad sinAz_2 = \frac{C}{r(\varphi_2)}$$

4. Par suite, on a aussi Az_e :

$$sinAz_e = \frac{C}{a}$$

5. Enfin, l'équation (3.51) détermine s.

On itère le processus.

3.4.2.1 Calcul de l'Expression (3.51)

Dans ce paragraphe, on calcule en détail :

$$s = \frac{a(1-e^2)}{cosAz_e}\int_0^{sin\varphi}\frac{dt}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}}$$

Pour $|x| < 1$, on a les développements limités suivants :

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + ... \tag{3.52}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + ... \tag{3.53}$$

En prenant $x = -e^2t^2$ et $x = k^2t^2$, on obtient :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2t^2 + \frac{15}{8}e^4t^4 + \frac{35}{16}e^6t^6 + \frac{315}{128}e^8t^8 + ...$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1+\frac{k^2t^2}{2}+\frac{3k^4t^4}{8}+\frac{5k^6t^6}{16}+\frac{35k^8t^8}{128}+... \tag{3.54}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}} &= 1+\frac{k^2+3e^2}{2}t^2+\frac{3k^4+6e^2k^2+15e^4}{8}t^4+\\ &\frac{5k^6+9k^4e^2+15k^2e^4+35e^6}{16}t^6+\\ &\frac{35k^8+60k^6e^2+90k^4e^4+140k^2e^6+315e^8}{128}t^8+...\end{aligned} \tag{3.55}$$

ou encore à l'ordre 4 :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}} = 1+mt^2+nt^4+... \tag{3.56}$$

avec :

$$m=\frac{k^2+3e^2}{2}; \quad n=\frac{3k^4+6e^2k^2+15e^4}{8}$$

3.4.3 Calcul de l'expression (3.48)

On a :

$$\lambda-\lambda_e = (1-e^2)tg(Aze)\int_0^{sin\varphi}\frac{dw}{(1-w^2)\sqrt{(1-e^2w^2)(1-k^2w^2)}}$$

soit dans notre cas :

$$\lambda_2-\lambda_1 = (1-e^2)tg(Aze)\int_{sin\varphi_1}^{sin\varphi_2}\frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Or d'après (3.53) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2t^2}} = 1+\frac{1}{2}e^2t^2+\frac{3}{8}e^4t^4+\frac{5}{16}e^6t^6+\frac{35}{128}e^8t^8+...$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1+\frac{k^2t^2}{2}+\frac{3k^4t^4}{8}+\frac{5k^6t^6}{16}+\frac{35k^8t^8}{128}+...$$

et pour $(1-t^2)^{-1}$, on obtient :

$$\frac{1}{1-t^2} = 1+t^2+t^4+t^6+t^8+...$$

D'où :

$$\frac{1}{(1-t^2)\sqrt{(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}} = 1+\frac{2+k^2+e^2}{2}t^2+$$
$$\frac{8+4k^2+4e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4}{8}t^4+$$
$$\frac{16+8k^2+8e^2+6k^4+4e^2k^2+6e^4+5k^6+3k^4e^2+3k^2e^4+5e^6}{16}t^6+...$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$\frac{1}{(1-t^2)\sqrt{(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}} = 1+\alpha t^2+\beta t^4+\gamma t^6+... \tag{3.57}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2+k^2+e^2}{2} \\ \beta = \dfrac{8+4k^2+4e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4}{8} \\ \gamma = \dfrac{16+8k^2+8e^2+6k^4+4e^2k^2+6e^4+5k^6+3k^4e^2+3k^2e^4+5e^6}{16} \end{cases} \tag{3.58}$$

3.4.4 *Traitement d'un exemple*

3.4.4.1 Le Problème direct

Soit le point M_1 avec :

- $\varphi_1 = 10.4549\,8299\,gr$;

- $\lambda_1 = 9.5954\,2429\,gr$;

- $Az_1 = 249.3101\,68\,gr$;

- $s = 16255.206\,m$.

Solution :

- $C = N(\varphi_1).cos\varphi_1.sinAz_1 = -3'594\,478.080\,m$;

- $Az_e = 238.1131\,471\,gr$;

- $k = \sqrt{\dfrac{a^2-C^2e^2}{a^2-C^2}} = 1.209227584$;

- pour calculer φ_2, on pose $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, et $s = \Delta s$, on a alors l'équation en utilisant (3.56) :

$$\frac{\Delta s.cosAz_e}{a(1-e^2)} = \int_{sin\varphi_1}^{sin\varphi_2} \frac{dt}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}} = \int_{sin\varphi_1}^{sin\varphi_2} (1+mt+nt^2)dt$$

A l'ordre 1, on a : $\dfrac{\Delta s.cosAz_e}{a(1-e^2)} = sin\varphi_2 - sin\varphi_1$.

3.5 PROBLÈMES ET EXERCICES

Problème 3.1 *Soit $\mathscr{E}(a,e)$ un ellipsoïde de révolution où a,e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. (g) une géodésique partant d'un point $E(\varphi = 0, \lambda_E)$ sur l'équateur et d'azimut Az_E. A cette géodésique, on lui fait correspondre une géodésique (g') sur la sphère $\mathscr{S}^2$ dite de Jacobi*[3] *de rayon a, ayant le même azimut Az_E au point $E'(\varphi' = 0, \lambda_E)$. De même au point $M(\varphi,\lambda)$ de la géodésique (g) de l'ellipsoïde, on lui fait correspondre le point $M'(\varphi',\lambda')$ de (g') de $\mathscr{S}^2$ tel qu'il y a conservation des azimuts.*

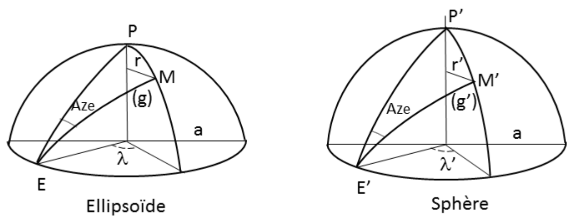

FIG. 3.1 La Correspondance de la sphère de Jacobi

1. Ecrire l'équation de Clairaut pour la géodésique (g).

2. On note r' le rayon du parallèle passant par M' de la géodésique (g'). Ecrire de même l'équation de Clairaut pour la géodésique (g').

3. Montrer que φ et φ' vérifient :

$$Ncos\varphi = acos\varphi'$$

et en déduire que φ' est la latitude paramétrique de M.

3. **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804-1851) : mathématicien allemand.

4. Ecrire les expressions de $tgAz_g$ et $tgAz_{g'}$ respectivement sur (g) et (g').

5. Montrer que :

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{a d\varphi'} d\lambda'$$

En déduire que :

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 cos^2\varphi'} d\lambda'$$

6. En intégrant l'équation précédente, montrer qu'on obtient :

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} \sqrt{1 - e^2 cos^2\varphi'} d\lambda'$$

avec $\lambda > \lambda_E$ et λ' est comptée à partir de λ_E.

7. En écrivant $\sqrt{1 - e^2 cos^2\varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2} cos^2\varphi' + o(e^4)$ où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en e dont on néglige, écrire l'intégrale précédente entre λ_E et $\lambda_E + \lambda$.

8. Comme (g') est une géodésique de la sphère, on démontre que :

$$cos^2\varphi' d\lambda' = \frac{sinAz_E}{a} ds'$$

où ds' est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point E', montrer que l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$\lambda = \lambda_E + \lambda' - \frac{e^2 sinAz_e}{2a} \int_0^{s'} ds'$$

9. On suppose que la géodésique (g') coupe une première fois le plan de l'équateur en un point F', montrer qu'on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda'_F &= \pi \\ s' &= \pi a \\ \lambda_F = \lambda_E + \pi &- \frac{e^2 \pi sinAz_E}{2} \end{aligned}$$

10. La géodésique (g') partant de F' a pour azimut $\pi - Az_E$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point E', mais la géodésique (g) sur l'ellipsoïde coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à H dont la longitude est λ_H. Montrer que λ_H est donnée par :

$$\lambda_H = \lambda_E + 2\pi - \frac{e^2 \pi sinAz_E}{2} - \frac{e^2 \pi sin(\pi - Az_E)}{2} = \lambda_E + 2\pi - e^2 \pi sinAz_E$$

Quelle conclusion a-t-on sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution.

Problème 3.2 *Un point M de la surface d'une sphère (S) de rayon R, a pour coordonnées (X,Y,Z) dans un repère orthonormé :*

$$M = (X,Y,Z) = (Rcos\varphi.cos\lambda, Rcos\varphi.sin\lambda, Rsin\varphi)$$

1. Montrer qu'un vecteur normal unitaire n à (S) en M est :

$$n = (cos\varphi.cos\lambda, cos\varphi.sin\lambda, sin\varphi)^T$$

2. Soit (C) le grand cercle passant par le point $A(R,0,0)$ et d'azimut Az_E. Le point M peut être décrit par son abscisse curviligne s mesurant l'arc AM. On note par ω représente l'angle au centre de l'arc AM. Utilisant la trigonométrie sphérique, montrer que :

$$cos\varphi.sin\lambda = sin\omega.sinAz_E$$

3. En utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique dans le triangle APM, montrer qu'on a les deux relations :

$$\begin{array}{l} cos\omega = cos\varphi.cos\lambda \\ sin\varphi = sin\omega.cosAz_E \end{array}$$

4. En déduire que les coordonnées de M s'écrivent en fonction de s comme suit :

$$M \begin{cases} X = R.cos(s/R) \\ Y = RsinAz_E sin(s/R) \\ Z = RcosAz_E sin(s/R) \end{cases}$$

5. Calculer les vecteurs T et N du repère de Frenêt. En déduire les composantes de N en fonction de ω.

6. Montrer que les vecteurs N et n sont parallèles.

7. Justifier que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

Problème 3.3 *Soit le tore $\mathbb{T}$ défini par les équations suivantes :*

$$M(\phi,\lambda) = \begin{cases} x = (a + Rcos\phi)cos\lambda \\ y = (a + Rcos\phi)sin\lambda \\ z = Rsin\phi \end{cases}$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\phi,\lambda) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

1. Calculer la première forme fondamentale ds^2.

2. Avec les notations usuelles, on pose :

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} = E'_{\phi}, \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = E'_{\lambda}, \quad \frac{\partial F}{\partial \phi} = F'_{\phi}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_{\lambda}, \quad \frac{\partial G}{\partial \phi} = G'_{\phi}, \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = G'_{\lambda}$$

Utilisant les équations des géodésiques (3.13) et (3.14) citées ci-dessus du chapitre 3, montrer que les équations des géodésiques du tore sont :

$$-2Rsin\phi(a+Rcos\phi)\frac{d\phi}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + (a+Rcos\phi)^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$$

$$Rsin\phi(a+Rcos\phi)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + R^2\frac{d^2\phi}{ds^2} = 0$$

3. Montrer que la première équation ci-dessus donne :

$$(a+Rcos\phi)^2\frac{d\lambda}{ds} = C = cte$$

Montrer qu'on retrouve l'équation de Clairaut avec $C = (a+R)sinAze$ *où* Aze *est l'azimut de départ au point* $M_0(\phi = 0, \lambda_0)$.

4. On suppose au point M_0*, la géodésique a pour azimut* Aze *tel que :* $0 < Aze < \frac{\pi}{2}$*. Montrer que la deuxième équation des géodésiques s'écrit en utilisant le résultat précédent :*

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{C^2}{R}\frac{sin\phi}{(a+Rcos\phi)^3}$$

5. Montrer qu'on arrive à :

$$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = l - \frac{C^2}{R^2(a+Rcos\phi)^2} \geq 0$$

où l *est une constante d'intégration.*

Chapitre 4

Les Courbes Tracées Sur Une Surface Donnée

Sommaire

Pour trouver les courbes (γ) tracées sur une surface donnée $(\mathscr{S})$, et jouissant d'une propriété donnée, on utilise les équations paramétriques de la surface sous la forme :

$$x = f(u_1, u_2), \quad y = g(u_1, u_2), \quad z = h(u_1, u_2)$$

et on considère que $u_2 = u_2(u_1)$ ce qui définit la courbe (γ). L'équation différentielle liant u_1 et u_2 caractérise les courbes cherchées (γ).

4.1 Loxodromies d'une surface de révolution

Définition 4.1 *On appelle loxodromie d'une surface de révolution $(\mathscr{S})$ toute courbe (γ) coupant sous un angle fixe les méridiens de cette surface.*

La surface $(\mathscr{S})$ est connue en donnant :

$$r = f(t), \quad z = g(t) \tag{4.1}$$

r étant le rayon du parallèle de cote z, Oz étant l'axe de révolution.

La surface $(\mathscr{S})$ est représentée en coordonnées cylindriques par :

$$\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{u}(\lambda) + z\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{u}(\lambda)$ étant le vecteur unitaire du plan xOy dont l'angle polaire est la longitude λ. En tenant de (4.1), on a :

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{F}(t, \lambda)$$

Si (γ) fait au point M l'angle α avec le méridien, (γ) fait l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec le parallèle passant par M et inversement. On introduit le repère mobile orthonormé $(O, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$ voir (**Fig. 4.1**) ci dessous. La tangente en M au parallèle porte le vecteur unitaire $\mathbf{p}$, la tangente en M à la courbe (γ) porte le vecteur $d\boldsymbol{M}$:

$$d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{u}dr + \boldsymbol{p}rd\lambda + \boldsymbol{k}dz$$

On a alors au point M :

$$sin\alpha = \frac{rd\lambda}{||d\boldsymbol{M}||} \Longrightarrow sin^2\alpha(dr^2 + r^2d\lambda^2 + dz^2) = r^2d\lambda^2 \Longrightarrow$$

$$sin^2\alpha(dr^2 + dz^2) = r^2d\lambda^2cos^2\alpha \Longrightarrow tg^2\alpha(dr^2 + dz^2) = r^2d\lambda^2 \tag{4.2}$$

En utilisant l'équation (4.1), on obtient que :

$$d\lambda = \varepsilon tg\alpha \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{f(t)}dt \Longrightarrow \lambda - \lambda_0 = \pm G(t)$$

Exemple : Loxodromies de la sphère de centre O et de rayon a.

On peut paramétrer la sphère par :

$$r = f(\varphi) = acos\varphi, \quad z = g(\varphi) = asin\varphi \tag{4.3}$$

Par suite :

$$d\lambda = \pm tg\alpha \frac{d\varphi}{cos\varphi} \Longrightarrow \lambda - \lambda_0 = \pm tg\alpha Log\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right|$$

Les équations (4.3-4.4) définissent paramétriquement, en fonction de φ, les loxodromies de la sphère, considérée comme surface de révolution autour de Oz.

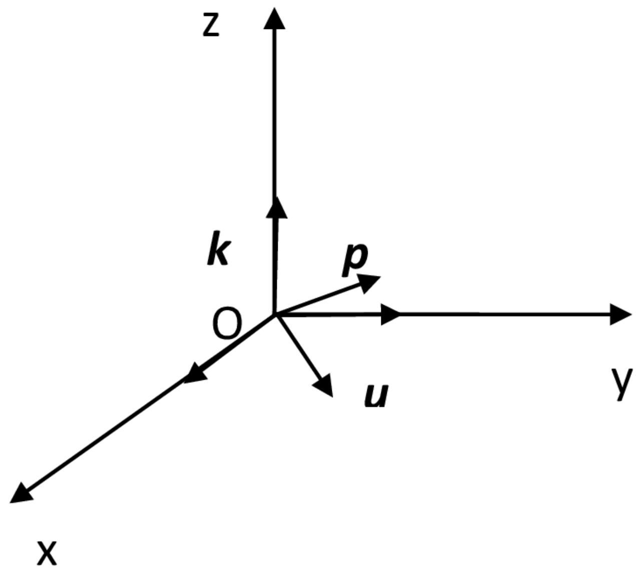

FIG. 4.1 Le repère mobile au point O.

4.2 LES LIGNES ASYMPTOTIQUES D'UNE SURFACE $\mathscr{S}$

Définition 4.2 *Les lignes asymptotiques d'une surface $(\mathscr{S})$ sont des courbes (γ) tracées sur $(\mathscr{S})$, telles que le plan osculateur en tout point M de (γ) est tangent en M à $(\mathscr{S})$.*

Nous rappelons que le plan osculateur est défini par les vecteurs $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N})$ (voir définition 1.6, chapitre 1.). La surface $(\mathscr{S})$ est définie par $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{F}(u_1, u_2)$. On va chercher la courbe (γ) sous la forme $u_2 = \varphi(u_1)$. La position du point courant M de (γ) dépend du seul paramètre u_1 et le plan osculateur, engendré par $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{N}$, est défini donc par $\dfrac{d\boldsymbol{M}}{du_1}$ et $\dfrac{d^2\boldsymbol{M}}{du_1^2}$. Le premier vecteur est evidemment dans le plan tangent en M à $(\mathscr{S})$. Il suffit d'écrire que le deuxième vecteur est aussi dans ce plan.

Soit $\boldsymbol{n} = \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_2}$, $\boldsymbol{n}$ est un vecteur perpendiculaire en M à $(\mathscr{S})$. Alors, $\forall u_1$, on a :

$$\boldsymbol{n}.\frac{d\boldsymbol{M}}{du_1} = 0$$

En prenant sa dérivée par rapport à u_1, on obtient :

$$\boldsymbol{n}.\frac{d^2\boldsymbol{M}}{du_1^2} + \frac{d\boldsymbol{n}}{du_1}.\frac{d\boldsymbol{M}}{du_1} = 0,\ \forall u_1$$

La condition que nous avons à exprimer $\boldsymbol{n}.\dfrac{d^2\boldsymbol{M}}{du_1^2} = 0$ est équivaut donc à $\dfrac{d\boldsymbol{n}}{du_1}.\dfrac{d\boldsymbol{M}}{du_1} = 0$, soit :

$$d\boldsymbol{M}.d\boldsymbol{n} = 0$$

est l'équation différentielle pour retrouver les lignes asymptotiques de $(\mathscr{S})$. C'est une équation du second ordre.

Exemple : les lignes asymptotiques d'un ellipsoïde de révolution E(a,e) : Un point M a ses coordonnées comme suit :

$$M = \begin{cases} x = Ncos\varphi cos\lambda \\ y = Ncos\varphi sin\lambda \\ z = N(1-e^2)sin\varphi \end{cases}$$

On peut prendre $\boldsymbol{n} = (cos\varphi, sin\varphi, 0)^t \Longrightarrow d\boldsymbol{n} = (-sin\varphi d\varphi, cos\varphi d\varphi, 0)^t$ et :

$$dM = \begin{cases} dx = -\rho sin\varphi cos\lambda d\varphi - Ncos\varphi sin\lambda d\lambda \\ dy = -\rho sin\varphi sin\lambda d\varphi + Ncos\varphi cos\lambda d\lambda \\ dz \end{cases}$$

Par suite, on trouve $d\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = constante$ ce sont les parallèles et :

$$Ncos\varphi cos(\lambda-\varphi)\frac{d\lambda}{d\varphi} - \rho sin\varphi sin(\lambda-\varphi) = 0$$

Pour l'intégration de l'équation ci-dessus, on fait le changement de variables suivant : $\psi = \lambda - \varphi \Longrightarrow \dfrac{d\psi}{d\varphi} + 1 = \dfrac{d\lambda}{d\varphi}$.

4.3 LES LIGNES DE COURBURES

Définition 4.3 *On appelle lignes de courbure d'une surface* $(\mathscr{S})$ *les courbes* (γ) *tracées sur* $(\mathscr{S})$ *telles que, quand un point* M *décrit* (γ), *la normale en* M *à* $(\mathscr{S})$ *engendre une surface développable.*

Sans donner une démonstration, les lignes de courbures sont fournies par l'équation différentielle suivante :

$$\text{déterminant}(d\boldsymbol{M}, \boldsymbol{n}, d\boldsymbol{n}) = 0$$

$\boldsymbol{n}(M)$ étant un vecteur normal, non nécessairement unitaire, à $(\mathscr{S})$ au point M.

Par tout point de la surface il passe, en général, deux lignes de courbures.

Exemple : les lignes de courbure d'un ellipsoïde de révolution E(a,e) :

On a l'équation :

$$\begin{vmatrix} dx & cos\varphi & -sin\varphi d\varphi \\ dy & sin\varphi & cos\varphi d\varphi \\ dz & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow dz.d\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = constante$$

Les lignes de courbure sont les parallèles.

4.4 PROBLÈMES ET EXERCICES

Problème 4.1 *Un point* M *(x=acosu,y=asinu,z=asin2u) décrit une courbe* C. *Le plan osculateur en* M *à* C *coupe l'axe* Oz *en* P. *Trouver les lignes asymptotiques de la surface engendrée par la droite* MP.

Problème 4.2 *On considère la surface représentée paramétriquement par :*

$$x = e^u cosv, \quad y = e^u sinv, \quad z = f(u,v)$$

Déterminer la fonction f *pour que les courbes* $v = constante$ *soient des asymptotiques.*

Exercice 4.1 *Trouver les lignes asymptotiques de la surface représentée paramétriquement par :*

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^2 - v^2$$

Exercice 4.2 *Trouver les lignes de courbures de chacune des surfaces d'équation (repère orthonormé) :*

$$xy = az; \quad y = x tg z$$

Note historique : *La théorie des surfaces élaborée par Gauss était surtout influencée essentiellement par son travail comme géomètre topographe dans le Royaume de Hannover au Nord de l'Allemagne durant la période 1821-1825. En 1822, il présenta son mémoire intitulé " General solution of the problem of mapping parts of a given surface onto another given surface in such a way that image and pre-image become similar in their smallest parts", à la Société Royale des Sciences à Copenhague (Danemark) où il recevait un prix officiel.*

Où se réside donc l'importance de son mémoire? Ce dernier concernait l'étude du problème de cartographier une surface sur une autre en satisfaisant certaines propriétés. C'est le problème de base de la cartographie. Parmi les représentations planes dites abusivement projections sont celles qui conservent les angles ou représentations conformes. Elles ont un aspect pratique pour la navigation maritime. Ainsi, Gauss avait réussi à trouver une procédure pour déterminer toutes les représentations conformes localement pour les surfaces analytiques. Il ajouta dans le titre de son mémoire cette phrase en latin :

Ab his via sterniture ad maiora.

soit " **De là, le chemin de quelque chose plus importante est préparé** ". *En effet, Gauss présentait en octobre 1827 une théorie générale des surfaces à travers son papier " Disquisitiones generales circa superficies curvas*[1] *" (Investigations about curved surfaces). L'important résultat de son papier est le théorème egregium dit encore le théorème merveilleux. Ce dernier dit que la courbure de Gauss est une propriété intrinsèque pour les surfaces de dimension 2. La courbure de Gauss dépend des composantes g_{ij} du tenseur métrique et de ses dérivées partielles premières et secondes par rapport aux coordonnées locales.* (*E. Zeidler*, 2011)

1. Voir aussi (**P. Dombrowski**, 1979).

Chapitre 5

Bibliographie

1. **F.R. Helmert**. 1884. *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*; Vol 2, Leibzig, B.G Teubner(reprinted 1962).
2. **H. Poincaré**. 1905. Sur les Lignes géodésiques des surfaces convexes. Transactions of the American Mathematical Society. n°6, pp. 237-274; Œuvres 6, pp. 38-84.
3. **L. P. Eisenhart**. 1909. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Phoenix Editions. 498 pages.
4. **G. Julia**. 1955. Cours de l'Ecole Polytechnique. *Cours de Géométrie Infinitésimale*. Cinquième Fascicule, Deuxième Partie : Théorie des Surfaces. Deuxième édition entièrement refondue. Editeur Gauthier-Villars. 141p.
5. **J. Dieudonné**. 1968. *Calcul Infinitésimal*. 1ère édition. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris. 479p.
6. **P. Dombrowski**. 1979. 150 Years after Gauss " disquisitiones generales circa superficies curvas". Astérisque n°62. Publication de la Société Mathématique de France. 153p.
7. **B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko**. 1982. *Géométrie Contemporaine : Méthodes et Application*. Première Partie : Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. Edition Mir, Moscou. 438p.
8. **P. Petersen**. 1998. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, n°171. Springer-Verlag. 435p.
9. **A.N. Pressley**. 2010. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag Heidelberg. 395p.