

Наглядное представление дифференциальных форм и псевдоформ

Электромагнетизм в терминах источников и порождений полей

Р. И. Храпко¹

2011

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Источники и порождения, границы и наполнения в электромагнетизме.....	5
Глава 2. Дифференциальные формы, тензорные плотности, дуализация, etc. .13	
Глава 3. Сопряжение, оператор Ходжа, кограница.....	24
Глава 4. Цепочки полей.....	30
Глава 5. Наполнения сингулярных границ. Три примера.....	33
<i>5.1. Поля электрического диполя.....</i>	<i>33</i>
<i>5.2. Поля токового колечка.....</i>	<i>34</i>
<i>5.3. Поля элемента тока. Козамкнутость порождений. Стерильность. Разложение Гельмгольца сингулярной конструкции $I^i\delta(x,x')$</i>	<i>37</i>

¹ R I Khrapko Email: khrapko_ri@hotmail.com, khrapko_ri@mai.ru, <http://khrapkori.wmsite.ru>

Глава 6.	
Дифференциальные уравнения первого порядка.....	45
6.1. Уравнение $\rho_{,\lambda} = \partial_i E^i_{,\lambda}$	45
6.2. Уравнение $E_i = \partial_i \phi$. Электрическое поле порождает скалярный потенциал.....	46
6.3. Уравнение $j^i_{,\lambda} = \partial_k B^{ik}_{,\lambda}$	48
6.4. Уравнение $B_{ik} = 2\partial_{[i} A_{k]}$	50
Глава 7.	
Интегральные формулы, соответствующие дифференциальным уравнениям.....	51
Глава 8.	
Разложение Гельмгольца дельта функций.....	54
Глава 9.	
Разложение Гельмгольца прямого полубесконечного тока.....	59
Глава 10.	
Разложение Пуанкаре.....	62
Глава 11.	
Оператор Лапласа.....	64
Глава 12.	
Гармонические поля.....	67
Глава 13.	
Порождения. Квадрат оператора порождения.....	72
Глава 14.	
Различные варианты разложения Гельмгольца.....	74
Заключение.....	78
Библиография.....	80

Введение

Широко распространено мнение, что на примере электродинамики видно, как естественно выражаются физические законы в терминах внешних дифференциальных форм и интегралов от них. Однако на практике авторы популярных учебников избегают использовать математический аппарат дифференциальных форм [1–4]. Не упоминаются дифференциальные формы и в популярном Справочнике по математике [5]. Физики игнорируют замечательные работы Схоутена, выполненные в первой половине прошлого века [6, 7], в которых даны наглядные изображения дифференциальных форм. Лишь изредка появляются публикации на эту тему [8]. Однако, даже в книге [6] уравнениям электродинамики уделена только одна страница.

С другой стороны, строгий формализм дифференциальных форм, подробно и многократно изложенный математиками [9, 10], не подходит для формулировки и объяснения физических законов. Он проигрывает при сравнении с традиционным стилем изложения, а обозначения математиков роковым образом препятствуют использованию теории дифференциальных форм в физике. Правда, замечательную и почти успешную попытку сблизить математику и физику предпринял Шутц [11]. Однако, на наш взгляд, обозначения, применяемые в книге [11], ещё не вполне адаптированы для успешного использования физиками. Это относится и к разделу книги, посвящённому электродинамике.

Мы надеемся ввести внешние дифференциальные формы в обычную электродинамику в первую очередь за счёт изменения обозначений. Также мы используем *сопряжение* [12] вместо традиционной операции Ходжа [13]. Это позволяет связать различные поля электродинамики в единые цепочки. При этом изображение дифференциальных форм делает эту связь

весьма наглядной. В частности, изображения полей, связанных уравнениями Максвелла, сделали эти уравнения самоочевидными.

Особенно длинная цепочка полей представлена на рис. 9.

Цепочки полей содержат как известные экзотические поля [14], так и множество гипотетических полей. Использование цепочек полей позволило по-новому взглянуть на действие оператора Лапласа, на действие «оператора порождения второго порядка», обратного к оператору Лапласа, и на процедуру разложения Гельмгольца. В частности, разложение Гельмгольца сингулярной дельта функции оказалось связанным с разложением магнитной индукции на вектор намагничения и напряжённость магнитного поля [15]. Мы надеемся показать простоту и естественность предлагаемого подхода.

Глава 1.

Источники и порождения, границы и наполнения в электромагнетизме

Как известно, электрический заряд создаёт вокруг себя векторное электрическое поле E , как это изображено на рис. 1а, взятом из [1], или на рис. 1б. Мы будем говорить, что плотность электрического заряда ρ является *источником* электрического поля E , и что плотность электрического заряда ρ *порождает* электрическое поле E . Математически в данном случае порождение поля источником выражается известной формулой

$$\int \rho(x') \frac{\mathbf{r}(x, x')}{4\pi\epsilon_0 r^3(x, x')} dV' = \mathbf{E}(x). \quad (1.1)$$

Интегральные формулы, выражающие порождение одних полей другими, подробно рассматриваются далее в главах **5**, **6**, **13**. Порождение поля E плотностью ρ наглядно иллюстрируется тем, что силовые линии электрического поля выходят из области пространства, занятой плотностью электрического заряда ρ , или заканчиваются в такой области (при $\rho < 0$) на рисунке 1б.

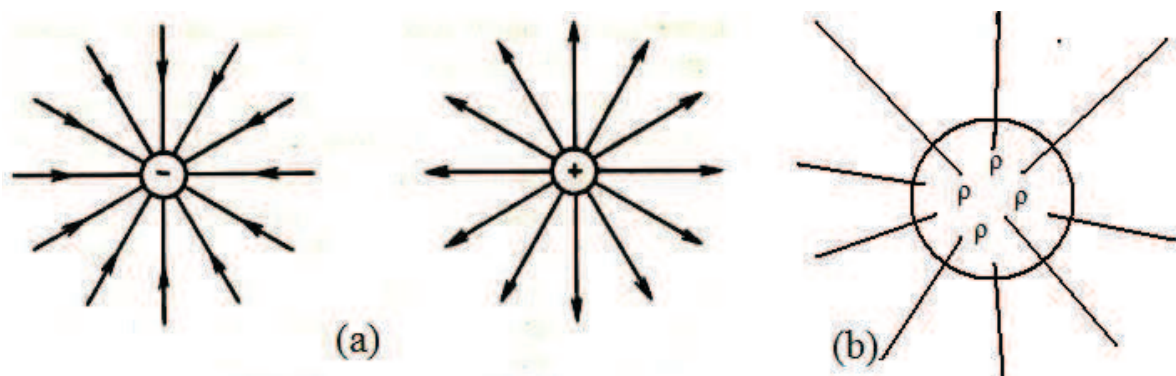


Рис. 1. (а) Безвихревое векторное поле. Силовые линии исходят из зарядов [1]. (б) Силовые линии эмитируются заряженной областью пространства

Силловые линии удовлетворяют уравнению $dx/E^x = dy/E^y = dz/E^z$ и могут быть проведены через любую точку поля, но для того, чтобы у силовых линий появились концы, расположенные в заряженной области пространства, линии проводят в таком количестве, что число линий на единицу площадки, расположенной поперёк линий, приблизительно пропорционально напряженности поля E . В результате, заряженная область пространства содержит концы силовых линий, которые иначе называются граничными точками силовых линий. На рисунке 1b представлены силовые линии объёмно заряженного шара. Мы будем говорить, что плотность электрического заряда ρ является *границей* электрического поля E , а электрическое поле E *наполняет* свою границу, которой служит плотность ρ . Математически это обстоятельство выражается формулой

$$\rho/\varepsilon_0 = \operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (1.2)$$

Таким образом, переход от источника к его порождению осуществляется интегрированием, а переход от наполнения к его границе осуществляется дифференциальной операцией. Вопрос о том, насколько эти операции являются взаимно обратными, обсуждается в главе 8.

Рисунки 1a и 1b отражают ситуацию, складывающуюся для так называемого безвихревого (продольного) электрического поля, для которого $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Такое поле обозначают обычно E_l [2] или $E_{||}$, однако главной чертой этого поля является то, что его силовые линии выходят из зарядов. Чтобы подчеркнуть это свойство, мы используем крестик \times в обозначении такого поля:

$$\rho = \operatorname{div} \underset{\times}{\mathbf{E}} \equiv \nabla \cdot \underset{\times}{\mathbf{E}}. \quad (1.2)$$

(для простоты мы положим $\varepsilon_0 = 1$).

Однако, такая, как на рисунках 1, наглядная связь между источником поля и самим полем, между самим полем и его границей отсутствует для соленоидального (поперечного) векторного электрического поля. Такое поле обычно обозначают \mathbf{E}_\perp [2] или \mathbf{E}_\perp , однако главной чертой этого поля является замкнутость его силовых линий как показано на рис 2а, взятом из [3] вместе с текстом. Силовые линии такого поля не имеют концов. Поэтому мы выбрали кружок \circ для обозначения такого поля и будем называть его замкнутым векторным полем, в соответствии с тем, что граница его равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (1.3)$$

Соленоидальное электрическое поле \mathbf{E} является индукционным полем. Источником его является производная по времени векторного магнитного поля $\dot{\mathbf{B}}$. Крестики на рис. 2а изображают силовые линии этого поля $\dot{\mathbf{B}}$.

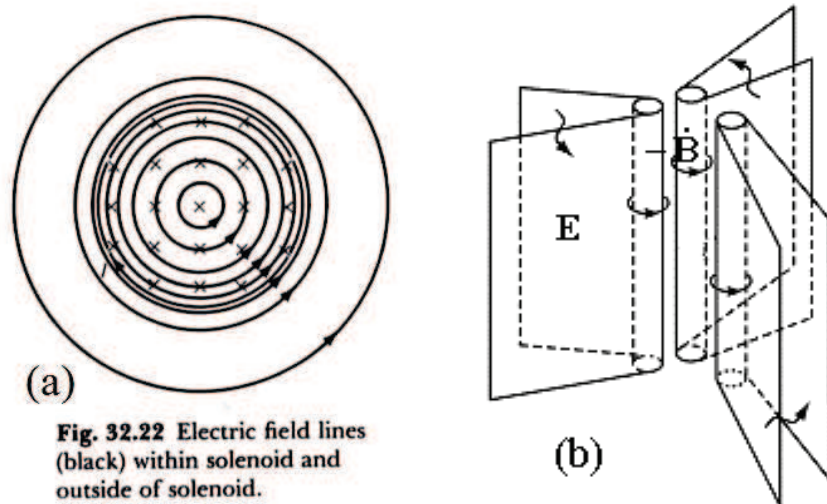


Рис. 2. (а) Силовые линии соленоидального индукционного электрического поля образуют замкнутые петли вокруг силовых линий переменного магнитного поля, они не имеют концов [3].
 (б) Биповерхности индукционного электрического поля эмитируются силовыми трубками переменного магнитного поля.

Поле $-\dot{\mathbf{B}}$ порождает индукционное поле \mathbf{E} согласно формуле

$$-\int \dot{\mathbf{B}}(x') \times \frac{\mathbf{r}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} dV' = \mathbf{E}(x) \quad (1.4)$$

(заметьте, эта формула справедлива без использования запаздывающего времени). Соответственно, эта производная по времени, т.е. поле $-\dot{\mathbf{B}}$, является границей индукционного поля, в соответствии с формулой

$$-\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \mathbf{E}. \quad (1.5)$$

Почему же силовые линии соленоидального поля \mathbf{E} не выходят из силовых линий производной магнитного поля $-\dot{\mathbf{B}}$ подобно тому, как силовые линии безвихревого электрического поля выходят из заряженной области, где расположена их граница ρ ? Вместо этого силовые линии соленоидального поля \mathbf{E} замкнуты и имеют нулевую границу в соответствии с (1.3). Почему граница (1.5) индукционного поля \mathbf{E} не является границей силовых линий индукционного поля \mathbf{E} ?

Оказывается, индукционное поле \mathbf{E} , называемое соленоидальным полем, порождается не в качестве контравариантного векторного поля \mathbf{E} с замкнутыми силовыми линиями, а в качестве ковариантного векторного поля, *ковекторного* поля, которое изображается *биповерхностями* (двойными поверхностями) на рисунке 2б. И эти биповерхности не замкнуты. Они эмитируются силовыми трубками переменного магнитного поля $-\dot{\mathbf{B}}$, которые являются границами биповерхностей. Так что векторное поле $-\dot{\mathbf{B}}$ является границей ковекторного индукционного электрического поля, которое обычно рассматривается как соленоидальное векторное поле. Эти вопросы подробно рассмотрены в главах 2, 3. Одновременно мы говорим, что индукционное ковекторное поле наполняет свою границу, которой является поле $-\dot{\mathbf{B}}$.

Соответственно, дифференциальный оператор rot , осуществляющий переход от индукционного поля \mathbf{E} к полю $-\dot{\mathbf{B}}$, согласно уравнению (1.5),

на самом деле применяется не к замкнутому векторному полю \mathbf{E} , а к незамкнутому ковекторному полю \mathbf{E} , так что операция rot предполагает предварительное преобразование замкнутого векторного поля \mathbf{E} в соответствующее незамкнутое ковекторное поле, границу которого он строит. Операция преобразования, названная *сопряжением*, рассмотрена в главе 3. Оператор rot не может применяться к векторному полю.

К сожалению, в этом разделе мы не можем никак обозначить индукционное незамкнутое ковекторное поле \mathbf{E} , о котором здесь всё время идёт речь и которое изображено на рис. 2b биповерхностями. Его хотелось бы отметить крестиком \times , поскольку биповерхности расходятся от силовых трубок поля $-\mathbf{B}$ наподобие того, как силовые линии расходятся от заряженной области на рисунках 1. Однако его нельзя обозначить \mathbf{E}_\times , поскольку такой символ уже использован для безвихревого векторного поля в уравнении (1.2). Причина этой трудности в том, что полужирный шрифт не способен передавать всю необходимую информацию. Чтобы избежать подобных трудностей, вместо использования полужирного шрифта, мы будем применять тензорные индексы, потому что они несут необходимую информацию. Об этом – в главе 2.

Ситуация соленоидального индукционного векторного поля \mathbf{E} складывается и для магнитного векторного поля \mathbf{B} , которое всегда соленоидально,

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.6)$$

Магнитное поле \mathbf{B} порождается электрическим током согласно закону Био-Савара

$$\int \mathbf{j}(x') \times \frac{\mathbf{r}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} dV' = \mathbf{B}(x), \quad (1.7)$$

однако силовые линии магнитного поля длинного прямолинейного провода с током идут вокруг провода по окружности, а не исходят из провода, который порождает это поле (рис. 3а из [4]).

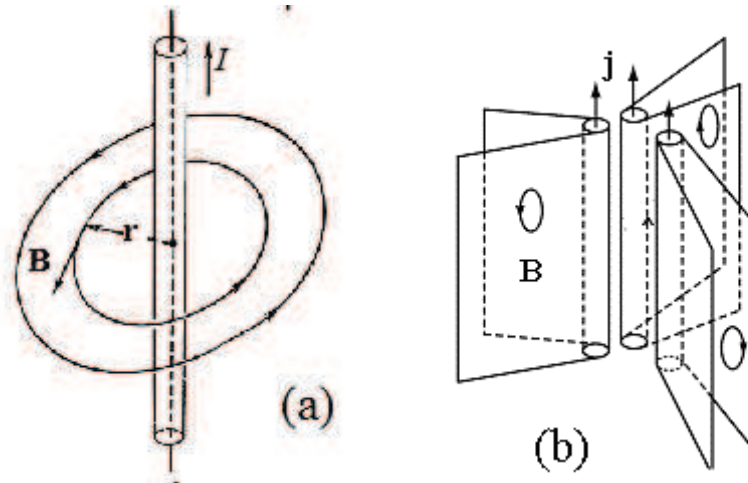


Рис. 3. (а) Силовые линии магнитного поля длинного провода с током I образуют замкнутые петли вокруг этого провода, они не имеют концов [4]. (б) Биповерхности бивекторного магнитного поля эмитируются силовыми трубками плотности тока.

Как и в случае (1.4), на самом деле магнитное поле \mathbf{B} порождается не в качестве векторного поля \mathbf{B} с замкнутыми силовыми линиями. Оно порождается как бивекторное поле (главы 2, 5), и биповерхности, изображающие бивекторное магнитное поле \mathbf{B} , эмитируются силовыми линиями (правильнее, силовыми трубками) плотности тока \mathbf{j} (рис. 3б). В данном случае поле \mathbf{j} является источником и одновременно границей, поля, которое считается соленоидальным векторным полем \mathbf{B} , а на самом деле является незамкнутым бивекторным полем:

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}. \quad (1.8)$$

Бивекторное магнитное поле формул (1.7), (1.8) можно обозначить \mathbf{B}_x , поскольку не существует магнитного векторного безвихревого поля. Заметьте, что формулы (1.7), (1.8) справедливы только для постоянного тока, поскольку они не учитывают ток смещения.

Между рисунками 2b и 3b имеется интересное различие. Векторное поле $-\dot{\mathbf{B}}$ на рис. 2b имеет *внешнюю ориентацию*. Такое поле иногда называют псевдовекторным полем (правильнее, псевдо векторной плотностью). Соответственно, порожденное им индукционное ковекторное электрическое поле имеет также внешнюю ориентацию. В отличие от этого, векторная плотность тока \mathbf{j} на рис. 3b имеет *внутреннюю ориентацию*. Соответственно, порожденное ею магнитное бивекторное поле также имеет внутреннюю ориентацию. Подробнее эти вопросы рассмотрены в главе 2.

В дальнейшем мы показываем, что в общем случае геометрическое многообразие, представляющее источник некоторого поля, является границей этого поля в геометрическом смысле слова. И эта граница всегда находится подходящей дифференциальной операцией первого порядка, div , rot или grad , в зависимости от геометрии дифференцируемого поля (см. главу 2). Например, $-\mathbf{E} = \text{grad } \varphi$ (рис. 8b, 9d), $-\dot{\rho} = \text{div } \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ (рис. 6b).

Важно отметить, что поля, являющиеся границами других полей, непременно замкнуты, в соответствии с тем, что граница границы равна нулю. Такие поля удовлетворяют соотношениям типа $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{j} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (рис. 9c), $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (рис. 10b), $\text{grad } \rho = 0$ (подробнее см. главу 2). Такие поля изображаются замкнутыми многообразиями.

Известное разложение Гельмгольца [2, 5] заключается как раз в том, что некоторое поле, например, электрическое векторное поле \mathbf{E} , раскладывается в сумму замкнутого векторного поля и безвихревого векторного поля, которое мы называем *сопряженно замкнутым* полем (см. главу 3):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-, \quad \text{div } \mathbf{E}_+ \equiv \nabla \cdot \mathbf{E}_+ = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E}_- \equiv \nabla \times \mathbf{E}_- = 0. \quad (1.9)$$

Тут опять, в соответствии со сделанным ранее замечанием, операция $\text{rot}_x \mathbf{E}$ предполагает предварительное сопряжение векторного поля \mathbf{E}_x , то есть превращение его из безвихревого векторного поля \mathbf{E}_x в замкнутое ковекторное поле, которому в этом разделе нет обозначения.

Глава 2. Дифференциальные формы, тензорные плотности, дуализация, etc.

Важно осознавать, что электромагнитные поля на самом деле описываются геометрическими величинами двух различных типов [6, p.133; 7, с.192].

Во-первых, это контравариантные (антисимметричные) тензорные плотности: $B_{\wedge}^{ik}, j_{\wedge}^i, E_{\wedge}^i, \rho_{\wedge}$. Из рассмотренных выше полей к ним относятся: безвихревое «векторное поле» $\mathbf{E} = E_{\wedge}^i$, соленоидальное «векторное поле» $\mathbf{E} = E_{\wedge}^i$, плотность тока $\mathbf{j} = j_{\wedge}^i$, которые являются векторными плотностями, скалярная плотность ρ_{\wedge} , а также порождённое магнитное поле $\mathbf{B} = B_{\wedge}^{ik}$, являющееся бивекторной плотностью.

Во-вторых, это ковариантные (антисимметричные) тензоры, в их числе скалярные функции и ковекторы, именно, ϕ, E_i, A_i, B_{ij} . Их называют *внешними дифференциальными формами* (кратко, формами). К ним относятся замкнутое магнитное поле $\mathbf{B} = B_{ij}$, индукционное электрическое ковекторное поле E_j и замкнутое ковекторное поле E_j , для которых мы не могли написать обозначение в главе 1.

К сожалению, разница между формами и тензорными плотностями игнорируется большинством физиков. Эта разница теряется при написании векторов полужирным шрифтом. Мы используем тензорные индексы, потому что они несут необходимую информацию. Кроме того, для написания тензорных *плотностей* мы не пользуемся готическим шрифтом как это обычно делается. Например, на рисунке 4, взятом из [6] вместе с текстом, Схоутен использует готические буквы \mathfrak{D} \mathfrak{H} вместо латинских букв D и H.

Вместо готического шрифта мы отмечаем плотности знаком ‘wedge’ \wedge . Такое обозначение использовал И.А. Кунин [7] при переводе на русский язык монографии [6]. Однако, в отличие от [7], мы ставим знак \wedge на уровне нижних или верхних индексов для плотностей веса $+1$ или -1 соответственно. Например, элемент объема или элементарная площадка с внешней ориентацией, которые являются плотностями веса -1 , обозначаются dV^\wedge или da_i^\wedge , соответственно.

The geometric images of F , D , H , and B are

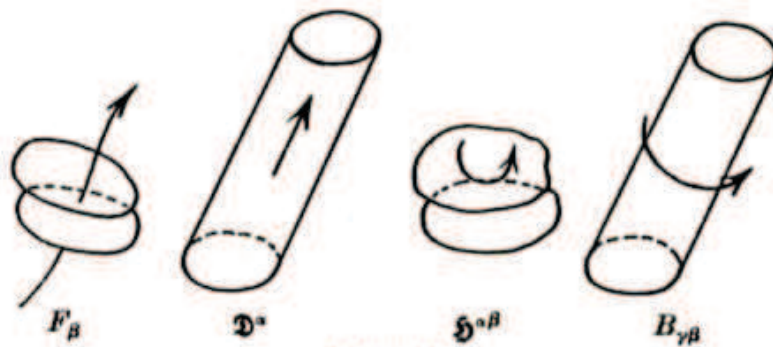


Fig. 23.

Рис. 4. Показана разница между дифференциальными формами и контравариантными тензорными плотностями. Обозначения Схоутена соответствуют нашим обозначениям следующим образом: ковекторное поле $F \rightarrow E_i$, векторная плотность $D \rightarrow E_\wedge^i$, бивекторная плотность $H \rightarrow B_\wedge^{ij}$, ковариантный бивектор или 2-форма $B \rightarrow B_{ij}$

При использовании тензорных обозначений, формулы главы 1 приобретают вид

$$\rho_\wedge = \partial_i E_\wedge^i, \quad \partial_i E_\wedge^i = 0, \quad -\dot{B}_{ij} = 2\partial_{[i} E_{j]}, \quad j_\wedge^i = \partial_k B_\wedge^{ik}, \quad E_\wedge^i = E_\wedge^i + E_\wedge^i, \quad \partial_{[i} E_{j]} = 0.$$

Разница между тензорными плотностями и формами известна давно. Геометрические многообразия, представляющие некоторые из них, приведены на рисунке 4. Видно, что ковариантное векторное поле (ковекторное поле) E_i изображается семейством двойных поверхностей (биповерхностями) с внешней ориентацией; поле векторной плотности E_\wedge^i изображается не силовыми линиями, как на рис. 1, а силовыми трубками с

внутренней ориентацией; бивекторная плотность B_{\wedge}^{ij} изображается биповерхностями с внутренней ориентацией; ковариантный бивектор B_{ij} изображается трубками внешней ориентацией.

Now consider a covector. This should be familiar to most students in terms of a gradient. We can picture a gradient best in terms of the equipotential surfaces to which it refers, and this is the basis of the pictorial representation. That is, draw the surfaces themselves, along with some sense of direction, which might be indicated by a wavy line with an arrow at the end, or with a whorl on one of the sheets:



Рис. 5. (a) Изображение ковектора [8]. Ковектору соответствует внешняя ориентация. (b) Изображение бивекторной плотности (внутренняя ориентация).

Сходная интерпретация ковектора представлена в [8]. Мы приводим рисунок из [8] вместе с текстом (наш рис. 5). Заметьте, что величина ковектора пропорциональна плотности листов, то есть обратно пропорциональна толщине. Так же величина векторной плотности обратно пропорциональна площади поперечного сечения трубок.

Напомним, что компоненты ковекторов, по определению, преобразуются, при переходе от координат x^i к координатам $x^{i'}$, по правилу: $E_{i'} = E_i \partial_i^{i'}$, а компоненты контравариантных плотностей (веса +1) преобразуются по правилу $E_{\wedge}^{i'} = E_{\wedge}^i \partial_i^{i'} |\det(\partial_i^{i'})|$, где мы используем обозначение $\partial_i^{i'}$ для матрицы $\partial_i^{i'} = \partial x^{i'} / \partial x^i$. (Предполагается суммирование по повторяющимся индексам).

Геометрические величины могут быть *дуализированы* с помощью символов Леви-Чивита $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ или $\tilde{\varepsilon}^{ijk}$. Эти символы равны ± 1 или 0 в любой координатной системе, а потому являются псевдотензорными плотностями веса -1 или $+1$, соответственно. Мы отмечаем псевдоплотности знаком тильда \sim вместо ‘wedge’ \wedge . Например, магнитное поле, являющееся 2-

формой, $\mathbf{B} = B_{ij}$, можно записать как псевдовекторную плотность: $B_{\sim}^i = \varepsilon_{\sim}^{ijk} B_{jk} / 2$. При дуализации плотности получается псевдотензор. Например, порождённое током магнитное поле $\mathbf{B} = B_{\times}^{ik}$, которое является бивекторной плотностью, можно записать как псевдоковектор, $B_i^* = \varepsilon_{ijk} B_{\wedge}^{jk} / 2$, то есть как дифференциальную псевдоформу. Мы отмечаем псевдотензоры звёздочкой.

Дуализация не имеет физического значения и не изменяет геометрический образ геометрической величины. Например, 2-форма B_{ij} и псевдовекторная плотность B_{\sim}^i одинаково изображаются трубками с внешней ориентацией. Так что антисимметричные контравариантные плотности эквивалентны дифференциальным псевдоформам. Эта эквивалентность позволила сократить длину заголовка настоящего сочинения.

Мы редко используем дуализацию. Тем не менее, мы собрали в **таблицах** различные физические величины и геометрические элементы с указанием геометрических многообразий, которые их представляют. При этом в одну клетку помещены величины в прямом и дуализированном представлении.

В таблицах Π_{\wedge}^j обозначает электрический векторный потенциал, а ξ_{ij} и ζ_{ijk} обозначают плотность тока магнитных зарядов и плотность магнитных зарядов, соответственно. Видно, что изменение «величина \leftrightarrow псевдовеличина» (переход от одной таблицы к другой) меняет тип ориентации; изменение «(псевдо)плотность \leftrightarrow (псевдо)тензор» (переход между строчками внутри таблицы) меняет качество «толщины» геометрического образа. Мы говорим, что трубка – «толстая», в отличие от линии, которая «без толщины». Мы говорим, что биповерхность – «толстая», в отличие от поверхности, которая «без толщины».

Геометрические величины в 3-пространстве

Внутренняя ориентация

Геометрич. элементы без толщины, вес плотности -1	$\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ 1 точка	$d\tilde{l}_{ij}$ $d\tilde{l}^i$ линия	$d\tilde{a}_i$ $d\tilde{a}^{ij}$ поверхность	$dV\tilde{}$ dV^{ijk} объем
Физические величины (толстые), вес плотности $+1$	ρ_{ijk}^* ρ_{\wedge} пятно	E_{ij}^*, J_{ij}^* $E_{\wedge}^i, J_{\wedge}^i$ трубка	B_i^*, Π_i^* $B_{\wedge}^{ij}, \Pi_{\wedge}^{ij}$ биповерхность	χ^* χ_{\wedge}^{ijk}

Внешняя ориентация

Геометрич. элементы без толщины, вес плотности -1	$\hat{\varepsilon}_{ijk}$ 1_* точка	$d\hat{l}_{ij}$ $d\hat{l}_*^i$ линия	$d\hat{a}_i$ $d\hat{a}_*^{ij}$ поверхность	$dV\hat{}$ dV_*^{ijk} объем
Физические величины (толстые), вес плотности $+1$	ς_{ijk} ς_{\sim} пятно	B_{ij}, ξ_{ij} B_{\sim}^i, ξ_{\sim}^i трубка	E_i, A_i $E_{\sim}^{ij}, A_{\sim}^{ij}$ биповерхность	φ $\varphi_{\sim}^{ijk} =$ $= \varphi \varepsilon_{\sim}^{ijk}$

Напомним, что правило преобразования компонентов псевдовеличин, по определению, включает в себя дополнительно -1 в случае инверсии координатных осей, не сводящейся к повороту. Это объясняет разницу ориентации величин и соответствующих псевдовеличин. Например, закон преобразования компонентов вектора dl^i , именно $dl^{i'} = dl^i \partial_i^{i'}$, означает, что при инверсии, скажем, оси x компонента dl^x меняет знак, а потому направление вектора dl^i как целого не изменяется. В отличие от этого, закон преобразования компонентов псевдовектора, именно $dl_*^{i'} = dl_*^i \partial_i^{i'} |\det(\partial_i^{i'})| / \det(\partial_i^{i'})$, означает, что величине dl_*^i нельзя приписать направление, поскольку при такой же инверсии осей координат приписанное направление изменяется. Зато этот закон оставляет неизменными значения компонентов величины dl_*^i при инверсии оси x , что

обеспечивает неизменность направления вращения от оси y к оси z , необходимую для сохранения внешней ориентации.

Индексные обозначения вносят ясность в структуру векторного произведения. Например, векторная плотность (обычно говорят, вектор) Пойнтинга, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, записывается так $S_\lambda^i = E_j B_\lambda^{ij}$ (ср. (2.4)). Сила Лоренца, $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, оказывается ковектором $F_i = qv^j B_{ij}$. Внешнее произведение $c^2 = a^1 \wedge b^1$ двух 1-форм, a^1, b^1 , дающее 2-форму c^2 , является векторным произведением двух ковариантных векторов $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Действительно, при обозначении ковекторов через a_i, b_i , векторное произведение записывается так: $c_{ij} = 2a_{[i} b_{j]}$. Естественно, при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак: $d_{ij} = 2b_{[i} a_{j]} = -c_{ij}$.

Дифференцирование, которое производится в электродинамике, является внешним дифференцированием в отношении дифференциальных форм [9,10]. Внешняя производная скаляра является обычной частной производной, т.е. градиентом,

$$E_i = \partial_i \phi \Leftrightarrow \mathbf{E} = \text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi \quad (2.1)$$

(мы не пишем минус в этой формуле, соответственно, у нас $\rho = \nabla^2 \phi$). В общем случае внешняя производная предполагает антисимметризацию по индексам. Внешняя производная ковектора является ротором, например,

$$B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{или} \quad \dot{B}_{ij} = -2\partial_{[i} E_{j]} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{B}} = -\text{rot } \mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

где $\partial_{[i} A_{j]} = \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$. Внешняя производная ковариантного тензора валентности 2 является дивергенцией, например,

$$3\partial_{[k} B_{ij]} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

где $\partial_{[k} B_{ij]} = \frac{1}{3!}(\partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki} - \partial_k B_{ji} - \partial_i B_{kj} - \partial_j B_{ik}) = \frac{1}{3}(\partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki})$.

При дифференцировании контравариантных тензорных плотностей в электродинамике предполагается суммирование по последнему контравариантному индексу. Например, производная бивекторной плотности является ротором

$$j_{\wedge}^i = \partial_k B_{\wedge}^{ik} \Leftrightarrow \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} \quad \text{или} \quad E_{\wedge}^i = \partial_j \Pi_{\wedge}^{ij} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{\Pi}. \quad (2.4)$$

Производная векторной плотности является дивергенцией.

$$\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i \Leftrightarrow \rho = \text{div } \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

Производная скалярной плотности считается равной нулю,

$$\partial \rho_{\wedge} \equiv 0 \Leftrightarrow \text{grad } \rho_{\wedge} \equiv 0, \quad (2.6)$$

потому что ρ_{\wedge} не имеет контравариантных индексов для свертки. Производная (2.6) аналогична внешней производной N -формы, где N есть размерность пространства. Это хорошо видно, если использовать дуальное выражение плотности ρ_{\wedge} : $\partial \rho_{\wedge} = \partial(\rho_{jkl}^* \varepsilon^{jkl})/3! = \partial_{[i} \rho_{jkl]}^* \varepsilon^{jkl} = 0$. Здесь ради удобства и краткости производная обозначена символом ∂ без индексов. Такое может встречаться и далее.

Можно проверить, что использованное здесь определение дифференцирования удовлетворяет обычному правилу внешнего дифференцирования внешнего произведения дифференциальных форм [9], например, $\partial(\alpha_{\wedge}^p \beta_{\wedge}^q) = \partial \alpha_{\wedge}^p \beta_{\wedge}^q + (-1)^p \alpha_{\wedge}^p \partial \beta_{\wedge}^q$. При $p = q = 1$ будет выглядеть так $\partial_{[i}(\alpha_j \beta_k]) = \partial_{[i} \alpha_j \beta_k] + \alpha_{[j} \partial_i \beta_k] = \partial_{[i} \alpha_j \beta_k] - \alpha_{[i} \partial_j \beta_k]$.

В общем случае мы называем производное поле *границей*, а дифференцируемое поле называем *наполнением* этой границы. Это выглядит так:

(граница) = ∂ (наполнение). Например,

$$\rho_{\wedge} = \partial E_{\wedge}^i, \quad E_i = \partial \phi, \quad B_{ij} = \partial A_j, \quad E_{\wedge}^i = \partial \Pi_{\wedge}^{ij}, \quad j_{\wedge}^i = \partial B_{\wedge}^{ik}, \quad \partial B_{ij} = 0. \quad (2.7)$$

Наш термин «граница» в отношении форм эквивалентен стандартному термину «точная форма». Стандартный термин,

соответствующий нашему «наполнению», по-видимому, отсутствует. Термин «граница» оправдан, потому что, например, зарядовая плотность ρ_{\wedge} ограничивает силовые трубки плотности электрического поля E_{\wedge}^i в соответствии с $\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i$ (рис. 1, 8a). Двойные поверхности поля E_i ограничивают поле электрического потенциала ϕ в соответствии с $E_i = \partial_i \phi$ (рис. 8b). Трубки магнитного поля B_{ij} ограничивают биперверхности ковекторного поля магнитного потенциала A_j в соответствии с $B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]}$ (рис. 6b).

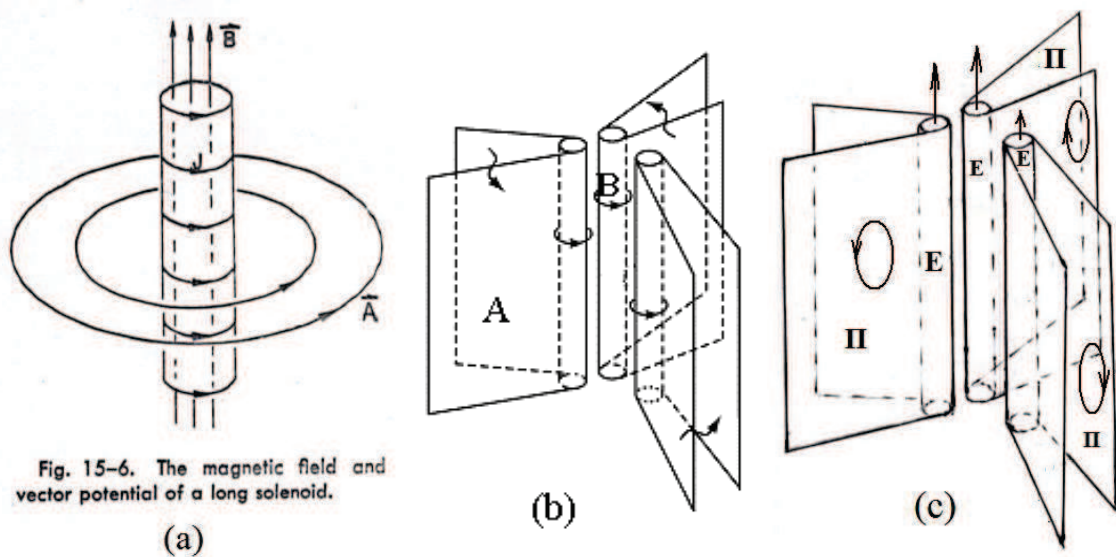


Рис. 6. Границы и наполнения. (a) Традиционное изображение магнитного поля и векторного потенциала [4]. (b) Трубки (без концов) замкнутого поля B_{ij} ограничивают биперверхности ковекторного потенциала A_j . Эти биперверхности наполняют пространство вокруг трубок. (c) Трубки (без концов) замкнутого поля E_{\wedge}^i ограничивают биперверхности бивекторного электрического потенциала Π_{\wedge}^{ij} .

При переходе от наполнения к границе сохраняется тип ориентации. Внешняя ориентация биперверхностей A_j соответствует внешней ориентации трубок B_{ij} (рис. 6b). Трубки электрической векторной плотности E_{\wedge}^i с внутренней ориентацией ограничивают биперверхности с

внутренней ориентацией (би)векторного электрического потенциала Π_{Λ}^{ij} в соответствии с $E_{\Lambda}^i = \partial_j \Pi_{\Lambda}^{ij}$ (рис. 6с). Так же трубки векторной плотности тока j_{Λ}^i с внутренней ориентацией ограничивают биповерхности магнитного поля B_{Λ}^{ij} в соответствии с $j_{\Lambda}^i = \partial_j B_{\Lambda}^{ij}$ (рис 10а).

С другой стороны, символ ∂ означает «граница» в теории множеств. И это как раз то значение, которое имеет наш символ ∂ .

Однако, для того, чтобы что-то ограничивать, граница должна быть замкнута. Так оно и есть. Двукратное дифференцирование дает ноль, $\partial\partial = 0$. Например, если $E_i = \partial_i \phi$, то $\partial_{[k} E_{i]} = \partial_{[k}^2 \phi = 0$. Так что граница границы равна нулю. Если граница некоторого поля равна нулю, мы говорим, что поле замкнуто. Например, поле E_i в формуле (2.1) и поле B_{ij} замкнуты. Соответственно, биповерхности поля E_i на рис. 8b замкнуты, и трубки поля B_{ij} на рис. 6b не имеют концов. Трубки поля B_{ij} могли бы оканчиваться на магнитных монополях, но таких нет в природе. Пример замкнутого электрического векторного поля E_{Λ}^i , $\partial_i E_{\Lambda}^i = 0$, представлен на рис. 6с и рис. 2а (там должны быть изображены трубки, а не силовые линии).

Граница не имеет границы, но граница имеет *наполнение* в силу теоремы Пуанкаре (в пространстве без топологических осложнений или локально). Мы говорим, что биповерхности поля A_i на рис. 6b наполняют пространство, вокруг замкнутых (бесконечно длинных) трубок поля B_{ij} , которые являются их границей, $B_{ij} = \partial A_j$, а биповерхности (би)векторного электрического потенциала Π_{Λ}^{ij} наполняют пространство вокруг трубок поля E_{Λ}^i , $E_{\Lambda}^i = \partial_j \Pi_{\Lambda}^{ij}$ на рисунке 6с, который отличается от рис. 6b заменой внешней ориентации на внутреннюю. В случае $\rho_{\Lambda} = \partial E_{\Lambda}^i$ силовые трубки

поля E_x^i наполняют пространство вокруг зарядовой плотности ρ_\wedge (рис 8a), а в случае $E_i = \partial\phi$ скалярное поле ϕ наполняет замкнутые биповерхности поля E_i (рис. 8b).

Таким образом, символ ∂ выражает отношение между границей и ее наполнением, т.е. ∂ является оператором границы. Отметим, что граница некоторого поля однозначна, в то время как наполнение границы не однозначно. Обычно к наполнению можно добавить замкнутое поле. Такое добавление не изменяет границы. Тем не менее, различные наполнения некоторой границы не все эквивалентны между собой. Имеются *истинные* наполнения (или класс истинных наполнений), которые выделяются с помощью операции *сопряжения*, рассматриваемой в следующем разделе.

Мы подчеркиваем, что все представленные здесь дифференциальные операции являются ковариантными операциями в том смысле, что их запись не зависит от того, евклидовы или криволинейные координаты использованы, и все частные производные являются ковариантными производными без использования символов Кристоффеля, обычно входящих в определение ковариантных производных. Например, $\partial_k B_\wedge^{ik} = \nabla_k B_\wedge^{ik}$, $\partial_{[i} A_{j]} = \nabla_{[i} A_{j]}$, где ∇_i является символом ковариантной производной.

Когда наш символ ∂ применяется к форме, он означает внешнее дифференцирование, вместо стандартного обозначения d [9,10]. Например, ∂B_{ij} означает три-форму $\zeta = d^2 B$, которая в координатном представлении выглядит $\zeta_{kij} = \partial B_{ij} = 3\partial_{[k} B_{ij]} = \partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki}$ (2.3). Мы убеждены, что стандартное использование символа d для обозначения внешнего дифференцирования сугубо антипедагогично. Символ d , символ дифференциала, применяется в физике и математике для обозначения инфинитезимальной величины. Например, $dq = \rho(x)dV$ обозначает

инфинитезимальный заряд инфинитезимального объема dV . Другой пример: $\mathbf{r} + \mathbf{v}dt = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, где \mathbf{v} есть скорость, а $d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$ есть инфинитезимальное приращение радиус-вектора \mathbf{r} за время dt , и dx, dy, dz суть инфинитезимальные приращения координат его конца. Также пишут $df(x) = f'(x)dx$, и можно записать $d(df) = d^2 f = f''(dx)^2$ или даже $d^2 f = f''(dx)^2 + f' d^2 x$.

Вопреки этому, в теории дифференциальных форм символ d используется как оператор, который каждой p -форме ω^p ставит в соответствие $(p+1)$ -форму $d\omega^p$, и $d(d\omega) = 0$ всегда [9,10]. Соответственно, выражения dx, dy, dz суть безиндексные обозначения координатных 1-форм, т.е. координатных ковекторов, а не компонентов инфинитезимального вектора $d\mathbf{r}$. Т.е. dx, dy, dz означают: $dx = \partial_i x = \delta_i^1$, $dy = \partial_i y = \delta_i^2$, $dz = \partial_i z = \delta_i^3$, где δ_i^j есть символ Кронекера.

Такая путаница недопустима. Возможно, двусмысленность символа d объясняется тем, что область применения теории дифференциальных форм не пересекалась с областью применения обычной физики и математики. Однако, сейчас мы постоянно рассматриваем электромагнитные поля как дифференциальные формы. Поэтому двусмысленность символа d должна быть устранена. Понимание этого проявилось, в частности, в книге Шутца [11]. Там применена половинчатая мера по устранению этой двусмысленности: там используется тильда чтобы отличать дифференциал d от внешней производной \tilde{d} .

Глава 3. Сопряжение, оператор Ходжа, кограница

Поднимание и опускание тензорных индексов обычно выполняется метрическим тензором g^{ik} или g_{ik} . Однако в электромагнетизме этот процесс сопровождается переходом между дифференциальной формой и контравариантной плотностью, например, между ковектором E_i и векторной плотностью E_{\wedge}^i , как показано на рис. 7а. Поэтому в этот процесс включен корень из детерминанта метрического тензора, $\sqrt{g_{\wedge}}$, который является скалярной плотностью веса +1. Так что, вместо g^{ik} или g_{ik} , в электромагнетизме используется тензорная плотность $g_{\wedge}^{ik} = g^{ik} \sqrt{g_{\wedge}}$ или $g_{\wedge}^{ik} = g_{ik} / \sqrt{g_{\wedge}}$. Если применяются декартовы координаты с элементом длины $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, то абсолютное значение этого детерминанта равно единице, однако корень из детерминанта имеет существенное геометрическое значение.

Процесс поднятия или опускания тензорных индексов изменяет геометрический смысл поля. Этот процесс в электродинамике мы называем *сопряжением* [12] и обозначаем пяти-лучевой звездочкой $*$ (в отличие от оператора Ходжа $*$ [10,13]). Например,

$$*E_i = g_{\wedge}^{ij} E_j = E_{\wedge}^i, \quad *E_{\wedge}^k = g_{\wedge}^{ik} E_{\wedge}^k = E_i, \quad *B_{\wedge}^{mn} = g_{mi} g_{\wedge}^{nj} B_{\wedge}^{mn} = B_{ij}, \quad *B_{ij} = g^{im} g_{\wedge}^{jn} B_{ij} = B_{\wedge}^{mn} \quad (3.1)$$

На практике сопряжение связано с изменением физической размерности величин и их названий. В формулу сопряжения включаются размерные постоянные $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В м, $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ В сек²/Кл м; вводятся новые термины: индукция электрического поля, $D_{\wedge}^i = \epsilon_0 g_{\wedge}^{ij} E_j$, и напряженность магнитного поля H_{\wedge}^{mn} , $H_{\wedge}^{mn} = g_{\wedge}^{im} g^{jn} B_{ij} / \mu_0$. Мы не будем следовать здесь этой практике, поскольку введение дополнительных

названий и обозначений, по нашему мнению, оправдано только в случае учёта поляризации и/или намагничивания среды.

Сопряжение, очевидно, инволютивно: $**=1$. Мы говорим, что поле и сопряженное ему поле образуют *тандем*. Например, E_i & E_{\wedge}^i или B_{\wedge}^{ij} & B_{ij} суть тандемы. Они изображены на рисунках 7а и 7б. При сопряжении тип ориентации геометрического образа изменяется на противоположный.

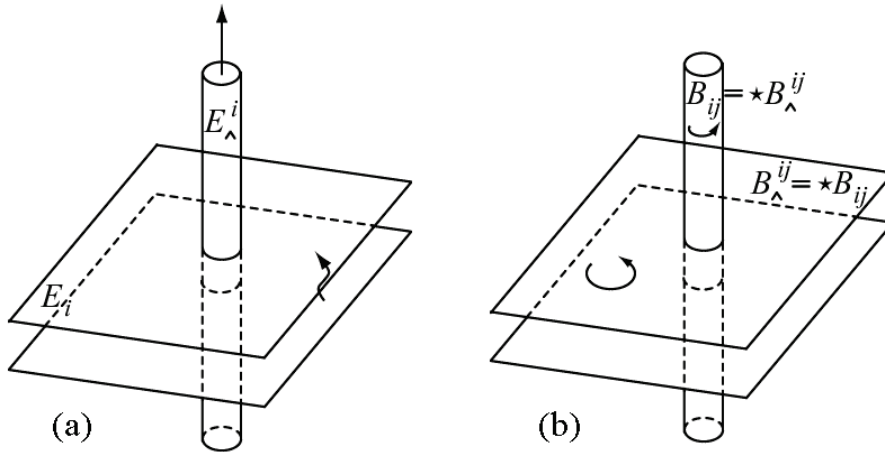


Рис. 7. (а) Взаимно сопряженные ковектор и векторная плотность образуют тандем, например, E_i & E_{\wedge}^i . Элемент двойной поверхности ортогонален силовой трубке. Внешняя ориентация биперфорности комплементарна внутренней ориентации трубки. (б) Взаимно сопряжённые 2-форма и бивекторная плотность образуют тандем. Внутренняя ориентация поверхности комплементарна внешней ориентации трубки.

Сопряжение $*$ отличается от операции Ходжа $*$. Оператор Ходжа выполняет сопряжение $*$, но кроме того производит затем дуализацию, то есть перенумеровывает компоненты поля с помощью антисимметричной псевдоплотности $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$. Например, $*E_i \stackrel{def}{=} \tilde{\varepsilon}_{jmn} *E_i = \tilde{\varepsilon}_{jmn} g_{\wedge}^{ij} E_i = \tilde{\varepsilon}_{jmn} E_{\wedge}^j = E_{mn}^*$. Здесь оператор Ходжа преобразует 1-форму E_i в 2-псевдоформу E_{mn}^* . Однако перенумерация не имеет физического и геометрического значения, и E_{mn}^* имеет тот же самый геометрический смысл, что и векторная плотность $E_{\wedge}^j = *E_i$. В то же время, гораздо приятнее иметь дело с векторной

плотностью E_\wedge^j , чем с 2-псевдоформой E_{mn}^* . Поэтому добавление перенумерации к сопряжению не имеет смысла. К тому же, оператор Ходжа не применим к контравариантным плотностям. Мы не используем оператор Ходжа.

В отличие от сопряжения, операция Ходжа не инволютивна. Двойное применение операции Ходжа может быть равносильно умножению на -1 в пространствах чётной размерности из-за двойной дуализации [13, p.314]: $**\omega^p = (-1)^{p(n-p)} \omega^p$, где n есть размерность пространства. Например, полагая $a, b, \dots = 1, 2$, имеем для ковектора E_a : $**E_a = \varepsilon_{ea}^{\sim} g_\wedge^{ed} \varepsilon_{cd}^{\sim} g_\wedge^{cb} E_b = -g_\wedge^{ac} g_\wedge^{cb} E_b = -E_a$. Значит, наше утверждение, что дуализация не изменяет геометрический смысл формы, не всегда верно. Его можно сделать верным, если ввести следующее правило. При дуализации плотности или дифференциальной формы, суммирование, как обычно, производится по передним индексам символа ε , $\varepsilon_{jmn}^{\sim} E_\wedge^j = E_{mn}^*$. При дуализации псевдовелчин, суммирование происходит по задним индексам символа ε , $E_\wedge^j = E_{mn}^* \varepsilon^{jmn}$. Впрочем, мы обычно не используем ни псевдовеличин, ни символа ε .

Для сокращения мы будем в дальнейшем иногда называть контравариантные антисимметричные плотности сопряженными формами или кратко *коформами*. Например, форма B_{ij} и коформа $B_\wedge^{mn} = *B_{ij}$ образуют тандем. Дуализация переводит коформы в псевдоформы. Например, коформа B_\wedge^{mn} и псевдоформа $B_i^* = \varepsilon_{mni}^{\sim} B_\wedge^{mn}$ взаимно дуальны.

Замечательно, что сопряжение обычно превращает замкнутое поле в не замкнутое и наоборот. Например, безвихревое векторное электрическое поле E_\wedge^i , для которого $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, явно не замкнуто, зарядовая плотность является его границей, $\rho_\wedge = \partial_i E_\wedge^i$ (рис. 8a). Однако после сопряжения оно делается замкнутым полем: $\partial * E_\wedge^i = \partial_{[j} g_{k]i}^{\wedge} E_\wedge^i = \partial E_k = 0$ (рис. 8b). Наоборот,

замкнутое поле B_{ij} превращается сопряжением в поле $B_{x\wedge}^{mn} = \star B_{ij}$, которое имеет границей плотность тока:

$$\partial B_{ij} = 0, \text{ но } \partial \star B_{ij} = \partial_n (g^{im} g^{jn} B_{ij}) = \partial_n B_{x\wedge}^{mn} = j_{\wedge}^m. \quad (3.2)$$

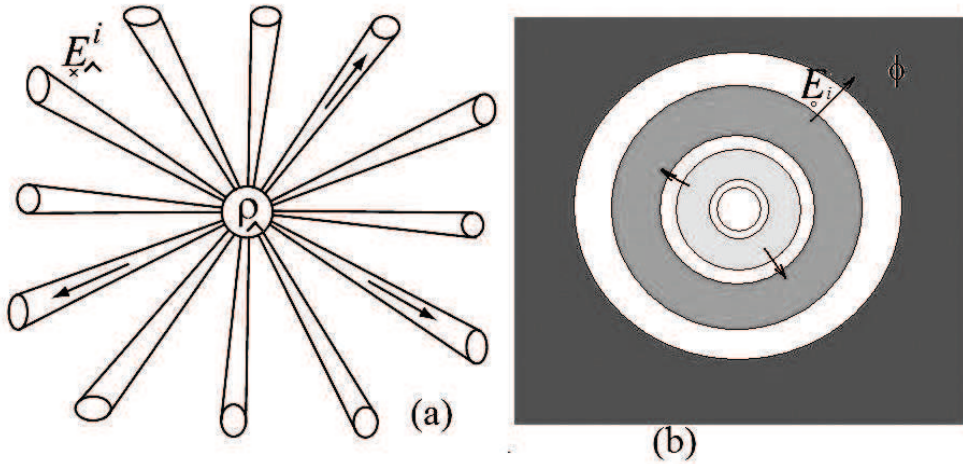


Рис. 8. Поля $E_{x\wedge}^i$ и E_i взаимно сопряжены. (а) Поле $E_{x\wedge}^i$ сопряженно-замкнуто. Оно наполняет пространство вокруг своей границы, которой является плотность ρ_{\wedge} . (б) Замкнутые биповерхности поля E_i представлены в разрезе. Поле E_i является границей для скалярного поля ϕ . Плотность заливки пропорциональна величине поля ϕ . Поле ϕ наполняет свою границу.

Поля, замкнутые до или после применения сопряжения, мы называем *сопряженно-замкнутыми* или кратко *козамкнутыми* полями. Договоримся отмечать крестиком только те незамкнутые поля, которые сопряженно замкнуты. Так мы поступили с безвихревым полем $E_{x\wedge}^i$. Так же мы отметили козамкнутое магнитное поле $B_{x\wedge}^{mn}$, у которого есть граница $\partial_n B_{x\wedge}^{mn} = j_{\wedge}^m$, но которое замкнуто после сопряжения $\partial \star B_{x\wedge}^{mn} = \partial B_{ij} = 0$. *Истинное наполнение* некоторой границы, о котором упоминалось в предыдущей главе, должно быть козамкнуто. Добавление замкнутого поля к наполнению границы не меняет границы, но нарушает истинность наполнения, поскольку замкнутое поле обычно не бывает одновременно козамкнутым. Поля, которые одновременно замкнуты и козамкнуты, так

называемые тандемно замкнутые поля, мы рассмотрим позже. Отметим только, что если метрика сопряжения положительно определена, то *ограниченное* тандемно замкнутое поле может быть только константой.

Например, истинным наполнением плотности заряда ρ_\wedge является козамкнутое электрическое поле $E_{\times\wedge}^i$ (рис. 1, 8а). Добавление к нему замкнутого индукционного поля $E_{\circ\wedge}^i$ не меняет границы, $\rho_\wedge = \partial_i(E_{\times\wedge}^i + E_{\circ\wedge}^i) = \partial_i E_{\times\wedge}^i$. Однако суммарное поле $E_\wedge^i = E_{\times\wedge}^i + E_{\circ\wedge}^i$, имеющее ту же границу, не является истинным наполнением плотности ρ_\wedge , поскольку E_\wedge^i , а, значит, и всё поле E_\wedge^i не козамкнуто:

$$\partial * E_\wedge^i = \partial * (E_{\times\wedge}^i + E_{\circ\wedge}^i) = \partial(E_{\circ i} + E_{\times i}) = 2\partial_{[k} E_{i]} = -\dot{B}_{ki}.$$

В теории дифференциальных форм важную роль играет так называемый *кодифференциал* от формы, который понижает степень формы. Он определяется через двойное применение оператора Ходжа [13, р. 315]:

$$\delta \omega = (-1)^{p \text{ def}} (-1)^{np+n+1} * \partial * \omega, \quad (3.3)$$

где ∂ есть символ внешнего дифференцирования, n есть размерность пространства, и p есть степень формы ω . Можно показать, что кодифференциал связан с конструкцией $*\partial*$ простой формулой, не зависящей от размерности пространства

$$\delta \omega = (-1)^p * \partial * \omega. \quad (3.4)$$

Здесь мы ограничимся демонстрацией верности этого равенства для $n = 2, p = 2$. В данном случае, согласно (3.3),

$$\delta \omega_{ab} = -*\partial*\omega_{ab} = -\tilde{\varepsilon}_{fh} g_\wedge^{fe} \partial_e \tilde{\varepsilon}_{cd} g_\wedge^{ca} g^{db} \omega_{ab}. \quad (3.5)$$

Но $\tilde{\varepsilon}_{fh} g_\wedge^{fe} = g_{fh}^\wedge \varepsilon_{\sim}^{ef}$. Поэтому

$$\delta \omega_{ab} = -g_{fh}^\wedge \varepsilon_{\sim}^{ef} \tilde{\varepsilon}_{cd} g_\wedge^{ca} g^{db} \partial_e \omega_{ab} = -g_{fh}^\wedge \delta_{cd}^{ef} g_\wedge^{ca} g^{db} \partial_e \omega_{ab} = -g_{dh}^\wedge g_\wedge^{ca} g^{db} \partial_e \omega_{ab} = -\partial^a \omega_{ah}. \quad (3.6)$$

С другой стороны, согласно определению сопряжения,

$$*\partial*\omega_{ab} = g^{hc}\partial_d g_{\lambda}^{ca} g^{db}\omega_{ab} = \delta_h^a \partial^b \omega_{ab} = -\partial^b \omega_{bh}. \quad (3.7)$$

То есть в данном случае $\delta\omega^p = *\partial*\omega^p$, что и требовалось показать.

Мы будем иногда использовать обозначение

$$\partial_x = *\partial*, \quad \partial_x = (-1)^p \delta\omega^p \quad (3.8)$$

и будем называть конструкцию (3.8) оператором кограницы. Этот оператор осуществляет сдвиг замкнутого поля по *цепочке полей* (глава 4) на три позиции влево, тогда как оператор границы, ∂ , сдвигает козамкнутое поле на одну позицию влево. Поэтому, применённый к форме, оператор ∂_x понижает степень формы, а не увеличивает её, как ∂ . Например, $\rho_x = \partial_x E_i$. (Здесь возникла не замкнутая плотность заряда ρ_{λ} , а скалярная функция, которая козамкнута, $\rho_x = *\rho_{\lambda}$). В отличие от кодифференциала, оператор кограницы применим и к коформам, то есть к контравариантным плотностям. Кодифференциал и кограница козамкнутого поля равны нулю.

Глава 4. Цепочки полей

Свойство сопряжения превращать замкнутые поля в незамкнутые обеспечивает существование бесконечных или конечных цепочек полей. Мы представляем здесь в качестве примера бесконечную цепочку электростатики.

$$\dots(\partial) \underset{\times}{\rho}(\star) \underset{\circ}{\rho}_{\wedge}(\partial) \underset{\times}{E}_{\wedge}^i(\star) \underset{\circ}{E}_i(\partial) \underset{\times}{\phi}(\star) \underset{\circ}{\phi}_{\wedge}(\partial) \underset{\times}{Z}_{\wedge}^i(\star) \underset{\circ}{Z}_i(\partial) \underset{\times}{\psi}(\star) \underset{\circ}{\psi}_{\wedge}(\partial) \dots \quad (4.1)$$

Здесь звенья цепочки, т.е. поля $\rho_{\wedge}(x)$, $E_{\wedge}^i(x)$, $\phi_{\wedge}(x)$, $Z_{\wedge}^i(x)$, *etc.*, разделены символами (∂) и (\star) . Это значит, например, что $\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i$, $E_{\wedge}^i = \star E_i$, $E_i = \partial_i \phi$, $\phi_{\wedge} = \partial_i Z_{\wedge}^i$. Здесь Z^i есть так называемый вектор Герца (см., например, [14] с. 128), а ψ есть некоторое гипотетическое поле. Скалярная функция, например, $\phi(x) = \phi_{\wedge} / \sqrt{g_{\wedge}}$ козамкнута, поскольку скалярная плотность $\phi_{\wedge}(x)$ считается замкнутой.

Если $\rho_{\wedge} = \delta_{\wedge}(x)$ является дельта функцией Дирака, то мы имеем дело с полем точечного заряда. В этом случае цепочка в явном виде выглядит так:

$$\dots \underset{\circ}{\delta}_i(\partial) \underset{\times}{\delta}(\star) \underset{\circ}{\delta}_{\wedge}(\partial) \frac{r_{\wedge}^i}{4\pi r^3}(\star) \frac{r_i}{4\pi r^3}(\partial) \frac{-1}{4\pi r}(\star) \frac{-1_{\wedge}}{4\pi r}(\partial) \frac{-r^i}{8\pi r}(\star) \frac{-r_i}{8\pi r}(\partial) \frac{-r}{8\pi}(\star) \frac{-r_{\wedge}}{8\pi}(\partial) \dots \quad (4.2)$$

Действительно, замкнутая плотность точечного заряда $\rho_{\wedge}(x) = \delta_{\wedge}(x)$ является границей козамкнутой плотности векторного электрического поля $E_{\wedge}^i = r_{\wedge}^i / 4\pi r^3$, а сопряженное ему замкнутое ковекторное поле $E_i = r_i / 4\pi r^3$ является границей потенциала $\phi = -1/4\pi r$ и т.д.

Выписанные здесь дельта функции сосредоточены в нуле. Известно интегральное свойство такой дельта функции $\delta_{\wedge}(x)$, являющейся на самом деле скалярной плотностью:

$$\int \delta_{\circ \wedge}(x) f(x) dV^{\wedge} = f(0), \quad (4.3)$$

где $f(x)$ есть некоторая функция.

Цепочка (4.1), как и цепочка (4.2), содержит дивергенции векторных плотностей и градиенты функций. Будем говорить, что эти цепочки имеют тип $\{0,1\}$, таковы степени входящих в них дифференциальных форм.

Цепочка (4.1) – не единственная. Цепочка (4.4) *комплементарна* цепочке (4.1) относительно векторных тандемов:

$$\dots Q_{\circ \wedge}^i(\partial) \xi_{\times}^{ij}(\star) \xi_{\circ kl}(\partial) E_{\times l}^i(\star) E_{\circ \wedge}^i(\partial) \Pi_{\times \wedge}^{ij}(\star) \Pi_{\circ kl}(\partial) Z_{\times l}^i(\star) Z_{\circ \wedge}^i(\partial) R_{\times \wedge}^{ij}(\star) \dots \quad (4.4)$$

Эта цепочка имеет тип $\{1,2\}$. Она является электростатической цепочкой с соленоидальным электрическим полем $E_{\circ \wedge}^i$, в которой источником или границей такого поля (после сопряжения) служит ток магнитных монополей $\xi_{\circ kl}$: формула $\xi_{\circ kl} = 2\partial_{[k} E_{\times l]}$ означает $\xi = \text{rot } E$ (ограничиваясь статическим случаем, мы не рассматриваем здесь переменное магнитное поле как на рис. 2b). Ток магнитных монополей порождает тандем соленоидального электрического поля $E_{\times l}^i(\star) E_{\circ \wedge}^i$, который, в свою очередь, является границей (би)векторного электрического потенциала $\Pi_{\times \wedge}^{ij}$: формула $E_{\circ \wedge}^i = \partial_j \Pi_{\times \wedge}^{ij}$ означает $E = \text{rot } \Pi$. Так что цепочка типа $\{1,2\}$ содержит только роторы.

Однако цепочку (4.4) можно интерпретировать как магнитостатическую цепочку заменой $E \rightarrow j$, $\Pi \rightarrow B$, $Z \rightarrow A$:

$$\dots Q_{\circ \wedge}^i(\partial) \xi_{\times}^{ij}(\star) \xi_{\circ kl}(\partial) j_{\times l}^i(\star) j_{\circ \wedge}^i(\partial) B_{\times \wedge}^{ij}(\star) B_{\circ kl}(\partial) A_{\times l}^i(\star) A_{\circ \wedge}^i(\partial) R_{\times \wedge}^{ij}(\star) \dots \quad (4.5)$$

(мы не изменили обозначения гипотетических полей Q, ξ, R левее плотности тока j и правее векторного потенциала A). Гипотетическое поле $\xi_{\circ kl}$ из этой цепочки названо в разделе 5.3 пра-током. Оно

изображается замкнутыми трубками с внешней ориентацией, как и поле тока магнитных монополей в цепочке (4.4).

Можно составить цепочку типа {2,3}, комплементарную цепочкам (4.4), (4.5) относительно бивекторного тандема:

$$\dots \underset{\times}{\xi}_{kl}(\star) \underset{\circ}{\xi}^{ij}(\partial) \underset{\times}{\zeta}^{ijr}(\star) \underset{\circ}{\zeta}_{mkl}(\partial) \underset{\times}{B}_{kl}(\star) \underset{\circ}{B}^{ij}(\partial) \underset{\times}{\Phi}^{ijr}(\star) \underset{\circ}{\Phi}_{mkl}(\partial) \underset{\times}{R}_{kl}(\star) \underset{\circ}{R}^{ij} \dots \quad (4.6)$$

Эта цепочка соответствует потенциальному магнитному полю. Тандем Φ представляет магнитный псевдоскалярный потенциал $\underset{\times}{\Phi}^{ijr} \tilde{\varepsilon}_{ijr} = \Phi^*$. Формула $\underset{\circ}{B}^{ij} = \partial_r \underset{\times}{\Phi}^{ijr}$ означает $\mathbf{B} = \text{grad } \Phi$, а формула $\underset{\circ}{\zeta}_{mkl} = 3\partial_{[m} \underset{\times}{B}_{kl]}$ означает $\zeta = \text{div } \mathbf{B}$, где ζ есть псевдоскалярная плотность магнитных монопольных зарядов. Цепочка типа {2,3} опять содержит только дивергенции и градиенты.

В трёхмерном пространстве существуют только эти три типа цепочек.

Глава 5. Наполнения сингулярных границ. Три примера

5.1. Поля электрического диполя

Интересно, что из цепочки, связанной с точечным зарядом (4.2), легко получить цепочку полей, связанную с точечным электрическим диполем. Для этого обозначим точку, являющуюся носителем дельта функции, через x' , $\delta_{\wedge}(x, x')$, и применим ко всей цепочке (4.2) оператор $p^{k'} \partial_{k'}$, где $p^{k'}$, вектор электрического момента в точке x' , а $\partial_{k'}$ оператор дифференцирования в точке x' :

$$\dots (*) p^{k'} \partial_{k'} \delta_{\wedge}(x, x') (\partial_i) p^{k'} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3} (*) p^{k'} \partial_{k'} \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3} (\partial_i) p^{k'} \partial_{k'} \frac{-1}{4\pi r} (*) \dots \quad (5.1)$$

Здесь замкнутая сингулярная дипольная плотность заряда имеет вид

$$\rho_{\wedge} = p^{k'} \partial_{k'} \delta_{\wedge}(x, x'), \text{ рис. 9а.} \quad (5.2)$$

Несингулярная модель этой плотности представлена на рис. 9а.

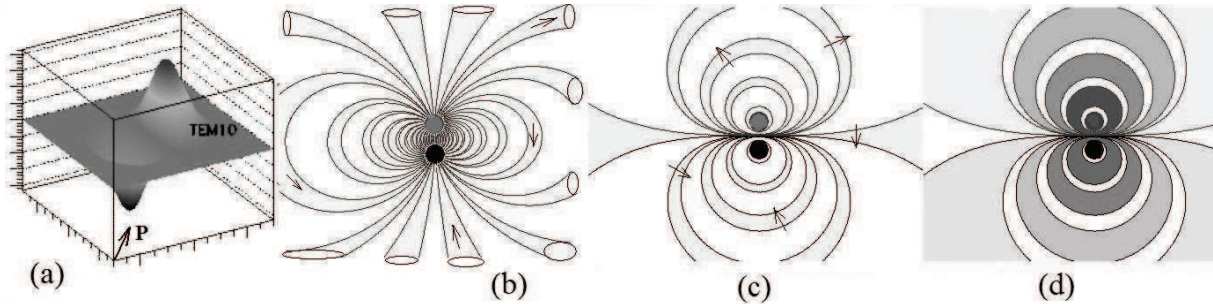


Рис. 9. (а) Модель производной дельта функции, умноженной на вектор \mathbf{P} , которая является плотностью заряда диполя. (б) Силовые трубки электрического поля диполя. Их границей служит плотность заряда предыдущего рисунка. (с) Разрез замкнутых биперверхностей поля, сопряженного к полю предыдущего рисунка (д) Поле потенциала, которое наполняет замкнутые биперверхности предыдущего рисунка.

Наполнением этой плотности является козамкнутая векторная плотность напряженности электрического поля диполя («безвихревое векторное поле»)

$$E_{\times \wedge}^i = p^{k'} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -p^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = \frac{-p_{\wedge}^i}{4\pi r^3} + \frac{3r_{\wedge}^i p^k r_k}{4\pi r^5}, \text{ рис. 9b.} \quad (5.3)$$

Мы для удобства произвели здесь замену переменной дифференцирования, используя тождество

$$\partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -\delta_{k'}^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} \quad (5.4)$$

Несингулярная модель поля $E_{\times \wedge}^i$ представлена на рис. 9b.

Поле $E_{\times \wedge}^i$ (5.3) (рис. 9b) является козамкнутым уже в силу принадлежности к цепочке (5.1). Его сопряжение, замкнутая ковекторная напряженность поля диполя (рис. 9c),

$$E_{\circ}^i = *E_{\times \wedge}^i = -p^k \partial_k \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \text{ рис. 9c,} \quad (5.5)$$

является границей потенциала ϕ (рис. 9d):

$$E_{\circ}^i = \partial_i \phi, \quad \phi = p^k \partial_k \frac{1}{4\pi r(x, x')} = \frac{-p^k r_k}{4\pi r^3}, \text{ рис. 9d.} \quad (5.6)$$

Для удобства на рис. 9d изображён традиционный потенциал $\varphi = -\phi = \frac{p^k r_k}{4\pi r^3}$, а не потенциал ϕ , встроенный в цепочку.

5.2. Поля токового колечка.

Магнитным аналогом точечного электрического диполя, является сингулярный кольцевой электрический ток с внутренней ориентацией $j_{\circ \wedge}^i$, который получается заменой электрического дипольного момента p^k в формуле (5.2) на магнитный момент $M^{ki} = M^{[ki]}$ кольцевого тока

$$j_{\circ \wedge}^i(x, x') = M^{ki} \partial_{k'} \delta_{\wedge}(x, x'). \quad (5.7)$$

(Правильнее было бы записать формулу (5.7), используя символ Кронекера $\delta_{i'}$, индексы которого принадлежат различным точкам, x и x' ,

$j_{\circ\wedge}^i = M^{k'i} \delta_{i'} \partial_{k'} \delta_{\wedge} (x, x')$, но мы часто будем опускать такой символ Кронекера для упрощения записи)

Применяя оператор $M^{k'i} \partial_{k'}$ к цепочке (4.2) (заменяв там индекс i на j), мы получаем цепочку

$$\dots (*) M^{k'i} \partial_{k'} \delta_{\wedge} (x, x') (\partial) M^{k'i} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^j(x, x')}{4\pi r^3} (*) M^{k'i} \partial_{k'} \frac{r_j(x, x')}{4\pi r^3} (\partial) M^{k'i} \partial_{k'} \frac{-1}{4\pi r} (*) \dots, \quad (5.8)$$

которая, к сожалению, не состоит из форм и коформ и потому не представляет собой полей, связанных с токовым колечком. Для получения цепочки полей, которая имеет тип $\{1,2\}$, следует «рукой» провести антисимметризацию, приводящую к магнитному полю токового колечка, и правильно выполнить сопряжение. Это даёт отрезок цепочки (4.5) между током $j_{\circ\wedge}^i$ (5.7) и векторным потенциалом A_{\times}^i :

$$\dots (*) M^{k'i} \partial_{k'} \delta_{\wedge} (x, x') (\partial) 2M^{k'i} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^{j1}(x, x')}{4\pi r^3} (*) 2M_{k'1} \partial^{k'} \frac{r_{j1}(x, x')}{4\pi r^3} (\partial) M_{k'j} \partial^{k'} \frac{1}{4\pi r} (*) \dots \quad (5.9)$$

Проведённая антисимметризация означает добавление ко второму звену цепочки (5.8) бездивергентного члена

$$- M^{k'j} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3}. \quad (5.10)$$

Такое добавление, не меняя дивергенцию второго звена цепочки, приводит к козамкнутому магнитному полю

$$B_{\times\wedge}^{ij} = 2M^{k'i} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^{j1}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -2M^{k'i} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^{j1}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \text{ рис. 10а,} \quad (5.11)$$

которое порождается токовым колечком (5.7), или наполняет его, или опирается на него (в формуле (5.11) опять использовано тождество (5.4)).

Несингулярная модель этого магнитного поля изображена на рис. 10а. Там же видно само токовое колечко, являющееся границей этого поля,

$$j_{\circ\wedge}^i = \partial_j B_{\times\wedge}^{ij} = M^{k'i} \partial_{k'} \partial_j \frac{r_{\wedge}^j(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} - M^{k'j} \partial_{k'} \partial_j \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = M^{k'i} \partial_{k'} \delta_{\wedge} (x, x'). \quad (5.12)$$

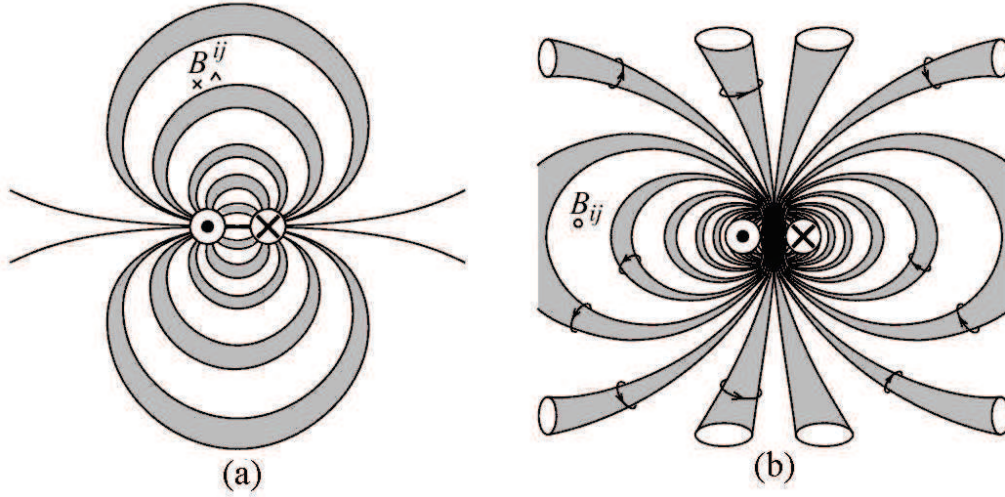


Рис. 10. (а) Разрез козамкнутых бипервностей B_x^{ij} с внутренней ориентацией, опирающихся на токовое колечко с внутренней ориентацией. (б) Замкнутые силовые трубки B_{ij} с внешней ориентацией, сопряжённые с бипервностями предыдущего рисунка. Они являются границами векторного отенциала A_x^j .

Сопряжение поля (5.11) приводит к замкнутому полю B_{ij} , несингулярная модель которого изображённа на рисунке 10б

$$B_{ij} = -2M_{k[i} \partial^k \frac{r_{j]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \text{ рис. 10б.} \quad (5.13)$$

Это поле служит границей векторного потенциала A_x^j

$$A_x^j = M_{kj} \partial^{k'} \frac{1}{4\pi r} = M_{kj} \partial^k \frac{-1}{4\pi r} = M_{kj} \frac{r^k}{4\pi r^3}, \quad (5.14)$$

поскольку $2\partial_{[i} A_{j]} = B_{ij}$. Бипервности поля A_x^j , опирающиеся на замкнутые трубки поля B_{ij} , не нарисованы.

Для дальнейшего представим поля A_x^j и B_{ij} в дуальном виде

$$A_x^{il} = \varepsilon_{ij}^{il} A_x^j = \varepsilon_{ij}^{il} \varepsilon_{kjm}^{\sim} M^m \frac{r^k}{4\pi r^3} = -2\delta_{km}^{[il]} M^m \frac{r^k}{4\pi r^3} = \frac{2M_{\star}^{[i} r_{\wedge}^{j]}}{4\pi r^3}. \quad (5.15)$$

$$B_{ij}^i = B_{ij} \varepsilon_{ij}^{ij} / 2 = -M_{\sim}^m \varepsilon_{mkl}^{\sim} \partial^k \frac{r_j}{4\pi r^3} \varepsilon^{ij} = 2\delta_{mk}^{[ij]} M_{\sim}^m \partial^k \frac{r_j}{4\pi r^3} = M_{\sim}^i \partial^j \frac{r_j}{4\pi r^3} - M_{\sim}^j \partial^i \frac{r_j}{4\pi r^3} =$$

$$= M^i \delta_{\wedge}(x, x') - M^j \partial_j \frac{r_{\wedge}^i}{4\pi r^3}. \quad (5.16)$$

5.3. Поля элемента тока. Козамкнутость порождений. Стерильность. Разложение Гельмгольца сингулярной конструкции $I^i \delta(x, x')$.

Альтернативой токовому колечку для создания магнитного поля можно рассматривать *элемент тока*, расположенный в точке x' .

$$j_{\wedge}^i = I^i \delta_{\wedge}(x, x'), \quad (5.17)$$

Этот элемент тока является источником, который порождает магнитное поле, но он, в отличие от токового колечка (5.7), не является ни замкнутым, ни козамкнутым. Другими словами, элемент тока (5.17) не встроен в цепочку. Тем не менее, для нахождения магнитного поля, порождаемого им, используют обычную формулу (1.7) закона Био-Савара,

$$B_{\times \wedge}^{ik}(x, x') = \int \frac{2j_{\wedge}^{[i''}(x'', x')r_{\wedge}^{k]}(x, x'')dV^{\wedge}}{4\pi r^3(x, x'')} = \int \frac{2I^{[i''}\delta_{\wedge}^{k]}(x'', x')r_{\wedge}^{k]}(x, x'')dV^{\wedge}}{4\pi r^3(x, x'')} = \frac{2I^{[i}r_{\wedge}^{k]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (5.18)$$

(Индекс i'' просто заменён в конце на индекс i , потому что подразумевается использование здесь декартовых координат).

Полученное поле $B_{\times \wedge}^{ik}$, как видно, совпадает с потенциалом $A_{\times \wedge}^{il}$ (5.15), отличаясь лишь внутренней ориентацией. Потому оно, в частности, козамкнуто. Впрочем, **порождение всегда козамкнуто**. Это следует из простого соотношения

$$\partial_{[l} g_{jk]} \frac{r^k}{r^3} = \frac{g_{k[l} \partial_{l]} r^k}{r^3} + r_{[j} \partial_{l]} \frac{1}{r^3} = \frac{g_{k[l} \delta_{l]}^k}{r^3} - 3 \frac{r_{[j} r_{l]}}{r^5} = 0. \quad (5.19)$$

Найдём теперь границу магнитного поля (5.18), то есть поле, которое входит в цепочку (4.5) вместо элемента тока (5.17). Являясь замкнутой, эта граница не равна элементу тока (5.17), который породил магнитное поле.

Оказывается, граница магнитного поля (5.18) равна замкнутой части элемента тока,

$$j_{\circ \wedge}^i = \partial_k B_{\times \wedge}^{ik}(x, x') = I^i \partial_k \frac{r_{\wedge}^k(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} - I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = I^i \delta_{\wedge}(x, x') - I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}.$$

(рис 11b) (5.20)

Замкнутое поле (5.20) изображается трубками с внутренней ориентацией на рис. 11b. Интересно, что плотность тока (5.20) геометрически отличается от магнитного поля (5.13), (5.16) (рис. 10b) только типом ориентации.

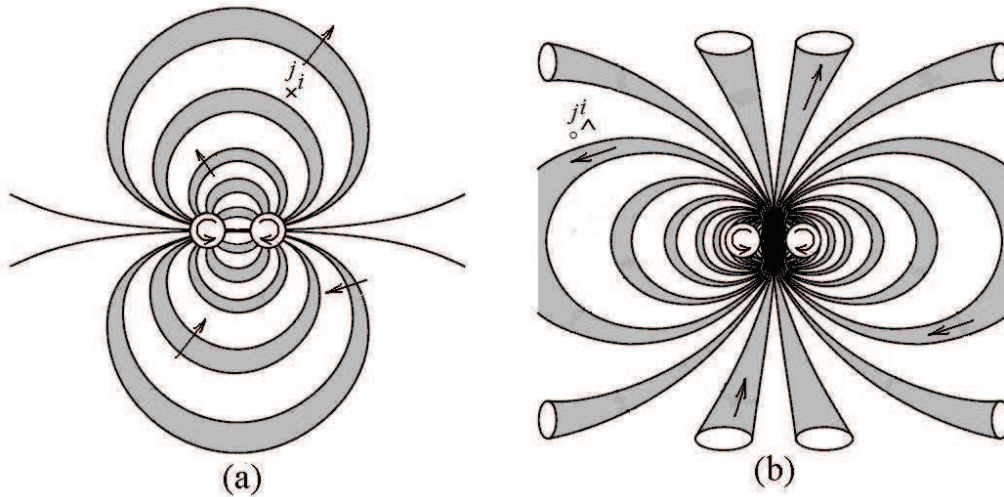


Рис. 11. (a) – это поле $j_{\times \wedge}^i$, сопряженное с полем $j_{\circ \wedge}^i$. Гиперповерхности поля $j_{\times \wedge}^i$ опираются на пра-токовое колечко с внешней ориентацией $\xi_{\circ \parallel}$. (b) – это замкнутая составляющая $j_{\circ \wedge}^i$ элемента тока $I^i \delta_{\wedge}(x, x')$, которая порождает магнитное поле.

Мы говорим, что замкнутая плотность тока (5.20) является замкнутой частью элемента тока потому, что она получается вычитанием из элемента тока козамкнутого поля

$$j_{\times \wedge}^i = I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (5.21)$$

которое, стало быть, является его козамкнутой частью. Этот козамкнутый ток геометрически совпадает с полем диполя (5.3) (рис. 9.b) с обратным

знаком и принадлежит некоей цепочке типа $\{0,1\}$, которая комплементарна магнитоэлектрической цепочке (4.5) относительно векторного тандема,

$$\dots (\partial) a_x^{\circ} (*) a_x^{\wedge} (\partial) j_x^i (*) j_x^i (\partial) b_x^{\circ} (*) b_x^{\wedge} (\partial) A_x^i (*) A_x^i (\partial) \dots \quad (5.22)$$

Поэтому, по сути, замкнутый ток (5.20) получается прибавлением к сингулярному элементу тока (5.17) поля типа электрического поля диполя. Классическая иллюстрация соотношения (5.20) приведена на рис.12, который использует рисунки из [15]. В книге [15] описывается составление замкнутого поля магнитной индукции \mathbf{B} из вектора намагничивания \mathbf{I} , который аналогичен нашему элементу тока, и козамкнутого поля напряженности магнитного поля \mathbf{H} .

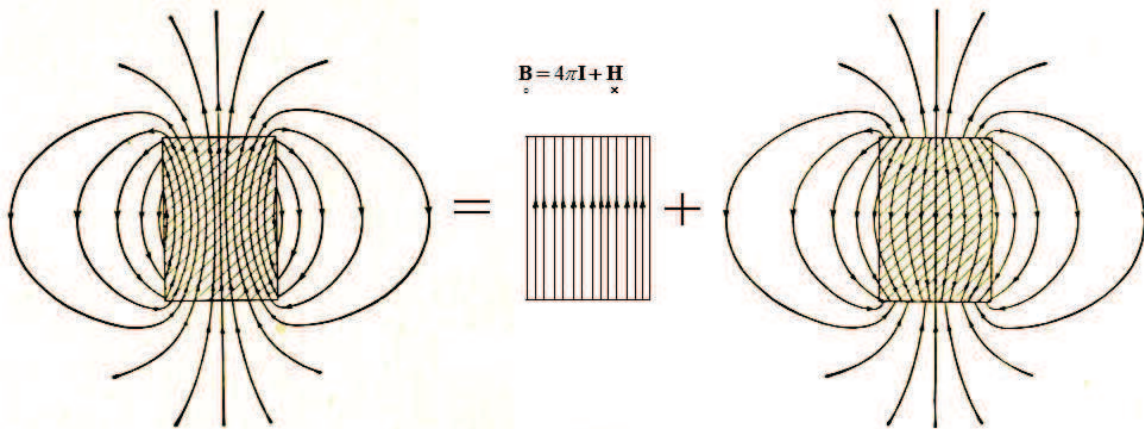


Рис. 12. Пояснение того, как замкнутое поле (5.20) получается вычитанием из элемента тока его козамкнутой части (5.21). На рисунке прибавляется поле, равное полю (5.21) с обратным знаком, похожее на поле диполя (5.3) (рис 9b) и на поле напряженности магнитного поля.

С другой стороны, формулу (5.20) можно рассматривать как разложение Гельмгольца сингулярного поля $I^i \delta_{\wedge}(x, x')$ на замкнутую и козамкнутую части:

$$I^i \delta_{\wedge}(x, x') = j_x^i + j_x^i, \quad \text{где } j_x^i = I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (5.23)$$

Эти части, j_{\circlearrowleft}^i , j_{\times}^i , изображаются трубками 11b и трубками 9b с обратным знаком. Формула (5.23) отражает ситуацию, отмеченную Джексоном [2, р. 242]: при разложении Гельмгольца локализованного поля, компоненты разложения занимают всё пространство.

Замечательно, что замкнутая часть (5.20) тока (5.17), очевидно, порождает то же магнитное поле (5.18), что и сам элемент тока (5.17), поскольку такое порождение козамкнуто и имеет ту же границу. Это означает, что козамкнутая часть (5.21) элемента тока (5.17) ничего не порождает. Мы говорим, что козамкнутые поля *стерильны*. Мы проиллюстрируем этот общий принцип на нашем примере.

Действительно, порождение козамкнутого тока (5.21), согласно закону Био-Савара, имеет вид

$$2 \int_{\times} j_{\times}^{[i]}(x') G_{\times}^{j]}(x, x') dV^{\wedge}, \quad (5.24)$$

где величина $G_{\times}^{j]}(x, x') = \frac{r_{\times}^j(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}$ козамкнута (это - функция Грина). Для

доказательства стерильности тока j_{\times}^i , представим подынтегральные сомножители выражения (5.24) в сопряженном виде в виде замкнутых полей и заменим получившийся замкнутый ток $j_{\circlearrowleft}^{k'}$ производной от некоторого потенциала $\Phi(x')$:

$$(5.24) \\ = 2 \int_{\circlearrowleft} j_{\circlearrowleft}^{k'} g_{\times}^{k'[i]}(x') g_{\times}^{j]} G_{\circlearrowleft}^{l]}(x, x') dV^{\wedge} = 2 \int \partial_{k'} \Phi(x') g_{\times}^{k'[i]}(x') g_{\times}^{j]} G_{\circlearrowleft}^{l]}(x, x') dV^{\wedge} \quad (5.25)$$

Теперь перебросим производную в интегранде, предполагая достаточную скорость убывания функций на бесконечности. В результате получим ноль в силу антисимметричности производной замкнутого поля $G_{\circlearrowleft}^{l]}(x, x')$ по x, x' , то есть в силу того, что $\partial_{[k'} G_{\circlearrowleft}^{l]}(x, x') = -\partial_{[k} G_{\circlearrowleft}^{l]}(x, x')$, а $\partial_{[k} G_{\circlearrowleft}^{l]}(x, x') = 0$:

$$\begin{aligned}
(5.25) &= -2 \int \Phi(x') g_{\wedge'}^{k'l'}(x') g_{\wedge}^{jl} \partial_{[k} \mathring{G}_{l]}(x, x') dV^{\wedge'} = \\
&= 2 \int \Phi(x') g_{\wedge'}^{ki}(x') g_{\wedge}^{jl} \partial_{[k} \mathring{G}_{l]}(x, x') dV^{\wedge'} = 0.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

То есть

$$2 \int_{\times} j_{\wedge'}^{[i'}(x') \frac{r_{\wedge}^{j]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} dV^{\wedge'} = 0, \tag{5.27}$$

что и требовалось показать.

Поскольку порождение всегда козамкнуто, а козамкнутые поля стерильны, то *порождение стерильно*. Т.е. порождение порождения равно нулю. Этот результат аналогичен принципу, что граница границы равна нулю. В конце раздела приведён пример непосредственного доказательства стерильности порождений.

Цепочка полей, инициированная элементом тока (5.17) пока представлена здесь пока двумя звеньями, замкнутым током j_{\wedge}^i (5.20) (рис. 11b) и козамкнутым магнитным полем B_{\wedge}^{ij} (5.18). Чтобы продолжить отрезок цепочки влево, сначала найдем козамкнутый *ковариантный* ток, сопряженный с замкнутым током (5.20),

$$j_{\times}^i = I_i \delta(x, x') - I^k \partial_k \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} \quad (\text{рис. 11a}). \tag{5.28}$$

Оператор границы ∂ , примененный к этому току, обращает в ноль его замкнутую часть, совпадающую с E_i :

$$\partial_{[l} I^k \partial_k \frac{r_{i]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = 0. \tag{5.29}$$

Поэтому граница тока j_{\times}^i имеет вид

$$\mathring{\xi}_{li} = 2\partial_{[l} j_{\times}^i] = 2I_{[l} \partial_{l]} \delta(x, x') \quad (\text{рис. 11a}). \tag{5.30}$$

Это – замкнутая трубка с внешней ориентацией (см. таблицу раздела 2). В результате гиперповерхности с внешней ориентацией, изображающие ток

j_{\times}^i , опираются на замкнутое сингулярное колечко с внешней ориентацией, которое можно назвать пра-током. Рис 11а иллюстрирует эту ситуацию.

Таким образом мы получаем отрезок цепочки полей, которая создана сингулярным элементом тока $j_{\wedge}^i = I^i \delta_{\wedge}(x, x')$ (5.17), не входящим в эту цепочку. Строчка (5.31) представляет этот отрезок, содержащий пра-токовое колечко $\xi_{\circ li}$, токовый тандем j_{\times}^i & $j_{\circ \wedge}^i$ и козамкнутое магнитное поле $B_{\times \wedge}^{ij}$, не представленное на рисунке

$$\dots (\xi_{\circ li} = 2I_{[i} \partial_{l]} \delta)(\partial)(j_{\times}^i = I_i \delta - I^k \partial_k \frac{r_i}{4\pi r^3})(*) (j_{\circ \wedge}^i = I^i \delta_{\wedge} - I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i}{4\pi r^3})(\partial)(B_{\times \wedge}^{ik} = \frac{2I^{[i} r_{\wedge}^{k]}}{4\pi r^3}) \dots$$

(рис. 11) (5.31)

$$\dots (j_{\circ \wedge}^i = M^{k'i} \partial_k \delta_{\wedge})(\partial)(B_{\times \wedge}^{ij} = -2M^{k[i} \partial_k \frac{r_{\wedge}^{j]}}{4\pi r^3})(*) (B_{\circ ij} = -2M_{k[i} \partial^k \frac{r_{j]}}{4\pi r^3})(\partial)(A_{\times j} = \frac{M_{kj} r^k}{4\pi r^3}) \dots$$

(рис. 10) (5.32)

Строчка, (5.32), приведена для сравнения. Она дублирует отрезок цепочки (5.9), созданной токовым колечком $j_{\circ \wedge}^i = M^{k'i} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x')$ (5.7) из предыдущего раздела. В этот отрезок входит само токовое колечко $j_{\circ \wedge}^i$, тандем магнитного поля $B_{\times \wedge}^{ij}$ & $B_{\circ ij}$ и козамкнутый потенциал $A_{\times j}$, не представленный на рисунке.

Поля в этих отрезках совпадают соответственно друг с другом геометрически, отличаясь только типом ориентации. Математически это можно увидеть, если представить один из отрезков в дуальном виде. Однако, одинаковые геометрические объекты имеют совершенно разный физический смысл.

Покажем теперь, что стерильность козамкнутого тока $j_{\times \wedge}^i(x)$, выраженная равенством (5.27), возникает непосредственно из-за того, что

козамкнутый ток $j_{\underset{x}{\wedge}}^i(x)$ сам является порождением в рамках цепочки (5.22).

Аналогично (1.1), имеем

$$\int_{\circlearrowleft} a_{\wedge'}(x') \frac{r_{\wedge}^j(x, x')}{4\pi r^3} dV^{\wedge'} = j_{\underset{x}{\wedge}}^i(x) \quad (5.33)$$

Подставим (5.33) в (5.24). Получим

$$\iint \frac{a_{\wedge''}(x'') r_{1\wedge}^{li}(x', x'') r_{\wedge'}^{kl}(x, x') dV^{\wedge''} dV^{\wedge'}}{4\pi r_1^3(x', x'') \cdot 4\pi r^3(x, x')} = 0. \quad (5.34)$$

Чтобы доказать последнее равенство, зафиксируем точки x'' и x . Тогда, из-за симметрии пространства, для каждого x' существует такое \tilde{x}' , что векторное произведение $r_1^{li} r^{kl}$ в точках x' и \tilde{x}' отличается только знаком. Так что, интегрирование по $dV^{\wedge'}$ дает ноль.

Покажем ещё, что козамкнутая форма стерильна так же, как козамкнутая векторная плотность в выражении (5.24). Ограничимся рассмотрением 1-формы $E_{\underset{x}{\wedge}}$. Порождение в этом случае имеет вид

$$\int_{\underset{x}{\wedge}} E_{\underset{x}{\wedge}}(x') \mathcal{G}_{\underset{x}{\wedge}}^i(x, x') dV^{\wedge'}. \quad \text{Выполнив сопряжение обоих сомножителей}$$

подынтегрального произведения, получим ноль как в формуле (5.26),

$$\int_{\underset{x}{\wedge}} E_{\underset{x}{\wedge}}^i(x') \mathcal{G}_{\underset{x}{\wedge}}(x, x') dV^{\wedge'} = \int_{\underset{x}{\wedge}} E_{\underset{x}{\wedge}}^i(x') \partial_{\underset{x}{\wedge}} \Phi(x, x') dV^{\wedge'} = - \int_{\underset{x}{\wedge}} \partial_{\underset{x}{\wedge}} E_{\underset{x}{\wedge}}^i(x') \Phi(x, x') dV^{\wedge'} = 0. \quad (5.35)$$

В заключение этого раздела получим важную формулу для козамкнутой части $j_{\underset{x}{\wedge}}^i$ (5.21) элемента тока j_{\wedge}^i (5.17). Обратите внимание, что для получения замкнутой части $j_{\underset{\circ}{\wedge}}^i$ (5.20) элемент тока надо было сначала проинтегрировать (5.18), а потом продифференцировать (5.20). Оказывается, для получения козамкнутой части $j_{\underset{x}{\wedge}}^i$ (5.21) элемент тока надо сначала продифференцировать, а затем проинтегрировать:

$$j_{\underset{x}{\wedge}}^i = \int_{\underset{x}{\wedge}} \partial_{\underset{x}{\wedge}} j_{\wedge''}^i(x'', x') \frac{r_{\wedge}^i(x, x'')}{4\pi r^3(x, x')} dV^{\wedge''}. \quad (5.36)$$

Действительно, заменяя в (5.36) индекс i'' на k'' , получим

$$(5.36) = \int \partial_{k''} I^{k''} \delta_{\Lambda''}(x'', x') \frac{r_{\Lambda}^i(x, x'')}{4\pi r^3(x, x'')} dV^{\Lambda''} = \int I^k \delta_{\Lambda''}(x'', x') \partial_k \frac{r_{\Lambda}^i(x, x'')}{4\pi r^3(x, x'')} dV^{\Lambda''}. \quad (5.37)$$

Мы перебросили производную в интегранде на второй сомножитель и изменили переменную дифференцирования, согласно (5.4). Теперь, из-за свойства дельта функции, мы и получаем (5.21)

$$j_{\Lambda}^i = I^k \partial_k \frac{r_{\Lambda}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (5.38)$$

В дальнейшем мы будем обозначать операцию порождения символом *dagger* †, иногда с индексом, например, †ⁱ ρ_Λ = E_Λⁱ, †^k j_Λⁱ = B_Λ^{ik}. Козамкнутость порождения, стерильность порождения и стерильность козамкнутых полей выражаются кратко так

$$\partial * \dagger = 0, \quad (5.39)$$

$$\dagger \dagger = 0, \quad (5.40)$$

$$\dagger * \partial = 0, \quad (5.41)$$

Кроме того, с точностью до такого поля, которое одновременно замкнуто и козамкнуто, справедливо разложение Гельмгольца

$$\omega = \underset{\circ}{\omega} + \underset{\times}{\omega} = \partial \dagger \omega + \dagger \partial \omega. \quad (5.42)$$

Это разложение обосновано только что на примере элемента тока j_{Λ}^i (5.17). Также видно, что порождение † и вычисление границы ∂ являются взаимно обратными операциями в следующем смысле:

$$\underset{\circ}{\omega} = \partial \dagger \underset{\circ}{\omega}, \quad \underset{\times}{\omega} = \dagger \partial \underset{\times}{\omega}, \quad \dagger = \dagger \partial \dagger, \quad \partial = \partial \dagger \partial. \quad (5.43)$$

Глава 6.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотренные выше порождения являются решениями дифференциальных уравнений первого порядка. В трёхмерном пространстве существуют четыре типа таких уравнений, соответственно существованию двух различных типов цепочек: $\{0,1\}$, $\{1,2\}$. (Цепочка типа $\{2,3\}$ дуализацией сводится к цепочке типа $\{0,1\}$ для псевдовеличин). Эти четыре типа уравнений следующие:

$$\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i, \quad (6.1)$$

$$E_i = \partial_i \phi, \quad (6.2)$$

$$j_{\wedge}^i = \partial_k B_{\wedge}^{ik}, \quad (6.3)$$

$$B_{ik} = 2\partial_{[i} A_{k]}. \quad (6.4)$$

6.1. Уравнение $\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i$

Можно считать, что решение уравнения (6.1), именно (1.1),

$$\int \rho(x') \frac{\mathbf{r}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} dV' = \mathbf{E}(x), \quad (1.1)$$

получено с использованием функции Грина

$$G_{\wedge}^i(x, x') = \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} \quad (6.5)$$

сингулярного уравнения

$$\delta_{\wedge}(x, x') = \partial_i G_{\wedge}^i(x, x'). \quad (6.6)$$

Действительно, если обе части равенства (6.6) умножить на скалярную плотность $\rho_{\wedge}(x')$ и проинтегрировать,

$$\rho_{\wedge}(x) = \int \rho_{\wedge}(x') \delta_{\wedge}(x, x') dV' = \partial_i \int \rho_{\wedge}(x') G_{\wedge}^i(x, x') dV', \quad (6.7)$$

можно увидеть, что справа под знаком производной возникло поле E_{\wedge}^i :

$$\dagger^i \rho_{\wedge}(x) = \int \rho_{\wedge'}(x') G_{\wedge}^i(x, x') dV^{\wedge'} = E_{\wedge}^i(x). \quad (6.8)$$

Двухточечная функция Грина $G_{\wedge}^i(x, x')$ (6.5) является векторной плотностью в точке x и скаляром в точке x' . Решение (1.1), (6.8) существует для произвольной достаточно хорошей функции $\rho_{\wedge}(x)$.

6.2. Уравнение $E_i = \partial_i \phi$.

Электрическое поле порождает скалярный потенциал

Можно считать, что решение уравнения (6.2), именно

$$\dagger^i E_i(x) = \int E_{r'}(x') \frac{r_{\wedge'}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} dV^{\wedge'} = \phi(x), \quad (6.9)$$

получено с использованием другой функции Грина,

$$G_{\wedge'}^i(x, x') = \frac{r_{\wedge'}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (6.10)$$

которая является векторной плотностью в точке x' и скаляром в точке x . Соответственно, возникает сингулярное уравнение

$$\delta_{i\wedge'}^i(x, x') = \partial_i G_{\wedge'}^i(x, x'). \quad (6.11)$$

где новая дельта функция $\delta_{i\wedge'}^i(x, x')$ является векторной плотностью в точке x' и ковектором в точке x .

Действительно, если обе части равенства (6.11) умножить на ковектор $E_{r'}(x')$ и проинтегрировать,

$$\int E_{r'}(x') \delta_{i\wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'} = \partial_i \int E_{r'}(x') G_{\wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'} = \partial_i \phi(x), \quad (6.12)$$

то в правой части возникает порождение, потенциал ϕ (6.9)

$$\dagger^i E_i(x) = \int E_{r'}(x') G_{\wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'} = \phi(x). \quad (6.13)$$

Следует отметить, что, если дельта функция (6.6) отлична от нуля только при $x = x'$, то дельта функция (6.11) не локализована, она занимает всё пространство. Точно так же не локализованы дельта функции

сингулярных уравнений, соответствующих остальным уравнениям (6.3), (6.4) (см. далее).

Порождение потенциала ϕ электрическим полем E_i по формуле (6.9) не рассматривается в курсах электродинамики. При этом заметьте, формула (6.9) определяет потенциал однозначно, а не с точностью до константы, как это обычно провозглашается. Больше того, формула (6.9) позволяет определить потенциал для непотенциального электрического поля, т.е. поля $E_i(x)$, содержащего соленоидальную часть. Это происходит потому, что соленоидальное поле козамкнуто в качестве ковекторного поля, и, стать бы, стерильно. В отличие от формулы (6.9), стандартная формула $\phi(x) = \int_x^0 \mathbf{E} d\mathbf{l}$ дает неоднозначный результат при непотенциальном поле \mathbf{E} .

Для иллюстрации формулы (6.9) мы решим следующую задачу: «Какой потенциал порождается тонким двумерным "сферическим" конденсатором?»

Пусть в двумерном (для простоты) пространстве имеются две концентрические окружности, между которыми существует заданное электрическое радиальное поле \mathbf{E} . Необходимо найти потенциал $\phi(x)$ в этом пространстве по формуле

$$\phi(x) = \int \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) da}{2\pi r^2}, \quad (6.14)$$

где da есть элемент двумерного пространства (плоскости). Мы имеем (см. рис. 13):

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = E_x r^x + E_y r^y = E \cos \alpha \cdot (x - R \cos \alpha) - E \sin \alpha \cdot R \sin \alpha = E(x \cos \alpha - R), \quad (6.15)$$

$$r^2 = R^2 \sin^2 \alpha + (x - R \cos \alpha)^2 = R^2 + x^2 - 2xR \cos \alpha. \quad (6.16)$$

Если величину небольшого зазора между окружностями обозначить δ , то $da = R\delta d\alpha$, и

$$\phi = \frac{ER\delta}{2\pi x} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha + v/2}{u + v\cos\alpha} d\alpha, \quad \text{где } u = R^2/x^2 + 1, \quad v = -2R/x. \quad (6.17)$$

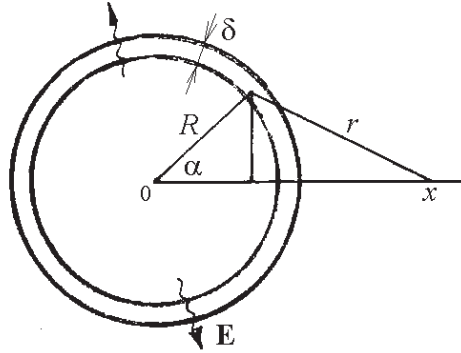


Рис. 13. Двумерный «сферический» конденсатор однозначно порождает потенциал $\phi(x)$

Интегрирование дает:

$$\phi(x) = \frac{ER\delta}{x} \left[-\frac{x}{2R} + \frac{(R^2 + x^2)x}{2R(|R^2 - x^2|)} - \frac{Rx}{|R^2 - x^2|} \right]. \quad (6.18)$$

Таким образом, $\phi = 0$ снаружи окружностей, т.е. при $R < x$, и $\phi = -E\delta$ внутри окружностей, т.е. при $R > x$, как и ожидалось.

6.3. Уравнение $j_{\wedge}^i = \partial_k B_{\wedge}^{ik}$

Можно считать, что решение (1.7) уравнения (6.3), именно,

$$\dagger^k j_{\wedge}^i = 2 \int j_{\wedge}^{[i}(x') \frac{r_{\wedge}^{k]}(x, x')}{4\pi r^3} dV^{\wedge'} = B_{\wedge}^{ik}(x) \quad (6.19)$$

(это закон Био-Савара), получено с использованием функции Грина

$$G_{\wedge i'}^{ik}(x, x') \stackrel{def}{=} 2\delta_{i'}^{[i} G_{\wedge}^{k]}(x, x'), \quad G_{\wedge}^k(x, x') = \frac{r_{\wedge}^k(x, x')}{4\pi r^3} \quad (6.20)$$

(здесь $\delta_{i'}^i$ есть символ Кронекера). Эта функция Грина является бивекторной плотностью в точке x и ковектором в точке x' . Соответственно, возникает сингулярное уравнение

$$\delta_{\wedge i'}^i(x, x') = \partial_k G_{\wedge i'}^{ik}(x, x') = 2\partial_k \left(\delta_{i'}^{[i} \frac{r_{\wedge}^{k]}(x, x')}{4\pi r^3} \right). \quad (6.21)$$

где новая дельта функция $\delta_{\wedge i'}^i(x, x')$ является векторной плотностью в точке x и ковектором в точке x' .

Действительно, если обе части равенства (6.21) умножить на векторную плотность $j_{\wedge'}^{i'}(x')$ и проинтегрировать,

$$\int j_{\wedge'}^{i'}(x') \delta_{\wedge i'}^i(x, x') dV^{\wedge'} = \partial_k \int j_{\wedge'}^{i'}(x') G_{\wedge i'}^{ik}(x, x') dV^{\wedge'} = \partial_k B_{\wedge}^{ik}(x), \quad (6.22)$$

то в правой части возникает порождение (6.19)

$$\dagger^k j_{\wedge}^i = \int j_{\wedge'}^{i'}(x') G_{\wedge i'}^{ik}(x, x') dV^{\wedge'} = B_{\wedge}^{ik}(x). \quad (6.23)$$

Следует отметить, что символ Кронекера $\delta_{i'}^i$ в формуле (6.20), как и ранее, на самом деле является двухточечной функцией, связывающей тензорные компоненты в разных точках, x и x' . Такая двухточечная функция является *транслятором*. Она принимает значения 1 или 0 только в декартовой системе координат, а потому, вообще говоря, заслуживает специального обозначения $\Theta_{i'}^i(x, x')$. Например,

$j_{\wedge'}^{i'}(x') \Theta_{i'}^i(x, x') \Theta_{\wedge}^{\wedge'}(x, x') = j_{\wedge}^i(x)$. Этот транслятор можно связать с производной двухточечного вектора $r^i(x, x')$, соединяющего точки x и x' [16],

$$\Theta_{i'}^i(x, x') = -\partial_{j'} r^i(x, x') = \partial_{j'} r^i(x', x), \quad (6.24)$$

причем сам вектор $r^i(x, x')$ определен интегралом, который суммирует элементы $dx^{\bar{j}}$ пути от x' до x в конечной точке x^i с помощью этого самого транслятора:

$$r^i(x, x') = \int_{x'}^x \Theta_{\bar{j}}^i(x, \bar{x}) dx^{\bar{j}}. \quad (6.25)$$

Интеграл (6.25) не зависит от формы пути в евклидовом пространстве, поскольку тензор кривизны в таком пространстве равен нулю.

6.4. Уравнение $B_{ik} = 2\partial_{[i}A_{k]}$

Уравнение (6.4) приводится дуализацией к типу (6.3) для псевдовеличин. Действительно, $B_{ik}\varepsilon^{ikj} = 2\partial_{[i}A_{k]}\varepsilon^{ikj}$, даёт $B_{\sim}^j = \partial_{\sim}A_{\sim}^{ji}$. Поэтому, по сути, принципиально различных уравнений оказывается только три. Тем не менее, мы рассмотрим уравнение (6.4) отдельно.

Можно считать, что решение уравнения (6.4), именно,

$$\dagger^i B_{ik} = \int B_{i'k'}(x') \frac{r_{\Lambda'}^{i'}(x, x')}{4\pi r^3} dV^{\Lambda'} = A_k(x), \quad (6.26)$$

получено с использованием функции Грина

$$G_{k\Lambda'}^{i'k'}(x, x') \stackrel{def}{=} \frac{r_{\Lambda'}^{i'}(x, x')}{4\pi r^3} \delta_k^{k'}, \quad (6.27)$$

которая является ковектором в точке x и бивекторной плотностью в точке x' . Соответственно, возникает сингулярное уравнение

$$\delta_{ik\Lambda'}^{i'k'}(x, x') = 2\partial_{[i}G_{k]\Lambda'}^{i'k'}(x, x'). \quad (6.28)$$

где новая дельта функция $\delta_{ik\Lambda'}^{i'k'}(x, x')$ является ковариантным бивектором в точке x и бивекторной плотностью в точке x' .

Действительно, если обе части равенства (6.28) умножить на ковариантный бивектор $B_{i'k'}(x')$ и проинтегрировать,

$$\int B_{i'k'}(x') \delta_{ik\Lambda'}^{i'k'}(x, x') dV^{\Lambda'} = 2\partial_{[i} \int B_{i'k'}(x') G_{k]\Lambda'}^{i'k'}(x, x') dV^{\Lambda'} = 2\partial_{[i} A_{k]}(x), \quad (6.29)$$

то в правой части возникает порождение (6.26).

$$\dagger^i B_{ik} = \int B_{i'k'}(x') G_{k\Lambda'}^{i'k'}(x, x') dV^{\Lambda'} = A_k(x), \quad (6.30)$$

Важно отметить, что, как и в случае электрического потенциала ϕ (6.9), (ко)векторный магнитный потенциал A_k определяется однозначно при заданном магнитном поле. Этим нарушается калибровочная эквивалентность [12].

Глава 7. Интегральные формулы, соответствующие дифференциальным уравнениям

Границы полей, по сути, являются их источниками. Хотя мы называем источником поля сомножитель функции Грина в интегранде формулы, дающей порождение, но только замкнутая часть источника создаёт порождение. А эта замкнутая часть источника и есть граница порождённого поля. И вот теперь мы хотим продемонстрировать естественный и хорошо известный принцип.

Интеграл от границы некоторого поля по подходящему ограниченному многообразию равен интегралу от самого поля по границе этого многообразия.

Действительно, начнём с уравнения (6.1). Границей поля E_\wedge^i является объемная плотность ρ_\wedge . Поэтому подходящим многообразием интегрирования этой границы является некоторый объём V , ограниченный поверхностью, которую мы обозначаем ∂V , используя смысл символа ∂ из теории множеств. Так что имеем:

$$q = \int_V \rho_\wedge(x) dV^\wedge = \int_V \partial_i E_\wedge^i(x) dV^\wedge = \oint_{\partial V} E_\wedge^i(x) da_i^\wedge. \quad (7.1)$$

Мы сразу воспользовались теоремой Гаусса и справа получили интеграл от векторной плотности с внутренней ориентацией $E_\wedge^i(x)$ по ограничивающей объём поверхности, элемент которой da_i^\wedge имеет внешнюю ориентацию (см. таблицу в главе 2).

В уравнении (6.2) границей поля ϕ является ковекторное поле $E_i(x)$ (внешняя ориентация). Поэтому подходящим многообразием для интегрирования этой границы является линия с элементом dl^i (внутренняя ориентация), имеющая концы, 1 и 2:

$$\int_1^2 E_i(x) dl^i = \int_1^2 \partial_i \phi dl^i = \phi_2 - \phi_1 \quad (7.2)$$

Здесь должна использоваться замкнутая часть E_i ковектора $E_i(x)$, потому что иначе равенство (7.2) может быть неверно, как и равенство (6.2) при незамкнутой левой части. Только решение (6.9) уравнения (6.2) может содержать без ущерба козамкнутую часть под знаком интеграла.

В уравнении (6.3) границей поля B_{\wedge}^{ik} является векторная плотность $j_{\wedge}^i(x)$ (трубки с внутренней ориентацией). Поэтому подходящим многообразием для интегрирования этой границы является поверхность с внешней ориентацией. Элементом поверхности является da_i^{\wedge} . Такая поверхность ограничена линией l с внешней ориентацией. Эта ориентация линии комплементарна внутренней ориентации бивекторной плотности B_{\wedge}^{ik} . Элементом линии является dl_{ik}^{\wedge} . Мы имеем:

$$\text{ток} = \int_a j_{\wedge}^i(x) da_i^{\wedge} = \int_a \partial_k B_{\wedge}^{ik} da_i^{\wedge} = \oint_{\partial a} B_{\wedge}^{ik} dl_{ik}^{\wedge} = \text{циркуляция (рис. 14а)}. \quad (7.3)$$

Здесь должна использоваться замкнутая часть $j_{\wedge}^i(x)$ плотности тока, потому что иначе равенство (7.3) может быть неверно, как и равенство (6.3) при незамкнутой левой части. Только решение (6.19) уравнения (6.3) может содержать козамкнутую часть тока под знаком интеграла. Линия l с внешней ориентацией представлена на рис. 14а.

Равенство (7.3) потока вектора \mathbf{j} и циркуляции вектора \mathbf{B} выражает теорему Стокса. Геометрический смысл этого равенства совершенно прозрачен. Поток численно равен количеству силовых трубок, охваченных контуром l . Циркуляция равна количеству биповерхностей, нанизанных на этот контур. Эти количества равны между собой, поскольку каждая трубка эмитирует одну биповерхность.

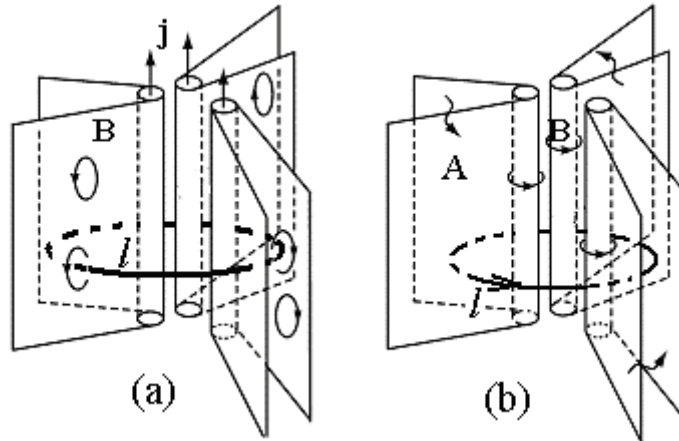


Рис. 14. (а) Интеграл от плотности тока \mathbf{j} по поверхности, ограниченной линией l , равен интегралу от магнитного поля \mathbf{B} по этой линии, имеющей внешнюю ориентацию. (б) Интеграл от магнитного поля \mathbf{B} по поверхности, ограниченной линией l , равен интегралу от векторного потенциала \mathbf{A} по этой линии, имеющей внутреннюю ориентацию.

В уравнении (6.4) границей поля A_i является поле ковариантного бивектора магнитного поля $B_{ik}(x)$ (трубки с внешней ориентацией). Поэтому подходящим многообразием для интегрирования является поверхность с внутренней ориентацией, ограниченная линией l с внутренней ориентацией. Такая ориентация линии комплементарна внешней ориентации биперповерхностей ковектора A_i . Элементом поверхности является da^{ik} , элементом линии является dl^i :

$$\text{поток} = \int_a B_{ik}(x) da^{ik} = 2 \int_a \partial_{[i} A_{k]} da^{ik} = \oint_{\partial a} A_i dl^i = \text{циркуляция (рис. 14b)}. \quad (7.4)$$

Здесь должно использоваться обычное замкнутое магнитное поле $B_{ik}(x)$, потому что иначе равенство (7.4) может быть неверно, как и равенство (6.4) при наличии козамкнутого магнитного поля, связанного с магнитными зарядами. Только решение (6.26) уравнения (6.4) может содержать козамкнутую часть магнитного поля под знаком интеграла. Линия l с внутренней ориентацией представлена на рис. 14б.

Равенства (7.3), (7.4) используют различные варианты теоремы Стокса

Глава 8. Разложение Гельмгольца дельта функций

Отметим, что все функции Грина (6.5), (6.10), (6.20), (6.27) сопряженно замкнуты в обеих точках, x и x' . Например, функция (6.5) после сопряжения в точке x удовлетворяет

$$\partial_{[k} \left(\delta_{i]}^{[i} \frac{r_{i]}(x, x')}{4\pi r^3} \right) = 0, \quad (8.1)$$

а в точке x' она козамкнута как скалярная функция. Аналогично козамкнута функция (6.10). Функция Грина (6.20) также имеет нулевую границу после сопряжения в точке x ,

$$\partial^* (\delta_{i'}^{[i} G_{\wedge}^{k]}(x, x')) = \partial_{[p} g_{li} g_{mk]} \delta_{i'}^i (r^k / 4\pi r^3) = g_{i'[l} \partial_p (r_{m]} / 4\pi r^3) = 0, \quad (8.2)$$

и в точке x' :

$$\partial^* (\delta_{i'}^{[i} G_{\wedge}^{k]}(x, x')) = \partial_p g^{p'i'} \delta_{i'}^i (r_{\wedge}^{k]} / 4\pi r^3) = -\partial^i (r_{\wedge}^{k]} / 4\pi r^3) = 0 \quad (8.3)$$

(минус тут появляется из-за замены переменной дифференцирования). Аналогично козамкнута функция Грина (6.27). Мы отмечаем козамкнутость двухточечные функции парой значков, относящихся к точкам x , x' , и в результате записываем

$$G_{\times x' \wedge}^i(x, x'), G_{\times x' \wedge'}^{i'}(x, x'), G_{\times x' \wedge i'}^{ik}(x, x'), G_{\times x' k \wedge'}^{i'k'}(x, x'). \quad (8.4)$$

Козамкнутость функций Грина в точке интегрирования x' обеспечивает стерильность козамкнутых полей, если они будут использоваться в качестве источников, как было отмечено в разделе 5.3. А козамкнутость функций Грина в точке x обеспечивает козамкнутость порождений и позволяет дифференцировать функции Грина для получения соответствующих дельта функций. Поэтому все дельта функции сингулярных уравнений, (6.6), (6.11), (6.21), (6.28), замкнуты в точке x и козамкнуты в точке x' . Мы записываем

$$\delta_{\times x' \wedge}^i(x, x'), \delta_{\times x' i \wedge'}^{i'}(x, x'), \delta_{\times x' \wedge i'}^i(x, x'), \delta_{\times x' ik \wedge'}^{i'k'}(x, x'). \quad (8.5)$$

Козамкнутость дельта функций в точке интегрирования x' элиминирует козамкнутую составляющую интегрируемого поля, а замкнутость в точке x восстанавливает его замкнутую составляющую. Это очень существенное обстоятельство.

Это означает что порождения (6.13), (6.23), (6.26) не обязательно будут являться решениями уравнений (6.2), (6.3), (6.4), соответственно, потому что эти уравнения имеют решения только для замкнутых полей $E_{\circ i}(x)$, $j_{\circ \wedge}^i(x)$, $B_{\circ ik}(x)$. Если поле в левой части такого уравнения не замкнуто, то граница порождения равна не этому полю, а его замкнутой части. Другими словами, только простая дельта функция $\delta_{\circ x \wedge}(x, x')$, сосредоточенная в точке $x = x'$, в качестве ядра интегрального оператора сохраняет интегрируемую величину неизменной,

$$\rho_{\wedge}(x) = \int \rho_{\wedge'}(x') \delta_{\circ x \wedge}(x, x') dV^{\wedge'}. \quad (8.6)$$

Остальные дельта функции из ряда (8.5) элиминируют козамкнутую составляющую интегрируемого поля:

$$E_{\circ i}(x) = \int E_{i'}(x') \delta_{\circ x' i \wedge}^{i'}(x, x') dV^{\wedge'} = \partial_i \phi(x). \quad (8.7)$$

$$j_{\circ \wedge}^i(x) = \int j_{\wedge'}^{i'}(x') \delta_{\circ x \wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'} = \partial_k B_{\wedge}^{ik}(x), \quad (8.8)$$

$$B_{\circ ik}(x) = \int B_{i'k'}(x') \delta_{\circ x' ik \wedge}^{i'k'}(x, x') dV^{\wedge'} = 2\partial_{[i} A_{k]}(x). \quad (8.9)$$

В то же время, сосредоточенная дельта функция $\delta_{\wedge}(x, x')$ в случае адаптации к тензорным величинам, естественно, сохраняет интегрируемую величину неизменной при интегрировании:

$$E_i(x) = \int E_{i'}(x') \delta_i^{i'} \delta_{\wedge'}(x, x') dV^{\wedge'}. \quad (8.10)$$

$$j_{\wedge}^i(x) = \int j_{\wedge'}^{i'}(x') \delta_i^{i'} \delta_{\wedge'}(x, x') dV^{\wedge'}, \quad (8.11)$$

$$B_{ik}(x) = \int B_{i'k'}(x') \delta_i^{i'} \delta_k^{k'} \delta_{\wedge'}(x, x') dV^{\wedge'}. \quad (8.12)$$

Это означает, что разность сосредоточенной адаптированной дельта функции и соответствующей дельта функции из ряда (8.5),

$$\delta_i^i \delta_{\wedge'}(x, x') - \delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x') = \delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x'), \quad (8.13)$$

$$\delta_{i'}^i \delta_{\wedge'}(x, x') - \delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x') = \delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x'), \quad (8.14)$$

$$\delta_i^i \delta_k^{k'} \delta_{\wedge'}(x, x') - \delta_{\circ x' \wedge'}^{i k'}(x, x') = \delta_{\circ x' \wedge'}^{i k'}(x, x'), \quad (8.15)$$

элиминирует замкнутую часть интегрируемого поля:

$$E_x^i(x) = \int E_{i'}(x') \delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'}. \quad (8.16)$$

$$j_{\wedge'}^i(x) = \int j_{\wedge'}^{i'}(x') \delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'}, \quad (8.17)$$

$$B_x^{ik}(x) = \int B_{i'k'}(x') \delta_{\circ x' \wedge'}^{i k'}(x, x') dV^{\wedge'}. \quad (8.18)$$

Другими словами, формулы (8.13) – (8.15) представляют разложение Гельмгольца сосредоточенных адаптированных дельта функций (которые не являются ни замкнутыми, ни козамкнутыми).

Чтобы убедиться в том, что эти новые дельта функции, стоящие справа в равенствах (8.13) – (8.15), действительно элиминируют замкнутую часть интегрируемого поля, в качестве примера вычислим дельта функцию $\delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x')$ из равенства (8.14) в явном виде, используя определение (6.21),

$$\delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x') = \partial_k \left(\delta_{i'}^i \frac{r_{\wedge'}^k(x, x')}{4\pi r^3} - \delta_{i'}^k \frac{r_{\wedge'}^i(x, x')}{4\pi r^3} \right) = \delta_{i'}^i \delta_{\wedge'}(x, x') - \delta_{i'}^k \partial_k \frac{r_{\wedge'}^i(x, x')}{4\pi r^3}. \quad (8.19)$$

Подставляя (8.19) в (8.14), находим

$$\delta_{\circ x' \wedge'}^i(x, x') = \delta_{i'}^k \partial_k \frac{r_{\wedge'}^i(x, x')}{4\pi r^3}. \quad (8.20)$$

Таким образом, получаем явный вид разложения сосредоточенной адаптированной дельта функции из равенства (8.14)

$$\delta_{i'}^i \delta_{\wedge}(x, x') = \left(\delta_{i'}^i \delta_{\wedge}(x, x') - \delta_{i'}^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3} \right) + \delta_{i'}^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3}. \quad (8.21)$$

Здесь два первых члена (в скобках) представляют $\delta_{\circ x' \wedge i'}^i(x, x')$, а последний член – это $\delta_{\circ x' \wedge i'}^i(x, x')$.

Разложение Гельмгольца дельта функции (8.21) можно применять для разложения векторных плотностей. Разложение Гельмгольца элемента тока $j_{\wedge}^i = I^i \delta_{\wedge}(x, x')$ (5.17) было уже выполнено в (5.23). Получим здесь тот же результат с помощью формулы (8.21). Для этого заменим в (8.21) x' на x'' и выполним интегрирование:

$$\begin{aligned} & \int I'' \delta_{\wedge''}(x'', x') \delta_{i''}^i \delta_{\wedge}(x, x'') dV^{\wedge''} = \\ & = \int I'' \delta_{\wedge''}(x'', x') (\delta_{i''}^i \delta_{\wedge}(x, x'') - \delta_{i''}^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x'')}{4\pi r^3}) dV^{\wedge''} + \int I'' \delta_{\wedge''}(x'', x') \delta_{i''}^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x'')}{4\pi r^3} dV^{\wedge''}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Мы сразу получили разложение (5.23), которое здесь вновь представляем:

$$I^i \delta_{\wedge}(x, x') = \left(I^i \delta_{\wedge}(x, x') - I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} \right) + I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (8.23)$$

Два первых члена (в скобках) изображаются замкнутыми трубками рисунка 11b, а последний член – трубками, опирающимися на диполь на рис. 9b (с обратным знаком).

Разложение Гельмгольца (8.21) можно привести к виду (5.42), где дифференцирование перемежается с интегрированием. Для этого надо проинтегрировать (8.21) с некоторым полем. Интегрируя с той же векторной плотностью и используя определение сосредоточенной дельта функции (6.6), мы получим

$$j_{\wedge}^i(x) = \int j_{\wedge'}^{i'}(x') \left(\delta_{i'}^i \partial_k \frac{r_{\wedge}^k(x, x')}{4\pi r^3} - \delta_{i'}^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3} \right) dV^{\wedge'} + \int j_{\wedge'}^{i'}(x') \delta_{i'}^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3} dV^{\wedge'}. \quad (8.24)$$

Теперь в последнем члене изменим переменную интегрирования, воспользовавшись, по обыкновению, равенством (5.4), а затем перебросим

производную на другой сомножитель интегранда, считая, что подинтегральные функции убывают на бесконечности достаточно быстро.

Тогда получится

$$j_{\wedge}^i(x) = \partial_k 2 \int j_{\wedge}^{[i}(x') \frac{r_{\wedge}^{k]}(x, x')}{4\pi r^3} dV_{\wedge}' + \int \partial_{i'} j_{\wedge}^{i'}(x') \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3} dV_{\wedge}' = (\partial \dagger + \dagger \partial) j_{\wedge}^i(x). \quad (8.25)$$

Глава 9. Разложение Гельмгольца прямого полубесконечного тока

Мы применим формулу (8.25) к прямому тонкому полубесконечному проводу, несущему электрический ток I вдоль положительной оси z . Плотность $\mathbf{j}(x)$ такого тока сосредоточена на территории провода:

$$j_{\wedge}^z = I \delta_{\wedge}(R, 0), \text{ если } z > 0, \text{ и } j_{\wedge}^z = 0 \text{ если } z < 0, \quad (9.1)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, и $\delta_{\wedge}(R, 0)$ удовлетворяет условию $\int j_{\wedge}^z da_z^{\wedge} = I \int_0^R \delta_{\wedge}(R, 0) 2\pi R dR = I$ при интегрировании по площадке, перпендикулярной току, при любом значении верхнего предела интегрирования. Поэтому

$$\partial_i j_{\wedge}^i = -\partial_i \rho_{\wedge} = I \delta_{\wedge}(x, 0), \quad (9.2)$$

где $\delta_{\wedge}(x, 0)$ удовлетворяет $\int \delta_{\wedge}(x, 0) dV^{\wedge} = 1$.

Нашей целью является разложение плотности тока $\mathbf{j}(x)$ на соленоидальную и безвихревую части с помощью формулы (8.25), которая выглядит: $j_{\wedge}^i = j_{\wedge}^i + j_{\wedge}^i$, $j_{\wedge}^i = \partial^{\dagger} j_{\wedge}^i$, $j_{\wedge}^i = \dagger \partial j_{\wedge}^i$, т.е.

$$\mathbf{j} = \mathbf{j} + \mathbf{j} = \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}' \times \mathbf{r}'(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} + \int \frac{(\nabla' \cdot \mathbf{j}') \mathbf{r}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} = \nabla \times \mathbf{B} - \partial_i \mathbf{E}. \quad (9.3)$$

Проведем вычисления шаг за шагом. Закон Био-Савара дает значение магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \int \frac{\mathbf{j}' \times \mathbf{r}'(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} = \int \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}'(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (9.4)$$

где вектора $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} имеют компоненты: $d\mathbf{l} = (0, 0, dz)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а $d\mathbf{l}' \times \mathbf{r} = (-dz' y, dz' x, 0)$. Поэтому

$$B_x = \frac{-I y}{4\pi} \int_{z=0}^{\infty} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{I y}{4\pi R^2} \left(1 + \frac{z}{r}\right), \quad B_y = \frac{I x}{4\pi R^2} \left(1 + \frac{z}{r}\right). \quad (9.5)$$

Далее находим плотность тока $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$. Для всех точек, кроме полуоси z ($x = y = 0, z > 0$), где магнитное поле сингулярно, будет справедливо

$$j_x = -\partial_z B_y = -\frac{I x}{4\pi r^3}, \quad j_y = \partial_z B_x = -\frac{I y}{4\pi r^3}, \quad j_z = \partial_x B_y - \partial_y B_x = -\frac{I z}{4\pi r^3}, \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{j} = -\frac{I \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (9.6)$$

А значение тока \mathbf{j} на полуоси z , которое, естественно, будет равно I , можно найти через магнитное поле с помощью теоремы Стокса для площадок, ограниченных окружностями радиуса R , когда $R \rightarrow 0$. Используем B_x и B_y из (9.5) при $z = r$:

$$\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{2\pi R^2} \int -y dx + x dy = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = I. \quad (9.7)$$

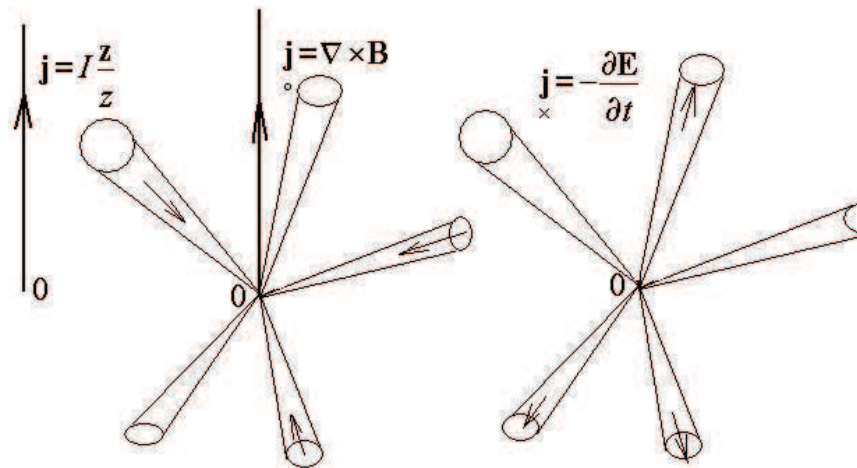


Рис. 15. Разложение прямого полубесконечного тока на соленоидальную и безвихревую части

Таким образом, соленоидальная часть, \mathbf{j} , плотности тока \mathbf{j} состоит из двух частей, тока смещения в виде радиально сходящихся силовых трубок (9.6), и тока по проводу:

$$\mathbf{j} = -\frac{I \mathbf{r}}{4\pi r^3} + I \frac{\mathbf{z}}{z} \delta(R, 0), \quad \text{если } z > 0, \quad \mathbf{j} = -\frac{I \mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad \text{если } z < 0. \quad (9.8)$$

Безвихревая часть равна току смещения с обратным знаком. Используя (9.2), получаем

$$\mathbf{j}_x(x) = \int \frac{I \delta_{\wedge'}(x', 0) \mathbf{r}(x, x') dV^{\wedge'}}{4\pi r^3(x, x')} = \frac{I \mathbf{r}(x)}{4\pi r^3(x)}. \quad (9.9)$$

Разложение изображено на рисунке 15. Видно, что компоненты разложения занимают все пространство, хотя ток локализован на проводе. Многие авторы обращали внимание на этот факт [2, стр. 242].

Глава 10. Разложение Пуанкаре

Представленное здесь разложение Гельмгольца поля на замкнутую и козамкнутую части основано на том, что интегрирование перемежается с дифференцированием, как в формулах (5.42), (8.25). Здесь мы обращаем внимание, что существует совершенно другое разложение, основанное на этом принципе. Мы называем его разложением Пуанкаре. Мы повторим для него все определения, данные в связи с разложением Гельмгольца.

Пусть ω есть внешняя дифференциальная форма; ее разложение на замкнутую и не замкнутую части выглядит [9,10]:

$$\omega = \partial K\omega + K\partial\omega = \underset{\circ}{\omega} + \underset{+}{\omega}. \quad (10.1)$$

Мы отмечаем замкнутую часть формы кружком, однако не замкнутая часть, в отличие от разложения типа (8.25), отмечается здесь знаком +, а не \times , потому что в разложении Пуанкаре используется, вместо \dagger , другой интегральный оператор, K , и операция сопряжения отсутствует. Формула (10.1) является важной в теории внешних дифференциальных форм. K -оператор, так же как \dagger , есть оператор, обратный по отношению к внешнему дифференцированию в следующем смысле. Если $\underset{\circ}{\omega} = \omega$ есть замкнутая форма, то, в силу теоремы Пуанкаре, в области, не усложненной топологически, существует (не однозначное) наполнение этой формы, форма $\underset{+}{\alpha}$, т.е. форма, для которой $\underset{\circ}{\omega}$ является границей, $\underset{\circ}{\omega} = \partial \underset{+}{\alpha}$. И оператор K осуществляет переход к некоторому такому наполнению, $K \underset{\circ}{\omega} = \underset{+}{\alpha}$. Таким образом,

$$\underset{\circ}{\omega} = \partial \underset{+}{\alpha} \quad \& \quad K \underset{\circ}{\omega} = \underset{+}{\alpha} \quad \text{влечет} \quad \underset{+}{\alpha} = K \partial \underset{+}{\alpha} \quad \& \quad \underset{\circ}{\omega} = \partial K \underset{\circ}{\omega}. \quad (10.2)$$

Для примера представляем здесь явный индексный вид K -оператора, действующего на 3-форму, $\omega_{ijk}(x)$:

$$\alpha_{jk} = K^i \omega_{ijk} = \int_0^1 t^2 x^i \omega_{ijk}(tx) dt. \quad (10.3)$$

Мы называем K -оператор порождающим оператором Пуанкаре, мы называем $\alpha_{jk} = K^i \omega_{ijk}$ Пуанкаре-порождением формы ω_{ijk} , и мы называем ω_{ijk} источником порожденной формы $K^i \omega_{ijk}$. Заметьте, что порождающий оператор Пуанкаре не содержит метрического тензора.

Легко показать, что двукратное применение K -оператора дает ноль, т.е. $KK = 0$. Например,

$$K^j K^i \omega_{ijk} = \int_0^1 \tau x^j \left[\int_0^1 t^2 x^i \omega_{ijk}(tx) dt \right]_{x=\tau x} d\tau = 0, \quad (10.4)$$

потому что $x^j x^i \omega_{ijk} = 0$. Мы говорим, что порождение порождения есть ноль или что порождение стерильно. Это свойство аналогично свойству внешнего дифференцирования $\partial\partial = 0$, которое выражается словами: граница границы есть ноль. Так что K -оператор элиминирует стерильную часть формы ω в разложении (10.1), а ∂ элиминирует замкнутую часть формы:

$$K\omega = K\omega_{\circ}, \quad \partial\omega = \partial\omega_{+}. \quad (10.5)$$

Таким образом, (10.1) есть разложение формы ω на замкнутую часть ω_{\circ} и Пуанкаре-стерильную часть ω_{+} .

Глава 11. Оператор Лапласа.

Граница суммы замкнутого и козамкнутого полей равна границе козамкнутого слагаемого, потому что оператор границы элиминирует замкнутое поле, например,

$$\partial_i(E_{\circ\wedge}^i + E_{\times\wedge}^i) = \partial_i E_{\times\wedge}^i. \quad (11.1)$$

Однако лапласиан, оператор второго порядка, $\nabla^2 E_{\wedge}^k = g^{ij} \nabla_i \nabla_j E_{\wedge}^k$, который использует метрику, во-первых, обрабатывает оба слагаемых такой суммы, во-вторых, должен обязательно содержать ковариантные производные, в отличие от оператора границы ∂ . Как известно, [13, p.316],

$$\nabla^2 = -\delta\partial - \partial\delta, \quad (11.2)$$

где δ есть кодифференциал (3.3) - (3.5) (сигнатура метрического тензора g^{ij} здесь $+++$). Наша цель записать члены формулы (11.2) в терминах сопряжения \star , а не оператора Ходжа \star , который содержится в δ . Вследствие (3.4), имеем

$$\delta\partial\omega^p = \delta\alpha^{p+1} = (-1)^{p+1} \star\partial\star\alpha^{p+1} = -(-1)^p \star\partial\star\omega^p, \quad \partial\delta\omega^p = (-1)^p \partial\star\partial\star\omega^p. \quad (11.3)$$

Следовательно, для p -формы ω^p , уже не зависимо от сигнатуры метрического тензора, будет

$$\nabla^2\omega^p = (-1)^p (\star\partial\star\partial - \partial\star\partial\star)\omega^p. \quad (11.4)$$

Слагаемые в формуле (11.4) имеют разные знаки, в отличие от (11.2). Аналогично можно показать, что для контравариантной плотности валентности p , β_{\wedge}^p , будет

$$\nabla^2\beta_{\wedge}^p = (-1)^{p+1} (\star\partial\star\partial - \partial\star\partial\star)\beta_{\wedge}^p. \quad (11.5)$$

Заметим здесь, что формулы (11.4), (11.5) являются выражением *ковариантного* оператора Лапласа над формами и коформами через

частные производные. Например, для скалярной функции, т.е. нуль-формы, $\omega(x)$, формула (11.4) дает, поскольку $\partial^* \omega = 0$,

$$\nabla^2 \omega = * \partial^* \partial \omega - \partial^* \partial^* \omega = * \partial^* \partial \omega = (1/\sqrt{g_\wedge}) \partial_i (g^{ij} \sqrt{g_\wedge} \partial_j \omega).$$

Выполняя частное дифференцирование, получаем

$$\nabla^2 \omega = [\partial_i g^{ij} + g^{ij} (1/\sqrt{g_\wedge}) \partial_i \sqrt{g_\wedge}] \partial_j \omega + g^{ij} \partial_i \partial_j \omega.$$

Однако, согласно формуле (86,6) из [17], $\partial_i g^{ik} + g^{ik} (1/\sqrt{g_\wedge}) \partial_i \sqrt{g_\wedge} = -g^{ij} \Gamma_{ij}^k$.

Так что, произведя замену индексов $j \rightarrow k$, получаем

$$* \partial^* \partial \omega - \partial^* \partial^* \omega = g^{ij} (-\Gamma_{ij}^k \partial_k \omega + \partial_i \partial_j \omega) = g^{ij} \nabla_i (\nabla_j \omega) = \nabla^2 \omega.$$

Отметим, что представление лапласиана в виде (11.4), (11.5) для произвольных геометрических величин не действительно. Для векторной плотности, например E_\wedge^i , формула (11.5) является обычной формулой векторного анализа $\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$.

Согласно (11.4), (11.5), лапласиан осуществляет переход вдоль цепочки полей от некоторого звена на четыре звена влево, иногда умножая на -1 . Например, для замкнутого поля ϕ_\wedge из цепочки электростатики (4.1) типа $\{0,1\}$, согласно (11.5) при $p=0$, будет

$$\nabla^2 \phi_\wedge = \partial^* \partial^* \phi_\wedge = \rho_\wedge, \quad \text{или} \quad \nabla^2 \frac{-1}{4\pi r} = \partial^* \partial^* \frac{-1}{4\pi r} = \delta_\wedge(x). \quad (11.6)$$

Здесь знак при сдвиге по цепочке не меняется (вспомните формулу (2.1), которая определяет наш потенциал ϕ). Напротив, в цепочке магнитостатики (4.5) типа $\{1,2\}$ для замкнутого поля A_\wedge^i , согласно (11.5) при $p=1$, знак изменяется относительно сдвига по цепочке (см. также [2, (5.31)]).

$$\nabla^2 A_\wedge^i = -\partial^* \partial^* A_\wedge^i = -\text{rot rot } \mathbf{A} = -j_\wedge^i. \quad (11.7)$$

Однако для козамкнутого поля A_\wedge^i знак не меняется,

$$\nabla^2 A_\wedge^i = * \partial^* \partial^* A_\wedge^i = \text{grad div } \mathbf{A} = j_\wedge^i, \quad (11.8)$$

потому что поле $A_{\underline{x}\wedge}^i$ принадлежит цепочке типа $\{0,1\}$ (5.22),

$$\cdots (\partial)_{\underline{x}} a (\star)_{\circ} a_{\wedge} (\partial)_{\underline{x}} j_{\wedge}^i (\star)_{\circ} j_i (\partial)_{\underline{x}} b (\star)_{\circ} b_{\wedge} (\partial)_{\underline{x}} A_{\wedge}^i (\star)_{\circ} A_i (\partial) \cdots, \quad (11.9)$$

которая комлементарна магнитостатической цепочке (4.5) относительно векторного тандема. Поэтому, если векторный магнитный потенциал магнитостатики не удовлетворяет кулоновской калибровке, т.е. $\partial_i A_{\wedge}^i \neq 0$, т.е. он содержит звенья обеих комлементарных цепочек (4.5) и (11.9), $A_{\wedge}^i = A_{\circ}^i + A_{\underline{x}\wedge}^i$, то, согласно (11.5), в соответствии с [2, (5.30)], [17, (28.5)].

$$\nabla^2 A_{\wedge}^i = \nabla^2 (A_{\underline{x}\wedge}^i + A_{\circ}^i) = \star \partial \star \partial A_{\underline{x}\wedge}^i - \partial \star \partial \star A_{\circ}^i = j_{\wedge}^i - j_{\circ}^i = \text{grad div } \mathbf{A} - \mathbf{j}. \quad (11.10)$$

Глава 12. Гармонические поля

Гармоническое поле ω , по определению, удовлетворяет равенству $\nabla^2 \omega = 0$. Поскольку лапласиан осуществляет переход вдоль цепочки на четыре звена влево, гармонические поля принадлежат цепочкам, обрывающимся слева. При этом существуют три различные типа гармоничности.

Пусть скалярное поле ϕ гармонично, $\nabla_x^2 \phi = 0$. Это означает, что электростатическая цепочка (4.1) типа $\{0,1\}$ заканчивается слева тандемом электрического поля (заряды отсутствуют):

$$0 (\partial) E_x^i \wedge (*) E_i \wedge (\partial) \phi (*) \phi \wedge (\partial) Z_x^i \wedge (*) Z_i \wedge (\partial) \psi (*) \psi \wedge (\partial) \dots \quad (12.1)$$

То есть, оба поля тандема $E_x^i \wedge (*) E_i$ замкнуты и козамкнуты, поскольку $\partial_i E_x^i = 0$. Мы отмечаем такие поля парой значков $\times \circ$. Будем говорить, что цепочка обрывается на *замкнутом тандеме*, или на *концевом тандеме*. Как было отмечено, *ограниченное* тандемно замкнутое поле может быть только константой. Поэтому, рассматривая гармонические поля во всём пространстве при сигнатуре метрического тензора $(+++)$, мы переходим к множеству полей, возможно, неограниченно растущих. Приведём сразу пример цепочки (12.1) в двумерном пространстве:

$$0 (\partial) \{y, x\}_\wedge^i (*) \{y, x\}_i (\partial) \{xy\}_\wedge (*) \{xy\}_\wedge (\partial) \{x^2 y / 4 + y^3 / 12, y^2 x / 4 + x^3 / 12\}_\wedge^i (*) Z_i \wedge (\partial) \psi (*) \dots \quad (12.2)$$

Компоненты полей заключены здесь в фигурные скобки, например, $\phi = xy$, $\phi_\wedge = xy$. Компоненты векторного поля разделены внутри скобок запятой, например, $E_x^x = y$, $E_x^y = x$. Значки около закрывающих скобок по-прежнему указывают характер полей. Как было назначено, скалярное поле $\phi = xy$ гармонично. Оно есть гармонический полином второй степени. Мы

назовём такое поле гармоническим полем второго типа, потому что оно принадлежит второму тандему ограниченной цепочки. Векторные поля, входящие в первый, он же концевой, тандем, $E_{\wedge}^i = \{y, x\}_{\wedge}^i$, $E_i = \{y, x\}_i$, естественно, тоже являются гармоническими полями (первого типа).

Важно, что замкнутый тандем оказывается концом двух различных цепочек. Цепочка (4.4) типа $\{1,2\}$, комплементарная цепочке (4.1), (12.1), (12.2), заканчивается тем же тандемом $E_{\wedge}^i(\star)E_i$ из-за его замкнутости:

$$0 (\partial) E_{\wedge}^i(\star) E_i (\partial) \Pi_{\wedge}^{ij}(\star) \Pi_{ij}(\partial) Z_{\wedge}^i(\star) Z_{\wedge}^i(\partial) R_{\wedge}^{ij}(\star) \dots \quad (12.3)$$

В явном виде, в рамках нашего примера, цепочка (4.4), (12.3) выглядит

$$0 (\partial) \{y, x\}_i(\star) \{y, x\}_{\wedge}^i (\partial) \{-x^2/2 + y^2/2\}_{\wedge}^{xy}(\star) \{-x^2/2 + y^2/2\}_{xy}(\partial) \{-y^3/6, -x^3/6\}_i(\star) Z_{\wedge}^i \quad (12.4)$$

Бивекторная плотность $\Pi_{\wedge}^{ij} = \begin{Bmatrix} -x^2/2 + y^2/2, & 0 \\ 0, & +x^2/2 - y^2/2 \end{Bmatrix}_{\wedge}^{ij}$ является гармонической

плотностью второго типа, потому что она принадлежит, как и ϕ , второму тандему ограниченной цепочки.

Поля третьих тандемов цепочек (12.1) и (12.3), Z_{\wedge}^i , Z_{\circ}^i , Z_{\times}^i , Z_{\circ}^i , не гармонические. Однако лапласиан превращает третьи тандемы разных цепочек в единый первый тандем с разными знаками. Поэтому сумма однородных членов третьих тандемов комплементарных цепочек, имеющих общий конец, является гармоническим полем (третьего типа). В нашем примере $Z_{\wedge}^i = Z_{\times}^i + Z_{\circ}^i$ является гармонической векторной плотностью:

$$\begin{aligned} Z_{\wedge}^i &= \{x^2 y/4 + y^3/12, y^2 x/4 + x^3/12\}_{\wedge}^i + \{-y^3/6, -x^3/6\}_{\circ}^i = \\ &= \{x^2 y/4 - y^3/12, y^2 x/4 - x^3/12\}_{\wedge}^i \end{aligned} \quad (12.5)$$

Итак, гармонические поля первого типа имеют нулевые границу и кограницу; они просто принадлежат замкнутому тандему. У

гармонических полей второго типа либо граница, либо кограница не равна нулю. У гармонических полей третьего типа отличны от нуля и граница и кограница; такие поля не принадлежат цепочкам полей.

Распространённым примером гармонических полей являются электромагнитные волны. Комплементарные цепочки электромагнетизма типов {1,2} и {2,3} в четырёхмерном пространстве с сигнатурой метрики (+---) выглядят так

$$\dots j_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\star) j_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\partial) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) A_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\star) A_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\partial) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) C_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\star) C_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\partial) \dots \quad (12.6)$$

$$\dots \xi_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) \xi_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) \Pi_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) \Pi_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) R_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) R_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) \dots \quad (12.7)$$

Мы обозначили здесь электромагнитный тензор через $B_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ вместо $F_{\mu\nu}$, чтобы 4-ток был границей электромагнитного поля, $j_{\wedge}^{\alpha} = \partial_{\beta} B_{\wedge}^{\alpha\beta}$, вместо обычного равенства $j_{\wedge}^{\alpha} = -\partial_{\beta} F_{\wedge}^{\alpha\beta}$, и наш магнитный ковекторный 4-потенциал A_{ν} удовлетворяет равенству $B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$. $\xi_{\wedge}^{\alpha\beta\gamma}$ - это 4-ток магнитных монополей, обычно равный нулю. Q, C, R суть гипотетические поля.

Если токи равны нулю, цепочки (12.6), (12.7) заканчиваются одним и тем же замкнутым тандемом электромагнитных тензоров

$$0(\partial) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) A_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\star) A_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\partial) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) C_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\star) C_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha}(\partial) \dots \quad (12.8)$$

$$0(\partial) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) \Pi_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) \Pi_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\star) Q_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) R_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) R_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) \dots \quad (12.9)$$

Для линейно поляризованной плоской волны электромагнитный тензор имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{01} = E^x = e^{iz-it}, \quad B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{31} = B_y = e^{iz-it}, \quad B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{01} = -E_x = -e^{iz-it}, \quad B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{31} = -B_{\underset{x}{\circ}\wedge}^{13} = B^y = e^{iz-it}. \quad (12.10)$$

Этот тензор – гармонический тензор первого типа, то есть он замкнут и козамкнут:

$$\partial_\beta B_{\times\circ}^{1\beta} = \partial_0 B_{\times\circ}^{10} + \partial_3 B_{\times\circ}^{13} = 0, \quad \partial_{[\lambda} B_{\times\circ}^{\mu\nu]} = \partial_3 B_{\times\circ}^{10} + \partial_0 B_{\times\circ}^{31} = 0 \quad (12.11)$$

(при знакопеременной метрике, тандемно замкнутые поля могут быть ограниченными во всём пространстве). Поля векторного магнитного потенциала A и тривекторного электрического потенциала Π имеют следующие отличные от нуля компоненты:

$$A_{\times 1} = -A_{\circ \wedge}^1 = -ie^{iz-it}, \quad \Pi_{\times \wedge}^{103} = \Pi_{\circ 103} = ie^{iz-it}. \quad (12.12)$$

Эти поля являются гармоническими полями второго типа, потому что у них есть граница – электромагнитный тензор:

$$B_{\times\circ}^{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\times\nu]}, \quad B_{\times\circ}^{\alpha\beta} = \partial_\gamma \Pi_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}. \quad (12.13)$$

Поля следующих тандемов Q, C, R , мы вычислили, пользуясь тем, что

$$A_{\circ \wedge}^\alpha = \partial_\beta Q_{\times\wedge}^{\alpha\beta}, \quad \text{но } \partial_{[\lambda} Q_{\times\wedge}^{\mu\nu]} = \partial \star Q_{\times\wedge}^{\alpha\beta} = 0, \quad (12.14)$$

и так далее. Звенья третьих тандемов, Q , и четвёртых тандемов, C, R , выглядят следующим образом. Для цепочки (12.8) это

$$Q_{\times\wedge}^{10} = -Q_{\circ 10} = \frac{-1+i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad Q_{\times\wedge}^{13} = Q_{\circ 13} = \frac{1+i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad C_{\times 1} = -C_{\circ \wedge}^1 = -\frac{(t+z)}{4} e^{iz-it}. \quad (12.15)$$

Для цепочки (12.9) это

$$Q_{\times 10} = -Q_{\circ \wedge}^{10} = \frac{1+i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad Q_{\times 13} = Q_{\circ \wedge}^{13} = \frac{1-i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad R_{\times \wedge}^{103} = R_{\circ 103} = -\frac{(t+z)}{4} e^{iz-it}. \quad (12.16)$$

Эти поля не являются гармоничными. Однако, из полей третьих тандемов возникают гармонические поля третьего типа. Именно, поле $Q_{\times\wedge}^{\alpha\beta} = Q_{\times\wedge}^{\alpha\beta} + Q_{\circ \wedge}^{\alpha\beta}$ и сопряженное ему поле $Q_{\mu\nu} = Q_{\times\wedge}^{\mu\nu} + Q_{\circ \wedge}^{\mu\nu}$. Поскольку лапласиан осуществляет сдвиг вдоль цепочки на четыре звена влево, мы имеем, согласно (11.5),

$$\nabla^2 Q_{\times\wedge}^{\alpha\beta} = -\star \partial \star \partial Q_{\times\wedge}^{\alpha\beta} = -B_{\times\circ}^{\alpha\beta}, \quad \nabla^2 Q_{\circ \wedge}^{\alpha\beta} = \partial \star \partial \star Q_{\circ \wedge}^{\alpha\beta} = B_{\times\circ}^{\alpha\beta}. \quad (12.17)$$

Поэтому

$$\nabla^2 Q_{\wedge}^{\alpha\beta} = \nabla^2 (Q_{\underset{x}{\wedge}}^{\alpha\beta} + Q_{\underset{o}{\wedge}}^{\alpha\beta}) = -B_{\underset{x\circ}{\wedge}}^{\alpha\beta} + B_{\underset{x\circ}{\wedge}}^{\alpha\beta} = 0. \quad (12.18)$$

Возможно, гармоническое поле $Q_{\wedge}^{\alpha\beta}$ из (12.18) можно рассматривать как линейно поляризованную электромагнитную волну, поскольку это поле удовлетворяет волновому уравнению и имеет подходящую тензорную размерность. По аналогии с (12.10) с помощью (12.15), (12.16) Q -поля можно интерпретировать как электрическое и магнитное поле:

$$Q_{\wedge}^{01} = Q_{\underset{x}{\wedge}}^{01} + Q_{\underset{o}{\wedge}}^{01} = E^x = \frac{1}{2} e^{iz-it}, \quad Q_{\wedge}^{31} = Q_{\underset{x}{\wedge}}^{31} + Q_{\underset{o}{\wedge}}^{31} = B_y = -\frac{1}{2} e^{iz-it}. \quad (12.19)$$

Но это очень странная волна. Вектор Пойнтинга, $\mathbf{S} = \Re(\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{B}})/2$, имеет z -компоненту, направленную противоположно направлению движения волны: $S_z = -1/8$, и волна сопровождается электрическим j_{\wedge}^{α} и магнитным $J_{\lambda\mu\nu}$ токами, роль которых играют обычные магнитный и электрический векторные потенциалы:

$$j_{\wedge}^{\alpha} = \partial_{\beta} Q_{\underset{x}{\wedge}}^{\alpha\beta} = A_{\underset{o}{\wedge}}^{\alpha}, \quad J_{\lambda\mu\nu} = 3\partial_{[\lambda} Q_{\underset{x}{\wedge}}^{\mu\nu]} = \Pi_{\underset{o}{\wedge}}^{\lambda\mu\nu}. \quad (12.20)$$

Глава 13.

Порождения. Квадрат оператора порождения

Операция порождения многократно применялась в предыдущих разделах. Оператор порождения

$$\dagger^i = \int \frac{dV^{\wedge'} r_{\wedge'}^i(x, x')}{4\pi r'^3(x, x')} \quad (13.1)$$

позволяет найти наполнение замкнутой части дифференциальной формы или контравариантной плотности, достаточно быстро убывающей на бесконечности в трёхмерном пространстве. Например, наполнение плотности $\delta_{\wedge}(x)$ есть

$$\dagger^i \delta_{\wedge}(x) = \int \delta_{\wedge'}(x') \frac{r_{\wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'}}{4\pi r'^3(x, x')} = \frac{r_{\wedge}^i(x)}{4\pi r^3(x)}. \quad (13.2)$$

Мы говорим в данном случае, что $\delta_{\wedge}(x)$ является *источником*, который порождает $\frac{r_{\wedge}^i(x)}{4\pi r^3}$, и пишем $\dagger^i \delta_{\wedge}(x) = \frac{r_{\wedge}^i(x)}{4\pi r^3}$, или $\delta_{\wedge}(x) \rightarrow \frac{r_{\wedge}^i(x)}{4\pi r^3}$. Вообще, мы говорим, что источник порождает порождение, т.е. \dagger (источник) = (порождение), или (источник) \rightarrow (порождение).

Следующий пример: $\frac{r_i}{4\pi r^3}$ порождает $\frac{-1}{4\pi r}$, т.е. $\dagger^i \frac{r_i}{4\pi r^3} = \frac{-1}{4\pi r}$,

или $\frac{r_i}{4\pi r^3} \rightarrow \frac{-1}{4\pi r}$, или

$$\begin{aligned} \int \frac{r_i(x')}{4\pi r'^3(x')} \frac{r_{\wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'}}{4\pi r'^3(x, x')} &= -\int \partial_{i'} \frac{1}{4\pi r(x')} \frac{r_{\wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'}}{4\pi r'^3(x, x')} = \int \frac{1}{4\pi r(x')} \partial_{i'} \frac{r_{\wedge'}^i(x, x') dV^{\wedge'}}{4\pi r'^3(x, x')} = \\ &= -\int \frac{1}{4\pi r(x')} \delta_{\wedge'}(x, x') dV^{\wedge'} = \frac{-1}{4\pi r(x)}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Таким образом, с помощью порождения мы можем составить, например, часть цепочки (4.2), не используя оператор границы ∂ .

$$\dots \rightarrow \delta(x) (*) \delta_{\wedge}(x) \rightarrow \frac{r^i}{4\pi r^3} (*) \frac{r_i}{4\pi r^3} \rightarrow \frac{-1}{4\pi r} (*) \frac{-1}{4\pi r}. \quad (13.4)$$

Мы определим теперь квадрат оператора порождения, \ddagger , формулами (сравните с (11.4), (11.5)):

$$\ddagger \overset{p}{\omega} = (-1)^{p+1} (\star \dagger \star \dagger - \dagger \star \dagger \star) \overset{p}{\omega}, \quad (13.5)$$

$$\ddagger \overset{p}{\beta}_{\wedge} = (-1)^p (\star \dagger \star \dagger - \dagger \star \dagger \star) \overset{p}{\beta}_{\wedge}. \quad (13.6)$$

Такие определения обеспечивают, при выполнении определённых условий, равенства:

$$\ddagger \nabla^2 = \nabla^2 \ddagger = 1. \quad (13.7)$$

Действительно, например, на основании (11.4), (5.39), (5.41), (5.43), получается

$$\ddagger \nabla^2 \overset{p}{\omega} = (-1)^{p+1} (\star \dagger \star \dagger - \dagger \star \dagger \star) (-1)^p (\star \partial \star \partial - \partial \star \partial \star) \left(\overset{p}{\omega} + \overset{p}{\omega} \right) = \star \dagger \star \dagger \partial \star \partial \overset{p}{\omega} + \dagger \star \dagger \star \partial \star \partial \overset{p}{\omega} = \overset{p}{\omega}. \quad (13.8)$$

Формула (13.7) даёт

$$\ddagger = - \int \frac{dV'}{4\pi r(x, x')}. \quad (13.9)$$

В силу (13.5), (13.6), квадрат оператора порождения осуществляет сдвиг вдоль цепочки полей на четыре звена вправо, иногда меняя знак. Например, для цепочки (4.2) типа $\{0,1\}$ знак не меняется. Действительно, согласно (13.6) для $p=0$ имеем

$$\ddagger \overset{0}{\delta}_{\wedge}(x) = \star \dagger \star \dagger \overset{0}{\delta}_{\wedge}(x) = \frac{-1_{\wedge}}{4\pi r}, \text{ т.е. } \int \overset{0}{\delta}_{\wedge}(x') \frac{\sqrt{g_{\wedge}} dV_{\wedge}'}{4\pi r(x, x')} = \frac{1_{\wedge}}{4\pi r}. \quad (13.10)$$

Для цепочки (4.5) типа $\{1,2\}$ знак меняется. Действительно, согласно (13.6) для $p=1$ имеем

$$\ddagger \overset{1}{j}_{\wedge}^i = - \dagger \star \dagger \star \overset{1}{j}_{\wedge}^i = - \overset{1}{A}_{\wedge}^i, \text{ т.е. } \int \overset{1}{j}_{\wedge}^i(x') \frac{\sqrt{g_{\wedge}} dV_{\wedge}'}{4\pi r(x, x')} = \overset{1}{A}_{\wedge}^i \text{ [2, (5.32)].} \quad (13.11)$$

Глава 14.

Различные варианты разложения Гельмгольца

Стандартное разложение Гельмгольца векторного поля \mathbf{E} (1.9) заключается в том, что это поле выражают через его ротор, $\text{rot } \mathbf{E}$, и его дивергенцию, $\text{div } \mathbf{E}$, с помощью довольно сложных формул [5]. Именно,

1) ротор интегрируют, а потом снова вычисляют ротор; так получают соленоидальную часть поля \mathbf{E}

$$\mathbf{E}_{\circ} = \text{rot} \int \frac{\text{rot } \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')}, \quad (14.1)$$

2) дивергенцию интегрируют, а потом вычисляют градиент; так получают безвихревую часть поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}_{\times} = \text{grad} \int \frac{\text{div } \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')}. \quad (14.2)$$

В результате, разложение Гельмгольца выглядит так

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\circ} + \mathbf{E}_{\times} = \text{rot} \int \frac{\text{rot } \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')} - \text{grad} \int \frac{\text{div } \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')}. \quad (14.3)$$

Запишем это разложение для векторной плотности, используя тензорные индексы и учитывая, что векторную плотность нужно сопрягать для вычисления ротора

$$E_{\wedge}^i = E_{\circ \wedge}^i + E_{\times \wedge}^i = \partial_k g_{\wedge}^{ij} g^{kl} \int \frac{2\partial_{[j} g_{r']m'} E_{\wedge}^{m'}(x') dV^{\wedge}}{4\pi r(x, x')} - g_{\wedge}^{ij} \partial_j \int \frac{\partial_{k'} E_{\wedge}^{k'}(x') dV^{\wedge}}{4\pi r(x, x')}. \quad (14.4)$$

Видно, что стандартное разложение Гельмгольца использует квадрат оператора порождения (13.9). Отсутствие минуса в первом члене разложения объясняется тем, что сдвиг по цепочке в этом случае сопровождается изменением знака. Запишем это разложение в наших обозначениях:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\circ} + \mathbf{E}_{\times} = \partial * (-\ddagger) \partial * \mathbf{E} + * \partial * \ddagger \partial \mathbf{E}. \quad (14.5)$$

Исходное поле E содержит сумму замкнутой и козамкнутой частей, которые принадлежат различным цепочкам, именно цепочкам (4.4) типа $\{1,2\}$ и (4.1) типа $\{0,1\}$. Приводим здесь отрезки этих цепочек, участвующие в разложении:

$$\dots \xi_{ij} (\partial) \underline{E}_i (\star) \underline{E}_i^i (\partial) \Pi_{\wedge}^{ij} (\star) \Pi_{ij} \dots \quad (14.6)$$

$$\dots \rho_{\wedge} (\partial) \underline{E}_i^i (\star) \underline{E}_i (\partial) \phi (\star) \phi_{\wedge} \dots \quad (14.7)$$

Процесс разложения (14.3) - (14.5) заключается в следующем. На первом этапе, он отмечен на рисунке 16 единицей, в первом члене разложения оператор границы действует на исходное поле после сопряжения, а во втором члене – непосредственно. Эта операция в первом члене сразу элиминирует козамкнутую часть, а во втором члене элиминирует замкнутую часть исходного поля. В обоих случаях происходит смещение вдоль цепочек полей налево в район соседнего тандема. На втором этапе квадрат оператора порождения смещает возникшие после первого этапа поля, каждое вдоль своей цепочки, на четыре звена направо. На третьем этапе операторы границы в должной комбинации с сопряжением смещают поля снова налево до замкнутой и козамкнутой частей поля E , соответственно. Разложение (14.5) проиллюстрировано на рис. 16

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\wedge} + \mathbf{E}_{\times} = \partial \star (- \star) \partial \star \mathbf{E} + \star \partial \star \star \partial \mathbf{E}$$

Рис. 16. Представлены две копии пары цепочек полей. Поле E подлежит разложению Гельмгольца на две части. Эти части, первоначально объединённые полем E , заключены в прямоугольник. Поле E подвергается последовательным операциям, которые пронумерованы. Эти операции приводят к перемещению поля вдоль цепочек.

Следует отметить, что использование ротора и дивергенции не является обязательным условием для формирования разложения Гельмгольца. Главным является разложение поля на замкнутую и козамкнутую части. Например, Джексон [2] предлагает несколько иную формулу:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = \text{rot rot} \int \frac{\mathbf{E}(x')dV'}{4\pi r(x,x')} - \text{grad} \int \frac{\text{div} \mathbf{E}(x')dV'}{4\pi r(x,x')}. \quad (14.8)$$

В наших терминах эта формула выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = \partial * \partial * (-\ddagger) \mathbf{E} + * \partial * \ddagger \partial \mathbf{E}. \quad (14.9)$$

В отличие от стандартного разложения Гельмгольца (14.5), можно предложить простую замену второму и третьему этапам, цель которых – вернуть возникшие после первого этапа поля до замкнутой и козамкнутой частей поля \mathbf{E} . Использование простого оператора порождения упрощает формулу разложения:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = * \ddagger \partial * \mathbf{E} + \ddagger \partial \mathbf{E}. \quad (14.10)$$

Разложение (14.10) в векторной записи выглядит так

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = \int \text{rot} \mathbf{E}(x') \times \frac{\mathbf{r}(x,x')dV'}{4\pi r^3(x,x')} + \int \text{div} \mathbf{E}(x') \cdot \frac{\mathbf{r}(x,x')dV'}{4\pi r^3(x,x')}. \quad (14.11)$$

Оно проиллюстрировано на Рис. 17

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = \frac{2}{*} \frac{1}{\partial} * \mathbf{E} + \frac{2}{\ddagger} \frac{1}{\partial} \mathbf{E}$$

Рис. 17. Использование простого оператора порождения вместо квадрата оператора порождения значительно сокращает путь возвращения к частям исходного поля \mathbf{E} после первого этапа, по сравнению с рис. 16.

Однако наиболее естественна наша формула разложения Гельмгольца (5.42). Эта формула не использует сопряжение.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = \partial \nabla \mathbf{E} + \nabla \partial \mathbf{E}. \quad (14.12)$$

Разложение (14.12) в векторной записи выглядит так

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = \text{rot} \int \mathbf{E}(x') \times \frac{\mathbf{r}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} + \int \text{div} \mathbf{E}(x') \cdot \frac{\mathbf{r}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (14.13)$$

Оно проиллюстрировано на рис. 18:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\times = \frac{\partial \nabla}{\partial \nabla} \mathbf{E} + \nabla \partial \mathbf{E}$$

Рис. 18. Показано действие наиболее простой формулы разложения Гельмгольца.

Читатель может предложить свою формулу для разложения Гельмгольца.

Заключение

В работе использовано представление о том, что соленоидальные поля эмитируются своими источниками так же, как безвихревые поля, подобно, например, тому, как электрическое поле в виде силовых линий эмитируется из электрических зарядов. Соответственно, введены общие понятия источника поля и порождения этого источника, понятия границы поля и наполнения этой границы. Указанное представление использует тот факт, что физические поля делятся на два класса: дифференциальные формы и контравариантные тензорные плотности, эквивалентные псевдоформам. Поля, принадлежащие к этим различным классам, попарно находятся в отношении сопряжения друг к другу. Сопряжение, совместно с операцией дифференцирования, позволяет объединять поля в цепочки полей. Геометрические образы полей позволяют представить эти цепочки весьма наглядно.

Известный принцип «граница границы равна нулю» соответствует тому, что граница замкнута. В дополнение к этому принципу показывается, что «порождение порождения равно нулю», то есть, что порождение – стерильно.

Элементы цепочек полей, принадлежащие одному классу, связаны между собой дифференциальными уравнениями первого порядка, для решения которых можно использовать функции Грина первого порядка, отличные от обычной функции Грина. Соответственно, возникают дельта функции, отличные от обычной дельта функции, которая используется в качестве ядра единичного интегрального оператора. Возникшие специфические дельта функции элиминируют замкнутые части интегрируемых с ними функций или части замкнутые после сопряжения.

Оператор Лапласа, являющийся дифференциальным оператором второго порядка, тоже связывает между собой элементы цепочек полей. Он осуществляет сдвиг вдоль цепочки на четыре звена влево. Интегральный оператор, обратный оператору Лапласа, назван оператором порождения второго порядка. Он осуществляет сдвиг вдоль цепочки полей, соответственно, на четыре звена вправо.

Подробно рассматривается разложение Гельмгольца, суть которого в разложении поля на замкнутую часть и часть, замкнутую после сопряжения. Концепция цепочек полей позволяет анализировать различные варианты этого разложения и показывает, что стандартная формула не является самой простой.

Библиография

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том 3, часть 1. (М.: Наука, 1996)
2. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. (John Wiley & Sons, Inc., 1999)
3. Ohanian H. C. Physics. (N.Y.: W.W.Norton, 1985)
4. Р. Фейнман et al. «Фейнмановские лекции по физике» 5 (М.: Мир, 1977)
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (М.: Наука, 1984)
6. Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicists (Clarendon, Oxford, 1951)
7. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков (М.: Наука, 1965)
8. Napolitano J. and Lichtenstein R. Answer to Question #55 Are the pictorial examples that distinguish covariant and contravariant vectors? // American J. Physics – 1997, **65** 1037
9. Cartan H. Calcul Differentiel. Formes Differentielles (Herman, Paris, 1967).
Есть перевод: Картан А. Дифференциальное исчисление, Дифференциальные формы (М.: Мир, 1971)
10. Flanders H. Differential Forms (Academic, New York, 1963)
11. Schutz B.F. Geometrical methods of mathematical physics (Cambridge University Press, 1982). Есть перевод: Шутц Б. Геометрические методы математической физики (М.: Мир, 1984).
12. Khrapko R. I. Violation of the gauge equivalence - <http://arXiv.org/abs/physics/0105031>
13. Von Westenholz C. Differential Forms in Mathematical Physics (North Holland, 1978)
14. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика (М.: В. Школа, 1990)
15. Abraham M., Becker R. The Classical Theory of Electricity and Magnetism (Hafner, N. Y.)
16. Храпко Р.И. Функции пути. // ТМФ – 1995 **65**, 334-346
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля (М.: Наука, 1973)