

Keplerbahnen (On Kepler Orbits)

Thomas Heiko Günther

Email: dr.thomas.guenther@gmail.com

Abstract

Die Bahnen von Planeten um die Sonne sind Ellipsen. Die Sonne liegt dabei in einem Brennpunkt der Ellipse. Dies gilt ganz allgemein für die Bewegung eines Objekts im Gravitationsfeld einer zentralen Masse. Dieses Skript enthält eine mathematische Herleitung der Bahnkurven eines Massepunktes im sphärisch symmetrischen Gravitationsfeld auf Basis des Lagrange-Formalismus. Als Grundlage wird zunächst die Ellipsengleichung behandelt. Weitere Grundlagen werden in Kurzform im Anhang aufgeführt. Aus der Theorie ergeben sich schließlich die drei Keplerschen Gesetze.

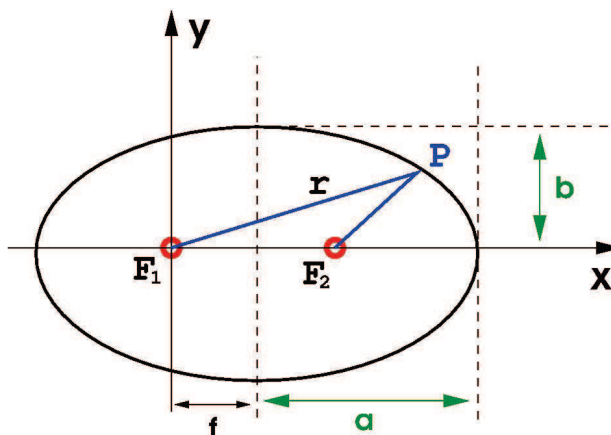
The orbits of planets around the sun are ellipses. The sun lies at a focal point of the ellipse. This applies generally to the movement of an object in the gravitational field of a central mass. This script contains a mathematical derivation of the trajectories of a mass point in a spherically symmetrical gravitational field based on the Lagrange formalism. The ellipse equation is first treated as a basis. Further basics are briefly listed in the appendix. The theory ultimately gives rise to Kepler's three laws.

1. Ellipsen	1
1.1. Ellipsengleichung mit Ursprung im anderen Brennpunkt F_2	2
2. Erstes Keplersches Gesetz - Keplerbahnen	4
2.1. Bewegungen in der Ebene	4
2.2. Energie als Erhaltungsgröße	5
2.3. Drehimpuls als Erhaltungsgröße	5
2.4. Integration der Gleichungen	5
2.5. Lösen der Integralgleichung	6
2.6. Ursprung im anderen Brennpunkt	7
3. Zweites Keplersches Gesetz - Drehimpulserhaltung	7
4. Drittes Keplersches Gesetz	8
4.1. Massenbestimmung mit Kepler	8
5. Anhang	9
5.1. Sphärische Koordinaten im \mathbb{R}^3	9
5.2. Bewegungsgleichungen	10
5.3. Erhaltungsgrößen	11
References	11

Die Bahnen von Planeten um die Sonne sind Ellipsen. Die Sonne liegt dabei in einem Brennpunkt der Ellipse. Dies gilt ganz allgemein für die Bewegung eines Objekts im Gravitationsfeld einer zentralen Masse. Dieses Skript enthält eine mathematische Herleitung der Bahnkurven eines Massepunktes im sphärisch symmetrischen Gravitationsfeld auf Basis des Lagrange-Formalismus. Als Grundlage wird zunächst die Ellipsengleichung behandelt. Weitere Grundlagen werden in Kurzform im Anhang aufgeführt. Aus der Theorie ergeben sich schließlich die drei Keplerschen Gesetze.

1. ELLIPSEN

Die Ellipse besitzt zwei Brennpunkte F_1 und F_2 (in der Abbildung die roten Punkte auf der x -Achse), welche jeweils den Abstand f zur vertikalen Symmetrieachse haben. Wir wählen zunächst das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im linken Brennpunkt F_1 liegt. Sei P ein beliebiger Punkt auf dem Ellipsenrand, dann hat die Strecke $S = \overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ immer die gleiche Länge. Insbesondere also auch wenn P der Punkt $(f + a \mid 0)$ ist. Hier erkennt man, dass die Strecke S die Länge $f + a + (f + a - 2f) = 2a$ hat.



Wenn die Strecke $\overline{F_1P}$ die Länge r hat, muss also die Strecke $\overline{F_2P}$ die Länge $2a - r$ haben. Betrachten wir den Vektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{F_1P} = \overrightarrow{OP}$$

sowie die Vektoren $\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{OF_2}$ und $\overrightarrow{F_2P}$. Es ist offenbar

$$\overrightarrow{OF_2} + \overrightarrow{F_2P} = \vec{r}$$

und damit

$$\overrightarrow{F_2P} = \vec{r} - \overrightarrow{OF_2}$$

Wegen $|\overrightarrow{F_2P}| = 2a - r$ folgt dann:

$$(1.1) \quad 2a - r = |\overrightarrow{F_2P}| = |\vec{r} - \overrightarrow{OF_2}|$$

Sei nun ϕ der Winkel zwischen \vec{r} und der x -Achse. Durch quadrieren von Gleichung (1.1) erhält man zusammen mit der Definition $\vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \phi$ des Skalarproduktes:

$$(2a - r)^2 = (\vec{r} - \overrightarrow{OF_2})^2 = |\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \circ \overrightarrow{OF_2} + |\overrightarrow{OF_2}|^2 = r^2 - 2|\vec{r}| |\overrightarrow{OF_2}| \cos \phi + (2f)^2 = r^2 - 2r \cdot 2f \cos \phi + 4f^2$$

also

$$\begin{aligned} 4a^2 - 4ar + r^2 &= r^2 - 4rf \cos \phi + 4f^2 \\ a^2 - ar &= -rf \cos \phi + f^2 \\ a^2 - f^2 &= r(a - f \cos \phi) \end{aligned}$$

und damit

$$(1.2) \quad r = \frac{a^2 - f^2}{a - f \cos \phi}$$

Angenommen der Punkt P befindet sich in $(f | b)$. Dann entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel jeweils die Länge a haben (da S die Länge $2a$ haben muss). Mit dem Pythagoras ergibt sich dann $a^2 = f^2 + b^2$ und damit $b^2 = a^2 - f^2$. Ferner sei

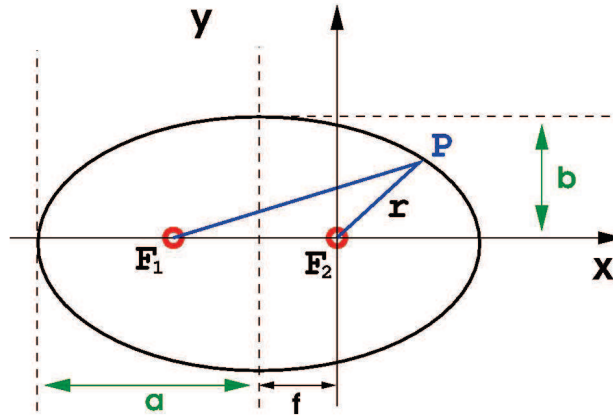
$$(1.3) \quad p := \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon := \frac{f}{a}.$$

Gleichung (1.2) wird damit zu

$$r = \frac{b^2}{a - f \cos \phi} = \frac{b^2}{a \left(1 - \frac{f}{a} \cos \phi\right)} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{f}{a} \cos \phi} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$

1.1. Ellipsengleichung mit Ursprung im anderen Brennpunkt F_2 .

Das Koordinatensystem kann aber auch so gewählt werden, dass der Ursprung im Brennpunkt F_2 liegt. Sei P wieder ein beliebiger Punkt auf dem Ellipsenrand, dann hat die Strecke $S = \overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ auch hier immer die Länge $2a$, allerdings ist nun $\vec{r} = \overrightarrow{F_2P}$:



Wenn die Strecke $\overline{F_2P}$ jetzt die Länge r hat, muss hier die Strecke $\overline{F_1P}$ die Länge $2a - r$ haben. Vektoriell betrachtet gilt hier offensichtlich

$$\overrightarrow{0F_1} + \overrightarrow{F_1P} = \overrightarrow{0P}$$

und damit

$$2a - r = \left| \overrightarrow{F_1P} \right| = \left| \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0F_1} \right| = \left| \vec{r} - \overrightarrow{0F_1} \right|.$$

Durch quadrieren von Gleichung (1.1) erhält man:

$$(1.4) \quad (2a - r)^2 = \left(\vec{r} - \overrightarrow{0F_1} \right)^2 = |\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \circ \overrightarrow{0F_1} + \left| \overrightarrow{0F_1} \right|^2 = r^2 - 2\vec{r} \circ \overrightarrow{0F_1} + (2f)^2$$

Weiterhin sei ϕ der Winkel zwischen \vec{r} und der x -Achse. Die Vektoren \vec{r} und $\overrightarrow{0F_1}$ schließen allerdings den Winkel $\pi - \phi$ ein, vgl. Abbildung. Mit der Definition des Skalarproduktes wird aus Gleichung (1.4) also

$$(1.5) \quad (2a - r)^2 = r^2 - 2|\vec{r}| \underbrace{\left| \overrightarrow{0F_1} \right|}_{2f} \cos(\pi - \phi) + (2f)^2 = r^2 - 4rf \cos(\pi - \phi) + 4f^2.$$

Da der Kosinus achsensymmetrisch ist, erhält man

$$\cos(\pi - \phi) = \cos(-(\phi - \pi)) = \cos(\phi - \pi) = -\cos(\phi).$$

Einsetzen in (1.5) und Ausmultiplizieren der Klammer auf der rechten Seite ergibt:

$$\begin{aligned} 4a^2 - 4ar + r^2 &= r^2 + 4rf \cos \phi + 4f^2 \\ a^2 - ar &= rf \cos \phi + f^2 \\ a^2 - f^2 &= r(a + f \cos \phi) \end{aligned}$$

Auflösen nach ergibt dann

$$(1.6) \quad r = \frac{a^2 - f^2}{a + f \cos \phi}$$

Wenn sich der Punkt P in $(-f | b)$ befindet, entsteht hier analog das gleichschenklige Dreieck, dessen Schenkel jeweils die Länge a haben (da S die Länge $2a$ haben muss). Mit dem Pythagoras ergibt sich wieder $b^2 = a^2 - f^2$. Zusammen mit der Definition (1.3) wird die Ellipsengleichung (1.6) zu

$$r = \frac{b^2}{a + f \cos \phi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{f}{a} \cos \phi} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

Insgesamt erhält man die folgenden beiden Versionen der Ellipsengleichung:

$$(1.7) \quad \text{Ursprung in } F_1 : \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi} \quad \text{Ursprung in } F_2 : \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

2. ERSTES KEPLERSCHES GESETZ - KEPLERBAHNEN

Die Bewegung eines Objekts im Gravitationsfeld einer zentralen Masse, z.B. die Orbits von Planeten um ihren Stern, können mit dem Lagrange-Formalismus berechnet werden. Aufgrund der sphärischen Symmetrie wählt man Kugelkoordinaten für den \mathbb{R}^3 , siehe Abschnitt 5.1 im Anhang. Die Gravitationskraft außerhalb einer sphärischen Masse M ist gegeben durch

$$(2.1) \quad \vec{F} = -m\vec{\nabla} \left[-\frac{\gamma M}{r} \right] = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Hier befindet sich die Masse M im Koordinatenursprung und der Vektor \vec{r} zeigt von dort zur Masse m , also von M weg. Die Gravitationskraft zieht aber die Masse m in Richtung der Masse M . Das negative Vorzeichen für die Anziehungskraft \vec{F} bewirkt hier also, dass die Kraft \vec{F} zu M zeigt. Das Gravitationspotential ist

$$(2.2) \quad \Phi(r) = -\frac{\gamma M}{r}$$

und die potentielle Energie einer Probemasse m_0 im Gravitationsfeld der Masse M ist durch¹

$$E_{pot}(r) = -\frac{\gamma M m_0}{r}$$

gegeben. r ist dabei der Abstand der Schwerpunkte von M und m_0 . Da der Schwerpunkt von M im Koordinatenursprung liegen soll, gibt r den Abstand der Punktmasse m_0 vom Ursprung an. Zusätzlich zur potentiellen Energie besitzt die sich bewegend Masse m_0 kinetische Energie. Wir verwenden (5.2) als Metrik, siehe Anhang. Für die kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}m_0v^2$ ergibt sich damit

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_0 \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}m_0 \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi^2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)$$

Für die Lagrange Funktion als Differenz der kinetischen und potentiellen Energie erhält man also:

$$(2.3) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \gamma \frac{Mm_0}{r}$$

2.1. Bewegungen in der Ebene.

Da Planetenbewegungen in einer Ebene stattfinden, wählen wir das Koordinatensystem so, dass $\theta = \pi/2$ und damit $\dot{\theta} = 0$ und $\sin \theta = 1$. Die Lagrangefunktion (2.3) vereinfacht sich für Bewegungen in der Ebene zu

$$(2.4) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + \gamma \frac{Mm_0}{r}.$$

Für die Ableitungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= m_0 r \dot{\phi}^2 - \gamma \frac{Mm_0}{r^2}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= m_0 \dot{r}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= m_0 \ddot{r} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= m_0 r^2 \dot{\phi}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= m_0 \left(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2 \ddot{\phi} \right) \end{aligned}$$

und aus der Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = 0$$

erhält man die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$(2.5) \quad \frac{\ddot{r}}{r} - \dot{\phi}^2 + \gamma \frac{M}{r^3} = 0$$

$$(2.6) \quad 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0$$

¹Die potentielle Energie lässt sich auch durch Integration der Kraft (2.1) erhalten:

$$E_{pot}(R) = \int_R^\infty -\frac{\gamma M m_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \circ d\vec{r} = -\gamma M m_0 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r} \circ d\vec{r}}{r} \stackrel{(5.4)}{=} -\gamma M m_0 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{\gamma M m_0}{R}$$

2.2. Energie als Erhaltungsgröße.

Die Gesamtenergie E ergibt sich als Summe aus kinetischer Energie E_{kin} und potentieller Energie E_{pot} und stellt eine Erhaltungsgröße dar (siehe Anhang).

$$E = \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \right) - \gamma \frac{Mm_0}{r}$$

Da es sich um eine Erhaltungsgröße handelt muss $\dot{E} = 0$, vgl. Abschnitt 5.3. Dies lässt sich aber auch direkt nachrechnen. Aus (2.6) folgt $r\dot{\phi} = -2r\dot{\phi}$ und damit:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m_0 \left(\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\phi}\ddot{\phi} \right) + \frac{\gamma Mm_0\dot{r}}{r^2} = m_0 \left(\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{\gamma M\dot{r}}{r^2} \right) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} m_0 \left(\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\phi}^2 - 2\dot{r}r\dot{\phi}^2 + \frac{\gamma M\dot{r}}{r^2} \right) = m_0\dot{r}r \left(\frac{\ddot{r}}{r} - \dot{\phi}^2 + \frac{\gamma M}{r^3} \right) \stackrel{(2.5)}{=} 0 \end{aligned}$$

2.3. Drehimpuls als Erhaltungsgröße.

Der Drehimpuls L ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße. Hier ergibt sich:

$$(2.7) \quad L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_0 r^2 \dot{\phi}$$

Mit der Bewegungsgleichung (2.6) folgt sofort $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_0 \left(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} \right) = m_0 r \underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} \right)}_{=0} = 0$.

2.4. Integration der Gleichungen.

Löst man jetzt Gleichung (2.7) nach der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ auf und setzt $\dot{\phi} = \frac{L}{m_0 r^2}$ in die Energiegleichung ein, so ergibt sich:

$$E = \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \right) - \gamma \frac{Mm_0}{r} = \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m_0^2 r^2} \right) - \gamma \frac{Mm_0}{r} = \frac{1}{2}m_0\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_0 r^2} - \gamma \frac{Mm_0}{r}$$

Auflösen nach \dot{r}^2 ergibt $\dot{r}^2 = \frac{2E}{m_0} - \frac{L^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2M\gamma}{r}$ und damit

$$(2.8) \quad \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{L^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2M\gamma}{r}}$$

Diese Differentialgleichung beschreibt die Abhängigkeit des radialen Abstandes r von der Zeit t . Zur Vollständigen Beschreibung der Bewegung in der Ebene mittels Polarkoordinaten benötigt man noch die Zeitabhängigkeit des Winkels ϕ . Diese wird nach (2.7) durch die Differentialgleichung

$$(2.9) \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{m_0 r^2}$$

beschrieben. Das gekoppelte System von Differentialgleichungen bestehend aus (2.8) und (2.9) beschreibt die Bewegung des Objektes im Newton'schen Gravitationsfeld vollständig. Ist man nun nur an der Struktur der Bahnkurve interessiert und nicht am zeitlichen Verlauf der Bewegung, so lassen sich (2.8) und (2.9) zu einer Gleichung für die Bahnkurve kombinieren:

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\phi} = \frac{m_0 r^2}{L} \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{L^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2M\gamma}{r}} \right) = \pm r^2 \cdot \sqrt{\frac{2Em_0}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2M\gamma m_0^2}{L^2 r}}$$

Integriert man diese Differentialgleichung, so ergibt sich nach Umsortieren der Summe unter der Wurzel

$$(2.10) \quad \int d\phi = \pm \int \frac{dr}{r^2 \cdot \sqrt{\frac{2Em_0}{L^2} + \frac{2M\gamma m_0^2}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r} - \frac{1}{r^2}}}$$

wobei

$$(2.11) \quad \alpha := \frac{2Em_0}{L^2}, \quad \beta := \frac{2M\gamma m_0^2}{L^2}.$$

2.5. Lösen der Integralgleichung.

Das Integral in Gleichung (2.10) lässt sich dabei wie folgt lösen: Zunächst substituiert man

$$(2.12) \quad x = \frac{1}{r}, \quad dx = -\frac{1}{r^2} dr$$

und erhält

$$(2.13) \quad \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r} - \frac{1}{r^2}}} = \int \frac{-dx}{\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}}.$$

Sei k konstant, durch eine Verschiebung $x = z + k$ erhält man

$$\alpha + \beta x - x^2 = \alpha + \beta(z + k) - (z + k)^2 = \alpha + \beta z + \beta k - z^2 - 2zk - k^2 = \alpha + (\beta - 2k)z + \beta k - k^2 - z^2$$

wählt man hier $k = \frac{\beta}{2}$, so fällt der Term in der Klammer (und damit alle z -Terme) weg. Mit der Substitution

$$(2.14) \quad x = z + \frac{\beta}{2}, \quad dx = dz$$

ergibt sich

$$\alpha + \beta x - x^2 = \alpha + \beta \cdot \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - z^2 = \alpha + \frac{\beta^2}{4} - z^2 = \left(\alpha + \frac{\beta^2}{4}\right) \left(1 - \left[\frac{z}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{4}}}\right]^2\right) := Q^2 \left(1 - \left[\frac{z}{Q}\right]^2\right)$$

wobei

$$(2.15) \quad Q := \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{4}}.$$

Setzt man hier nun $y = \frac{z}{Q}$, also $z = Qy$, so erhält man

$$\alpha + \beta x - x^2 = Q^2 (1 - y^2)$$

durch die Substitution

$$(2.16) \quad x = Qy + \frac{\beta}{2}, \quad dx = Q dy$$

vgl. (2.14). Das Integral (2.13) wird mit der Substitution (2.16) also zu:

$$(2.17) \quad \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r} - \frac{1}{r^2}}} = \int \frac{-dx}{\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}} = - \int \frac{Q dy}{\sqrt{Q^2 (1 - y^2)}} = - \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Hier lässt sich schließlich die Substitution

$$(2.18) \quad y = \cos(\psi), \quad dy = -\sin(\psi) d\psi$$

und die Identität $\sin^2(\psi) = 1 - \cos^2(\psi)$ anwenden. Das Integral (2.17) wird damit zu

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r} - \frac{1}{r^2}}} &= - \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = - \int \frac{-\sin(\psi) d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2(\psi)}} = \int d\psi = \psi \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \arccos(y) \stackrel{(2.16)}{=} \arccos\left(\frac{x - \frac{\beta}{2}}{Q}\right) \stackrel{(2.13)}{=} \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\beta}{2}}{Q}\right) \end{aligned}$$

Die Lösung der linken Seite der Integralgleichung (2.10) lässt sich mit geeigneter Integrationskonstante ϕ_0 als $\phi - \phi_0$ schreiben. Wählt man den Anfangswert so, dass $\phi_0 = 0$, so ergibt sich insgesamt

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\beta}{2}}{Q}\right).$$

Daraus folgt $\frac{1}{r} - \frac{\beta}{2} = Q \cos(\mp\phi) = Q \cos(\phi)$, da $\cos(\phi)$ achsensymmetrisch ist. Auflösen nach r ergibt:

$$(2.19) \quad r = \frac{1}{\frac{\beta}{2} + Q \cos(\phi)} = \frac{\frac{2}{\beta}}{1 + \frac{2Q}{\beta} \cos(\phi)}$$

Mit der Definition (2.11) erhält man

$$\frac{2}{\beta} = \frac{L^2}{M\gamma m_0^2}, \quad \frac{2Q}{\beta} \stackrel{(2.15)}{=} \frac{L^2}{M\gamma m_0^2} \cdot \sqrt{\frac{2Em_0}{L^2} + \frac{M^2\gamma^2 m_0^4}{L^4}} = \sqrt{\frac{2L^2}{M^2\gamma^2 m_0^3} E + 1}$$

und damit

$$(2.20) \quad r = \frac{\frac{L^2}{M\gamma m_0^2}}{1 + \left(\frac{2L^2}{M^2\gamma^2 m_0^3} E + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\phi)} := \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

wobei

$$(2.21) \quad p = \frac{L^2}{M\gamma m_0^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{M^2\gamma^2 m_0^3} E}$$

Es handelt sich hier um eine Ellipsenbahn, vergleiche (1.7).

2.6. Ursprung im anderen Brennpunkt. Das Koordinatensystem lässt sich natürlich auch so wählen, dass der andere Brennpunkt der Ellipse im Ursprung liegt. In Gleichung (2.15) lässt sich statt $Q = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{4}}$ die Definition

$$\tilde{Q} = -\sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{4}}$$

verwenden. Alle Rechnungen bleiben bis (2.19) unverändert aber mit \tilde{Q} an Stelle von Q . Auch der Term für $\frac{2}{\beta}$ ändert sich nicht. Allerdings erhält man

$$\frac{2\tilde{Q}}{\beta} = -\sqrt{\frac{2L^2}{M^2\gamma^2 m_0^3} E + 1} \stackrel{(2.21)}{=} -\varepsilon$$

und damit

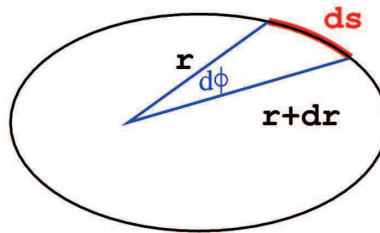
$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$

Wieder ergibt sich eine Ellipse, siehe (1.7).

Fazit: Die Bahnkurven der Planeten um die Sonne sind Ellipsen (*Erstes Keplersche Gesetz*). Die Sonne liegt dabei in einem Brennpunkt, welcher hier im Koordinatenursprung liegt.

3. ZWEITES KEPLERSCHES GESETZ - DREHIMPULSERHALTUNG

Die Länge $r(t)$ der Verbindungslinie vom Koordinatenursprung zum Ellipsenrand verändert sich nach überschreiten eines Winkels $d\phi$ um den Wert dr . Das zurückgelegte Bogenelement sei ds :



Für die Bogenlänge ds gilt

$$(3.1) \quad ds = r d\phi$$

Aus (3.1) ergibt sich:

$$(3.2) \quad \frac{ds}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} = r \dot{\phi}$$

Für infinitesimal kleine Winkel $d\phi$ ist ds näherungsweise eine Gerade² und der Flächeninhalt dA des Dreiecks ist näherungsweise gegeben durch

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot ds.$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \cdot \frac{ds}{dt} \stackrel{(3.2)}{=} \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} \stackrel{(2.9)}{=} \frac{1}{2} r^2 \frac{L}{m_0 r^2} = \frac{L}{2m_0}$$

²Da für infinitesimal kleine Winkel $d\phi$ die Höhe des „Dreiecks“ mit den Seiten r , $r + dr$ und ds gegen Null geht, ist offenbar $ds = dr$.

Da der Drehimpuls L konstant ist, ist also auch die Flächenänderung $\frac{dA}{dt}$ konstant. Für die überstrichene Fläche A ergibt sich die Gleichung $dA = \frac{L}{2m_0} dt$ und damit

$$(3.3) \quad A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{L}{2m_0} dt = \frac{L}{2m_0} (t_2 - t_1) = \frac{L}{2m_0} \Delta t$$

mit $\Delta t := t_2 - t_1$. Der Verbindungsvektor vom Ursprung zum Rand der Ellipse überstreicht also in gleichen Zeiten gleiche Flächen (*Zweites Keplersche Gesetz*).

Der Flächensatz lässt sich auch allgemein aus der Drehimpulserhaltung herleiten. Betrachtet man alternativ die Vektoren \vec{r} (vom Ursprung zu einem Punkt Q auf dem Rand der Ellipse) und $d\vec{s}$ (tangential von Q aus gegen den Urzeigersinn), so ergibt sich für das Flächenelement

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{s}$$

woraus folgt

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{\vec{p}}{m} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

Wenn also der Drehimpuls \vec{L} konstant ist, so ist es auch die Flächenänderung $\frac{d\vec{A}}{dt}$. Die Beträge der Vektoren ergeben dann wieder die obigen Gleichungen.

4. DRITTES KEPLERSCHES GESETZ

Nach einem ganzen Umlauf der Ellipse ist die Zeit T vergangen. Die überstrichene Fläche ist die Ellipsenfläche $A = \pi ab$. Aus (3.3) ergibt sich dann:

$$(4.1) \quad \pi ab = A \stackrel{(3.3)}{=} \int_0^T \frac{L}{2m_0} dt = \frac{L}{2m_0} T$$

Aus Gleichung (1.3) erhält man $b = \sqrt{ap}$. Bei den Keplerbahnen ist $p = \frac{L^2}{m_0^2 M \gamma}$ vgl. (2.21). Damit folgt aus (4.1):

$$T = \frac{2m_0}{L} \cdot \pi ab = \frac{2m_0}{L} \cdot \pi a \sqrt{ap} = \frac{2m_0}{L} \cdot \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{L^2}{m_0^2 M \gamma}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{1}{M \gamma}}$$

Quadrieren ergibt dann:

$$(4.2) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{M \gamma} \cdot a^3$$

Der Term $\frac{4\pi^2}{M \gamma}$ ist dabei eine Konstante und die Gleichung lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\frac{T^2}{a^3} = \textit{konstant}$$

Also verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten zueinander wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen (*Drittes Keplersche Gesetz*).

4.1. Massenbestimmung mit Kepler.

Das dritte Keplersche Gesetz lässt sich zur Massenbestimmung von Himmelskörpern verwenden. Aus (4.2) ergibt sich

$$(4.3) \quad M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 \gamma}.$$

Beispiel 1.

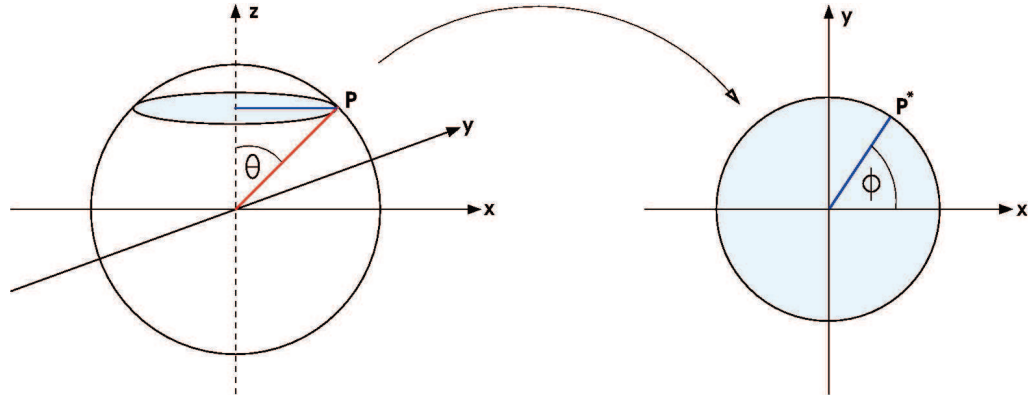
Im exosolaren System Wolf 1061 (Gliese 628) umrundet der Planet Wolf 1061 den zentralen Roten Zwerg mit einer Umlaufzeit von etwa 217 Tagen. Die große Halbachse beträgt dabei $a \approx 0,47 AE$ woraus sich aus (4.3) für den Zentralstern eine Masse von etwa $0,29 M_\odot$ ergibt.

Da die Rotationsachse aufgrund der Planetenmassen eigentlich nicht durch den Schwerpunkt des Sterns, sondern durch das Baryzentrum des ganzen Systems verläuft, erhält man mit (4.3) nur eine erste Näherung. Als genaueren Wert für die Masse von Wolf 1061 findet man $M = 0,310 \pm 0,007$, vgl. [3].

5. ANHANG

5.1. Sphärische Koordinaten im \mathbb{R}^3 .

Sei $P \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit den Koordinaten $P(x, y, z)$, dann gibt r den Abstand zum Koordinatenursprung³ und θ den Winkel zwischen der z -Achse und dem Vektor \overrightarrow{OP} an. Sei P^* die orthogonale Projektion des Punktes P auf die x, y -Ebene, d.h. $P^*(x, y, 0)$, dann ist ϕ der Winkel zwischen der x -Achse und dem Vektor $\overrightarrow{OP^*}$.



Die Transformation in sphärische Koordinaten ist gegeben durch:

$$(5.1) \quad (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

Der dreidimensionale flache Raum wird durch die Metrik

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

beschrieben. In vielen Fällen ist es aber günstiger mit Kugelkoordinaten $\{r, \theta, \phi\}$ zu arbeiten.

Lemma 2. Sphärische Metrik

Die Metrik des \mathbb{R}^3 in sphärischen Koordinaten ist:

$$(5.2) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Beweis: Für die Differentiale ergibt sich mit (5.1):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Damit und durch mehrfaches Anwenden der Identität $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ergibt sich für die Metrik:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\ &\quad + (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 \\ &\quad + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 3. Kugelkoordinaten für $\vec{r} \circ d\vec{r}$

Die 1-Form $\vec{r} \circ d\vec{r}$ hat in Kugelkoordinaten (5.1) die Form

$$(5.4) \quad \vec{r} \circ d\vec{r} = r dr$$

Beweis: Aus den Gleichungen (5.1) und (5.3) erhält man nach einer längeren Rechnung:

$$\vec{r} \circ d\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{pmatrix} = r dr \quad \square$$

Dabei wurde wieder die Identität $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ verwendet.

³ $x = y = z = 0$

5.2. Bewegungsgleichungen.

Differentialgleichungen für Bewegungen lassen sich mit Hilfe der Lagrange Gleichung aufstellen. Wir beschränken uns hier nur auf eine kurze Übersicht.

Das totale Differential df einer Funktion f , die von Koordinaten $\{x_1, \dots, x_n\}$ abhängt ist:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \vec{\nabla} f \circ d\vec{x}$$

Für die Ableitung $\frac{df}{d\varepsilon}$ gilt damit:

$$(5.5) \quad \frac{df}{d\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{d\varepsilon} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{d\varepsilon} = \vec{\nabla} f \circ \frac{d\vec{x}}{d\varepsilon}$$

Falls ein x_i nicht von ε abhängt ist natürlich $\frac{dx_i}{d\varepsilon} = 0$ und der entsprechende Summand fällt weg.

Sei $x(t)$ der Ort (z.B. eines Körpers) und $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit t . Ferner sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\xi(t)$ eine glatte Kurve mit kleinen Werten. Eine **Variation** von Ort x und Geschwindigkeit \dot{x} auf dem Intervall $t \in [a, b]$ ist gegeben durch:

$$(5.6) \quad q(t, \varepsilon) = x(t) + \varepsilon \xi(t) \quad \text{und} \quad \dot{q}(t, \varepsilon) = \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\xi}(t)$$

Dabei sollen die Werte am Anfang und am Ende des Intervalls $[a, b]$ mit denen der Ursprünglichen Ortskurve $x(t)$ übereinstimmen, aus $x(a) = x(a) + \varepsilon \xi(a)$ und $x(b) = x(b) + \varepsilon \xi(b)$ ergeben sich also die Randbedingungen:

$$(5.7) \quad \xi(a) = 0 \quad \text{und} \quad \xi(b) = 0$$

Für die Variationen (5.6) gilt offensichtlich:

$$(5.8) \quad \frac{dq}{d\varepsilon} = \xi \quad \text{und} \quad \frac{d\dot{q}}{d\varepsilon} = \dot{\xi}$$

Sei nun L eine Funktion, die wiederum von den Orts- und Geschwindigkeitsvariationen (5.6) und der Zeit abhängt, also:

$$L = L(q(t, \varepsilon), \dot{q}(t, \varepsilon), t)$$

Aus Gleichung (5.5) folgt zusammen mit (5.8) und $\frac{dt}{d\varepsilon} = 0$:

$$(5.9) \quad \frac{dL}{d\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{dq}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d\dot{q}}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial q} \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\xi}$$

Die **Wirkung** S ist definiert als Integral über die sogenannte Lagrangefunktion L :

$$S(\varepsilon) = \int_a^b L(q(t, \varepsilon), \dot{q}(t, \varepsilon), t) dt$$

Gesucht ist diejenige Variation von L , für welche die Wirkung S **extremal** wird. Notwendigerweise gilt $\frac{dS}{d\varepsilon} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L dt = \int_a^b \frac{dL}{d\varepsilon} dt \stackrel{(5.9)}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\xi} \right) dt = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \xi dt + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\xi} dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \xi dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xi \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \xi dt \stackrel{(5.7)}{=} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \xi dt - \int_a^b \xi \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt = \int_a^b \xi \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt \end{aligned}$$

Da ξ im Allgemeinen von Null verschieden ist, muss

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

In m -dimensionalen Systemen mit den Koordinaten q^k und den Geschwindigkeiten \dot{q}^k erhält man m Gleichungen:

$$(5.10) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = 0$$

5.3. Erhaltungsgrößen.

Wegen der Homogenität der Zeit hängt L nicht explizit von t ab. Es ist

$$d\mathcal{L} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k \right)$$

und damit:

$$(5.11) \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \cdot \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \frac{d\dot{q}^k}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \cdot \dot{q}^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \ddot{q}^k \right)$$

Aus der Lagrange Gleichung (5.10) folgt $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}$. Zusammen mit der Produktregel wird (5.11) zu

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_k \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right] \cdot \dot{q}^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \ddot{q}^k \right) = \sum_k \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k \right].$$

Subtraktion von $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$ ergibt

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - \mathcal{L} \right] = 0.$$

Offensichtlich ist der Term in der Klammer zeitlich Konstant. Es handelt sich um die Energie (abgeschlossenes System):

$$(5.12) \quad E = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - \mathcal{L}$$

Weitere Erhaltungsgrößen ergeben sich aus weiteren Symmetrien. Betrachte ein m -dimensionales System mit einer Lagrangefunktion $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^1, \dots, q^{m-n}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m, t)$. Die Lagrangefunktion hängt also **nicht** von den Koordinaten q^{m-n+1}, \dots, q^m ab. Für $k > m - n$ ergibt sich dann $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0$ und aus (5.10) folgt dann $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = 0$. Integration dieser Gleichung liefert

$$(5.13) \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} [\mathcal{L}(q^1, \dots, q^{m-n}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m, t)] = \textit{konstant}, \quad \text{für alle } k > m - n$$

Beispiel 4.

Bei den Keplerbahnen in der $\theta = \pi/2$ Ebene ergibt $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}$ den Drehimpuls.

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße. Mit der Lagrangefunktion (2.4) ergibt sich aus (5.12):

$$\begin{aligned} E &= \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= m_0 \dot{r}^2 + m_0 r^2 \dot{\phi}^2 - \left\{ \frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \gamma \frac{M m_0}{r} \right\} \\ &= \frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \gamma \frac{M m_0}{r} \end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, B.G.Teubner Stuttgart-Leipzig, 1996
- [2] Catalogue of Exoplanets <https://exoplanet.eu/catalog/>
- [3] P. Kervella et al: Stellar and substellar companions of nearby stars from Gaia DR2 - Binarity from proper motion anomaly, *Astronomie & Astrophysics*, Vol. 623, A72 <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201834371>, 2019
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik - Klassische Feldtheorie, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1997
- [5] L. J. Rosenthal et al.: The California Legacy Survey I. A Catalog of 178 Planets from Precision Radial Velocity Monitoring of 719 Nearby Stars over Three Decades, *ApJS*, 255, 8, 2021