Spirale de la fonction zêta de Riemann

Réalisé par :

Ayoub ZAROUAL

Le 31/01/2024

Résumé

Le présent article permet de prouver que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} : s = a + ib\ , s \neq 1$ sur le plan complexe est une spirale de rayon r :

$$r = \lim_{N\to+\infty} \sqrt{\left(\frac{bN^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\frac{A_{2j-1}}{N^{a+2j-1}}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2N^a} + \frac{(1-a)N^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\frac{B_{2j-1}}{N^{a+2j-1}}\right)\right)^2}$$

Avec :

- $A_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)+1} K_{2j-1}^{2p}(a)$
- $B_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)} K_{2j-1}^{2p+1}(a)$
- $a \to K_n^p(a)$ $(a \in \mathbb{R})$ c'est la fonction qui fait la somme des multiplications entre tous les éléments des combinaisons sans répétition des n éléments $\{a; a+1; a+2; \ldots; a+n-1 : n \in \mathbb{N}^*\}$ pris p à p $\left(C_n^p\right)$

Et de centre de coordonnées :

$$\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}B_{2j-1}\right), \left(\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}A_{2j-1}\right)\right)$$

On démontre ensuite que la fonction zêta de Riemann peut être prolonger analytiquement sur tous le plan complexe sauf en $s = 1$ par :

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{s}) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}B_{2j-1}\right] - \boldsymbol{i} \times \left[\frac{b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}A_{2j-1}\right]$$

$$\equiv$$

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{s}) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right]\right]$$

$$+\boldsymbol{i} \times \left[\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]\right]$$

Abstract

The present paper proves that the Riemann zeta function $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} : s = a + ib , s \neq 1$ on the complex plane is a spiral of radius r :

$$r = \lim_{N\to+\infty}\sqrt{\left(\frac{bN^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\frac{A_{2j-1}}{N^{a+2j-1}}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2N^a} + \frac{(1-a)N^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\frac{B_{2j-1}}{N^{a+2j-1}}\right)\right)^2}$$

With :

- $A_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)+1}K_{2j-1}^{2p}(a)$
- $B_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)}K_{2j-1}^{2p+1}(a)$
- $a \to K_n^p(a)$ ($a \in \mathbb{R}$) is the function which sums the multiplications between all the elements of the combinations without repetition of the n elements $\{a; a+1; a+2; \dots; a+n-1 : n \in \mathbb{N}^*\}$ taken p by p ((C_n^p)

And of coordinate center :

$$\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}B_{2j-1}\right), \left(\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}A_{2j-1}\right)\right)$$

We then show that the Riemann zeta function can be extended analytically on all the complex plane except for $s = 1$ by :

$$\boldsymbol{\zeta(s)} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}B_{2j-1}\right] - \boldsymbol{i}\times\left[\frac{b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}A_{2j-1}\right]$$

$$\equiv$$

$$\boldsymbol{\zeta(s)} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n}\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right]\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\times\left[\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n+1}\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]\right]$$

Tables des métiers

Introduction

La fonction zêta de Riemann[1], souvent notée $\zeta(s)$, est une fonction mathématique spéciale qui joue un rôle essentiel dans l'étude de la distribution des nombres premiers et dans la théorie des nombres en général. Elle a été introduite par le mathématicien allemand Bernhard Riemann au milieu du XIXe siècle.

La fonction zêta de Riemann est définie pour des nombres complexes s de la forme $s = a + bi$, où *a* et *b* sont des nombres réels, et *i* est l'unité imaginaire ($i^2 = -1$). La formule de la fonction zêta de Riemann est la suivante :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a+bi}}$$

Lorsque la partie réelle de *s* est strictement grande que 1 ($a > 1$), la série converge et donne une valeur finie à la fonction zêta de Riemann.

Pour $s = 1$ elle a un pôle simple et pour tout *s* de partie réelle strictement petite que 1 ($a < 1$) la série diverge et peut être analytiquement prolongée en utilisant l'identité fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s),$$

Où Γ est la fonction Gamma d'Euler. Il devient alors possible d'utiliser cette formule pour définir zêta pour tout *s* de partie réelle négative (avec $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que les entiers pairs strictement négatifs sont des zéros de zêta (appelés zéros triviaux $\zeta(-2n) = 0$ et que les zéros non triviaux sont symétriques par rapport à l'axe $a = \frac{1}{2}$ et sont tous de partie réelle comprise, au sens large, entre 0 et 1 ; cette région du plan complexe s'appelle la bande critique.

Du coup, l'hypothèse de Riemann peut se reformuler ainsi :

$$\zeta(s) = 0 \;\; Et \;\; 0 < a < 1\,, implique\ a = \frac{1}{2}$$

[1] Bernhard Riemann. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse. Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß, 2(145-155):2, 1859

1 Revue bibliographique

1.1 Principe du prolongement analytique

Théorème : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes sur U, A une partie de U admettant un point d'accumulation qui appartient à U. Alors

$$f = g \text{ sur } A \iff f = g \text{ sur } U.$$

En particulier, si $f = g$ dans un voisinage d'un point a de U, alors $f = g$ sur U.

Ce théorème permet de démontrer de nombreux résultats d'unicité pour les fonctions holomorphes. Par exemple, la seule fonction holomorphe $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour tous $n \geq 1$ est la fonction $f(z) = z$. On applique le théorème précédent à $A = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$, $U = \mathbb{C}$, en remarquant que $0 \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A.

Définition[2] — Soient U un ouvert de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et f une application de U dans $\mathbb{C}$.

- On dit que f est dérivable (au sens complexe) ou holomorphe en un point z_0 de U si la limite suivante, appelée dérivée de f en z_0 existe :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- On dit que f est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U.
- En particulier, on appelle fonction entière une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1.2 Nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli, notés B_n (ou parfois b_n pour ne pas les confondre avec les polynômes de Bernoulli), constituent une suite de nombres rationnels.

Ces nombres ont d'abord été étudiés par Jacques Bernoulli[3] (ce qui a conduit Abraham de Moivre à leur donner le nom que nous connaissons aujourd'hui) en cherchant des formules pour exprimer les sommes du type :

---

[2] https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./p/prolongementanalytique.html

[3] Jakob Bernoulli. Ars conjectandi: opus posthumum: accedit Tractatus de seriebus infinitis; et Epistola gallice scripta de ludo pilae reticularis. Impensis Thurnisiorum, 1713

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m.$$

Pour des valeurs entières de *m*, cette somme s'écrit comme un polynôme de la variable *n* dont les premiers termes sont :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\left(n^{m+1} - \frac{1}{2}\binom{m+1}{1}n^m + \frac{1}{6}\binom{m+1}{2}n^{m-1} - \frac{1}{30}\binom{m+1}{4}n^{m-3} + \frac{1}{42}\binom{m+1}{6}n^{m-5} + \ldots\right).$$

Avec : $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

Les premiers nombres de Bernoulli sont donnés par la table suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

Jacques Bernoulli connaissait quelques formules comme :

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(n-1) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{n}{2} &&= \frac{n(n-1)}{2};\\
1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2 &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{6} &&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6};\\
1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3 &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 &&= \frac{n^2(n-1)^2}{4};\\
1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4 &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{n}{30} &&= \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30};\\
1^5+2^5+3^5+\cdots+(n-1)^5 &= \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 &&= \frac{n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)}{12}.
\end{aligned}$$

Bernoulli observa que l'expression :

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$$

Est toujours un polynôme en *n*, de degré *m* + 1, et définie les nombres de Bernoulli B_k par :

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m+1-k)!}\frac{B_k}{k!}\,n^{m+1-k} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k\,n^{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_k\,\frac{n^{m+1-k}}{m+1-k}.$$

En particulier, le coefficient de *n* dans le polynôme $S_m(n)$ est le nombre B_k.

1.3 Valeurs particulières de la fonction zêta de Riemann[4]

1.3.1 En 0 et 1

En zéro, on a : $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$

En 1 il y a un pôle, alors $\zeta(1)$ n'est pas fini mais la limite vaut $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite :

$$\lim_{s \to 1^{\pm}} \zeta(s) = \pm\infty$$

1.3.2 Entiers positifs pairs

Les valeurs exactes de la fonction zêta aux entiers positifs pairs peuvent être exprimées à partir des nombres de Bernoulli :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2)^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}.$$

1.3.3 Entiers positifs impairs

Elle n'existe pas une formule générale pour calculer la fonction zêta aux entiers positifs impairs.

La somme de la série harmonique est infinie :

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots = \infty$$

La valeur $\zeta(3)$ est aussi connue comme la constante d'Apéry (1.202..) et apparait dans le rapport gyromagnétique de l'électron. La valeur $\zeta(5)$ apparait dans la loi de Planck (1.036…).

1.3.4 Entiers négatifs

En général, pour tout entier négatif, on a :

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

Les zéros "triviaux" sont aux entiers pairs négatifs :

$$\zeta(-2n) = 0 \quad (B_{2n+1} = 0 : n > 0)$$

[4] https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeurs_particuli%C3%A8res_de_la_fonction_z%C3%AAta_de_Riemann

2 Observations graphiques

On introduit la fonction $s \to Z(s)$ pour tout s dans l'ensemble des nombres complexes $s = a + bi$, telle que :

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{a+bi}}$$

On a l'égalité suivante :

$$\lim_{N \to +\infty} Z(s) = \zeta(\mathrm{s})$$

Et puisque :

$$\frac{1}{n^{a+bi}} = n^{-a} \times e^{-ibln(n)} = \frac{\cos(bln(n))}{n^a} - i \times \frac{\sin(bln(n))}{n^a}$$

On a donc :

$$\boxed{\zeta(\mathrm{s}) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(bln(n))}{n^a} - i \times \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(bln(n))}{n^a} \qquad (1)}$$

La figure 1 montre la représentation graphique de $Z(s)$ dans le plan complexe lorsque N varie entre $N_1 = 10^3$ a $N_2 = 6 \times 10^5$ pour quelques nombres réelles (a, b).

Indications :

On sait que :

- $\zeta\left(\frac{1}{2} \pm \mathrm{i} \times 49.773832478 \ldots\right) = 0$
- $\zeta\left(\frac{1}{2} \pm \mathrm{i} \times 101.317851006 \ldots\right) = 0$

49.773832478 ...; 101.317851006 ..., sont des estimations de la partie imaginaire de quelque zéros non triviaux de la fonction zêta.

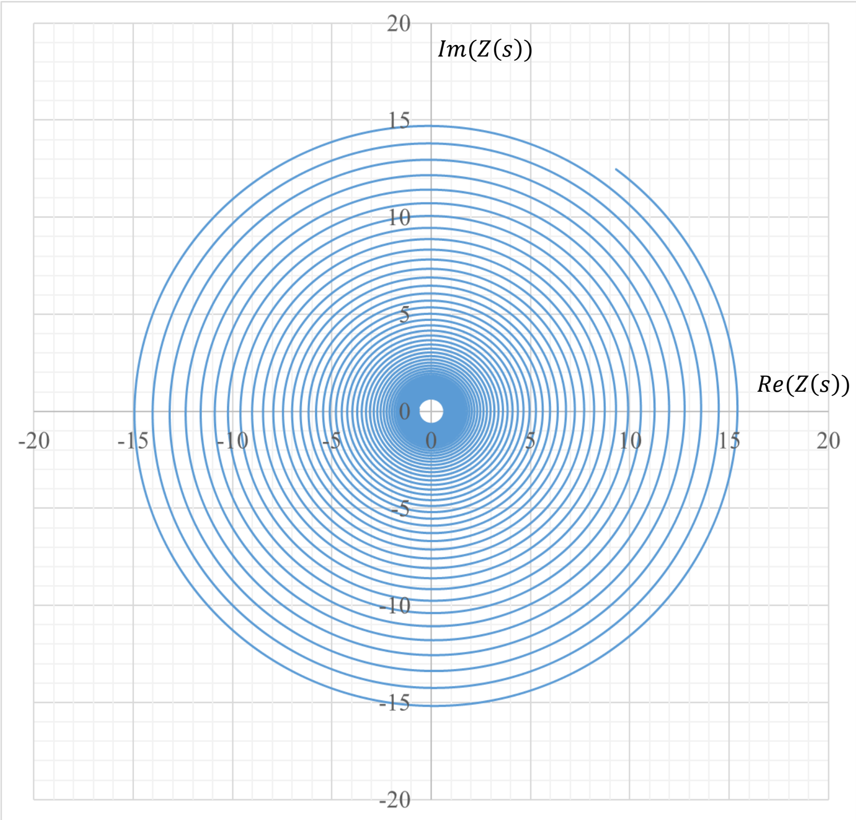

Figure 1 : Représentation graphique de $Z(s)$ de $N_1 = 10^3$ a $N_2 = 6 \times 10^5$ dans le plan complexe quand $s = \frac{1}{2} + i \times 49.773832478 \ldots$

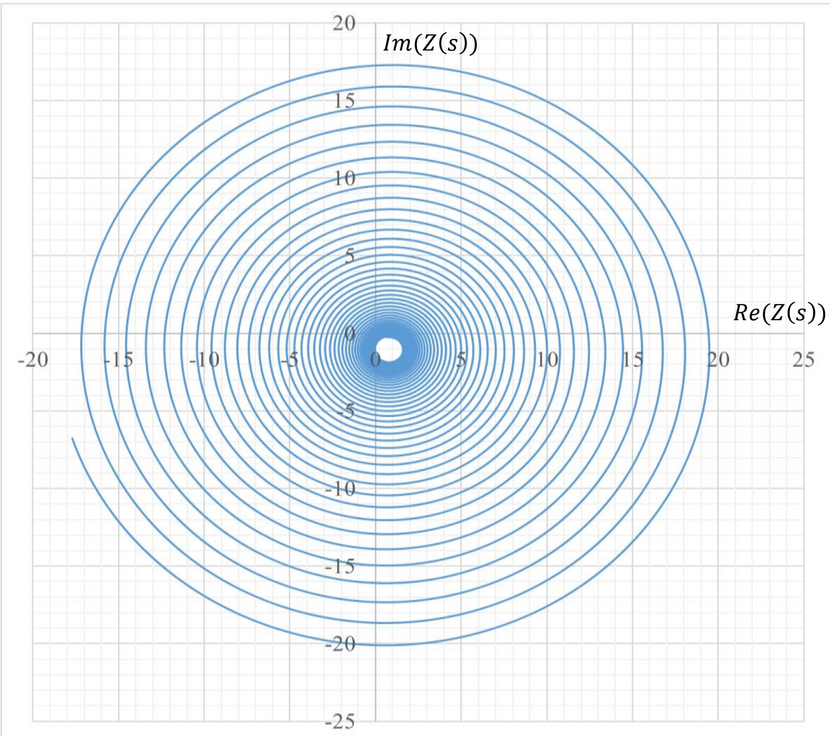

Figure 2 : Représentation graphique de $Z(s)$ de $N_1 = 10^3$ a $N_2 = 6 \times 10^5$ dans le plan complexe quand

$$s = \frac{1}{2} + i \times 40$$

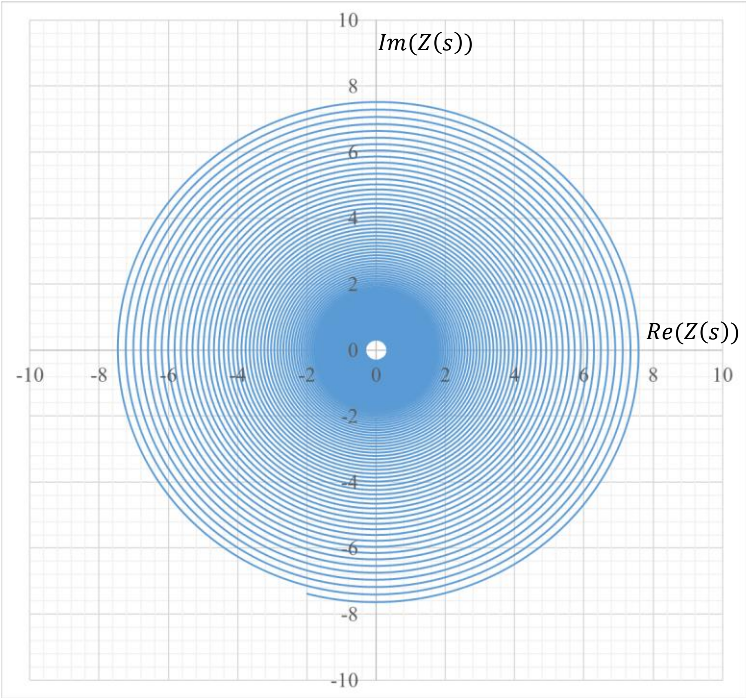

Figure 3 : Représentation graphique de $Z(s)$ de $N_1 = 10^3$ a $N_2 = 6 \times 10^5$ dans le plan complexe quand

$$s = \frac{1}{2} + i \times 101.317851006 \ldots$$

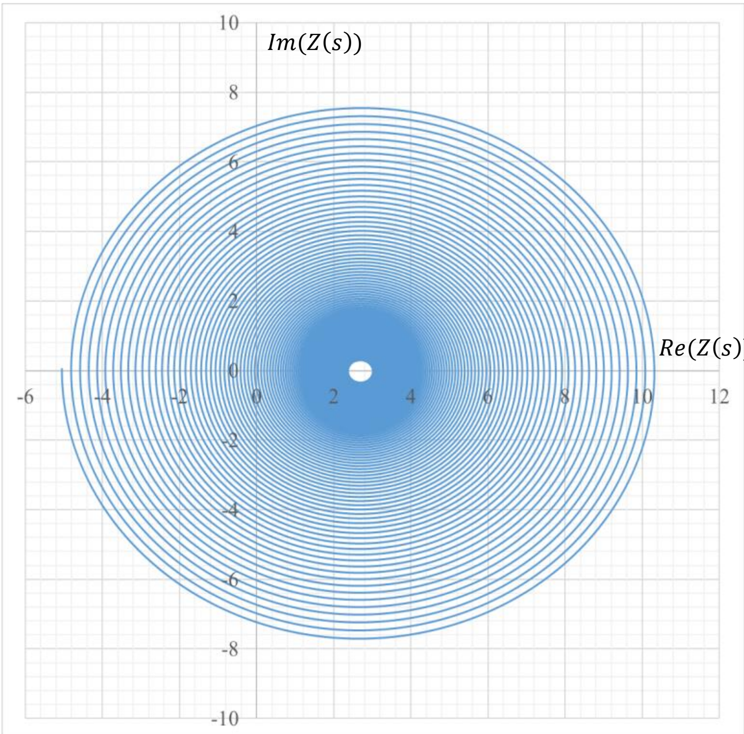

Figure 4 : Représentation graphique de $Z(s)$ de $N_1 = 10^3$ a $N_2 = 6 \times 10^5$ dans le plan complexe quand

$$s = \frac{1}{2} + i \times 100$$

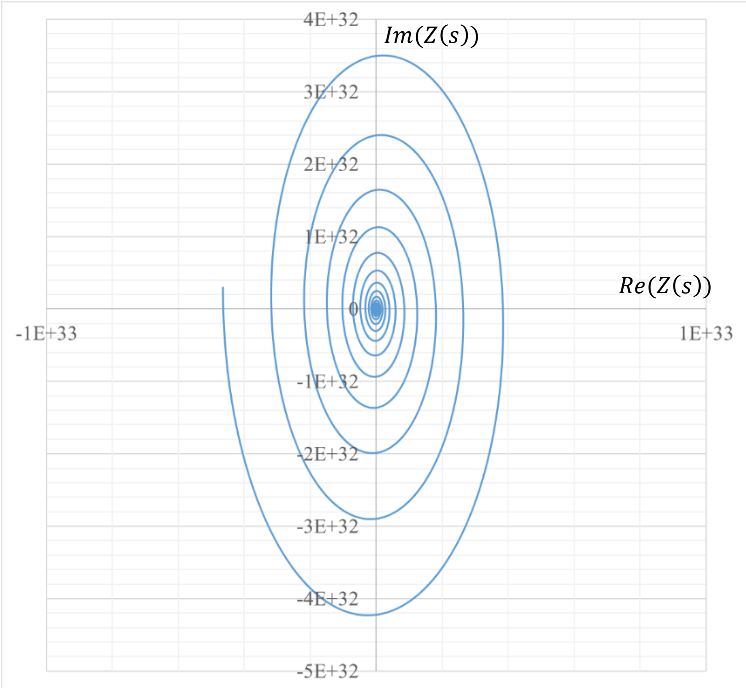

Figure 5 : Représentation graphique de $Z(s)$ de $N_1 = 10^3$ a $N_2 = 6 \times 10^5$ dans le plan complexe quand $s = -5 + i \times 100$

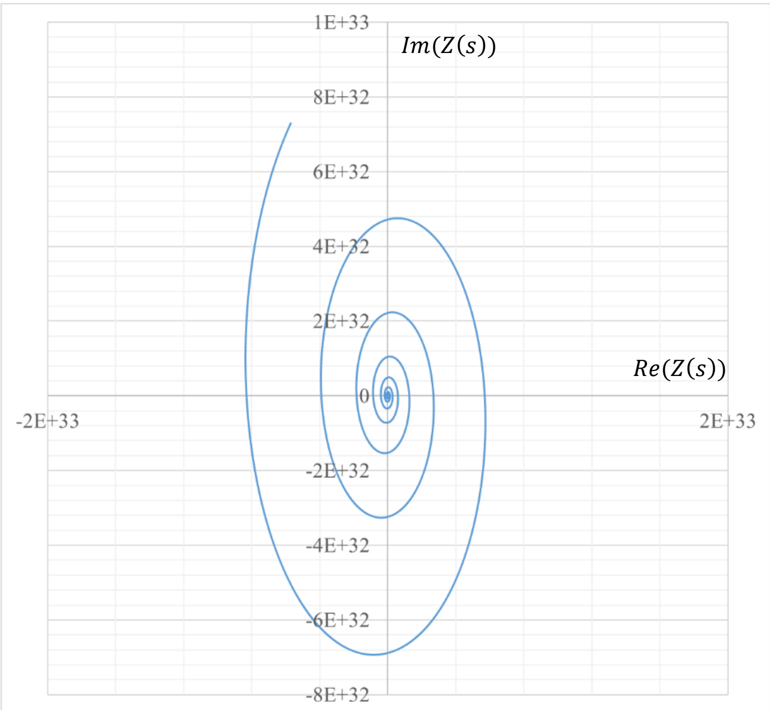

Figure 6 : Représentation graphique de $Z(s)$ de $N_1 = 10^3$ a $N_2 = 6 \times 10^5$ dans le plan complexe quand $s = -5 + i \times 50$

D'après les figures 1, 2, 3, 4, 5 et 6, on peut tirer les remarques suivantes :

- Lorsque $N \to +\infty$, $Z(s) : s = a + bi$, dans le plan complexe est une spirale d'un rayon $r \in \mathbb{R}$ dépendant de N, a et b et d'un centre de coordonnées $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ dépendant de a et b ;
- Lorsque $a = \frac{1}{2}$ et b prend l'une des valeurs de la partie imaginaire des zéros non triviaux de la fonction zêta, la spirale semble avoir l'origine du repère comme centre (0,0).

3 Hypothèse (0)

En se basant sur l'observation graphique on peut formuler l'hypothèse (0) :

Le prolongement analytique de la fonction zêta de Riemann peut s'écrire sous la forme $\zeta(s) = u + iv$ et *(u,v)* sont les coordonnées du centre de la spirale *Z(s)* vers l'infini.

4 Démonstration

D'après la relation (1) :

$$\zeta(s) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(bln(n))}{n^a} - i \times \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(bln(n))}{n^a}$$

Posant $f(n) = \frac{\cos(bln(n))}{n^a}$ et $g(n) = \frac{\sin(bln(n))}{n^a}$

En appliquant la formule d'Euler-Maclaurin qui s'énonce ainsi :

Pour une fonction *f* continûment dérivable 2*k* fois sur le segment [*p*, *q*] (avec $k \geq 1$) on a :

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \frac{f(1) + f(N)}{2} + \int_1^N f(x)dx + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_{2j}}{(2j)!} \left(f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(1)\right) + R_k$$

Les nombres b_{2j} désignent les nombres de Bernoulli et le reste R_k s'exprime à l'aide du polynôme de Bernoulli B_{2k} :

$$R_k = -\frac{1}{(2k)!} \int_p^q f^{(2k)}(x) B_{2k}(x - \lfloor x \rfloor)\, \mathrm{d}x.$$

Les fonctions f et g sont continûment dérivables $2k$ fois sur le segment $[1, N]$ (avec $k \geq 1$), alors :

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \frac{f(1)+f(N)}{2} + \int_1^N f(x)dx + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(1)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} g(n) = \frac{g(1)+g(N)}{2} + \int_1^N g(x)dx + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(g^{(2j-1)}(N) - g^{(2j-1)}(1)\right)$$

$$\lim_{k\to+\infty} R_k = 0$$

Calcul de $\int_1^N f(x)dx$ et $\int_1^N g(x)dx$:

$$\int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a} = \int_1^N \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]' \cos(bln(x)) = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\cos(bln(x))\right]_1^N + \frac{b}{1-a}\int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a}$$

$$= \frac{N^{1-a}}{1-a}\cos(bln(N)) - \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-a}\int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a} \qquad (a \neq 1)$$

$$\int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a} = \int_1^N \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]' \sin(bln(x)) = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\sin(bln(x))\right]_1^N - \frac{b}{1-a}\int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a}$$

$$= \frac{N^{1-a}}{1-a}\sin(bln(N)) - \frac{b}{1-a}\int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a}$$

Remplaçant $\int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a}$ et $\int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a}$ dans les deux égalités :

$$\int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a} = \frac{N^{1-a}}{1-a}\cos(bln(N)) - \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-a} \times \left[\frac{N^{1-a}}{1-a}\sin(bln(N)) - \frac{b}{1-a}\int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a}\right]$$

$$\equiv \left[1 + \left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right] \times \int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a} = \frac{N^{1-a}}{1-a} \times \left[\cos(bln(N)) + \frac{b}{1-a}\sin(bln(N))\right] - \frac{1}{1-a}$$

$$\equiv \int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a} = \frac{\left[\frac{N^{1-a}}{1-a} \times \left[\cos(bln(N)) + \frac{b}{1-a}\sin(bln(N))\right] - \frac{1}{1-a}\right]}{\left[1 + \left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]}$$

$$\int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a} = \frac{N^{1-a}}{1-a}\sin(bln(N)) - \frac{b}{1-a} \times \left[\frac{N^{1-a}}{1-a}\cos(bln(N)) - \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-a}\int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a}\right]$$

$$\equiv \left[1 + \left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right] \times \int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a} = \frac{N^{1-a}}{1-a} \times \left[\sin(bln(N)) - \frac{b}{1-a}\sin(bln(N))\right] + \frac{b}{(1-a)^2}$$

$$\equiv \int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a} = \frac{\left[\frac{N^{1-a}}{1-a}\times\left[\sin(bln(N))-\frac{b}{1-a}\sin(bln(N))\right]+\frac{b}{(1-a)^2}\right]}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]}$$

On a donc :

$$\int_1^N \boldsymbol{f(x)dx} = \int_1^N \frac{\cos(bln(x))}{x^a} = \frac{\left[\frac{N^{1-a}}{1-a}\times\left[\cos(bln(N))+\frac{b}{1-a}\sin(bln(N))\right]-\frac{1}{1-a}\right]}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]}$$

$$\int_1^N \boldsymbol{g(x)dx} = \int_1^N \frac{\sin(bln(x))}{x^a} = \frac{\left[\frac{N^{1-a}}{1-a}\times\left[\sin(bln(N))-\frac{b}{1-a}\sin(bln(N))\right]+\frac{b}{(1-a)^2}\right]}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]} \qquad \boxed{(2)}$$

Calcul de $\boldsymbol{f^{(2j-1)}(N)\ et\ f^{(2j-1)}(1)}$:

Calculant la dérivée première et second de *f* :

$$\left[\frac{\cos(bln(x))}{x^a}\right]' = \frac{-ax^{a-1}\cos(bln(x))-bx^{a-1}\sin(bln(x)}{x^{2a}} = \frac{-a\cos(bln(x))-bsin(bln(x))}{x^{a+1}}$$

$$\left[\frac{\cos(bln(x))}{x^a}\right]'' = \left[\frac{-a\cos(bln(x))-bsin(bln(x))}{x^{a+1}}\right]' = -a\times\left[\frac{\cos(bln(x))}{x^{a+1}}\right]' - b\times\left[\frac{\sin(bln(x))}{x^{a+1}}\right]'$$

$$= -a\times\left[\frac{-(a+1)\cos(bln(x))-bsin(bln(x))}{x^{a+2}}\right] - b\times\left[\frac{bcos(bln(x))-(a+1)\sin(bln(x))}{x^{a+2}}\right]$$

$$= \frac{(a(a+1)-b^2)\cos(bln(x)) + (b(a+1)+ab)\sin(bln(x))}{x^{a+2}}$$

On observe que la dérivée d'ordre *k* de *f* peut s'écrire sous la forme :

$$f^{(k)} = \frac{A_k\sin(bln(x)) + B_k\cos(bln(x))}{x^{a+k}}$$

$A_k\ et\ B_k$ Sont des facteurs qui dépendent de *a* et *b* et de l'ordre de dérivation *k*.

$$A_1 = -b \quad B_1 = -a$$

$$A_2 = b(a+a+1) \quad B_2 = a(a+1) - b^2$$

$$f^{(k+1)} = \left[\frac{A_k\sin(bln(x))+B_k\cos(bln(x))}{x^{a+k}}\right]' = A_k\times\left[\frac{\sin(bln(x))}{x^{a+k}}\right]' + B_k\times\left[\frac{\cos(bln(x))}{x^{a+k}}\right]'$$

$$= A_k\times\left[\frac{bcos(bln(x))-(a+k)\sin(bln(x))}{x^{a+k+1}}\right] + B_k\times\left[\frac{-bsin(bln(x))-(a+k)\cos(bln(x))}{x^{a+k+1}}\right]$$

$$= \frac{(A_k \times b - B_k \times (a+k))\cos(b\ln(x)) - (A_k \times (a+k) + B_k \times b)\sin(b\ln(x))}{x^{a+k+1}}$$

Et donc on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} A_{k+1} = -(A_k \times (a+k) + B_k \times b) \\ B_{k+1} = (A_k \times b - B_k \times (a+k)) \end{cases} \qquad \boxed{(3)}$$

On les utilise pour calculer le reste des facteurs :

$A_3 = -(A_2 \times (a+2) + B_2 \times b)$

$= -(b(a+a+1) \times (a+2) + (a(a+1) - b^2) \times b)$

$= b^3 - b(a(a+1) + a(a+2) + (a+1)(a+2))$

$B_3 = (A_2 \times b - B_2 \times (a+2))$

$= b(a+a+1) \times b - (a(a+1) - b^2) \times (a+2)$

$= b^2(a+a+1+a+2) - a(a+1)(a+2)$

On sait que la combinaison sans répétition de n éléments pris p à p est égale à :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

En considérant la fonction notée $a \to K_n^p(a)$ $(a \in \mathbb{R})$ qui fait la somme des multiplications entre tous les éléments des combinaisons sans répétition des n éléments $\{a; a+1; a+2; \dots; a+n-1 : n \in \mathbb{N}^*\}$ pris p à p :

$K_2^1(a) = (a) + (a+1)$; $\qquad C_2^1 = \frac{2!}{1! \times (2-1)!} = 2$

$K_2^2(a) = a(a+1)$; $\qquad C_2^2 = \frac{2!}{2! \times (2-2)!} = 1$

$K_3^2(a) = a(a+1) + a(a+2) + (a+1)(a+2)$; $\qquad C_3^2 = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = 3$

$K_3^1(a) = (a) + (a+1) + (a+2)$; $\qquad C_3^1 = \frac{3!}{1! \times (3-1)!} = 3$

$K_3^3(a) = a(a+1)(a+2)$; $\qquad C_3^3 = \frac{3!}{3! \times (3-3)!} = 1$

On va avoir :

$A_1 = -bK_1^0(a)$; $B_1 = -K_1^1(a)$

$A_2 = bK_2^1(a)$; $B_2 = -(b^2K_2^0(a) - K_2^2(a)$

$A_3 = b^3K_3^0(a) - bK_3^2(a)$; $B_3 = b^2K_3^1(a) - bK_3^3(a)$

$A_4 = -(b^3K_4^1(a) - bK_4^3(a))$; $B_4 = b^4K_4^0(a) - b^2K_4^2(a) + K_4^4(a)$

$A_5 = -(b^5K_5^0(a) - b^3K_5^2(a) + bK_5^4(a))$; $B_5 = -(b^4K_5^1(a) - b^2K_5^3(a) + K_5^5(a))$

$A_6 = b^5K_6^1(a) - b^3K_6^3(a) + bK_6^5(a)$; $B_6 = -(b^6K_6^0(a) - b^4K_6^2(a) + b^2K_6^4(a) - K_6^6(a))$

On observe que A_k et B_k peuvent s'écrire en fonction de la parité de l'ordre de dérivation k :

$\forall\, k \in \mathbb{N}^* si\ k = 2n + 1 : n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\begin{aligned} A_{2n+1} &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1} K_{2n+1}^{2p}(a) \\ B_{2n+1} &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)} K_{2n+1}^{2p+1}(a) \end{aligned} \qquad \boxed{(4)}}$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*\ si\ k = 2n\ : n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_{2n} = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+n} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p-1}(a)$$

$$B_{2n} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+n} b^{2(n-p)} K_{2n}^{2p}(a)$$

Démonstration par récurrence :

Pour $k = 1$:

$$A_1 = \textstyle\sum_{p=0}^{0} (-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1} K_{2n+1}^{2p}(a) = -b\, K_1^0(a) = -b$$

$$B_1 = \textstyle\sum_{p=0}^{0} (-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)} K_{2n+1}^{2p+1}(a) = -K_1^1(a) = -a$$

Pour $k = 2$:

$$A_2 = \textstyle\sum_{p=1}^{1} (-1)^{p+n} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p-1}(a) = bK_2^1(a) = b(a + a + 1)$$

$$B_2 = \sum_{p=0}^{1}(-1)^{p+n} b^{2(n-p)} K_{2n}^{2p}(a) = -(b^2 K_2^0(a) - K_2^2(a)) = a(a+1) - b^2$$

Supposant que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*\ si\ k = 2n\ : n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_{2n} = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p-1}(a)$$

$$B_{2n} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+n} b^{2(n-p)} K_{2n}^{2p}(a)$$

D'après la relation (3) :

$A_{k+1} = -(A_k \times (a+k) + B_k \times b)$

$B_{k+1} = (A_k \times b - B_k \times (a+k))$

Donc :

$A_{2n+1} = -(A_{2n} \times (a+2n) + B_{2n} \times b)$

$$= -(a+2n)\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p-1}(a) - b\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+n} b^{2(n-p)} K_{2n}^{2p}(a)$$

$$= (a+2n)\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p-1}(a) + \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p}(a)$$

$$= \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1}(a+2n) K_{2n}^{2p-1}(a) + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p}(a) + (-1)^{n+1} b^{2n+1} K_{2n+1}^{0}(a)$$

$$= \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1}\left[(a+2n) K_{2n}^{2p-1}(a) + K_{2n}^{2p}(a)\right] + (-1)^{n+1} b^{2n+1} K_{2n+1}^{0}(a)$$

$$= \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1}\, K_{2n+1}^{2p}(a) + (-1)^{n+1} b^{2n+1} K_{2n+1}^{0}(a)$$

$$= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)+1}\, K_{2n+1}^{2p}(a)$$

Parce que $(a+2n)K_{2n}^{2p-1}(a) + K_{2n}^{2p}(a) = K_{2n+1}^{2p}(a)$ (Annexe 1)

$B_{2n+1} = (A_{2n} \times b - B_{2n} \times (a+2n))$

$$= b\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+n} b^{2(n-p)+1} K_{2n}^{2p-1}(a) - (a+2n)\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+n} b^{2(n-p)} K_{2n}^{2p}(a)$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)} K_{2n}^{2p+1}(a) + \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)}(a+2n) K_{2n}^{2p}(a)$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)}\left[K_{2n}^{2p+1}(a) + (a+2n) K_{2n}^{2p}(a)\right] + (-1)^{2n+1}(a+2n) K_{2n}^{2n}(a)$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)} K_{2n+1}^{2p+1}(a) + (-1)^{2n+1}(a+2n)K_{2n}^{2n}(a)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+n+1} b^{2(n-p)} K_{2n+1}^{2p+1}(a)$$

Parce que :

$$K_{2n}^{2p+1}(a) + (a+2n)K_{2n}^{2p}(a) = K_{2n+1}^{2p+1}(a)$$

et $(a+2n)K_{2n}^{2n}(a) = K_{2n+1}^{2n+1}(a)$ (Annexe 1)

Et puisque on s'intéresse à savoir les dérivées d'ordre $(2j-1)$:

$$f^{(2j-1)}(x) = \frac{A_{2j-1}\sin\big(bln(x)\big) + B_{2j-1}\cos(bln(x))}{x^{a+2j-1}}$$

On a donc, en remplaçant *n* par $(j-1)$ dans la relation (4) :

$$A_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)+1} K_{2j-1}^{2p}(a) \qquad (5)$$

$$B_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)} K_{2j-1}^{2p+1}(a)$$

$$f^{(2j-1)}(N) = \frac{A_{2j-1}\sin\big(bln(N)\big) + B_{2j-1}\cos(bln(N))}{N^{a+2j-1}} \qquad (6)$$

$$f^{(2j-1)}(1) = \frac{A_{2j-1}\sin\big(bln(1)\big) + B_{2j-1}\cos(bln(1))}{1^{a+2j-1}} = B_{2j-1}$$

Calcul de $\boldsymbol{g^{(2j-1)}(N)}$ *et* $\boldsymbol{g^{(2j-1)}(1)}$:

En appliquant la même chose pour la fonction $g(x) = \frac{\sin(bln(x))}{x^a}$:

$$\left[\frac{\sin(bln(x))}{x^a}\right]' = \frac{bx^{a-1}\cos(bln(x)) - ax^{a-1}\sin(bln(x)}{x^{2a}} = \frac{b\cos(bln(x)) - a\sin(bln(x))}{x^{a+1}}$$

$$g^{(k)} = \frac{A'_k \sin\big(bln(x)\big) + B'_k\cos(bln(x))}{x^{a+k}}$$

$A'_1 = -a = B_1 \quad B'_1 = b = -A_1$

On montre par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \; A'_k = B_k \;\; et \; B'_k = -A_k$

Pour $k \; = \; 1$ c'est vrai.

Supposant que $\forall k \in \mathbb{N}^* \; A'_k = B_k \;\; et \; B'_k = -A_k$

$$g^{(k)} = \frac{B_k \sin(bln(x)) - A_k \cos(bln(x))}{x^{a+k}}$$

$$g^{(k+1)} = \left[\frac{B_k \sin(bln(x)) - A_k \cos(bln(x))}{x^{a+k}}\right]'$$

$$= B_k \times \left[\frac{\sin(bln(x))}{x^{a+k}}\right]' - A_k \times \left[\frac{\cos(bln(x))}{x^{a+k}}\right]'$$

$$= B_k \times \left[\frac{bcos(bln(x)) - (a+k)\sin(bln(x))}{x^{a+k+1}}\right] - A_k \times \left[\frac{-bsin(bln(x)) - (a+k)\cos(bln(x))}{x^{a+k+1}}\right]$$

$$= \frac{(B_k \times b + A_k \times (a+k))\cos(bln(x)) + (A_k \times b - B_k \times (a+k))\sin(bln(x))}{x^{a+k+1}}$$

$$A'_{k+1} = A_k \times b - B_k \times (a+k)$$

$$B'_{k+1} = B_k \times b + A_k \times (a+k)$$

On sait que :

$$A_{k+1} = -(A_k \times (a+k) + B_k \times b)$$

$$B_{k+1} = (A_k \times b - B_k \times (a+k))$$

On a donc l'égalité :

$A'_{k+1} = B_{k+1}$ et $B'_{k+1} = -A_{k+1}$

Du coup : $\forall k \in \mathbb{N}^* \; A'_k = B_k \;\; et \; B'_k = -A_k$

Et les dérivées d'ordre $(2j-1)$ de g peuvent être calculées ainsi :

$$g^{(2j-1)} = \frac{A'_{2j-1} \sin(bln(x)) + B'_{2j-1} \cos(bln(x))}{x^{a+2j-1}}$$

$$= \frac{B_{2j-1} \sin(bln(x)) - A_{2j-1} \cos(bln(x))}{x^{a+2j-1}}$$

Par conséquence :

$$g^{(2j-1)}(N) = \frac{B_{2j-1}\sin\big(bln(N)\big) - A_{2j-1}\cos(bln(N))}{N^{a+2j-1}} \qquad \boxed{(7)}$$

$$g^{(2j-1)}(1) = \frac{B_{2j-1}\sin\big(bln(1)\big) - A_{2j-1}\cos(bln(1))}{1^{a+2j-1}} = -A_{2j-1}$$

Calcul de $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ et $\sum_{n=1}^{N} g(n)$:

D'après Euler-Maclaurin on a :

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \frac{f(1)+f(N)}{2} + \int_1^N f(x)dx + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}(f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(1))$$

$$\sum_{n=1}^{N} g(n) = \frac{g(1)+g(N)}{2} + \int_1^N g(x)dx + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}(g^{(2j-1)}(N) - g^{(2j-1)}(1))$$

D'après les relation (5) ; (6) et (7) :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(1)\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(\frac{A_{2j-1}\sin\big(bln(N)\big)+B_{2j-1}\cos(bln(N))}{N^{a+2j-1}} - B_{2j-1}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(g^{(2j-1)}(N) - g^{(2j-1)}(1)\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(\frac{B_{2j-1}\sin\big(bln(N)\big)-A_{2j-1}\cos(bln(N))}{N^{a+2j-1}} + A_{2j-1}\right)$$

Posant :

- $U = \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \frac{A_{2j-1}}{N^{a+2j-1}})$
- $V = \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \frac{B_{2j-1}}{N^{a+2j-1}})$
- $W_1 = \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times B_{2j-1})$
- $W_2 = \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times A_{2j-1})$

On va avoir :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(1)\right) = U\sin\big(bln(N)\big) + V\cos\big(bln(N)\big) - W_1$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(g^{(2j-1)}(N)-g^{(2j-1)}(1)\right)= V\sin\left(bln(N)\right)-U\cos\left(bln(N)\right)+W_2$$

D'après la relation (2) :

$$\frac{f(1)+f(N)}{2}+\int_1^N f(x)dx = \frac{1}{2}+\frac{\cos\left(bln(N)\right)}{2N^a}+\frac{\left[\frac{N^{1-a}}{1-a}\times\left[\cos\left(bln(N)\right)+\frac{b}{1-a}\sin\left(bln(N)\right)\right]-\frac{1}{1-a}\right]}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]}$$

$$\frac{g(1)+g(N)}{2}+\int_1^N g(x) = \frac{\sin\left(bln(N)\right)}{2N^a}+\frac{\left[\frac{N^{1-a}}{1-a}\times\left[\sin\left(bln(N)\right)-\frac{b}{1-a}\cos\left(bln(N)\right)\right]+\frac{b}{(1-a)^2}\right]}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]}$$

Posant :

- $U' = \frac{\frac{bN^{1-a}}{(1-a)^2}}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]} = \frac{bN^{1-a}}{(1-a)^2+b^2}$
- $V' = \frac{1}{2N^a}+\frac{\frac{N^{1-a}}{1-a}}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]} = \frac{1}{2N^a}+\frac{(1-a)N^{1-a}}{(1-a)^2+b^2}$
- $W_1' = \frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{1-a}}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}-\frac{1-a}{(1-a)^2+b^2}$
- $W_2' = \frac{\frac{b}{(1-a)^2}}{\left[1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2\right]} = \frac{b}{(1-a)^2+b^2}$

On va avoir :

$$\frac{f(1)+f(N)}{2}+\int_1^N f(x)dx = U'\sin\left(bln(N)\right)+V'\cos\left(bln(N)\right)+W_1'$$

$$\frac{g(1)+g(N)}{2}+\int_1^N g(x)dx = V'\sin\left(bln(N)\right)-U'\cos\left(bln(N)\right)+W_2'$$

On a donc :

$$\sum_{n=1}^N f(n) = U'\sin\left(bln(N)\right)+V'\cos\left(bln(N)\right)+W_1'+U\sin\left(bln(N)\right)+ V\cos\left(bln(N)\right)-W_1$$

$$= (U'+\ U)\sin\left(bln(N)\right)+(V'+V)\cos\left(bln(N)\right)+\ W_1'-W_1)$$

$$\sum_{n=1}^N g(n) = V'\sin\left(bln(N)\right)-U'\cos\left(bln(N)\right)+W_2'+\ V\sin\left(bln(N)\right) - U\cos\left(bln(N)\right)+W_2$$

$$= (V' + V)\sin\big(bln(N)\big) - (U' + U)\cos\big(bln(N)\big) + W_2' + W_2$$

$$\sum_{n=1}^{N} g(n) = (V' + V)\sin\big(bln(N)\big) - (U' + U)\cos\big(bln(N)\big) + W_2' + W_2$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = (U' + U)\sin\big(bln(N)\big) + (V' + V)\cos\big(bln(N)\big) + W_1' - W_1 \qquad \boxed{(8)}$$

On remarque que :

$$\left[\sum_{n=1}^{N} f(n) - (W_1' - W_1)\right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{N} g(n) - (W_2' + W_2)\right]^2 = (U' + U)^2 + (V' + V)^2$$

Puisque on a toujours :

$[A\sin(x) + B\cos(x)]^2 + [B\sin(x) - A\cos(x)]^2 = A^2 + B^2$

On sait que l'équation générale d'une spirale de rayon *r* variable et de centre *(u,v)* dans le plan cartésien s'écrive ainsi :

$[x - u]^2 + [y - v]^2 = r^2$

En remplaçant *x* par $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ et *y* par $-\sum_{n=1}^{N} g(n)$ dans l'équation, on conclut que :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ avec\ a \neq 1$, $Z(s) = \sum_{n=1}^{N} f(n) - i \times \sum_{n=1}^{N} g(n)$ dans le plan complexe est une spirale de rayon $r = \sqrt{(U' + U)^2 + (V' + V)^2}$ et de centre $(W_1' - W_1\, , -(W_2' + W_2))$.

Ce qui corrobore notre observation.

$f(n) = \frac{\cos(bln(n))}{n^a}$ et $g(n) = \frac{\sin(bln(n))}{n^a}$

$$r = \sqrt{(U' + U)^2 + (V' + V)^2}$$

$$=$$

$$\sqrt{\left(\frac{bN^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \frac{A_{2j-1}}{N^{a+2j-1}}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2N^a} + \frac{(1-a)N^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \frac{B_{2j-1}}{N^{a+2j-1}}\right)\right)^2}$$

$$(W_1' - W_1 \,, -(W_2' + W_2))$$

$$=$$

$$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \textstyle\sum_{j=1}^{+\infty}(\tfrac{b_{2j}}{(2j)!}B_{2j-1})\,, \tfrac{-b}{(1-a)^2+b^2} - \textstyle\sum_{j=1}^{+\infty}(\tfrac{b_{2j}}{(2j)!}A_{2j-1}))$$

D'après (1) :

$$\zeta(a+ib) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(bln(n))}{n^a} - i\times\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(bln(n))}{n^a}$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} f(n) - i\times\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} g(n)$$

$$\lim_{N\to+\infty}\textstyle\sum_{n=1}^{N} f(n) \;=\; \lim_{N\to+\infty}(U' + U)\sin\big(bln(N)\big) + (V'+V)\cos\big(bln(N)\big) + W_1' - W_1$$

$$\lim_{N\to+\infty}\textstyle\sum_{n=1}^{N} g(n) \;=\; \lim_{N\to+\infty}(V'+V)\sin\big(bln(N)\big) - (U' + U)\cos\big(bln(N)\big) + W_2' + W_2$$

On sait que :

- $-1 < \sin\big(bln(N)\big) < 1$ et $-1 < \cos\big(bln(N)\big) < 1$
- $U' + U = \frac{bN^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\frac{A_{2j-1}}{N^{a+2j-1}})$
- $V' + V = \frac{1}{2N^a} + \frac{(1-a)N^{1-a}}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\frac{B_{2j-1}}{N^{a+2j-1}})$
- $W_1 = \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times B_{2j-1})$
- $W_1' = \frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2}$
- $W_2 = \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times A_{2j-1})$
- $W_2' = \frac{b}{(1-a)^2+b^2}$
- $A_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)+1}K_{2j-1}^{2p}(a)$
- $B_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)}K_{2j-1}^{2p+1}(a)$

Lorsque $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$:

$\lim_{N \to +\infty} (U' + U) = 0$

$\lim_{N \to +\infty} (V' + V) = 0$

Donc :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n) = W_1' - W_1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times B_{2j-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)} K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} g(n) = W_2' + W_2$$

$$= \frac{b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times A_{2j-1}\right]$$

$$= \frac{b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)+1} K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$$

On sait que la fonction zêta lorsque $a > 1$ converge.

Donc $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ et $\sum_{n=1}^{N} g(n)$ converge aussi, et la fonction zêta peut s'écrire sous forme :

$\zeta(a + ib) = u(a, b) + iv(a, b)$

avec $u(a, b) = \frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)} K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$

et $\quad v(a, b) = \frac{-b}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)+1} K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$

On interprète ce résultat par :

- Lorsque $N \to +\infty$, le rayon de la spirale tend vers 0 ce qui produise un point sur le plan complexe de cordonnées $(u(a, b), v(a, b))$.

Lorsque $a < 1$:

$\sum_{n=1}^{N} f(n)$ et $\sum_{n=1}^{N} g(n)$ n'admettent pas une limite spécifique, mais comme la fonction *Z(s)* diverge elle représente graphiquement sur le plan complexe une spirale de rayon $r = \sqrt{(U' + U)^2 + (V' + V)^2}$ qui tends vers $+\infty$ et de centre de cordonnées $(u(a,b), v(a,b))$:

- $u(a,b) = \frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)} K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$
- $v(a,b) = \frac{-b}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)+1} K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$

On définit la fonction $s \rightarrow Y(s), \forall s \in \mathbb{C} - \{1\}, s = a + ib$, tel que :

$$Y(s) = u(a,b) + iv(a,b) \tag{9}$$

- $u(a,b) = \frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)} K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$
- $v(a,b) = \frac{-b}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)+1} K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$

On remarque que :

- $\zeta(s)$ et $Y(s)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C} - \{1\}$
- $\zeta(s) = Y(s)$ sur $\{s = a + ib \in \mathbb{C} - \{1\} : a > 1\}$
- $\{s = a + ib \in \mathbb{C} - \{1\} : a > 1\}$ est une partie de $\mathbb{C} - \{1\}$

Donc selon le principe du prolongement analytique $\zeta(s) = Y(s)$ sur $\mathbb{C} - \{1\}$.

Ce qui signifie que l'hypothèse (0) est vraie et on peut écrire :

$$\forall s \in \mathbb{C} - \{1\}, s = a + ib : \zeta(s) = u(a,b) + iv(a,b)$$

- $u(a,b) = \frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)} K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$
- $v(a,b) = \frac{-b}{(1-a)^2+b^2} - \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!} \times \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j} b^{2(j-p-1)+1} K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$

Calcul de $\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)}K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)}K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$$

$$=$$

$$-\frac{b_2}{2!}K_1^1(a)+\frac{b_4}{4!}b^2K_3^1(a)-\frac{b_4}{4!}K_3^3(a)-\frac{b_6}{6!}b^4K_5^1(a)+\frac{b_6}{6!}b^2K_5^3(a)-\frac{b_6}{6!}K_5^5(a)+$$
$$\frac{b_8}{8!}b^6K_7^1(a)-\frac{b_8}{8!}b^4K_7^3(a)+\frac{b_8}{8!}b^2K_7^5(a)-\frac{b_8}{8!}K_7^7(a)\dots$$

Calcul de $\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)}K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)+1}K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$$

$$=$$

$$-\frac{b_2}{2!}bK_1^0(a)-\frac{b_4}{4!}bK_3^2(a)+\frac{b_4}{4!}b^3K_3^0(a)-\frac{b_6}{6!}bK_5^4(a)+\frac{b_6}{6!}b^3K_5^2(a)-\frac{b_6}{6!}b^5K_5^0(a)-$$
$$\frac{b_8}{8!}bK_7^6(a)+\frac{b_8}{8!}b^3K_7^4(a)-\frac{b_8}{8!}b^5K_7^2(a)+\frac{b_8}{8!}b^7K_7^0(a)\dots$$

On réarrange les termes des deux expressions :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)}K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$$

$$=$$

$$-\left[\frac{b_2}{2!}K_1^1(a)+\frac{b_4}{4!}K_3^3(a)+\frac{b_6}{6!}K_5^5(a)+\frac{b_8}{8!}K_7^7(a)\dots\right]$$

$$+b^2\left[\frac{b_4}{4!}K_3^1(a)+\frac{b_6}{6!}K_5^3(a)+\frac{b_8}{8!}K_7^5(a)\dots\right]$$

$$-b^4\left[\frac{b_6}{6!}K_5^1(a)+\frac{b_8}{8!}K_7^3(a)\dots\right]$$

$$+b^6\left[\frac{b_8}{8!}K_7^1(a)\dots\right]$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\times\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)+1}K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$$

$$=$$

$$-b\left[\frac{b_2}{2!}K_1^0(a)+\frac{b_4}{4!}K_3^2(a)+\frac{b_6}{6!}K_5^4(a)+\frac{b_8}{8!}K_7^6(a)\ldots\right]$$

$$+b^3\left[\frac{b_4}{4!}K_3^0(a)+\frac{b_6}{6!}K_5^2(a)+\frac{b_8}{8!}K_7^4(a)\ldots\right]$$

$$-b^5\left[\frac{b_6}{6!}K_5^0(a)+\frac{b_8}{8!}K_7^2(a)\ldots\right]$$

$$+b^7\left[\frac{b_8}{8!}K_7^0(a)\ldots\right]$$

$$\vdots$$

On observe que :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)}K_{2j-1}^{2p+1}(a)\right]$$

$$=$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n}\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right]$$

Et :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{2j}}{(2j)!}\sum_{p=0}^{j-1}(-1)^{p+j}b^{2(j-p-1)+1}K_{2j-1}^{2p}(a)\right]$$

$$=$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n+1}\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{b_{2j}}{(2j)!}K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]$$

Synthèse :

$\forall s \in \mathbb{C} - \{1\}, s = a + ib :$ (10)

$$\boldsymbol{\zeta(s)} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right]\right]$$

$$+\boldsymbol{i} \times \left[\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]\right]$$

5 Conséquences

5.1 $b = 0$

D'après la relation (10), lorsque $b = 0$:

$$\zeta(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-a} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2j-1}(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-a} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} \prod_{p=0}^{2(j-1)} (a+p)$$

On peut vérifier que :

- $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$
- $\zeta(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{b_2}{2} = -\frac{1}{12} \quad (b_2 = \frac{1}{6})$
- $\zeta(-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - b_2 = 0$
- Généralement on trouve que $\zeta(-2n) = 0$ (zéros triviaux)

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} b_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$ et $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{b_{n+1}}{n+1}$

Donc on a les deux égalités suivantes $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} \prod_{p=0}^{2(j-1)} (2n+p) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} b_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} \prod_{p=0}^{2(j-1)} (p-n) = (-1)^n \frac{b_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}$$

5.2 $b \neq 0$

L'équation :

$$\zeta(s) = 0$$

D'après la relation (10), Implique :

- $\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right] = 0$
- $\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right] = 0$

Implique :

- $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right] = \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right] = \frac{b}{(1-a)^2+b^2}$

Implique, en divisant par b dans la seconde équation et en remplaçant $\frac{1}{(1-a)^2+b^2}$ dans la première :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right]$$

$$=$$

$$(1-a)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right] - \frac{1}{2}$$

Implique :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a) - (1-a)K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]\right] = 0$$

Donc on peut dire que $s = a + ib$ est un zéro non trivial de la fonction zêta lorsque a et b sont des solution de l'équation :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a) - (1-a)K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]\right] = 0$$

5.3 Hypothèse de Riemann

L'hypothèse de Riemann s'énonce ainsi :

$$\zeta(s) = 0 \;\; Et \;\; 0 < a < 1 \,, implique \; a = \frac{1}{2}$$

D'après la relation (10) :

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{s}) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right]\right]$$

$$+\boldsymbol{i} \times \left[\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n b^{2n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]\right]$$

Ici je vais utiliser l'hypothèse (1) mentionnée dans l'annexe 1, liée à l'une des propriétés de la fonction $a \to K_n^p(a) : a \in \mathbb{R} \,,\; (n,p) \in \mathbb{N}^2 et\; n \geq p$, que je trouve vraie mais que je ne détient pas une preuve (Annexe 1) :

$$\forall p \in \mathbb{N} : \; \left[K_p^p(a)\right]^{(n)} = n!\, K_p^{p-n}(a)$$

$(n)\; c'estla\; derivée\; d'ordre\; n, n \in \mathbb{N}$

Donc :

$$\left[K_{2j-1}^{2j-1}(a)\right]^{(2n)} = (2n)!\, K_{2j-1}^{2j-1-2n}(a) = (2n)!\, K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)$$

$$\left[K_{2j-1}^{2j-1}(a)\right]^{(2n+1)} = (2n+1)!\, K_{2j-1}^{2j-1-2n-1}(a) = (2n+1)!\, K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)$$

Posant $\forall a \in \mathbb{R} \,,\; L(a) = -\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2j-1}(a)$

On remarque que :

$$\frac{[L(a)]^{(2n)}}{(2n)!} = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)$$

$$\frac{[L(a)]^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)$$

En remplaçant $\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)$ et $\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)$ dans la relation (10), on va avoir :

$$\boldsymbol{\zeta(s)} = 1 - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} L^{(2n)}(a) + i\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} L^{(2n+1)}(a) - \frac{b}{(1-a)^2+b^2}\right]$$

$$\boldsymbol{\zeta(s) = 0}$$

Implique :

- $1 - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} L^{(2n)}(a) = 0$
- $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} L^{(2n+1)}(a) - \frac{b}{(1-a)^2+b^2} = 0$

Implique :

- $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} L^{(2n)}(a) = \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} - 1 = \frac{\frac{1}{1-a}-1-\left(\frac{b}{1-a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} L^{(2n+1)}(a) = \frac{b}{(1-a)^2+b^2} = \frac{\frac{b}{(1-a)^2}}{1+\left(\frac{b}{1-a}\right)^2}$

Posant $u = \frac{b}{1-a}$:

- $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} L^{(2n)}(a) = \frac{\frac{1}{1-a}-1-u^2}{1+u^2}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} L^{(2n+1)}(a) = \frac{\frac{1}{1-a}u}{1+u^2}$

Si :

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} L^{(2n)}(a)\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} L^{(2n+1)}(a)\right]^2 = 1$$

Donc :

$$\left[\frac{\frac{1}{1-a}-1-u^2}{1+u^2}\right]^2 + \left[\frac{\frac{1}{1-a}u}{1+u^2}\right]^2 = 1$$

Implique :

$$\left(\frac{1}{1-a}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{1-a}-1\right)u^2 + u^4 + \left(\frac{1}{1-a}u\right)^2 = 1 + 2u^2 + u^4$$

Implique :

$$\left(\frac{1}{1-a}-1\right)^2-1+u^2\left(\left(\frac{1}{1-a}\right)^2-\frac{2}{1-a}\right)=0$$

Implique :

- $\left(\frac{1}{1-a}-1\right)^2-1=0$
- $\left(\frac{1}{1-a}\right)^2-\frac{2}{1-a}=0$

Parce que $\left(\frac{1}{1-a}-1\right)^2-1$ et $\left(\frac{1}{1-a}\right)^2-\frac{2}{1-a}$ ont le même signe de part et d'autre de $\frac{1}{2}$

Et $u^2=\left(\frac{b}{1-a}\right)^2>0$, $b\neq 0$

Implique :

$$\left(\frac{1}{1-a}\right)^2=\frac{2}{1-a}$$

Implique :

$$\frac{1}{1-a}=2$$

Implique :

$$a=\frac{1}{2}$$

On peut donc conclure que :

$$\zeta(s)=0 \ \ Et$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{2n}}{(2n)!}L^{(2n)}(a)\right]^2+\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!}L^{(2n+1)}(a)\right]^2=1$$

$$Implique\ a=\frac{1}{2}$$

Conclusion

En se basant sur les résultats de cet article on peut définir la fonction zêta sur tous le plan complexe sauf en $s = 1$ par :

$$\forall s = a + ib \in \mathbb{C} - \{1\}$$

$$\boldsymbol{\zeta(s)} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n)-1}(a)\right]\right]$$

$$+\boldsymbol{i} \times \left[\frac{-b}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n b^{2n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2(j-n-1)}(a)\right]\right]$$

Si on admet que l'hypothèse (1) mentionnée dans l'Annexe 1 est vraie, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\zeta(s)} = 1 - \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} L^{(2n)}(a) + i\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} L^{(2n+1)}(a) - \frac{b}{(1-a)^2+b^2}\right]$$

Avec : $L(a) = -\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_{2j}}{(2j)!} K_{2j-1}^{2j-1}(a)$

Ce qui signifie que lorsque $a = \frac{1}{2}$, la partie imaginaire b de tous les zéros non triviaux de la fonction zêta est une solution de l'équation :

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} L^{(2n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} L^{(2n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1$$

Annexe 1

Dans cet article on a définit la fonction notée $a \to K_n^p(a)$, $(a \in \mathbb{R})$, $(n,p) \in \mathbb{N}^2 et\ n \geq p$, qui fait la somme des multiplications entre tous les éléments des combinaisons sans répétition des n éléments $\{a; a+1; a+2; \ldots.; a+n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ pris p à p :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Parmi les propriétés de cette fonction on a utilisé :

- $K_{2n}^{2p+1}(a) + (a+2n)K_{2n}^{2p}(a) = K_{2n+1}^{2p+1}(a)$
- $K_{2n}^{2p}(a) + (a+2n)K_{2n}^{2p-1}(a) = K_{2n+1}^{2p}(a)$
- $(a+2n)K_{2n}^{2n}(a) = K_{2n+1}^{2n+1}(a)$

Faut donc prouver que $\forall(n,p) \in \mathbb{N}^2 et\ n \geq p$:

$K_n^{p+1}(a) + (a+n)K_n^p(a) = K_{n+1}^{p+1}(a)$ et $(a+n)K_n^n(a) = K_{n+1}^{n+1}(a)$

On sait que :

$$C_n^{p+1} + C_n^p = \frac{n!}{(p+1)! \times (n-p-1)!} + \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

$$= \frac{(n!)(n-p)+(n!)(p+1)}{(p+1)! \times (n-p)!}$$

$$= \frac{(n!)(n-p)+n!(p+1)}{(p+1)! \times (n-p)!}$$

$$= \frac{(n!)(n+1)}{(p+1)! \times (n-p)!}$$

$$= \frac{(n+1!)}{(p+1)! \times (n-p)!} = C_{n+1}^{p+1}(a)$$

Et $\quad C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$

Et puisque $(a+n)$ c'est l'élément n+1 de l'ensemble :

$\{a; a+1; a+2; \ldots.; a+n : n \in \mathbb{N}\}$

On a donc l'équivalence :

$K_n^{p+1}(a) + (a+n)K_n^p(a) = K_{n+1}^{p+1}(a)$ Et $(a+n)K_n^n(a) = K_{n+1}^{n+1}(a)$

On a supposé aussi que l'hypothèse (1) qui s'énonce ainsi est vraie :

$$\forall p \in \mathbb{N} : \left[K_p^p(a)\right]^{(n)} = n!\,K_p^{p-n}(a)$$

$(n)\ c'estla\ derivée\ d'ordre\ n, n \in \mathbb{N}$

Références bibliographiques

Jakob Bernoulli. Ars conjectandi: opus posthumum: accedit Tractatus de seriebus infinitis; et Epistola gallice scripta de ludo pilae reticularis. Impensis Thurnisiorum, 1713

Bernhard Riemann. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse. Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß, 2(145-155):2, 1859

https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeurs_particuli%C3%A8res_de_la_fonction_z%C3%AAta_de_Riemann (consulté le 22/01/2024)

https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./p/prolongementanalytique.html (consulté le 25/01/2024)