

# LA TRANSFORMATION DE MOLODENSKY-BADEKAS

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ingénieur Géographe  
Général**

## **Résumé**

Dans cette note, on présente la transformation de passage d'un système géodésique à un autre système géodésique dite de Molodensky-Badekas à sept paramètres en montrant comment déterminer les 7 paramètres par la méthode des moindres carrés et les calculer numériquement suivant le nombre des paramètres 4, 5 ou 7.

## **Abstract**

In this note, we present the Molodensky-Badekas seven-parameter transformation from one geodetic system to another, showing how to determine the 7 parameters by the method of least squares and calculate them numerically following the number of the parameters 4, 5 or 7.

**JANVIER 2024**

**VERSION 1.**

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM,**  
e-mail : abenhadsalem@gmail.com

© Janvier 2024 - **Abdelmajid BEN HADJ SALEM** -

## Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>LE MODÈLE DE LA TRANSFORMATION MOLODENSKY-BADEKAS</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>CALCUL DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE MOLODENSKY-BADEKAS PAR LES MOINDRES CARRÉS</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>MÉTHODE PRATIQUE DU CALCUL DES PARAMÈTRES DE LA TRANSFORMATION DE BURSA-WOLF</b>	<b>7</b>
4.1	Cas de 7 paramètres . . . . .	7
4.2	Cas de 4 paramètres $(dT_x, dT_y, dT_z, m)$ . . . . .	10
4.3	Cas de 5 paramètres $(dT_x, dT_y, dT_z, m, rz)$ . . . . .	12
<b>5</b>	<b>CALCUL DES POINTS À TRANSFORMER DANS LE SYSTÈME 2</b>	<b>15</b>

# *La Transformation de Molodensky-Badekas Présentation des Cas de 4, 5 et 7 Paramètres*

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

*A Tous Mes Collègues au Lycée Pierre de Fermat (1973-1976), Faculté des  
Sciences de Tunis (1976-1978) et ENSG<sup>1</sup> (1978-1981 et 1984-1986)*

## 1 INTRODUCTION

Avec l'introduction de la technologie de positionnement par GPS (Global Positioning System), laquelle fournit à l'utilisateur sa position  $(X, Y, Z)$  tridimensionnelle dans le système géocentrique mondial dit *WGS84* (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. On présente ci-après le modèle de Molodensky-Badekas de passage à 7 paramètres. Cette transformation est appliquée surtout là où la zone de l'application est petite.

On utilise par la suite les notations suivantes :

- $(U_1, V_1, W_1)$  les coordonnées cartésiennes 3D dans le système local (système 1),
- $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$  les coordonnées connues d'un point A dans le système local  $S_1$ .
- $(U'_2, V'_2, W'_2)$  les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique *WGS84* (système 2),

## 2 LE MODÈLE DE LA TRANSFORMATION MOLODENSKY-BADEKAS

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$U'_2 = T + \mathcal{A} + (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot (U_1 - \mathcal{A}) \quad (1)$$

où :

- $U'_2$  est le vecteur de composantes  $(U'_2, V'_2, W'_2)^T$ ,  $T$  désigne transposée,
- $T$  est le vecteur translation de composantes  $(T_X, T_Y, T_Z)^T$  entre les systèmes 1 et 2,
- $1 + m$  est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$  est la matrice de rotation  $3 \times 3$  pour passer du système 1 au système 2,
- $U_1$  est le vecteur de composantes  $(U_1, V_1, W_1)^T$ .
- $\mathcal{A}$  est le vecteur de composantes  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)^T$ ,  $T$  désigne transposée,

---

1. ENSG : Ecole Nationale des Sciences Géographiques, 6-8 Av. Blaise Pascal, 77420 Champs-sur-Marne, France

En développant (1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} U_2' \\ V_2' \\ W_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X + \mathcal{A}_1 \\ T_Y + \mathcal{A}_2 \\ T_Z + \mathcal{A}_3 \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 - \mathcal{A}_1 \\ V_1 - \mathcal{A}_2 \\ W_1 - \mathcal{A}_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec  $(rx, ry, rz)$  les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

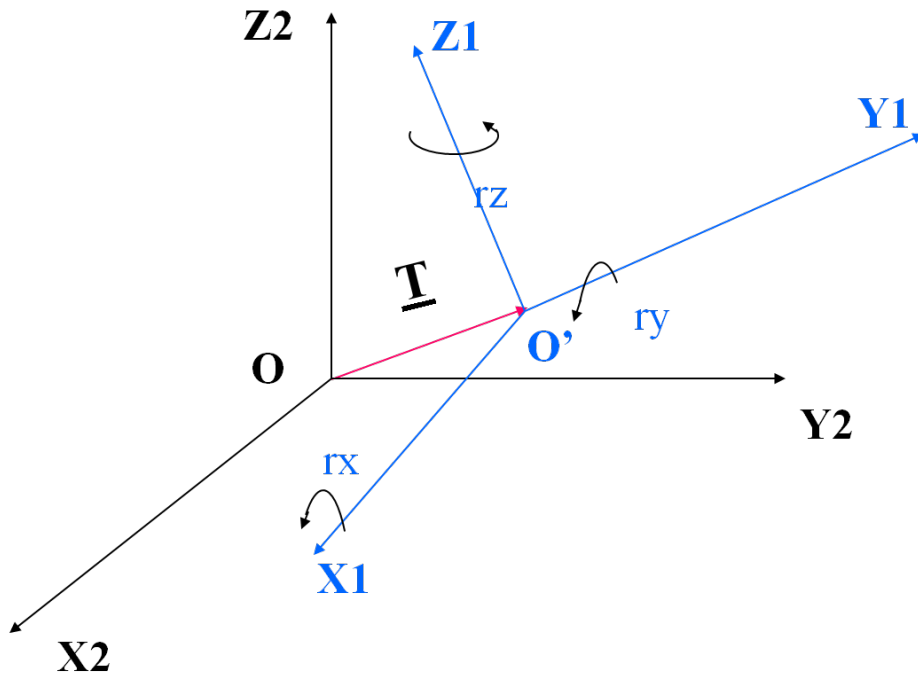


FIGURE 1 – Le Modèle de Burša-Wolf

La formule (2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} U_2' - \mathcal{A}_1 \\ V_2' - \mathcal{A}_2 \\ W_2' - \mathcal{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 - \mathcal{A}_1 \\ V_1 - \mathcal{A}_2 \\ W_1 - \mathcal{A}_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

On pose :

$$\begin{cases} X_1 = U_1 - \mathcal{A}_1 \\ Y_1 = V_1 - \mathcal{A}_2 \\ Z_1 = W_1 - \mathcal{A}_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} X_2 = U_2' - \mathcal{A}_1 \\ Y_2 = V_2' - \mathcal{A}_2 \\ Z_2 = W_2' - \mathcal{A}_3 \end{cases} \quad (4)$$

### 3 CALCUL DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE MOLODENSKY-BADEKAS PAR LES MOINDRES CARRÉS

En considérant comme inconnues les paramètres  $T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz$  et les nouvelles notations de (4), l'équation (3) s'écrit en gardant les termes du 1er ordre comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (5)$$

On retrouve les équations qui nous ramènent aux calculs des paramètres de la transformation de Bursa-Wolf [1]. En utilisant l'équation (5) pour les  $n$  points communs dans les systèmes 1 et 2 et en posant :

$$L = (X_{2i} - X_{1i})_{i=1,n}$$

$$U = (T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz)^T$$

A la matrice  $3n \times 7$  :

$$A = {}_{3n}A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{pmatrix}_{i=1,n} \quad (6)$$

et  $V$  le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus se fait par la résolution par les moindres carrés de l'équation :

$$AU = L + V \quad (7)$$

Soit :

$$\boxed{\bar{U} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot L} \quad (8)$$

La matrice  $A^T \cdot A$  est une matrice carrée  $7 \times 7$  symétrique non singulière c'est-à-dire son déterminant non nul donc inversible.

Le vecteur résidu est donné par :

$$V = A \cdot \bar{U} - L = A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot L - L$$

Le facteur de la variance unitaire est exprimé par la formule :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n - 7}} \quad (9)$$

et la matrice variance-covariance du vecteur  $\bar{U}$  est donnée par :

$$\boxed{\sigma_{\bar{U}} = \sigma_0^2 (A^T A)^{-1}} \quad (10)$$

## 4 MÉTHODE PRATIQUE DU CALCUL DES PARAMÈTRES DE LA TRANSFORMATION DE BURSA-WOLF

En pratique, on dispose de  $n$  points connus dans le système 1 et dans le système 2.

### 4.1 Cas de 7 paramètres

On a donc pour un point l'équation :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (11)$$

Pour le vecteur  $T$ , on peut écrire que  $T = T_m + dT$  avec :

$$\mathbf{T}_m = \begin{cases} Tx_m = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - X_{1i})}{n} \\ Ty_m = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{2i} - Y_{1i})}{n} \\ Tz_m = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_{2i} - Z_{1i})}{n} \end{cases}, \quad d\mathbf{T} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \end{pmatrix} \quad (12)$$

Le vecteur  $\mathbf{T}_m = (Tx_m, Ty_m, Tz_m)^t$  est le vecteur translation moyenne et  $d\mathbf{T} = (dTx, dTy, dTz)^t$  est le vecteur inconnu des corrections. Par suite, on obtient l'équation :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 - Tx_m \\ Y_2 - Y_1 - Ty_m \\ Z_2 - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (13)$$

Pour faciliter les notations, l'indice en bas désigne le numéro du point, le système 1 sans indice et on indique par ', le système 2. Par exemple, pour le premier point, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

avec  $(v_1, v_2, v_3)$  les résidus pour le point 1.

Ecrivons l'équation précédente pour les  $n$  points, on obtient l'équation des moindres carrés :

$$A.U = L + V \quad (15)$$

La matrice des coefficients  $A = {}_{3n}A_7$ , le vecteur des inconnues  $U = {}_7U_1$ , le vecteur des observables  $L = {}_{3n}L_1$  et le vecteur résidu  $V = {}_{3n}V_1$ , on obtient successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_2 & 0 & -Z_2 & Y_2 \\ 0 & 1 & 0 & Y_2 & Z_2 & 0 & -X_2 \\ 0 & 0 & 1 & Z_2 & -Y_2 & X_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_{n-1} & 0 & -Z_{n-1} & Y_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{n-1} & Z_{n-1} & 0 & -X_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{n-1} & -Y_{n-1} & X_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_n & 0 & -Z_n & Y_n \\ 0 & 1 & 0 & Y_n & Z_n & 0 & -X_n \\ 0 & 0 & 1 & Z_n & -Y_n & X_n & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$L = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \\ X'_2 - X_2 - Tx_m \\ Y'_2 - Y_2 - Ty_m \\ Z'_2 - Z_2 - Tz_m \\ \vdots \\ X'_i - X_i - Tx_m \\ Y'_i - Y_i - Ty_m \\ Z'_i - Z_i - Tz_m \\ \vdots \\ X'_{n-1} - X_{n-1} - Tx_m \\ Y'_{n-1} - Y_{n-1} - Ty_m \\ Z'_{n-1} - Z_{n-1} - Tz_m \\ X'_n - X_n - Tx_m \\ Y'_n - Y_n - Ty_m \\ Z'_n - Z_n - Tz_m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \vdots \\ v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \\ \vdots \\ v_{3(n-1)-2} \\ v_{3(n-1)-1} \\ v_{3(n-1)} \\ v_{3n-2} \\ v_{3n-1} \\ v_{3n} \end{pmatrix} \quad (17)$$

La solution par les moindres carrés est obtenue en minimisant la somme des carrés des résidus soit  $\sum_i v_i^2 = V^t.V = \|V\|^2$  [2]. On pose  $N = A^t.A = {}_7N_7$ , cette matrice est carrée appelée matrice normale.



Elle est inversible car la matrice  $N$  est définie positive. On montre [2] que la solution des moindres carrés est l'équation suivante :

$$\boxed{\bar{U} = (A^t . A)^{-1} . A^t . L} \quad (18)$$

Dans notre étude,  $A^t = {}_7 A_{3n}^t$  et  $N = A^t . A$  est une matrice  ${}_7 N_7$ . L'expression de la matrice  $A^t$  est comme suit :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \dots & X_i & Y_i & Z_i & \dots & X_{n-1} & Y_{n-1} & Z_{n-1} & X_n & Y_n & Z_n \\ 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \dots & 0 & Z_i & -Y_i & \dots & 0 & Z_{n-1} & -Y_{n-1} & 0 & Z_n & -Y_n \\ -Z_1 & 0 & X_1 & -Z_2 & 0 & X_2 & \dots & -Z_i & 0 & X_i & \dots & -Z_{n-1} & 0 & X_{n-1} & -Z_n & 0 & X_n \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \dots & Y_i & -X_i & 0 & \dots & Y_{n-1} & -X_{n-1} & 0 & Y_n & -X_n & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Le calcul de  $N = A^t . A$  donne :

$$N = A^t . A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i Z_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & 0 & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & \sum_i X_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & 0 & \sum_i (Y_i^2 + Z_i^2) & -\sum_i X_i Y_i & -\sum_i Z_i X_i \\ -\sum_i Z_i & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i X_i Y_i & \sum_i (Z_i^2 + X_i^2) & -\sum_i Y_i Z_i \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & -\sum_i Z_i X_i & -\sum_i Y_i Z_i & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix} \quad (20)$$

avec  $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2$ ,  $\sum_i = \sum_{i=1}^{i=n}$ . Notons :

$$\begin{cases} \Delta X_i = X_i' - X_i - T x_m \\ \Delta Y_i = Y_i' - Y_i - T y_m \\ \Delta Z_i = Z_i' - Z_i - T z_m \end{cases}$$

On vérifie que  $\sum_i \Delta X_i = \sum_i \Delta Y_i = \sum_i \Delta Z_i = 0$ , avec cette notation le vecteur  $L$  s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix}_{i=1,n}$$

Le vecteur  $A^t . L$  est un vecteur  $7 \times 1$ , il est donné par :

$$A^t . L = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta X_i \\ \sum_i \Delta Y_i \\ \sum_i \Delta Z_i \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Z_i \Delta Y_i - Y_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (X_i \Delta Z_i - Z_i \Delta X_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Z_i \Delta Y_i - Y_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (X_i \Delta Z_i - Z_i \Delta X_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} \quad (21)$$

On obtient la solution par les moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i Z_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & 0 & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & \sum_i X_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & 0 & \sum_i (Y_i^2 + Z_i^2) & -\sum_i X_i Y_i & -\sum_i Z_i X_i \\ -\sum_i Z_i & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i X_i Y_i & \sum_i (Z_i^2 + X_i^2) & -\sum_i Y_i Z_i \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & -\sum_i Z_i X_i & -\sum_i Y_i Z_i & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Z_i \Delta Y_i - Y_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (X_i \Delta Z_i - Z_i \Delta X_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \bar{U} \quad (22)$$

La résolution numérique peut se faire avec l'application Excel. Il suffit de créer les tableaux :

- $(X, Y, Z)_i, (X', Y', Z')_i, \implies$  le vecteur translation approché  $T_m$ .
- le vecteur  $L$ , la matrice  $A$ , la matrice  $N = A^t \cdot A$ , le vecteur  $A^t \cdot L$ .

Par la suite, calculer l'inverse de la matrice  $N$ , trouver  $\bar{U}$ , calculer le vecteur des résidus  $V = A \cdot \bar{U} - L$  et vérifier que  $A^t V = 0$ , sinon réitérer le processus.

#### 4.2 Cas de 4 paramètres $(dTx, dTy, dTz, m)$

Le vecteur  $T_m = (Tx_m, Ty_m, Tz_m)^t$  est le vecteur translation moyenne et  $dT = (dTx, dTy, dTz)^t$  est le vecteur inconnu des corrections. Par suite, on obtient l'équation :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 - Tx_m \\ Y_2 - Y_1 - Ty_m \\ Z_2 - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} \quad (23)$$

Pour faciliter les notations, l'indice en bas désigne le numéro du point, le système 1 sans indice et on indique par ', le système 2. Par exemple, pour le premier point, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

avec  $(v_1, v_2, v_3)$  les résidus pour le point 1.

Ecrivons l'équation précédente pour les  $n$  points, on obtient l'équation des moindres carrés :

$$A \cdot U = L + V \quad (25)$$

La matrice des coefficients  $A = {}_3n A_4$ , le vecteur des inconnues  $U = {}_4 U_1$ , le vecteur des observables  $L = {}_3n L_1$  et le vecteur résidu  $V = {}_3n V_1$ , on obtient successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 \\ 1 & 0 & 0 & X_2 \\ 0 & 1 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 1 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & X_n \\ 0 & 1 & 0 & Y_n \\ 0 & 0 & 1 & Z_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$L = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \\ X'_2 - X_2 - Tx_m \\ Y'_2 - Y_2 - Ty_m \\ Z'_2 - Z_2 - Tz_m \\ \vdots \\ X'_i - X_i - Tx_m \\ Y'_i - Y_i - Ty_m \\ Z'_i - Z_i - Tz_m \\ \vdots \\ X'_{n-1} - X_{n-1} - Tx_m \\ Y'_{n-1} - Y_{n-1} - Ty_m \\ Z'_{n-1} - Z_{n-1} - Tz_m \\ X'_n - X_n - Tx_m \\ Y'_n - Y_n - Ty_m \\ Z'_n - Z_n - Tz_m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \vdots \\ v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \\ \vdots \\ v_{3(n-1)-2} \\ v_{3(n-1)-1} \\ v_{3(n-1)} \\ v_{3n-2} \\ v_{3n-1} \\ v_{3n} \end{pmatrix} \quad (27)$$

L'expression de la matrice  $A^t$  est comme suit :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \dots & X_i & Y_i & Z_i & \dots & X_{n-1} & Y_{n-1} & Z_{n-1} & X_n & Y_n & Z_n \end{pmatrix} \quad (28)$$

Le calcul de  $N = A^t.A$  donne :

$$N = A^t.A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

avec  $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2$ ,  $\sum_i = \sum_{i=1}^{i=n}$ . Notons :

$$\begin{cases} \Delta X_i = X'_i - X_i - T x_m \\ \Delta Y_i = Y'_i - Y_i - T y_m \\ \Delta Z_i = Z'_i - Z_i - T z_m \end{cases}$$

On vérifie que  $\sum_i \Delta X_i = \sum_i \Delta Y_i = \sum_i \Delta Z_i = 0$ , avec cette notation le vecteur  $L$  s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix}_{i=1,n}$$

Le vecteur  $A^t.L$  est un vecteur  $4 \times 1$ , il est donné par :

$$A^t.L = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta X_i \\ \sum_i \Delta Y_i \\ \sum_i \Delta Z_i \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \end{pmatrix} \quad (30)$$

On obtient la solution par les moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} = \bar{U} \quad (31)$$

### 4.3 Cas de 5 paramètres ( $dTx, dTy, dTz, m, rz$ )

Par exemple, pour le premier point, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - T x_m \\ Y'_1 - Y_1 - T y_m \\ Z'_1 - Z_1 - T z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (32)$$

avec  $(v_1, v_2, v_3)$  les résidus pour le point 1.

Ecrivons l'équation précédente pour les  $n$  points, on obtient l'équation des moindres carrés :

$$A.U = L + V \quad (33)$$

La matrice des coefficients  $A = {}_3nA_5$ , le vecteur des inconnues  $U = {}_5U_1$ , le vecteur des observables  $L = {}_3nL_1$  et le vecteur résidu  $V = {}_3nV_1$ , on obtient successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 \\ 0 & 1 & 0 & Y_2 & -X_2 \\ 0 & 0 & 1 & Z_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_{n-1} & Y_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{n-1} & -X_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_n & Y_n \\ 0 & 1 & 0 & Y_n & -X_n \\ 0 & 0 & 1 & Z_n & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rz \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$L = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \\ X'_2 - X_2 - Tx_m \\ Y'_2 - Y_2 - Ty_m \\ Z'_2 - Z_2 - Tz_m \\ \vdots \\ X'_i - X_i - Tx_m \\ Y'_i - Y_i - Ty_m \\ Z'_i - Z_i - Tz_m \\ \vdots \\ X'_{n-1} - X_{n-1} - Tx_m \\ Y'_{n-1} - Y_{n-1} - Ty_m \\ Z'_{n-1} - Z_{n-1} - Tz_m \\ X'_n - X_n - Tx_m \\ Y'_n - Y_n - Ty_m \\ Z'_n - Z_n - Tz_m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \vdots \\ v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \\ \vdots \\ v_{3(n-1)-2} \\ v_{3(n-1)-1} \\ v_{3(n-1)} \\ v_{3n-2} \\ v_{3n-1} \\ v_{3n} \end{pmatrix} \quad (35)$$

On trouve donc la solution des moindres carrés :

$$\boxed{\bar{U} = (A^t.A)^{-1}.A^t.L} \quad (36)$$

Dans notre étude,  $A^t = {}_5A^t_{3n}$  et  $N = A^t.A$  est une matrice  ${}_5N_5$ . L'expression de la matrice  $A^t$  est comme

suit :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & X_i & Y_i & Z_i & \cdots & X_{n-1} & Y_{n-1} & Z_{n-1} & X_n & Y_n & Z_n \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \cdots & Y_i & -X_i & 0 & \cdots & Y_{n-1} & -X_{n-1} & 0 & Y_n & -X_n & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Le calcul de  $N = A^t . A$  donne :

$$N = A^t . A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix} \quad (38)$$

avec  $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2$ ,  $\sum_i = \sum_{i=1}^{i=n}$ . Notons :

$$\begin{cases} \Delta X_i = X_i' - X_i - T x_m \\ \Delta Y_i = Y_i' - Y_i - T y_m \\ \Delta Z_i = Z_i' - Z_i - T z_m \end{cases}$$

On vérifie que  $\sum_i \Delta X_i = \sum_i \Delta Y_i = \sum_i \Delta Z_i = 0$ , avec cette notation le vecteur  $L$  s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix}_{i=1,n}$$

Le vecteur  $A^t . L$  est un vecteur  $5 \times 1$ , il est donné par :

$$A^t . L = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta X_i \\ \sum_i \Delta Y_i \\ \sum_i \Delta Z_i \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} \quad (39)$$

On obtient la solution par les moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rz \end{pmatrix} = \bar{U} \quad (40)$$

## 5 CALCUL DES POINTS À TRANSFORMER DANS LE SYSTÈME 2

Ayant calculé les paramètres suivant les cas, soit un point  $B = (B_1, B_2, B_3)$  dans le système local 1, ses coordonnées obtenues par la transformation de Molodensky-Badekas  $(B'_1, B'_2, B'_3)$  dans le système 2 sont données par :

$$\begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X + \mathcal{A}_1 \\ T_Y + \mathcal{A}_2 \\ T_Z + \mathcal{A}_3 \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 - \mathcal{A}_1 \\ B_2 - \mathcal{A}_2 \\ B_3 - \mathcal{A}_3 \end{pmatrix} \quad (41)$$

## Références

- [1] **Abdelmajid Ben Hadj Salem.** 2024. La Transformation de Bursa-Wolf : Présentation des Cas de 4, 5 et 7 Paramètres. <https://vixra.org/pdf/2401.0017v1.pdf>
- [2] **Abdelmajid Ben Hadj Salem.** 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*, publié par Nour-Publishing. 2017. 365 pages. ISBN -13 : 978-3-330-96843-1.  
(lien : <https://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-des-moindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1>).