Géodésie, Positionnement GPS, & Topographie Partie I

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Géographe Général

abenhadjsalem@gmail.com

Tunis, 8 janvier 2024

Abstract: It is the part I of lectures on geodesy given to the technical personnel of the ETAP (Tunisian Society of Oil Activities).

Plan de l’Exposé

A - Rappels mathématiques

B - Eléments d’Astronomie de Position

* Trigonométrie sphérique
* Notions d’astronomie de position
* Exemples d’application

C - Géométrie de la Sphère

* Géométrie du cercle (équation cartésienne, équations paramétriques du cercle).
* Géométrie de la sphère (équation cartésienne, équations paramétriques, rayon de courbure).

D - Géométrie de l’Ellipse et de l’Ellipsoïde

* Géométrie de l'ellipse (équation cartésienne et équations paramétriques de l'ellipse, rayons de courbure principaux).

* Géométrie de l'ellipsoïde (équations cartésiennes et paramétriques de l'ellipsoïde, les coordonnées géodésiques).
* Passage des coordonnées tridimensionnelles (X,Y,Z) aux coordonnées (φ, λ, h).

E – Définition d’un Système Géodésique

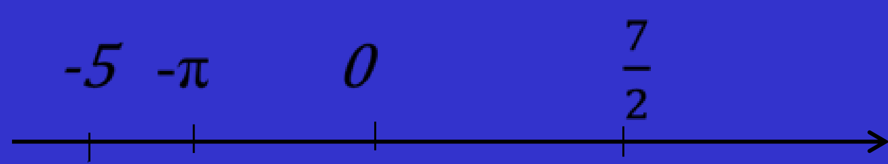
* Définition d’un système géodésique ou datum
* Mise en place d’un système géodésique terrestre classique
* Mise en place d’un système géodésique spatial
* Géoïde
* Les systèmes géodésiques en Tunisie

F- Les Représentations Planes

* Les représentations planes en Tunisie

A - RAPPELS MATHEMATIQUES

Notation: *On note* R *l'ensemble des nombres réels* :
$\{ -5, -\pi, 0, \sqrt{2}\ , \frac{7}{2}, 11, \ldots \}$.
On le représente par la droite réelle:

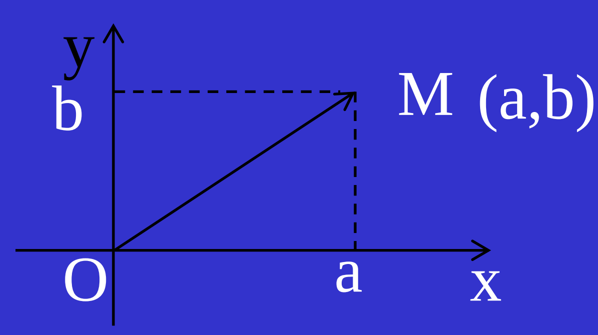


Fonction f: *c'est une application* $x \in D \subset R \longrightarrow f(x) \in R$.

Exemple 1: $x \longrightarrow f(x) = x+1$.

x *s'appelle la variable.*

Exemple 2: *A un point* **M**, *on associe ses coordonnées rectangulaires dans un plan.*



Le point **O** *est l'origine des axes :*

Ox*: l'axe des abscisses,*

Oy*: l'axe des ordonnées.*

Généralement, on associe pour le point **O** *les coordonnées (0,0).*

Soit la fonction : à M(x,y) $\longrightarrow$ $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La fonction d représente la distance du point M *à l'origine le point* **O***.*

d est une fonction de 2 variables.

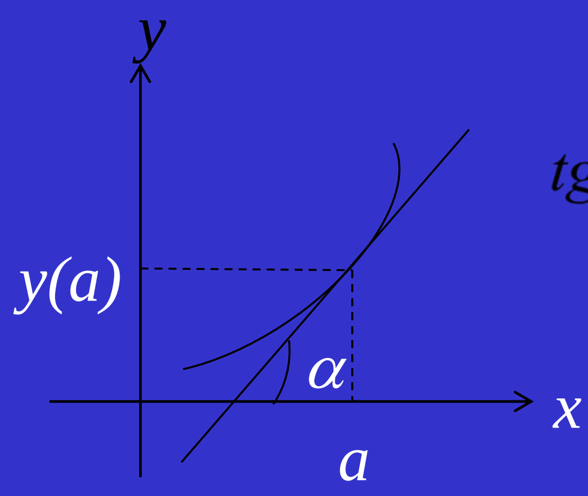
Dérivée: *la dérivée d'une fonction f à une seule variable x en un point* M*(a,f(a)) est donnée par le rapport:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

On note la dérivée de la fonction y=y(x) par $y'=\frac{dy}{dx}$.

Exemples:

- $y = k = constante \Rightarrow y' = 0,$
- $y = kx+m \Rightarrow y' = k,$
- $y = x^2 \Rightarrow y'=2x.$



$tg\alpha=y'(a)=\frac{dy}{dx}(x=a)$

Tableau des dérivées

Type de Fonction y(x)	Fonction dérivée y'(x)
y=k	y'=0
y=ax+b	y'=a
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$
y=$\frac{1}{x}$	y'=$\frac{-1}{x^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
y = Logx	y'= $\frac{1}{x}$
Y = u + v	y'= u' + v'
Y = u.v	y' = u'.v + u.v'
$y = \frac{u}{v}$	y'= $\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$

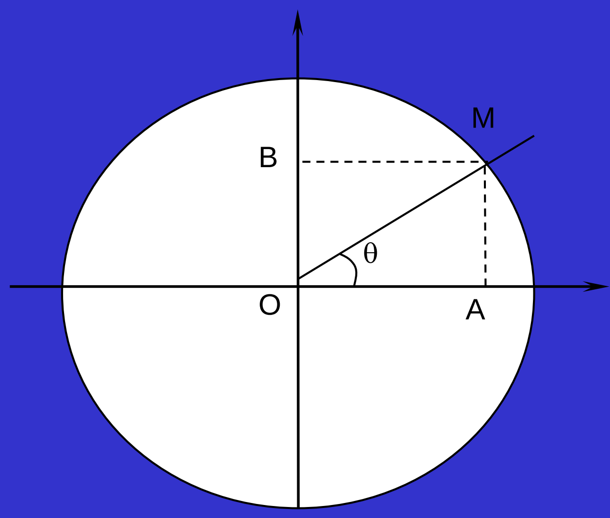
Différentielle d'une fonction *y = y(x)*:

dy = y'(x).dx = y'dx

Exemple: *y(x)= ax+b* ⇒ *dy = y'.dx = a.dx* ⇒ *dy = adx*

Rappels de la Trigonométrie Plane

Définitions des fonctions circulaires ou trigonométriques



On définit les fonctions circulaires comme suit :

$$sin\theta = \frac{AM}{OM}, \qquad \cos\theta = \frac{OA}{OM}, \qquad tg\theta = \frac{AM}{OA}, \qquad cotg\theta = \frac{1}{tg\theta}$$

Ecrivons dans le triangle OAM, le théorème de Pythagore, on obtient :

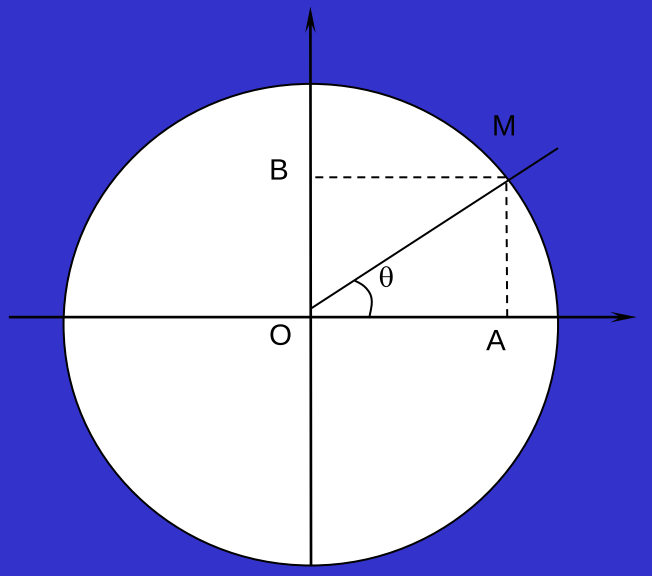
$$OM^2 = OA^2 + AM^2 \qquad OA^2/OM^2 + AM^2/OM^2 = 1$$

Soit: $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

C'est la relation fondamentale de la trigonométrie plane.

Propriétés des fonctions circulaires

Les fonctions circulaires sont des fonctions périodiques, on a :



$$\sin(\theta + 2k\pi) = sin\theta, \qquad \cos(\theta + 2k\pi) = cos\theta, \qquad tg(\theta + k\pi) = tg\theta$$

pour k = 1,2,3,…,n,….

Les domaines de définition sont :

- pour les fonctions sin et cos [-π,+π],
- pour la fonction tg [-π/2,+π/2]

De plus on les propriétés suivantes :

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $tg(-\theta) = -tg\theta$

Et:

$$\sin(\pi/2-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\pi/2-\theta) = \sin\theta$$

$$\mathrm{tg}(\pi/2-\theta) = \mathrm{cotg}\,\theta$$

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

$$\mathrm{tg}(\pi-\theta) = -\mathrm{tg}\,\theta$$

3.Formules Usuelles

On a les formules suivantes :

cos(a+b) = cosa.cosb – sina.sinb

cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb

sin(a+b) = sina.cosb + sinb.cosa

sin(a-b) = sina.cosb – sinb.cosa

$$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tga} + \mathrm{tgb}}{1 - \mathrm{tga.tgb}} \qquad \mathrm{tg}(a-b) = \frac{\mathrm{tga} - \mathrm{tgb}}{1 + \mathrm{tga.tgb}}$$

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$tg2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}$$

Dérivées des fonctions circulaires

Les fonctions circulaires sont des fonctions indéfiniment dérivables dans leurs domaines de définition. On alors :

$$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x$$

$$y = tgx \quad \Rightarrow \quad y' = 1 + tg^2 x = 1/\cos^2 x$$

Pour x au voisinage de 0 (x< 3°) on a les développements limités suivants :

$$\sin x = x - x^3/6 + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2 + \ldots\ldots$$

$$tgx = x - x^3/3 + \ldots\ldots$$

a (en radians)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos a	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

Primitives des fonctions circulaires

$$\int \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta + C$$

$$\int \cos\theta \, d\theta = \sin\theta + C$$

$$\int \mathrm{tg}\,\theta \, d\theta = -\mathrm{Log}\left|\cos\theta\right| + C$$

Les Espaces Euclidiens

Définition : Un espace vectoriel réel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs, ayant les propriétés suivantes :

Si $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,…$\mathbf{x}_n$, sont des vecteurs de l'espace vectoriel V et si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont des nombres réels, alors la combinaison linéaire:

$\mu_1.\mathbf{x}_1 + \mu_2.\mathbf{x}_2 + \ldots + \mu_n.\mathbf{x}_n$ est définie et c'est un élément de V.

A partir de la définition, on a les propriétés suivantes :

$$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \text{ et } \forall\ \mu, \mu_1, \mu_2, \in R$$

$$\mu.(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mu.\mathbf{x} + \mu.\mathbf{y}$$

$$(\mu_1 + \mu_2).\mathbf{x} = \mu_1.\mathbf{x} + \mu_2.\mathbf{x}$$

$$(\mu_1 \mu_2).\mathbf{x} = \mu_1(\mu_2.\mathbf{x}) = \mu_2 + (\mu_1.\mathbf{x})$$

$$1.\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} + o = o + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

- La droite réelle R est un espace vectoriel:

$$R = \{ \alpha \ / \in R \}$$

- $R^3 = \left\{ x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$ avec a, b et c $\in$R sont les composantes du vecteur x.

Les Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition : Un ensemble $(\mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel V est une base de V si :

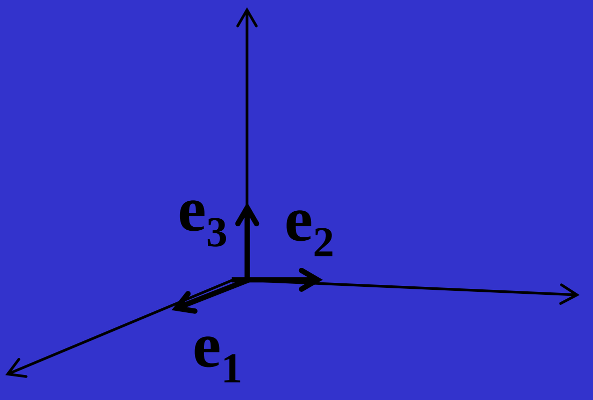
a) - les vecteurs $(\mathbf{e}_i)$ sont indépendants $\Leftrightarrow \sum_i \lambda_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall$ i

b) - tout vecteur $\mathbf{x}$ s'exprime d'une manière unique en fonction de $\mathbf{e}_i$

$\forall \ \boldsymbol{x} \in V, \exists \ \lambda_i$ uniques / $\boldsymbol{x} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{e}_i$

Exemple : dans R^3, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est une base dite base canonique de R^3.



Norme d'un vecteur

Si $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \delta)$ alors $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2}$

Produit scalaire de 2 vecteurs

Soient $\mathbf{x} = (\alpha,\beta,\delta)$ et $\mathbf{x'} = (\alpha',\beta',\delta')$ alors:

$$\mathbf{x.x'} = \alpha.\alpha' + \beta.\beta' + \delta.\delta'$$

et $\mathbf{x.x'}$ est un réel.

On a aussi : $\mathbf{x.x'} = ||\mathbf{x}||||\mathbf{x'}||.\cos(\mathbf{x},\mathbf{x})$

Produit vectoriel de 2 vecteurs

Soient $\mathbf{x} = (\alpha,\beta,\delta)$ et $\mathbf{x'} = (\alpha',\beta',\delta')$, alors le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x'}$ est le vecteur $\mathbf{y}$ noté $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'$ telque $\mathbf{y}$ soit orthogonal au plan engendré par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x'}$ et que ($\mathbf{x},\mathbf{x'},\mathbf{y}$) forme un repère direct.

On écrit :

$$y = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\delta' - \delta\beta' \\ \delta\alpha' - \alpha\delta' \\ \alpha\beta' - \beta\alpha' \end{vmatrix}$$

les composantes du vecteur $\mathbf{y}$.

On a aussi $||\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}||||\mathbf{x'}||.\sin(\mathbf{x},\mathbf{x'})$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$$
$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

B - Eléments de l'Astronomie de Position

Objectifs de l'Astronomie

Pour le géodésien, l'astronomie est un moyen de détermination de certaines inconnues du point stationné à partir d'observations sur les astres ou les étoiles.

Les observations astronomiques effectuées dans ce cadre déterminent la verticale physique du point de l'observation, celle-ci étant matérialisée par l'axe de rotation de l'instrument.

Si on assimile la verticale à la normale à la surface modèle de référence, on peut alors localiser ces points. On parlera alors d'astronomie de position.

En géodésie tridimensionnelle, l'astronomie donne la direction de la tangente à la ligne de force du champ de pesanteur au point considéré.

Cependant, la géodésie ne peut se détacher de l'astronomie. En effet, il a toujours fallu, pour placer les points sur la sphère ou l'ellipsoïde de référence ou dans un trièdre trirectangulaire, fixer les axes des coordonnées.

Alors un des axes privilégiés est l'axe de rotation de la Terre. Ce dernier n'est pas matérialisé sur la surface topographique, mais il apparaît que dans l'observation du mouvement de la Terre ou dans l'observation des étoiles. Donc, le géodésien est nécessairement astronome.

Alors, les observations astronomiques permettent en géodésie de déterminer :

- les 2 inconnues fixant la direction de la verticale physique du lieu (φ,λ),

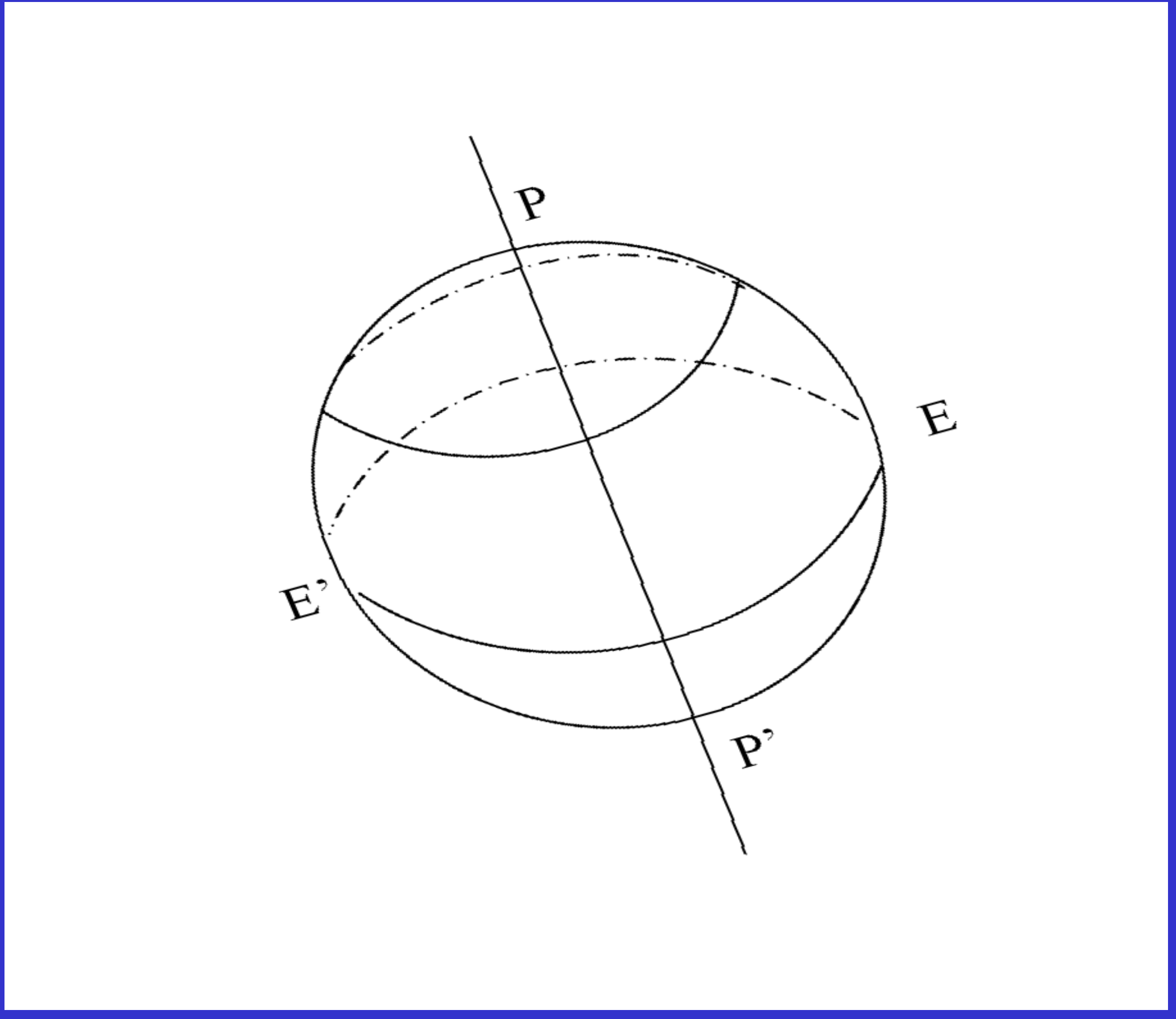
- l'orientation d'une direction (l'azimut),

- les coordonnées absolues d'un premier point d'un réseau ou point fondamental.

Notions d’astronomie de position

Définition: La sphère céleste est une sphère de rayon infiniment grand sur laquelle sont projetées les perspectives des étoiles.

On appelle constellation la figure formée par les étoiles.



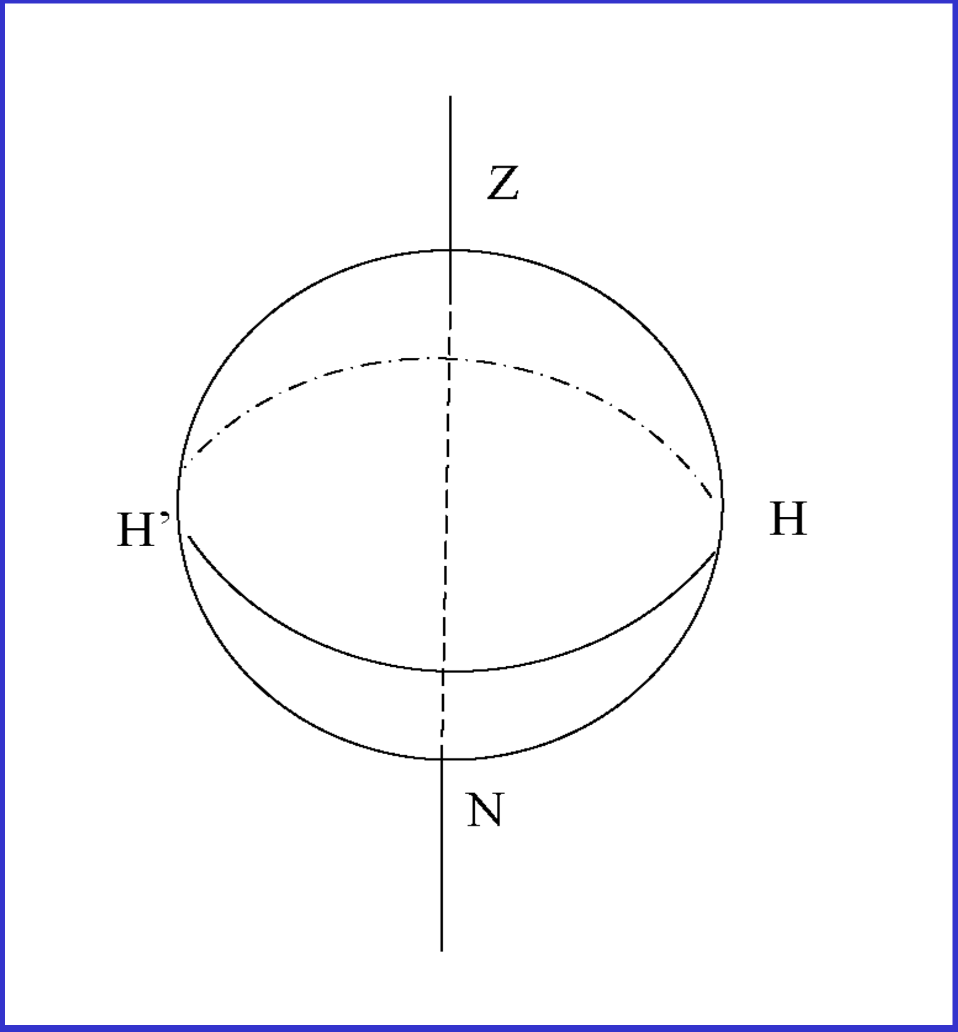
Sphère Céleste

PP’: axe du monde.

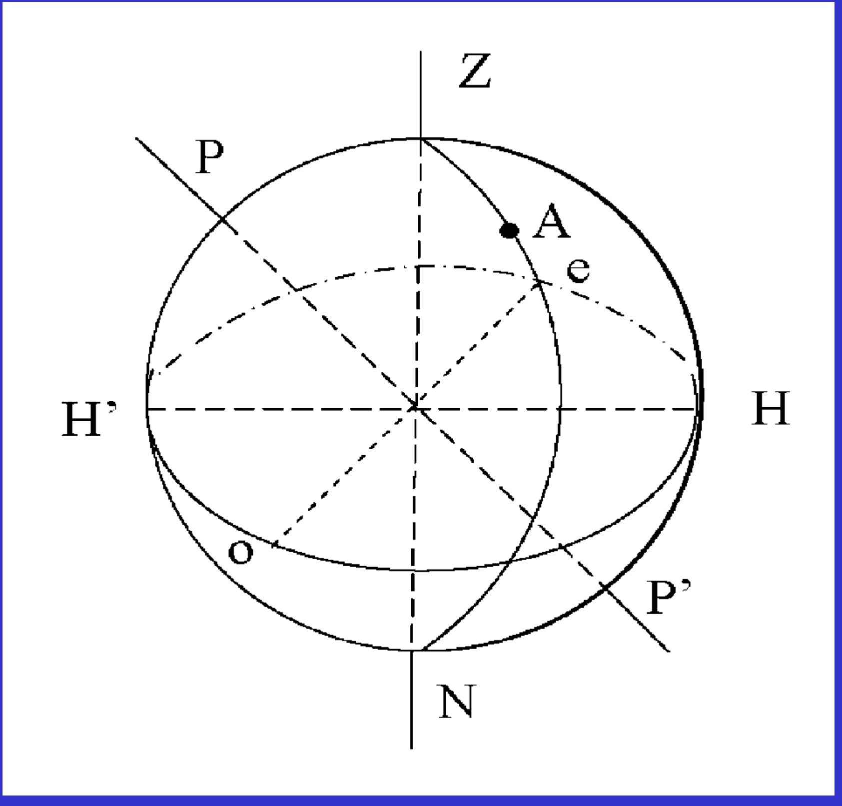
P: pôle nord,
P’: pôle sud.

EE’: Plan de l’équateur

Définition: La verticale d'un lieu est la direction donnée par un fil à plomb, Z c'est le zénith, N c'est le nadir. L'horizon est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à ZN.



Définition: Le plan méridien d'un lieu est le plan défini par la verticale et l'axe du monde. Le méridien d'un lieu c'est un grand cercle intersection du plan méridien et de la sphère céleste, le méridien est local.

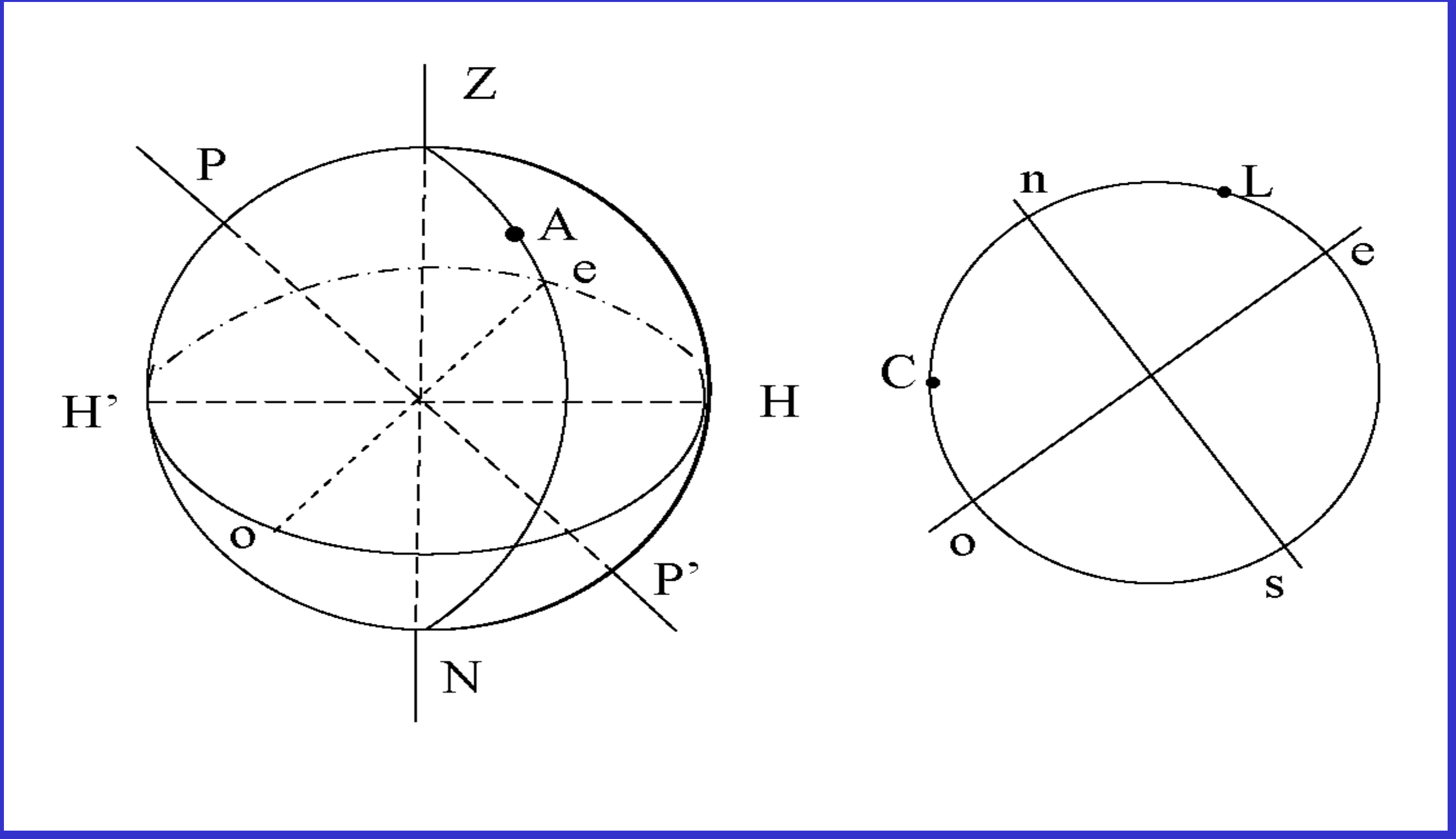


Définition: Le plan vertical est un plan contenant la verticale ZN.

Définition: On appelle vertical d'un astre le plan vertical passant par l'astre.

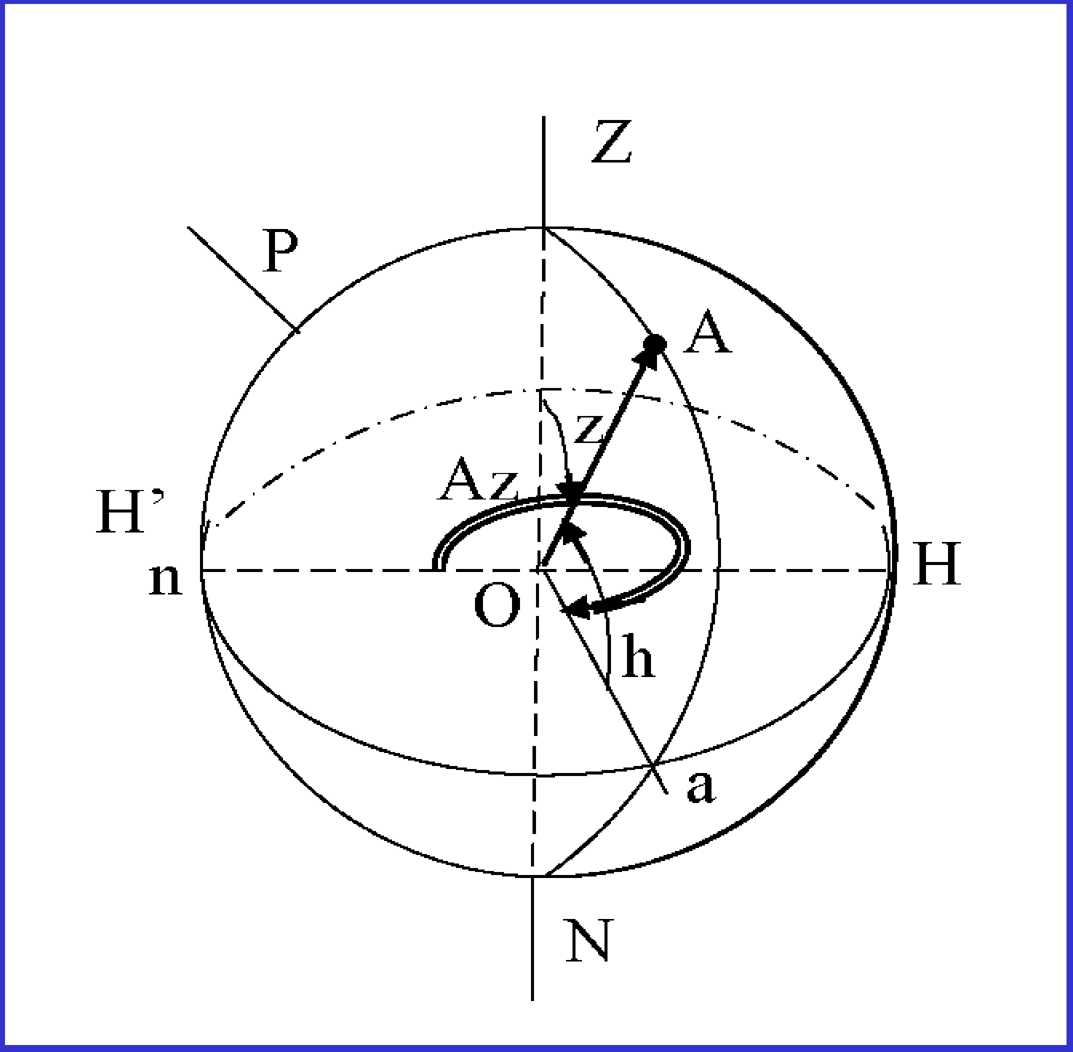
Définition: Le méridien est le vertical passant par le pôle ; il rencontre l'horizon en un point n : c'est le Nord géographique, le point opposé au Nord c'est le Sud.

Dans la direction perpendiculaire, on a l'Est et l'Ouest. L'Est se trouve à droite de la ligne Sud-Nord.



Définition : L’azimut astronomique d’un astre est l’angle formé par le vertical du l’astre et le plan méridien. Il est compté à partir du Nord dans le sens rétrograde (en grades).

Az =Angle (nOa)



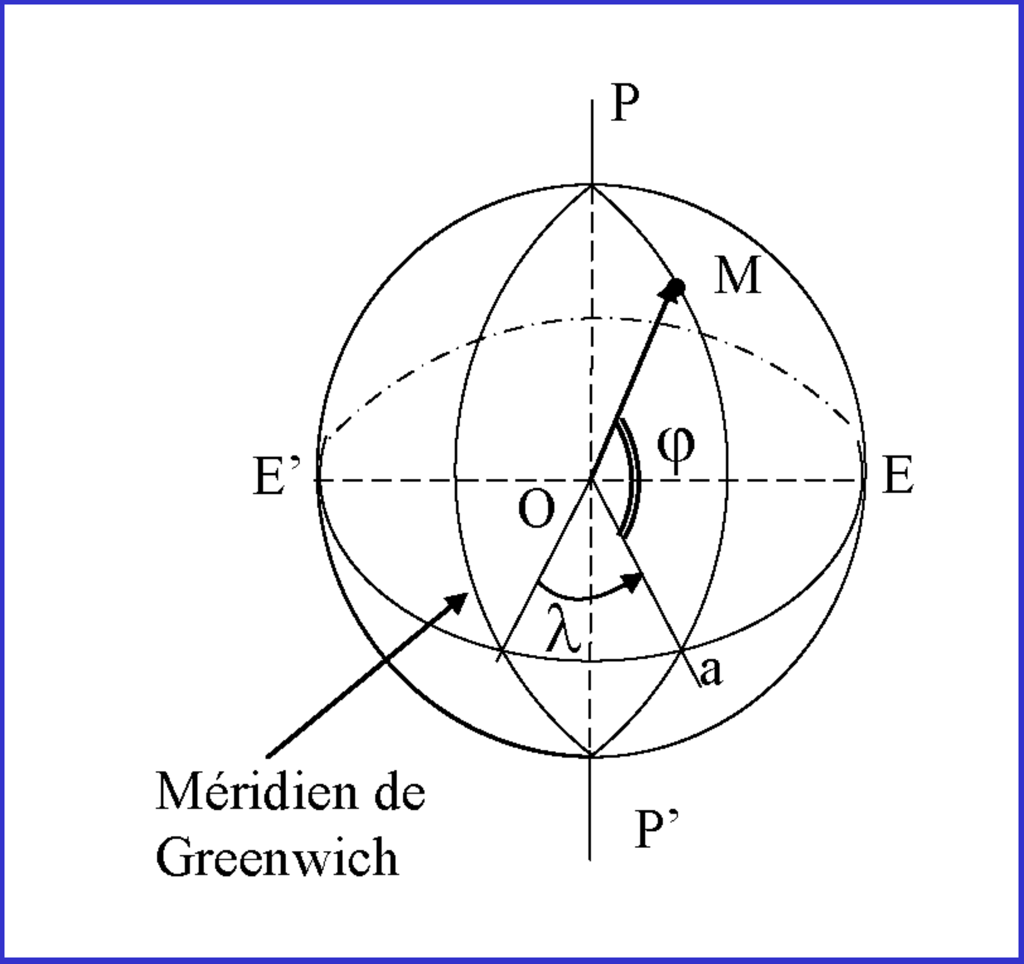
Z: la distance zénithale comptée à partir de la verticale ascendente.

$$0 \leq Z \leq \pi$$

h: hauteur de l’astre comptée à partir de l’horizon.

$$-90° \leq h \leq 90°$$

Définitions des Coordonnées Géographiques



Soit M un point de la surface de la Terre qu'on suppose sphérique.

- La latitude géographique φ est l'angle de la verticale avec le plan de l'équateur (en degrés ou en grades), positivement vers le pôle Nord, négativement vers le pôle Sud.

- La longitude géographique λ est l'angle formé par le méridien du lieu avec le méridien origine.

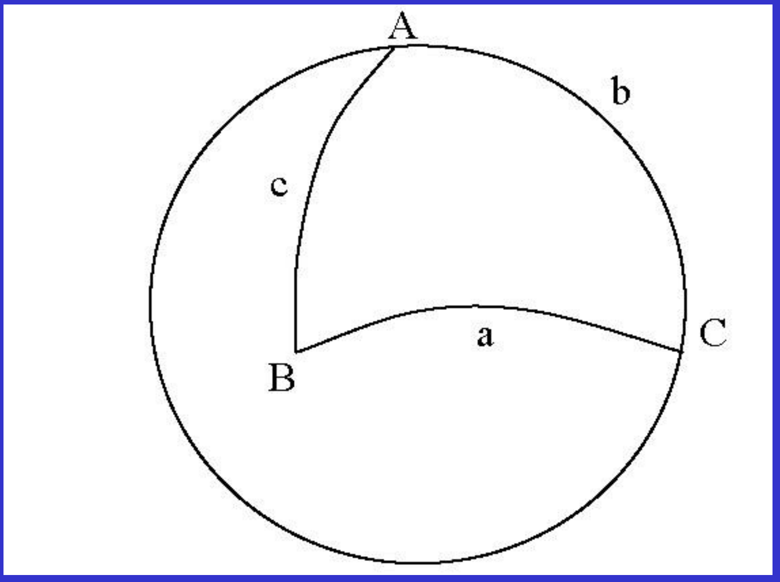
- Le méridien origine est le méridien passant par l'observatoire de Greenwich. λ est comptée positivement vers l'Est en grades, degrés ou en heures.

Tableau des Unités

Le Système Centésimal	Le Système Sexagésimal	Le Système Horaire
1 grade = 1/64 rd	1° = 1/57rd	1 heure = 15°
1 cg = 1/6400 rd	1 minute = 1’ = 1°/60	1 mn = 1h/60 = 15’
1 dcmg = 1``= 1/640000 rd	1 seconde = 1” = 1’/60=1°/3600	1 s = 1mn/60 = 15”

Trigonométrie Sphérique (TS)

La trigonométrie sphérique établit les relations liant les grandeurs caractéristiques d'un triangle sphérique.



Les côtés du triangle sphérique sont des arcs de cercle. Les angles et côtés du triangle sont des grandeurs mesurables par des angles. Un triangle est défini à partir de 3 éléments.

On démontre la relation fondamentale de la TS:

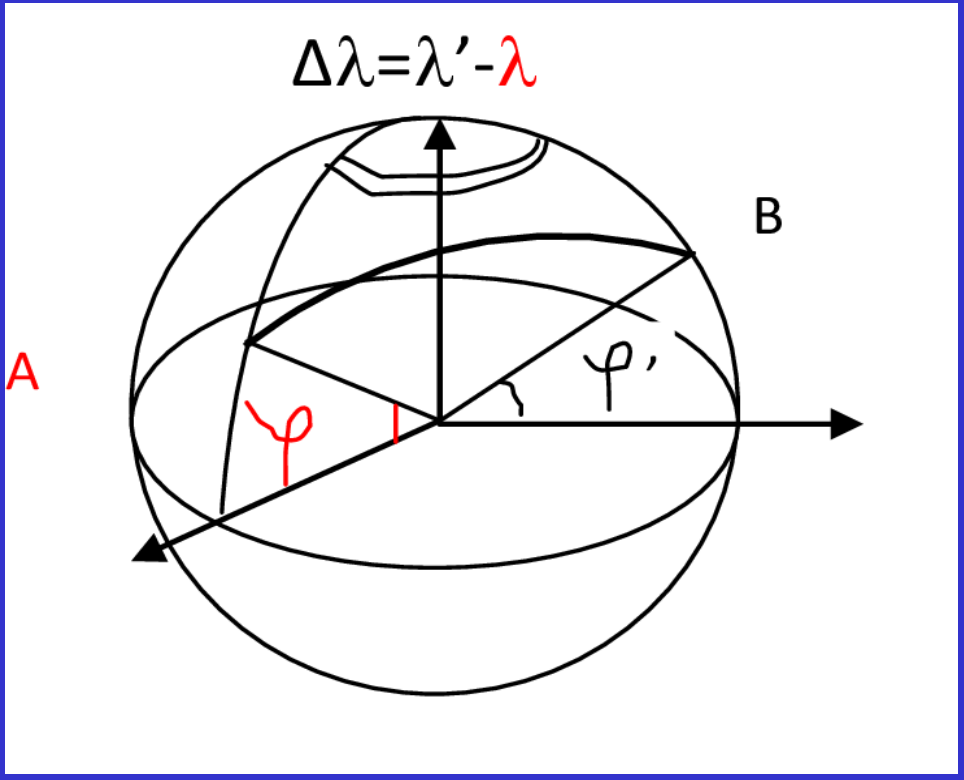
$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$

Une autre formule est la formule des sinus:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Dans le plan, la formule est : sinA/a=sinB/b=sinC/c

Application : 1. Calculer la distance courbe AB entre 2 villes considérant que la Terre est une sphère de rayon R=6378 km.



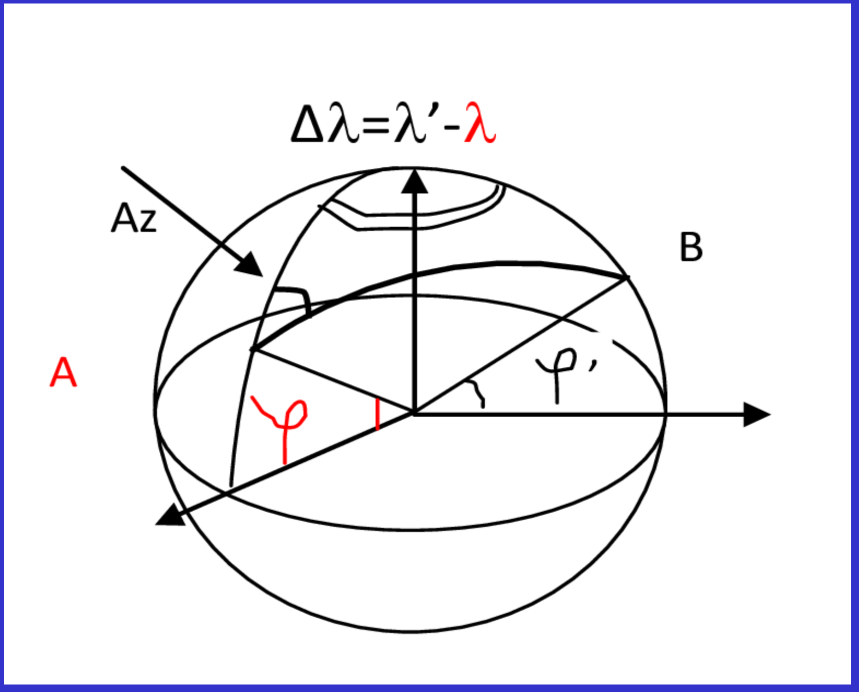
On a le triangle APB:
P = Δλ, PA = π/2-φ, PB = π/2-φ', Arc AB=s.

$\cos(s)=\cos(\pi/2-\varphi).\cos(\pi/2-\varphi')+\sin(\pi/2-\varphi).\sin(\pi/2-\varphi')\cos\Delta\lambda \Rightarrow$

$\cos(s)=\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos\Delta\lambda$

AB=R.s km

2. Si AB est le trajet que prend un avion de A vers B, l'angle A est l'azimut Az de la direction du trajet au départ du point A.



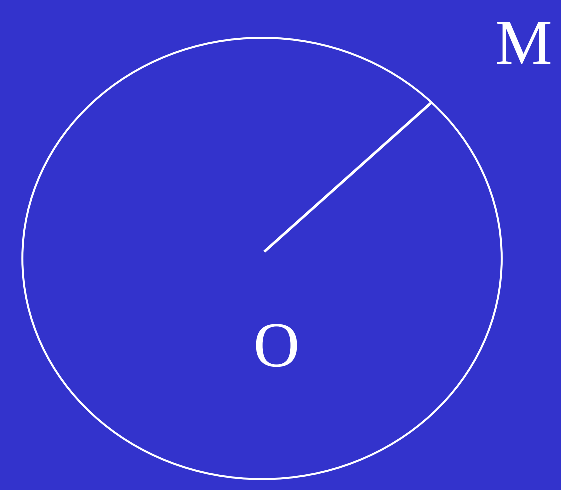
Utilisant la formule des sinus, on obtient Az par la formule:

$$\frac{sinAz}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{sin\Delta\lambda}{\sin(s)} \Longrightarrow sinAz = cos\varphi.\frac{sin\Delta\lambda}{\sin(s)}$$

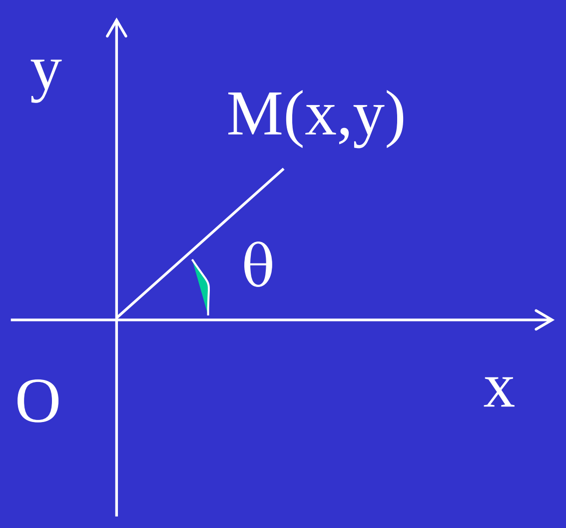
Nota: dans le 1^er^ terme de la formule ci-dessus à corriger φ/2 par φ.

C - GÉOMÉTRIE DE LA SPHERE

Géométrie du cercle: le cercle est lieu des points M du plan tels que: la distance OM = une constante (1)



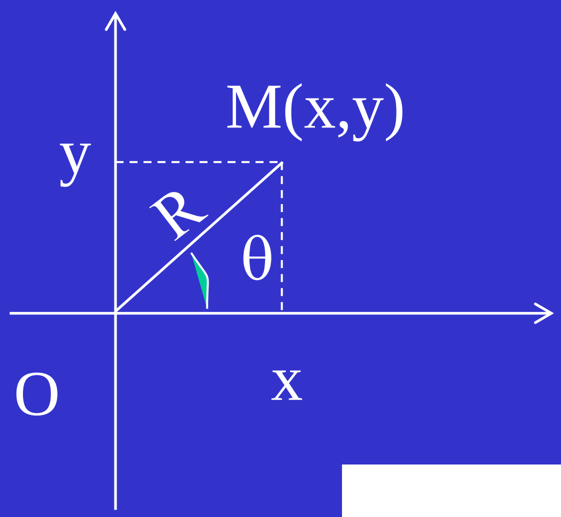
Considérons un repère orthonormé (O,***i***,***j***). (***i***,***j***) une base orthonormée, soit ***i***.***j*** = 0 et ||***i***||=||***j***||=1.



L'équation (1) devient:

$$x^2+y^2 = R^2 \qquad (2)$$

L'équation (2) est l'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon R.



Ecrivons le vecteur ***OM*** dans le système $(O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$:

OM=x.***i***+y.***j***=R.cosθ***i***+R.sinθ***j***

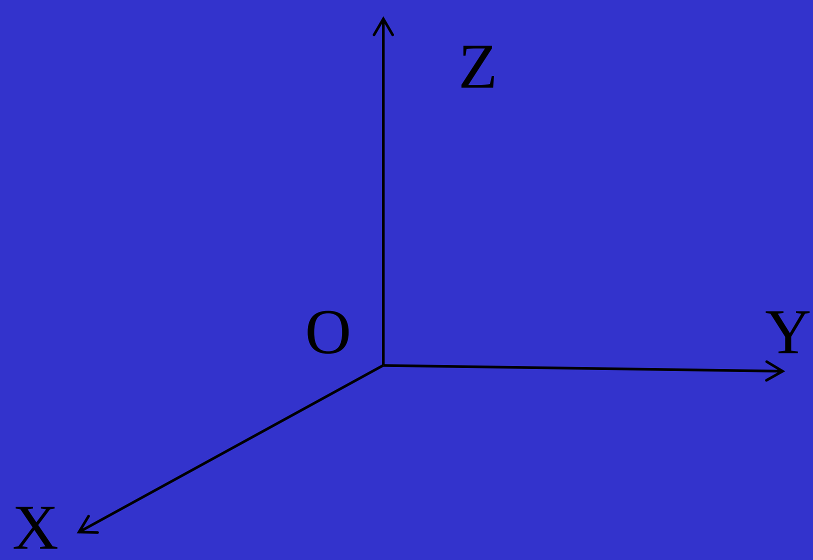
$$\boldsymbol{OM} = \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

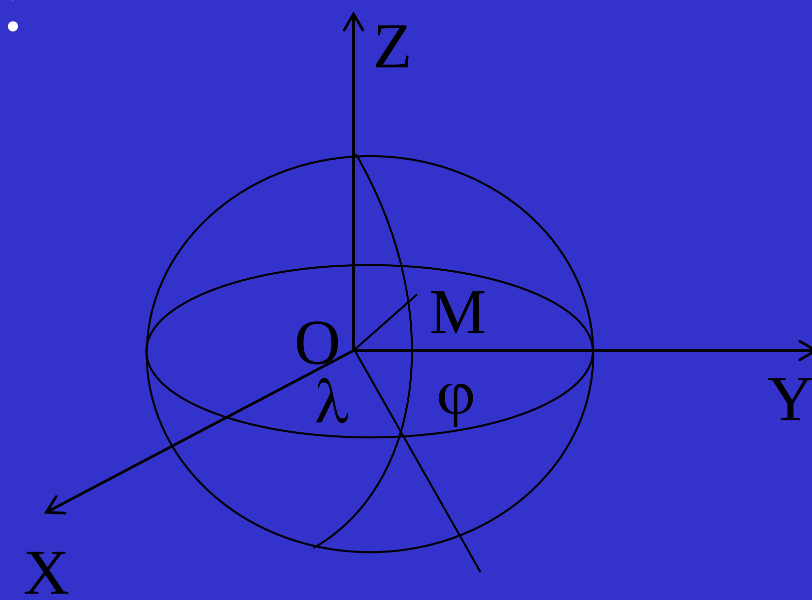
Les équations ci-dessus représentent les équations paramétriques du cercle de centre *O* et de rayon *R*.

Géométrie de la sphère

La sphère est lieu des points *M* de l’espace tridimensionnel tel que: la distance *OM* = une constante =R (3)

Soit un repère orthonormé (*O*,*X*,*Y*,*Z*):





Dans (*O*,*X*,*Y*,*Z*), l’équation (3) devient: $X^2+Y^2+Z^2 = R^2$ (4)

L’équation (4) est l’équation cartésienne de la sphère.

Si on localise *M* par deux angles (φ,λ), on obtient:

$$\boldsymbol{OM} = \begin{cases} X = R\cos\varphi\cos\lambda \\ Y = R\cos\varphi\sin\lambda \\ Z = R\sin\varphi \end{cases} \qquad (5)$$

Donc les équations (5) sont les équations paramétriques de la sphère.

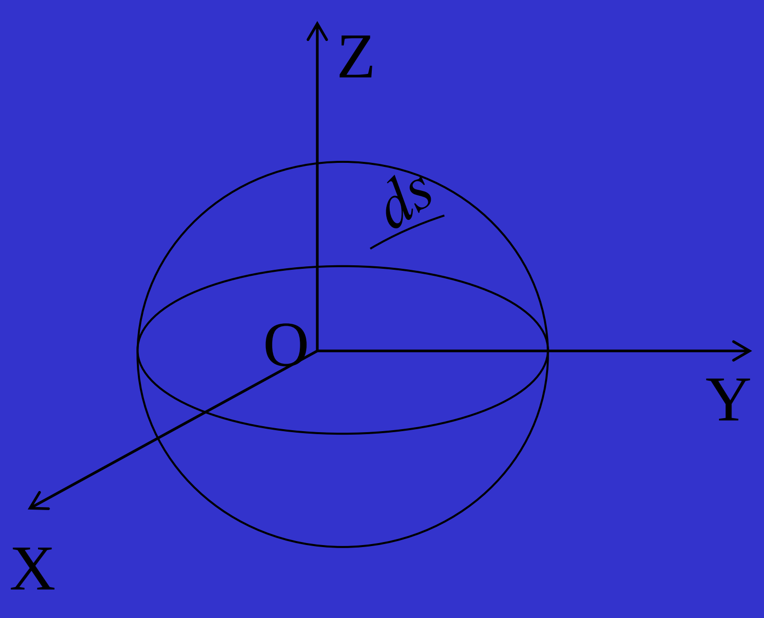
Calcul de l'élément de longueur sur la sphère: du point $M(\varphi,\lambda)$ vers $M'(\varphi+d\varphi,\lambda+d\lambda,)$, quelle est la valeur de la longueur de MM'? On considère $d\mathbf{M=(dX,dY,dZ)} \Rightarrow d\mathbf{M^2=dX^2+dY^2+dZ^2}$

$$dX = -R\sin\varphi.\cos\lambda.d\varphi - R\cos\varphi.\sin\lambda.d\lambda$$
$$dY = -R\sin\varphi.\sin\lambda.\,d\varphi + R\cos\varphi.\cos\lambda\,.d\lambda$$
$$dZ = R\cos\varphi.d\varphi$$

Après calculs, on obtient $ds^2=d\mathbf{M^2}$:

$$ds^2= R^2d\varphi^2 +R^2\cos\varphi^2d\lambda^2 \qquad (6)$$

ds est l'élément infinitésimal de longueur sur la sphère.



On écrit (6) comme suit:

$$ds^2= R^2\cos^2\varphi(d\varphi^2/\cos^2\varphi +d\lambda^2)$$

On appelle latitude croissante :

$L=Logtg(\pi/4+\varphi/2)$.

Montrer que $dL/d\varphi =1/\cos\varphi$.

(6) devient:

$$ds^2= R^2\cos^2\varphi(dL^2 +d\lambda^2) \Rightarrow (L,\lambda)$$

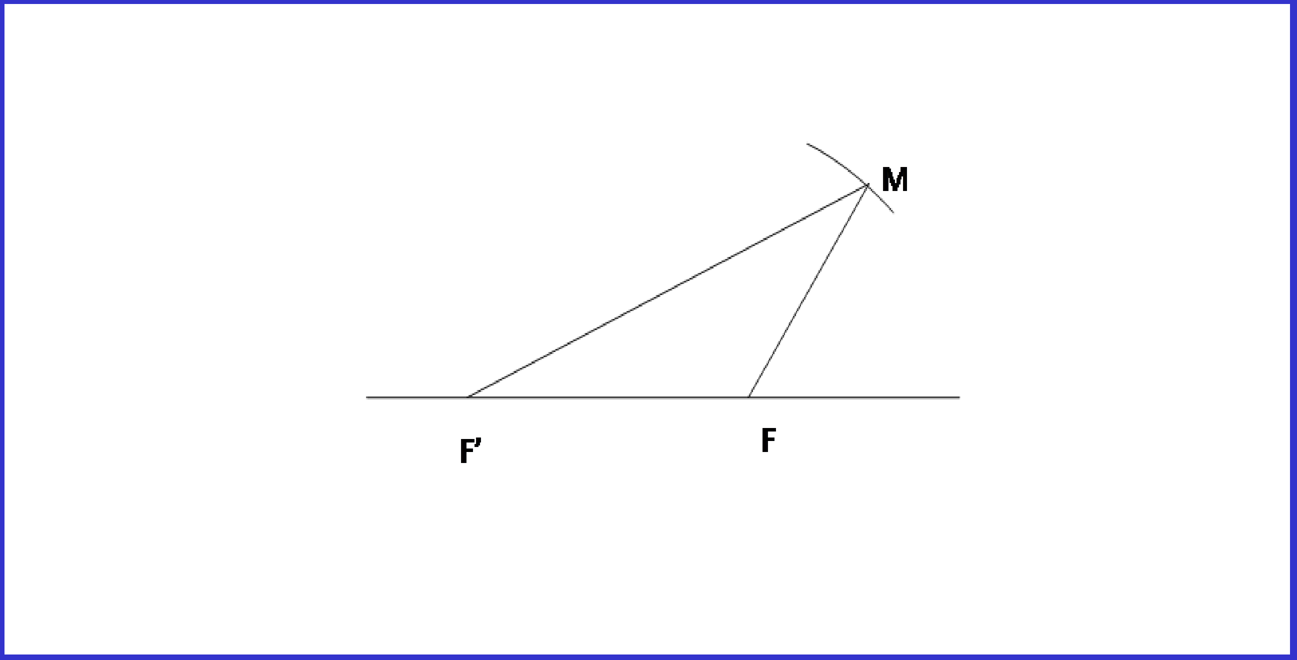
sont des coordonnées symétriques.

D - GÉOMÉTRIE DE L'ELLIPSE ET DE L'ELLIPSOÏDE

Définition1: L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes ou foyers F et F', est constante :

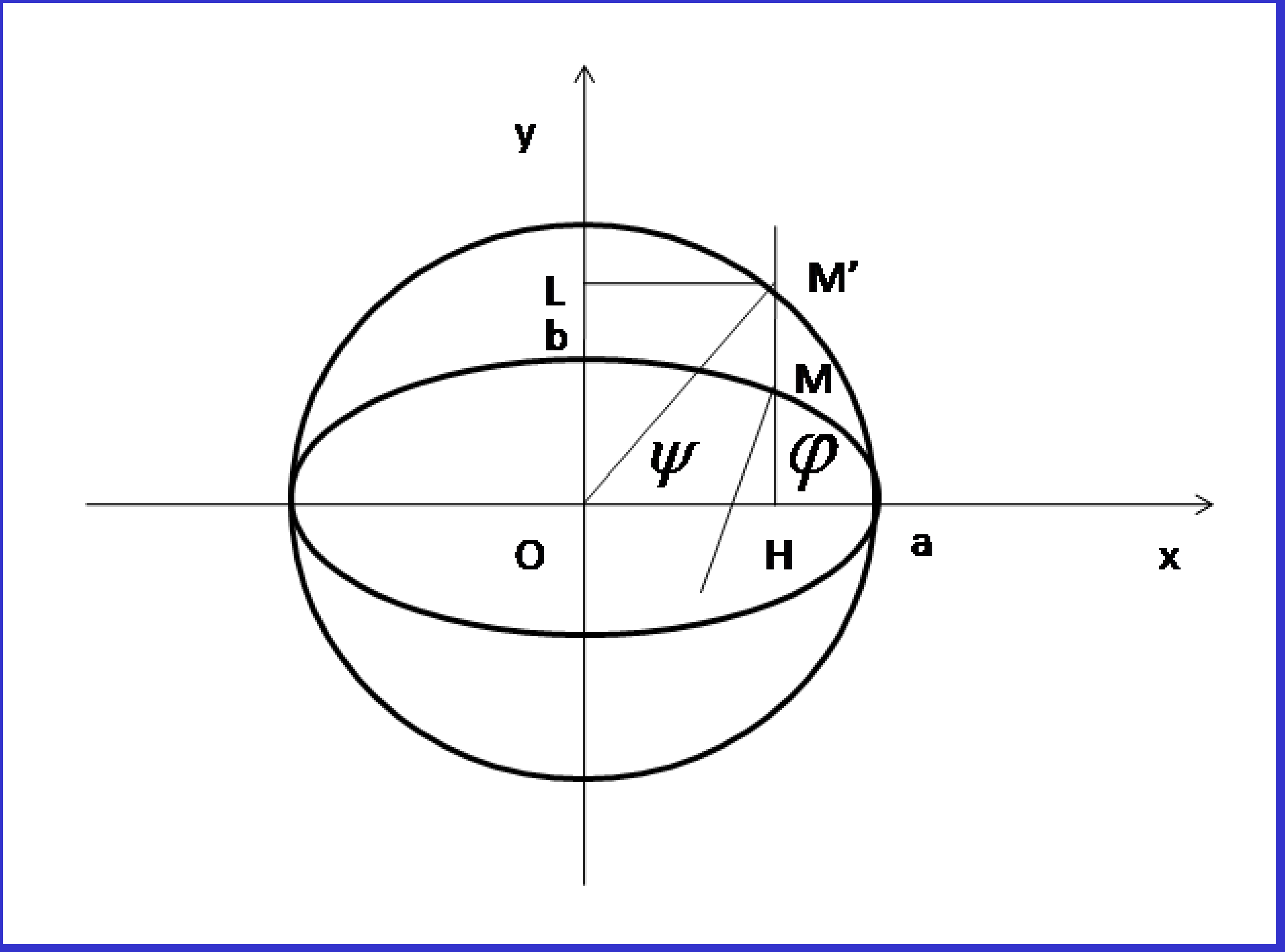
$$MF + MF' = \text{constante} = 2a$$

où *a* est dit le demi-grand axe de l'ellipse.



Définition2: Une ellipse est la transformée par affinité d'un cercle dans le rapport b/a où b est le demi-petit axe.

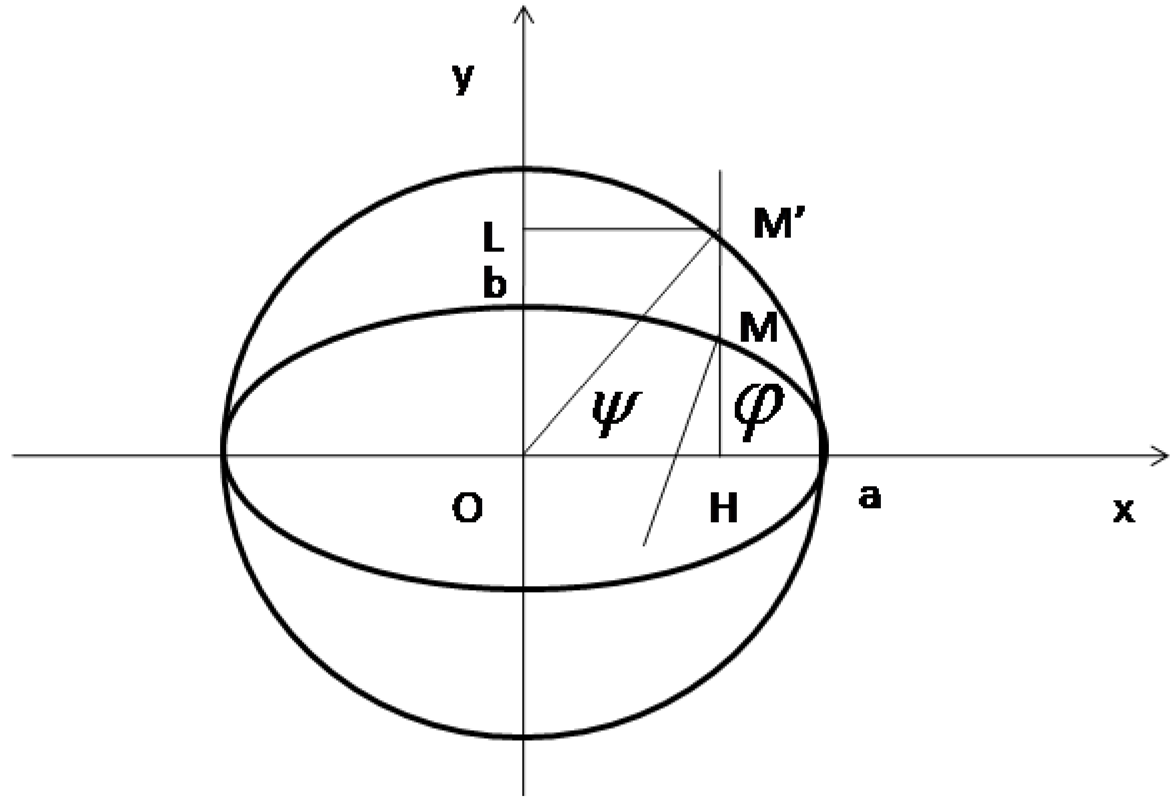
Définition2: Une ellipse est la transformée par affinité d'un cercle dans le rapport b/a où b est le demi-petit axe.



Au point M' $\in$ cercle $\Rightarrow$ M $\in$ ellipse avec :

$$\mathrm{HM} = \frac{b}{a} HM'$$

ψ : c'est la latitude paramétrique ou réduite.



D'où les coordonnées paramétriques de M :

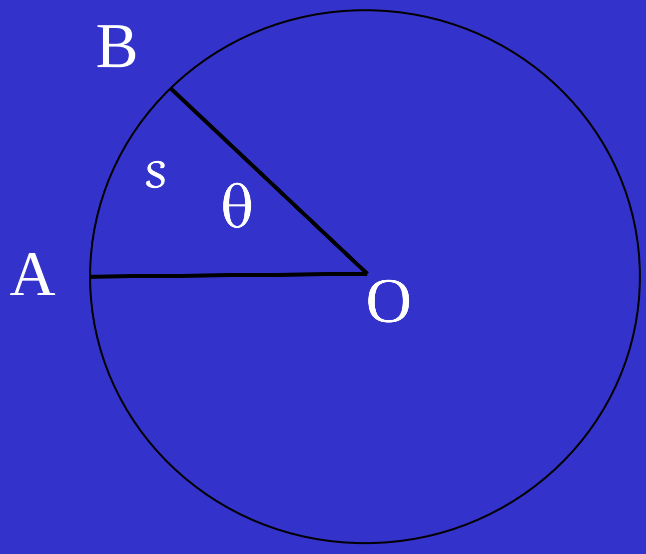
$$M = \begin{cases} x = OH = acos\psi \\ y = HM = \frac{b}{a}HM' = \frac{b}{a}asin\psi = bsin\psi \end{cases} \Longrightarrow M \begin{cases} x = acos\psi \\ y = bsin\psi \end{cases} \quad (7)$$

Eliminant l'angle ψ de (7), on obtient l'équation cartésienne de l'ellipse:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \qquad (8)$$

Calcul du rayon de courbure de l'ellipse

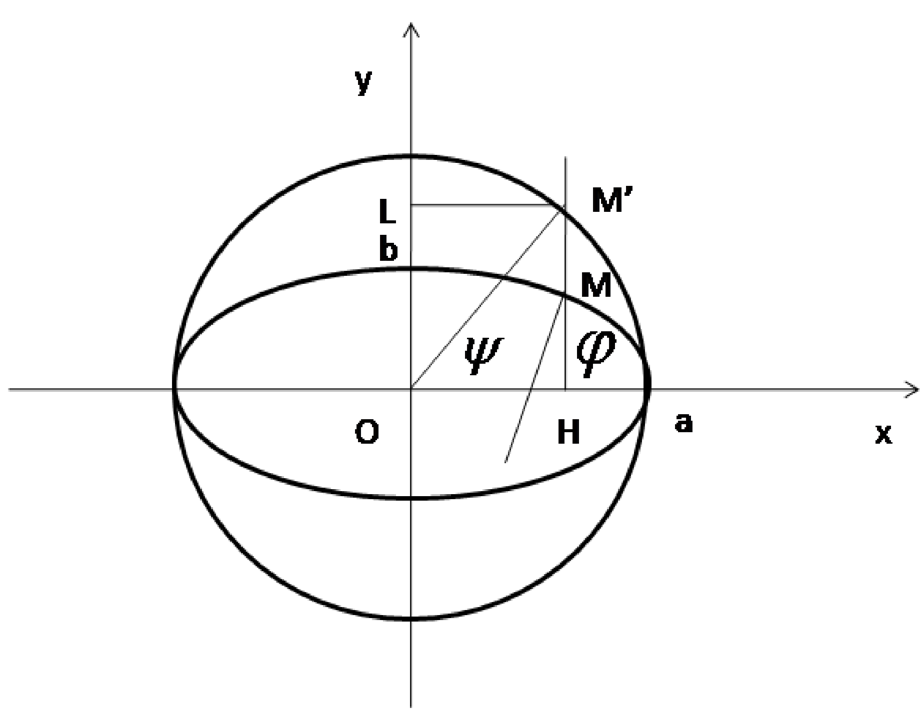
I- Soit un cercle de centre O et de rayon R:



La longueur de l'arc AB vaut $s = R.\theta$ et la dérivée $ds/d\theta = R$.

On dit que *R* est le rayon de courbure et *1/R* est la courbure et O le centre de courbure.

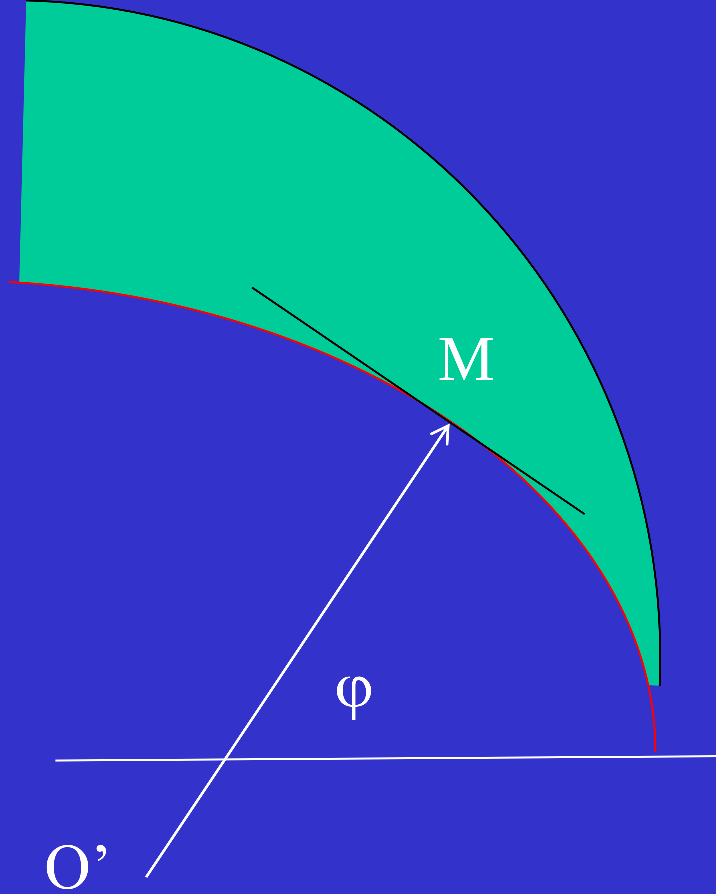
II- Soit une ellipse définie par (a,b):

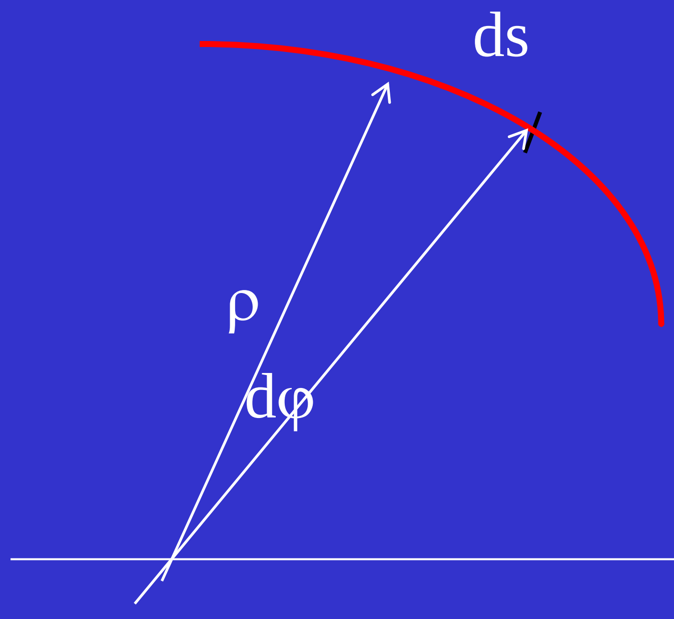


$e^2 = (a^2-b^2)/a^2$, e est la 1ère excentricité,

$e'^2 = e^2/(1-e^2)$, e' est 2ème excentricité,

$\alpha = (a-b)/a$ l'aplatissement.





$$ds = \rho d\varphi \implies \rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

Or : x = acosψ et y = bsinψ

La pente de la tangente à l'ellipse au point M est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bcos\psi d\psi}{-asin\psi d\psi} = -\frac{bcos\psi}{asin\psi} = -\frac{b}{atg\psi}$$

La pente de la normale à l'ellipse au point M est donnée par :

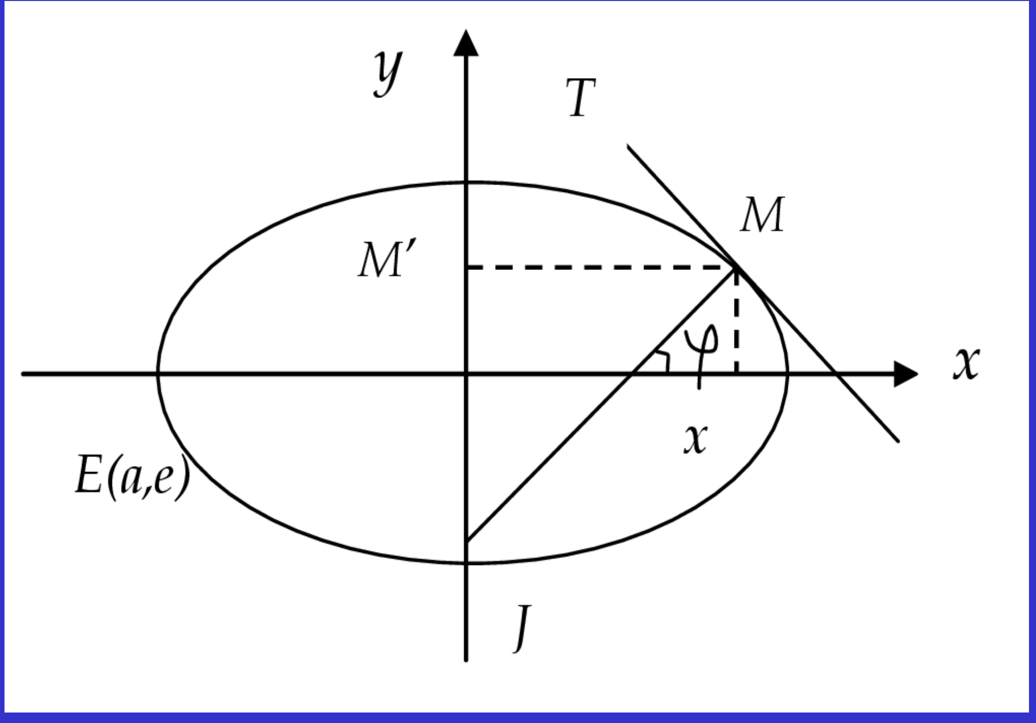
$$tg\varphi = -\frac{dx}{dy} = \frac{asin\psi d\psi}{bcos\psi d\psi} = \frac{a}{b}.tg\psi \implies tg\varphi = \frac{a}{b}.tg\psi$$

Partant de : $ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\sin^2\psi+b^2\cos^2\psi)d\psi^2$ *et de la formule* : $tg\varphi=a/b.tg\psi$ *on arrive à la formule du rayon de courbure* $\rho(\varphi)$ *(à retenir):*

$$\rho=\frac{ds}{d\varphi}=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Si $e=0$, l'ellipse devient un cercle, on trouve $\rho = a$ le rayon du cercle.

Calculons maintenant le deuxième rayon de courbure? Soit l'ellipse ci-dessous, l'abscisse du point M *est* $x=M'M=JM\cos\varphi$. JM?



Or $M=(a\cos\psi, b\sin\psi)$. Les coordonnées du point J sont obtenues par l'intersection de la droite JM et l'axe $x=0$.

Soit: $y-y_M=tg\varphi\,(x-x_M)\Rightarrow$

$y_J = y_M - tg\varphi\, x_M \Rightarrow$

$JM^2= x^2_M + (y_J - y_M)^2=$

$$JM^2 = x_M^2(1+tg^2\varphi) = \frac{x_M^2}{cos^2\varphi} = \frac{a^2cos^2\psi}{cos^2\varphi} \Longrightarrow$$

$$JM^2 = \frac{a^2}{cos^2\varphi}.\frac{1}{1+tg^2\psi} = \frac{a^2}{cos^2\varphi}.\frac{1}{1+(1-e^2)tg^2\varphi} \Longrightarrow$$

$$JM^2 = \frac{a^2}{cos^2\varphi+(1-e^2)sin^2\varphi} = \frac{a^2}{1-e^2sin^2\varphi} \Longrightarrow$$

$$JM = N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} \text{ la grande normale}$$

Ecrivons les coordonnées paramétriques du point *M* :

$$x = JM.cos\varphi = N.cos\varphi = \frac{acos\varphi}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$$

$$y = bsin\psi = b\sqrt{1-cos^2\psi} = b\sqrt{1-\frac{1}{1+tg^2\psi}} = b\sqrt{\frac{tg^2\psi}{1+tg^2\psi}}$$

$$tg\psi = \frac{b}{a}tg\varphi = \sqrt{(1-e^2)}tg\varphi \Longrightarrow y = b\sqrt{\frac{(1-e^2)tg^2\varphi}{1+(1-e^2)tg^2\varphi}}$$

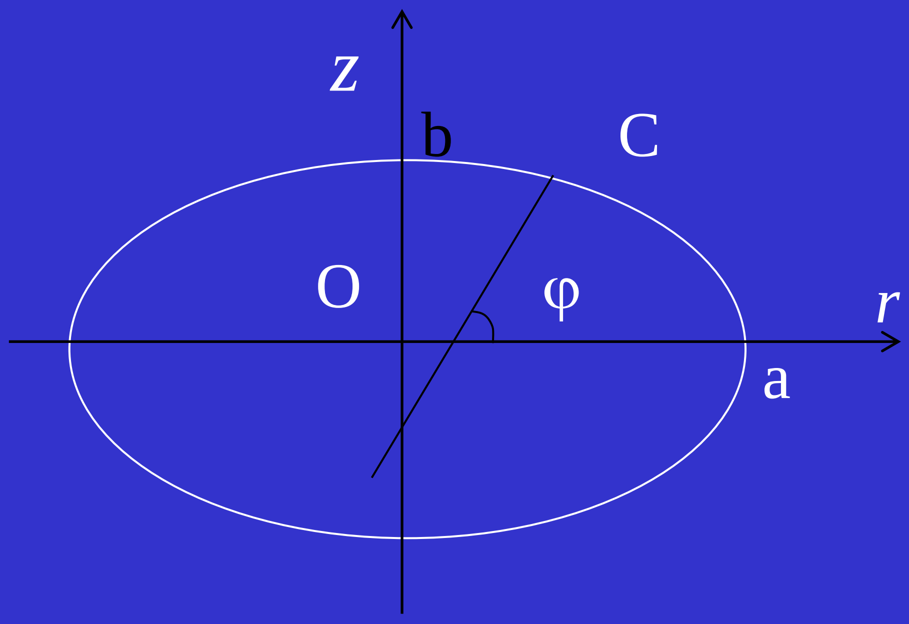
$$y = b.\frac{\sqrt{1-e^2}sin\varphi}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} = \frac{a(1-e^2)sin\varphi}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} = N(1-e^2)sin\varphi$$

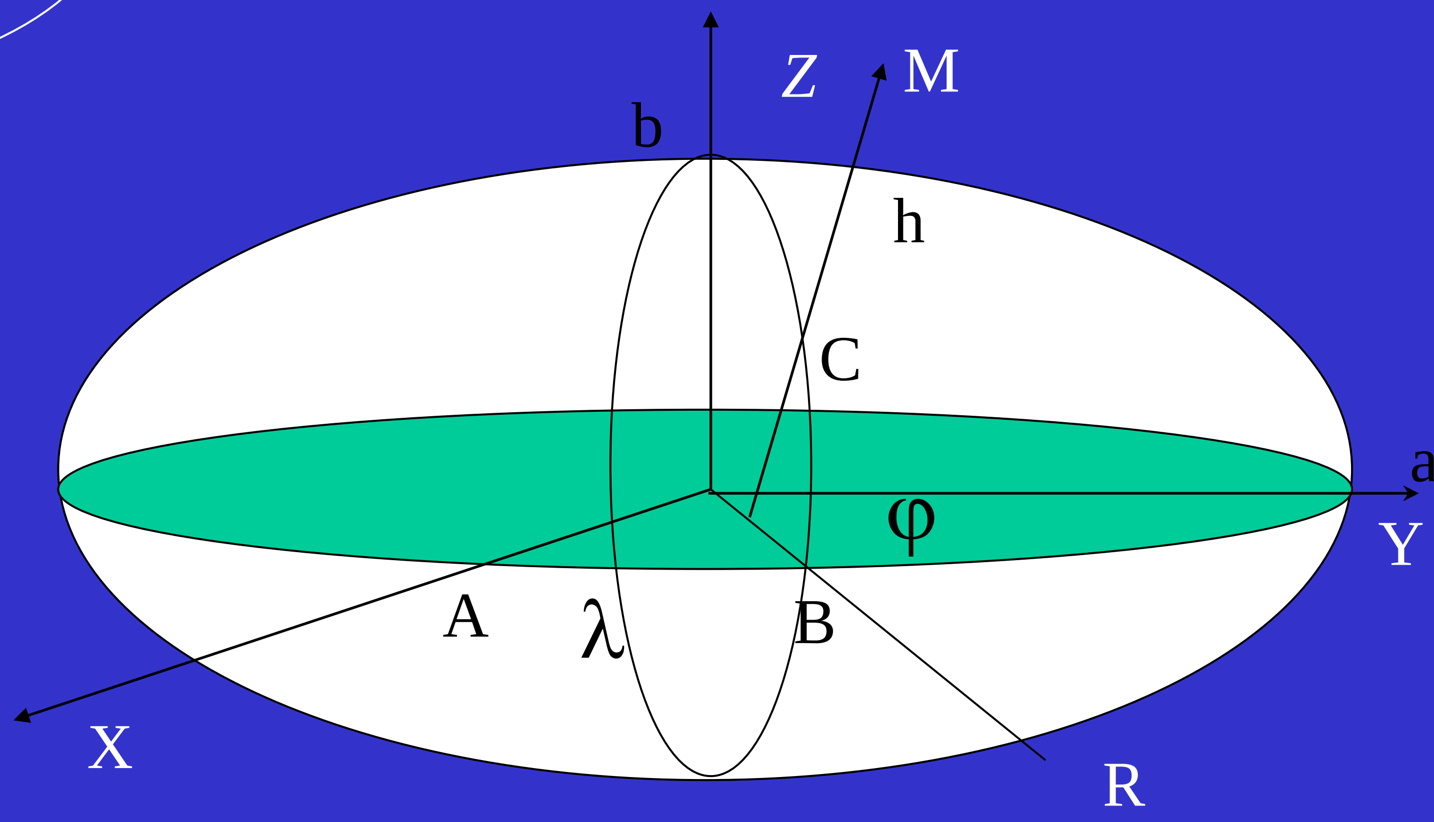
$x = Ncos\varphi$

$y = N(1-e^2)sin\varphi$

Application : On considère la première équation de l'ellipse: *MF+MF'=2a* et on donne *F(c,0)* et *F'(-c,0)* les 2 foyers. Etablir l'équation cartésienne de l'ellipse et calculer b en fonction de *c*.

Définition 2: Un ellipsoïde de révolution de paramètres a et b (a>b) est obtenu par la rotation de l'ellipse autour du demi-petit axe.





Les coordonnées géodésiques

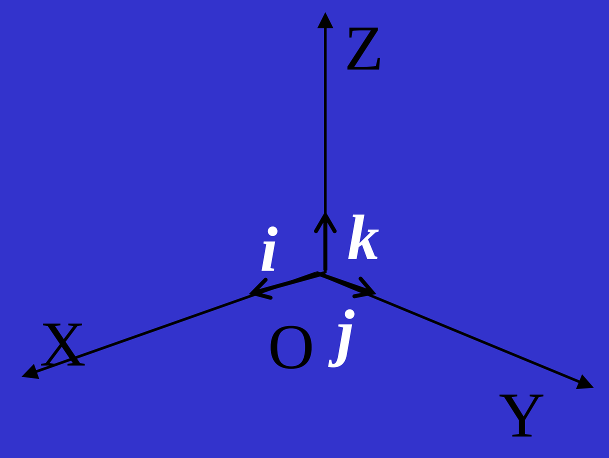
Les coordonnées géographiques définies sur l'ellipsoïde de révolution sont:

- la longitude λ: angle du plan méridien du point *C* avec le plan méridien origine, dans notre cas, le plan origine est le plan *XOZ*,
- la latitude géodésique φ: angle de la direction de la normale au point *C* avec le plan équatorial;
- l'altitude ellipsoïdique he: si le point est sur l'ellipsoïde:
- $$he = 0$$

Expression des coordonnés tridimensionnelles: Dans le plan *ROZ*, avec $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{k}$ les vecteurs unitaires des axes *OR* et *OZ*, on peut écrire: $\boldsymbol{OC} = a.\cos\psi\boldsymbol{r}+b.\sin\psi\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}.\cos\lambda+\boldsymbol{j}.\sin\lambda$. *D'où:* $\boldsymbol{OC} = a.\cos\psi\cos\lambda\boldsymbol{i} + a.\cos\psi\sin\lambda\boldsymbol{j}+b.\sin\psi\boldsymbol{k}$.

On remplace ψ en fonction de la latitude géodésique φ, on obtient les coordonnées paramétriques d'un point sur l'ellipsoïde dans le repère orthonormé (*O*,***i***,***j***,***k***):

$$C = \begin{cases} X = N\cos\varphi\cos\lambda \\ Y = N\cos\varphi\sin\lambda \\ Z = N(1 - e^2)\sin\varphi \end{cases}$$



<u>Application:</u> Montrer que:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2\cos^2\varphi\, d\lambda^2.$$

Si le point se trouve à une altitude ellipsoïdique *he*, alors les coordonnées paramétriques sont:

$$M = \begin{cases} X = (N + he)\cos\varphi\cos\lambda \\ Y = (N + he)\cos\varphi\sin\lambda \\ Z = (N(1 - e^2) + he)\sin\varphi \end{cases}$$

Passages de $(\varphi,\lambda,h) \Leftrightarrow (X,Y,Z)$

1.Passage de $(\varphi,\lambda,h) \Rightarrow (X,Y,Z)$ est facile. On applique les formules en respectant les unités.

2.Passage de $(X,Y,Z) \Rightarrow (\varphi,\lambda,h)$ est délicat.

<u>Cas: sphère de rayon R</u>, les formules donnent:

$X = R\cos\varphi \cos\lambda$

$Y = R\cos\varphi \sin\lambda \Rightarrow tg\,\lambda = Y/X$, d'où λ.

$Z = R\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = Z/R$, d'où φ.

<u>**Application:**</u> On donne (X=5456361.82 m, Y=864202.81 m et Z=3189500.00 m).Trouver (φ,λ,h).

$X = (R+h)\cos\varphi \cos\lambda$

$Y = (R+h)\cos\varphi \sin\lambda$

$Z = (R+h)\sin\varphi$

Cas d'un ellipsoïde E(a,e) : On donne les formules Suivantes:

$$X = (N+H)\cos\varphi\cos\lambda$$
$$Y = (N+H)\cos\varphi\sin\lambda$$
$$Z = (N(1-e^2)+H)\sin\varphi$$

$$avec \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

On obtient la longitude par:

$$tg\lambda = \frac{Y}{X} \Rightarrow \lambda = Arctg(\frac{Y}{X})$$

On calcule:

$$p = \sqrt{X^2+Y^2} = (N+H)\cos\varphi$$

Comme:

$$Z + e^2 N\sin\varphi = (N+H)\sin\varphi$$

Ce qui donne:

$$tg\varphi = \frac{Z + e^2 N \sin\varphi}{p} \Rightarrow \varphi$$

φ se calcule par itérations comme suit:

$$tg\varphi_1 = \frac{Z}{p} \Rightarrow \varphi_1 = Arctg\left(\frac{Z}{p}\right)$$

$$tg\varphi_{(i+1)} = \frac{Z + e^2 N(\varphi_i)\sin\varphi_i}{p} \Rightarrow \varphi_{(i+1)}$$

On calcule si : $|\varphi_{i+1} - \varphi_i| < \varepsilon$ pour un ε donné ($1.57 \times 10^{(-10)}$), on itère le processus. H est obtenu par:

$$H = \frac{X}{\cos\varphi\cos\lambda} - N(\varphi)$$

Exemple:

On donne E(a,e) de Clarke français 1880: *a=6 378 249.20 m* et *e²=0.0068034877*. Soit *P* le point suivant:

X = 5 032 811.68 m, Y = 913 762.73 m, Z = 3 797 255.99 m

$$tg\lambda = \frac{Y}{X} \Rightarrow \lambda = 11.4339gr$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5115090.983m = (N + H)\cos\varphi$$

$$tg\varphi_1 = Z / p \Rightarrow \varphi_1 = 40.65426gr$$

$$tg\varphi_2 = (Z + e^2 N \sin\varphi_1) / p \Rightarrow \varphi_1 = 40.86155gr$$

$$tg\varphi_3 = (Z + e^2 N \sin\varphi_2) / p \Rightarrow \varphi_3 = 40.86246gr$$

$$tg\varphi_4 = (Z + e^2 N \sin\varphi_3) / p \Rightarrow \varphi_4 = 40.86247gr$$

$$\varphi = 40.86247gr$$

H est obtenu par:

$$H = X / (\cos\varphi \cos\lambda) - N = 1.448m$$

DEFINITION D'UN SYSTÈME GEODESIQUE ou DATUM

<u>Définition de la Géodésie</u>:

Le grand géodésien Allemand F.R. Helmert (1880) définissait la Géodésie comme suit " ***la Géodésie est la science de la mesure et de la représentation de la surface terrestre*** ".

L'aspect pratique de la géodésie:

-l'établissement et la maintenance des réseaux géodésiques tridimensionnels nationaux et globaux, constitués de points matérialisés et de coordonnées connues.

Ces points vont servir comme points de base aux divers travaux topographiques et cartographiques.

Ces points vont servir comme points de base aux divers travaux topographiques et cartographiques.

Définition d'un Système Géodésique

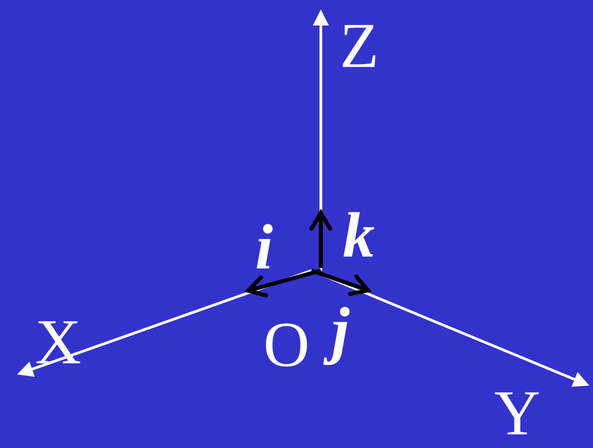
Définition: Un système géodésique donné est un système de coordonnées où sont représentés les points géodésiques.

Ce système est défini par :

- son origine,
- son orientation,
- le type de coordonnées pour localiser les points.

Le système le plus utilisé est le système cartésien formé par un repère (*OX*,*OY* ,*OZ)* tel que l'axe *OZ* soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre, et le plan *OXZ* parallèle au méridien de Greenwich origine des longitudes, l'axe *OY* est tel que le trièdre (*OX*,*OY* ,*OZ)* soit orthogonal et direct.

A ce système, on lui associe une base orthonormée (***i,j,k)*** c'est-à-dire : ***//i// = //j// = //k// = 1mètre (l'unité des longueurs)***

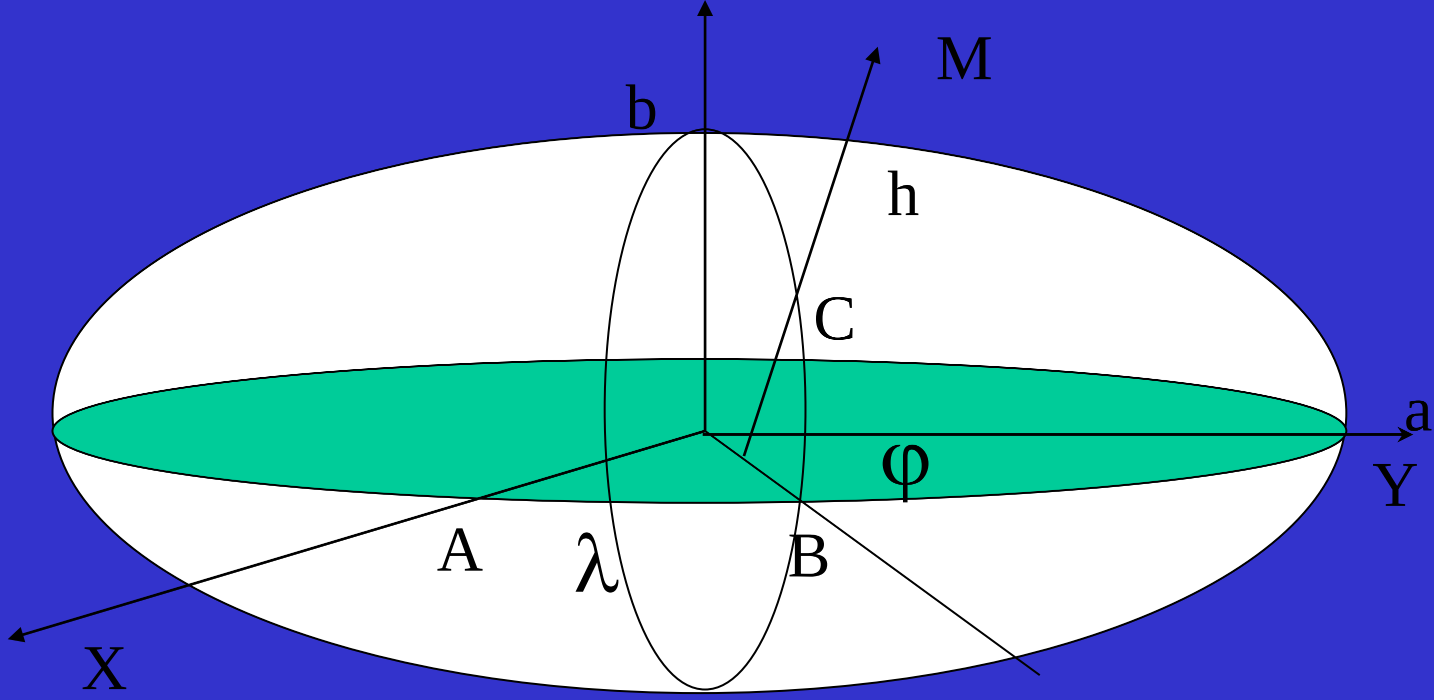


Les coordonnées les plus utilisées sont les coordonnées géodésiques (**φ,λ,h**) définies par rapport à ***un ellipsoïde de référence*** donné ayant pour origine le point *O* origine des axes du trièdre. Cet ellipsoïde représente le modèle de la Terre.

Un système géodésique ou référentiel géodésique ou datum géodésique obéit à certaines conditions à savoir :

- pas de déformation d'échelle;
- une meilleure distribution des points;
- la qualité homogène des coordonnées des points.

En général, les référentiels géodésiques nationaux ne remplissent pas toujours ces conditions.



Le système géodésique est matérialisé par l’ensemble de points géodésiques matérialisés par des bornes et autres signaux qui constituent le **Réseau Géodésique** du système en question.

L’orientation du système géodésique ou du réseau est définie par les observations d’un certain nombre d’azimuts astronomiques de directions.

La qualité métrique du système dépend des mesures de bases ou de distances mesurées.

Mise en place d'un système géodésique terrestre classique:

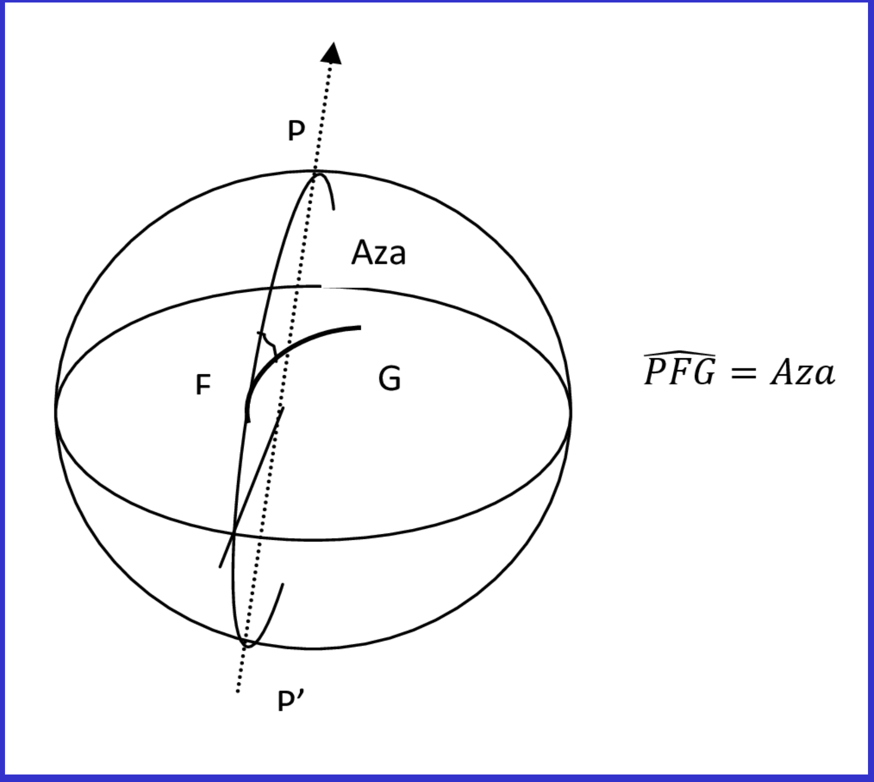
En un point donné F d'un pays, on détermine par des observations astronomiques la latitude φ_A et la longitude λ_A astronomiques. On détermine en F l'azimut astronomique d'une direction FG où G un autre point du réseau. On mesure la distance FG.

Au point F, on prend:

$$\varphi_g = \varphi_A$$

$$\lambda_g = \lambda_A$$

$$Azg = Aza$$

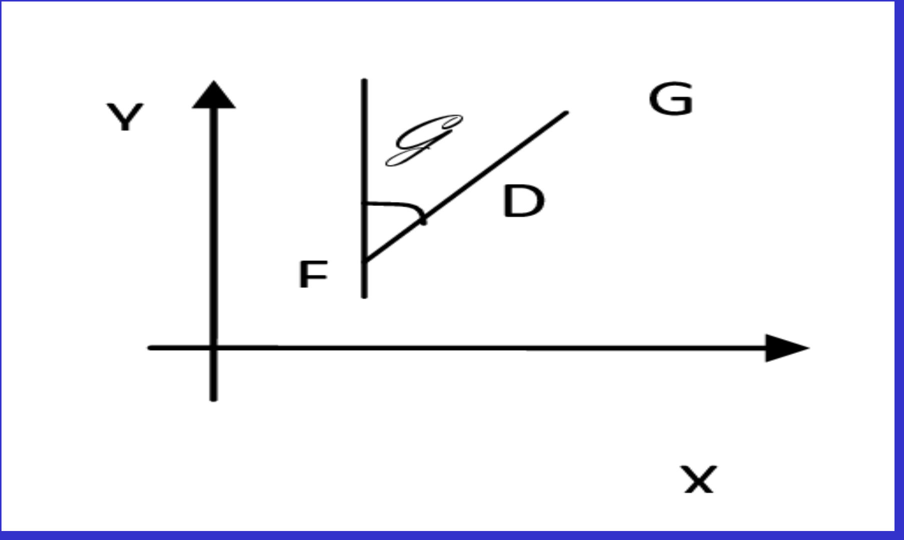


où φ_g , λ_g et Azg sont les valeurs géodésiques. On dit que le point F est le **point Fondamental du système ou du datum.**

On transforme l'azimut géodésique *Azg* en gisement $\mathcal{G}$, et on réduit la distance mesurée sur le plan de la représentation plane utilisée, on obtient la distance corrigée par suite les coordonnées du point G:

$$X_G = X_F + D.\sin\mathcal{G},$$

$$Y_G = Y_F + D.\cos\mathcal{G},$$



Pour conserver l’orientation du système ou du réseau géodésique, on observe en d’autres points des azimuts astronomiques sur des étoiles.

Ces observations vont orienter l'axe *OZ* et le plan *OXZ* du système à être respectivement parallèle à l'axe moyen de la rotation de la Terre et au méridien de Greenwich.

Pour les systèmes géodésiques classiques (terrestres), la position de l'origine est à 500 m environ du centre des masses de la Terre.

Pour les systèmes géodésiques établis par la géodésie spatiale actuelle(comme le GPS - Global Positioning System), l’origine est presque confondue avec le centre des masses de la Terre(<2 m).

Mise en place d’un système géodésique par la géodésie spatiale: le Système Global de Positionnement (GPS)

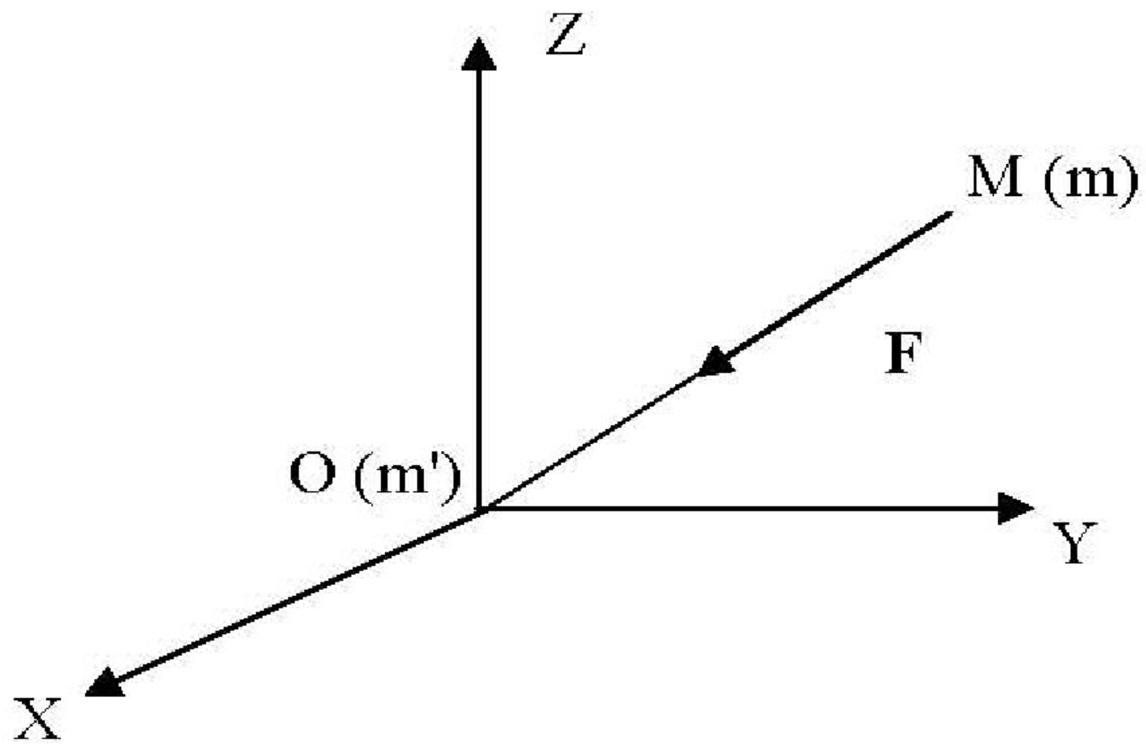
Comme en géodésie classique, on observe un point A par GPS à l’aide de récepteurs bi-fréquences pendant 72 h au minimum. On se rattache sur les points les plus proches du réseau des stations permanentes de l’IGS (International GNSS Service de l’Association Internationale de Géodésie, www.igs.org). Le Calcul définitif du point se fera par les éphémérides précises utilisant un logiciel scientifique.

Ce point sera le point de départ pour créer les points du réseau de base.

Situation des Stations GPS de l’IGS, 513 stations en date du 6 janvier 2024

Le Géoïde

Soit le repère $OXYZ$ et une masse ponctuelle m' au point O et soit un point $M(X,Y,Z)$ de masse ponctuelle m (Figure ci-dessous). Alors, le point



M est soumis à une force $\boldsymbol{F}$ due à l'attraction de la masse m' au point O. Le module de cette force est :

$$F = \frac{Gmm'}{r^2} = F\left(X,Y,Z\right)$$

où G est la constante universelle de gravitation et r est la distance OM.

Le Champ du Potentiel : On appelle champ du potentiel la fonction scalaire V définie par :

$$V = \frac{Gmm'}{r} = \frac{Gmm'}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = V\left(X, Y, Z\right)$$

Le Gradient : On appelle gradient d'une fonction scalaire $U(X, Y, Z)$ le vecteur noté $\boldsymbol{grad}U$ et de composantes :

$$\boldsymbol{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Exemple 1 : $U = X^2 + Y^2 + Z^2$, $\boldsymbol{grad}U$ est le vecteur de composantes :

$$\boldsymbol{grad}U = (2X, 2Y, 2Z)^T$$

où T désigne transposé.

Exemple 2 : $U = \frac{1}{r}$, comme $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \Rightarrow 2rdr = 2XdX + 2YdY + 2ZdZ$

$$\boldsymbol{grad}U = \left(\frac{-X}{r^3}, \frac{-Y}{r^3}, \frac{-Z}{r^3}\right)^T$$

Si on pose : $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ alors l'expression vectorielle de la force $\boldsymbol{F}$ devient :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

On calcule maintenant le gradient de la fonction scalaire $V(X, Y, Z)$ c'est-à-dire le champ du potentiel. On obtient :

$$\boldsymbol{grad}V = \boldsymbol{grad}\left(\frac{Gmm'}{r}\right) = Gmm'\boldsymbol{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -Gmm'\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

On remarque si on pose : $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\boldsymbol{n}$ est alors un vecteur unitaire porté par $\boldsymbol{OM}$ et dans la direction $\boldsymbol{OM}$

L'expression de la force $\boldsymbol{F}$ s'écrit :

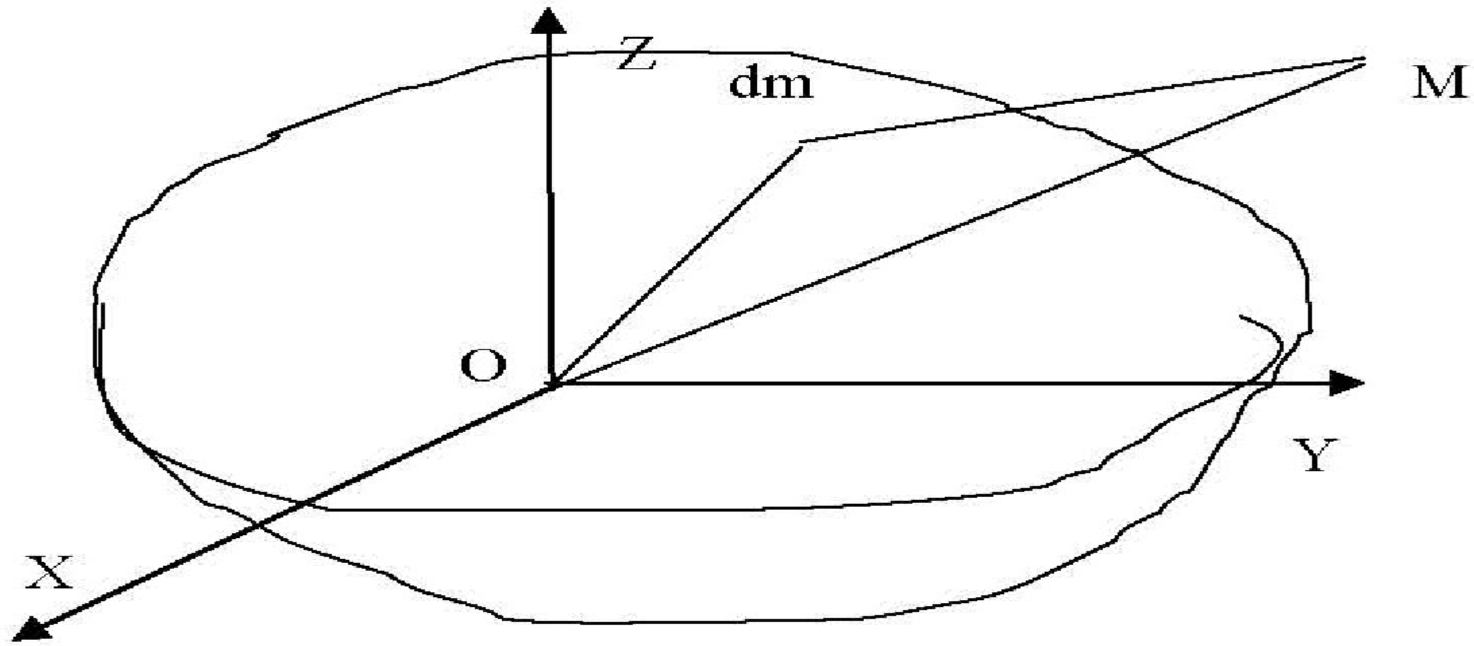
$$\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{n} = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{grad}V = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n}$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad}V}$$

On dit que la force $\boldsymbol{F}$ dérive du champ de potentiel V.



Le Champ Réel ou Champ du Potentiel de la Pesanteur : Soit le repère $OXYZ$ tel que O soit le centre de gravité de la Terre et OZ son axe de rotation. Le plan OXY contient le méridien de Greenwich (Figure ci-dessus). Un point $M(X,Y,Z)$ de masse unité est soumis au potentiel V de gravitation et au potentiel Φ de la force centrifuge due à la rotation de la Terre. L'expression de V est :

$$V = G \iiint_{Terre} \frac{dm}{r}$$

Malheureusement, cette expression n'est pas calculable, car nous ignorons la distribution des masses à l'intérieur de la Terre. L'expression du potentiel Φ de la force centrifuge est donnée par :

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\Omega^2}$$

où Ω est la vitesse de la rotation de la Terre.

Potentiel du champ réel ou potentiel de pesanteur : On appelle Potentiel du champ réel W ou potentiel de la pesanteur la somme du potentiel V et Φ :

$$\boxed{W = V + \Phi}$$

Vecteur de gravité : On appelle vecteur de gravité le vecteur $\boldsymbol{g}$ tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{g} = \boldsymbol{grad}W}$$

g mesure la gravité ou la pesanteur, a la dimension d'une accélération et exprimée en m/s^2 (Unité Système International) ou en cm/s^2 ($1cm/s^2 = 1gal$ en hommage à Galilée). g mesure 978 $gals$ à l'équateur et 983 $gals$ aux pôles.

Les surfaces $W(X, Y, Z) = W_0 = constante$, sur lesquelles le potentiel W est constant sont appelées surfaces équipotentielles ou surfaces de niveau. En différentiant le potentiel $W = W(X, Y, Z)$, on obtient : $dW = \dfrac{\partial W}{\partial x}dX + \dfrac{\partial W}{\partial y}dY + \dfrac{\partial W}{\partial z}dZ$ ou en notation vectorielle :

$$dW = \boldsymbol{grad}W.\boldsymbol{dM} = \boldsymbol{g}.\boldsymbol{dM}$$

Si $\boldsymbol{dM}$ est pris sur la surface équipotentielle $W = W_0$:

$$dW = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{g}.\boldsymbol{dM} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{g} \perp \boldsymbol{dM}$$

alors que le vecteur $\boldsymbol{g}$ est perpendiculaire à la surface équipotentielle passant par le même point.

Définition du Géoïde : Une première définition du **géoïde** est due à C.F. Gauss (*W.A. Heiskanen & H. Moritz*, 1967) :

" Ce que nous appelons dans le sens géométrique la surface de la terre ce n'est que la surface qui coupe les lignes de la pesanteur sous un angle droit et qui fait partie de la surface des océans".

Le terme géoïde fut introduit pour la première fois par Johann B. Listing (1808-1882, mathématicien prussien, élève de C.F. Gauss) en 1872 :

" *nous appellerons la surface mathématique de la terre définie précédemment la surface à laquelle les océans font partie, surface géodale de la terre ou géoïde*".

La surface des liquides et des fluides se met en équilibre perpendiculairement à la verticale. Si on considérait un ensemble fluide recouvrant toute la Terre, il définissait donc une surface de niveau de la pesanteur.

Comme par définition, une surface de niveau est normale aux lignes de forces, les surfaces de niveau ne sont pas parallèles entr'elles, c'est-à-dire que la distance entre 2 surfaces de niveau n'est pas constante, ce qui reste constant c'est le travail qu'il faut accomplir contre la pesanteur pour déplacer une masse d'un point donné de ces surfaces à un point quelconque d'une autre de celles-ci.

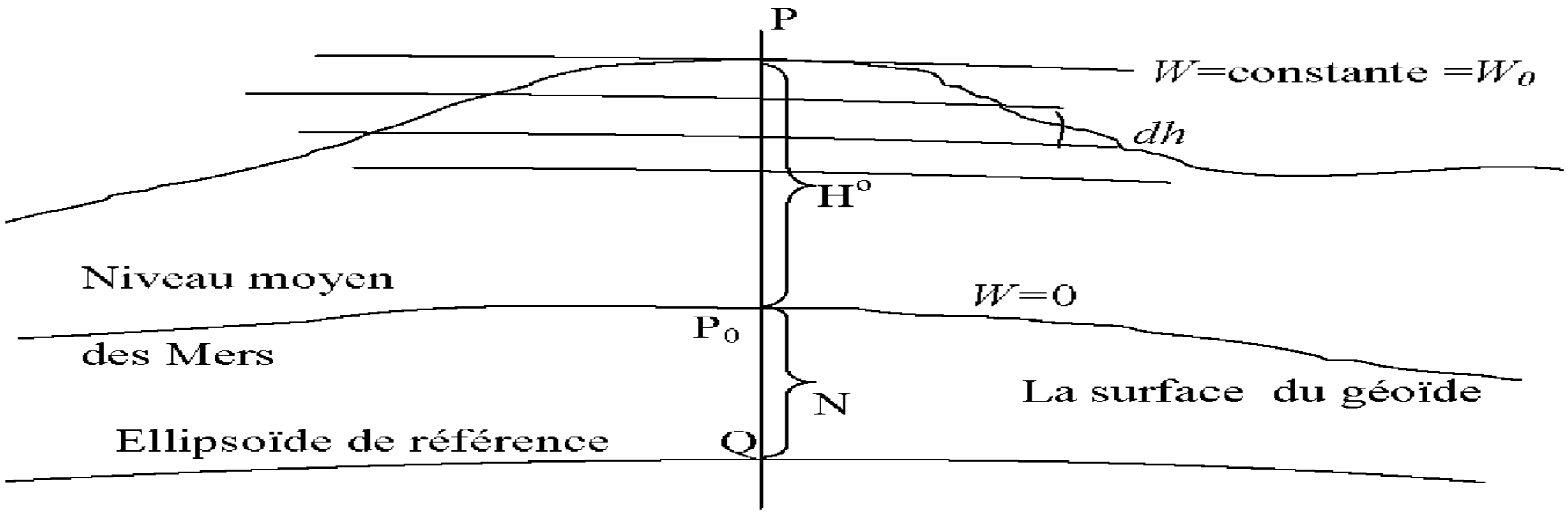


FIGURE 1 – Le géoïde

Définition : *On appelle géoïde la surface de niveau qui coïncide avec la surface moyenne des mers et qui se prolonge sous les continents par la condition d'y rester normale à toutes les lignes de forces.*
On peut donc considérer que la Terre est consituée par le géoïde, surmontée du relief dont l'altitude au dessus du niveau moyen de la mer sera par définition égale à la distance qui le sépare du géoïde. L'expérience prouve que le géoïde s'écarte très peu d'un ellipsoïde de révolution, alors nous utilisons en géodésie comme surface mathématique du géoïde celle de l'ellipsoïde de révolution.

Généralement, l'origine des réseaux du nivellement de précision est déterminée à partir des mesures du niveau moyen des mers enregistrées par un marégraphe. Alors, on a la relation suivante entre l'altitude du nivellement (H) et l'altitude ellipsoïdale (he) :

$$\boxed{he = H + N}$$

où N désigne la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence ou ondulation du géoïde (à ne pas confondre avec la grande normale).

LES DIFFERENTS SYSTEMES GEODESIQUES EN TUNISIE

Le Système Géodésique Terrestre VOIROL

- Point fondamental:point Voirol près d'Alger.
- Azimut astronomique:Voirol- Maleb El Kora (1874).
- Base de Blilda (1854).
- Ellipsoïde de référence : ellipsoïde de Clarke Français 1880.
- Origine des longitudes : méridien de Paris (longitude Paris = 2,5969 213 gr) .

Les représentations planes utilisées:

- Bonne (cartographie),
- Fuseaux : foncier,
- Lambert: Cartographie. Géodésie, foncier.

Le Système CARTHAGE34

- Point fondamental: point Carthage à Carthage.
- Azimut astronomique: Carthage- Bir Bou Regba (1876), Aza = 164.2486 gr.
- Bases de Tunis (8217 m) et de Médnine (10157 m) mesurées avec la règle invar.
- Ellipsoïde de référence : ellipsoïde de Clarke Français 1880.

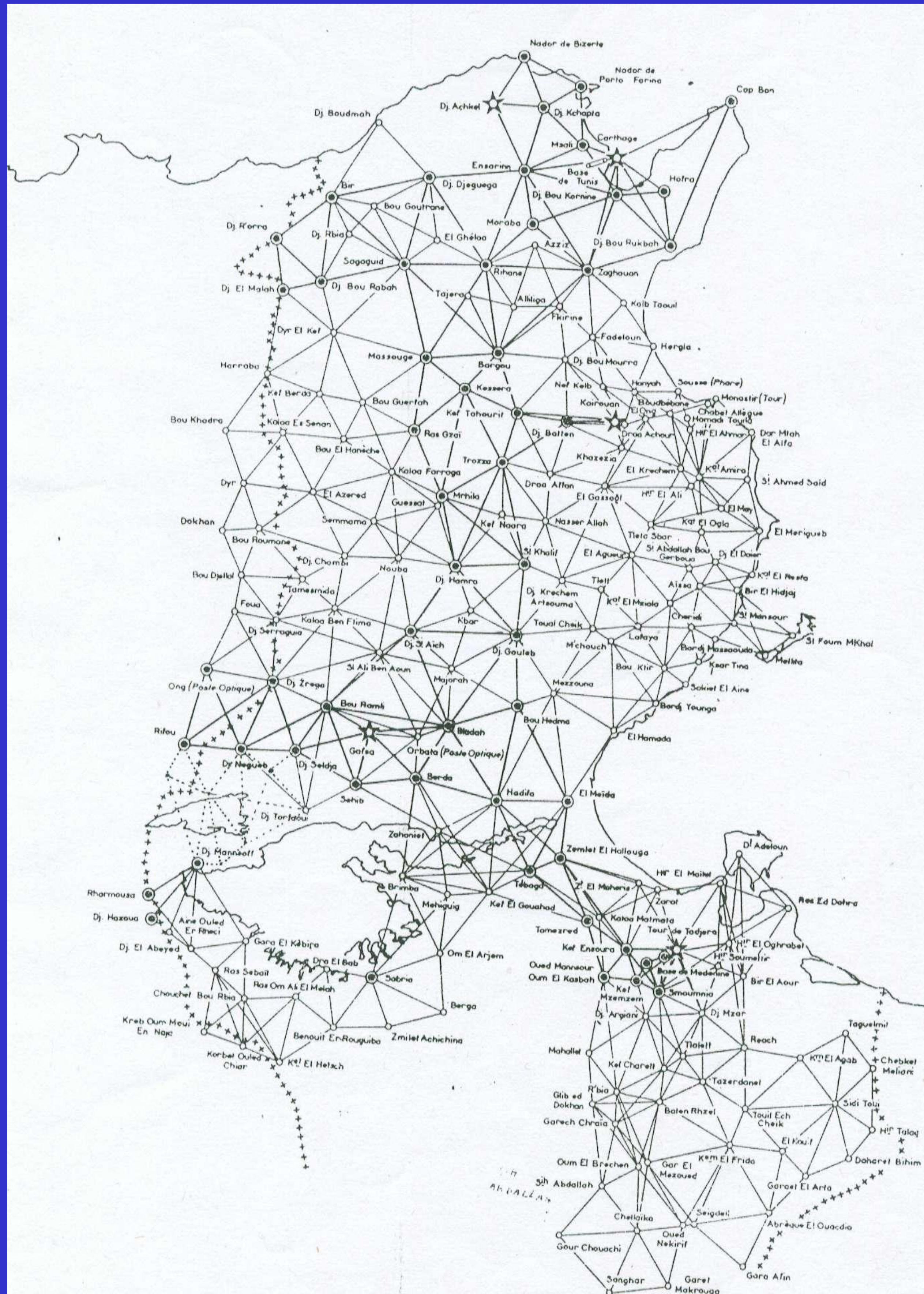
Les calculs des points géodésiques ont été achevés en 1934.

Les représentations planes utilisées:

- Lambert: cartographie, foncier.
- UTM: cartographie.

- La structure géodésique de Carthage34 jusqu’à 1978 était comme suit :

- un réseau géodésique dit du 1er ordre,
- un réseau géodésique du 1er ordre complémentaire,
- un réseau géodésique du 2ème ordre,
- un réseau géodésique du 2ème ordre complémentaire,
- un réseau de détail,
- un canevas de points astronomiques au sud (Sahara) observé en 1972 pour le besoin de la carte 1/200000 du sud tunisien.



Nador de Bizerte
Nador de Porto Farina
Cap Bon
Dj. Achkel
Dj. Kchapta
Dj. Boudmah
Msali
Carthage
Ensarinn
Base de Tunis
Hofra
Bir
Dj. Djeguega
Dj. Bou Kornine
Bou Goutrane
Dj. R'orra
Dj. Rbia
El Ghéloa
Moraba
Azziz
Dj. Bou Rukbah
Sagaguid
Rihane
Zaghouan
Dj. El Malah
Dj. Bou Rabah
Tajera
Alikiga
Fkirine
Kalb Taouil
Dyr El Kef
Fadeloun
Hergla
Harraba
Massouge
Borgou
Dj. Bou Mourra
Kessera
Nef Kelb
Hanyah
Sousse (Phare)
Kef Beras
Bou Guertah
Kairouan
Boudbebane
Monastir (Tour)
Kef Tahourit
Chabet Allègue
Bou Khadra
Kalaa Es Senan
Ras Gzei
Dj. Batten
Draa Achour
Dar Mtah El Alfa
Bou El Haneche
Khazezia
Trozza
Kalaa Farroga
El Krechem
S! Ahmed Said
Dyr
El Azered
Mrhila
Draa Affan
El Gassaâl
El May
Guessat
Dokhan
Semmama
Kef Naara
Nasser Allah
Tleta Sbar
El Merigueb
Bou Roumane
Dj. Chambi
S! Khalif
El Agueur
Bou Djellal
Tamesmida
Nouba
Dj. Hamra
Tlelt
Aissa
Bir El Hidjaj
Dj. Krechem Arteouma
Foua
Kalaa Ben Flima
Kbar
Toual Cheik
Cheriek
S! Mansour
Dj. Serraguia
Dj. S! Aich
M'chouch
Lafaya
S! Foum MKhal
S! Ali Ben Aoun
Dj. Gouleb
Bordj Massaouda
Mellita
Bou Khir
Kasr Tina
Majorah
Ong (Poste Optique)
Dj. Zrega
Mezzouna
Sakiet El Aine
Bou Ramli
Bordj Younga
Bou Hedma
Rifou
Bladah
El Hamada
Gafsa
Orbata (Poste Optique)
Dj. Neguèb
Dj. Seldja
Berda
Sehib
Hadifa
El Meida
Dj. Tarfaoui
Zahoniet
Zemlet El Hallouga
D! Adeloun
Dj. Mannsoff
Rharmousa
Brimba
Tebaga
Dj. Hazoua
Aine Ouled Er Rheci
Mehiguig
Kef El Geuahad
Zarat
Ras Ed Dahra
Kalaa Matmata
Tamezred
Tour de Tadjera
Gara El Kébira
Dj. El Abeyed
Kef Ensoura
Ras Sebail
Dra El Bab
Om El Arjem
Oued Mannsour
Oum El Kasbah
Base de Medenine
Bir El Aour
Ras Om Ali El Melah
Sabria
Kef Mzemzem
Smoumnia
Chouchet
Bou Rbia
Berga
Dj. Argiani
Dj. Mzar
Kreb Oum Meui En Naja
Benouit En Rouguiba
Zmilet Achichina
Taguelmit
Reach
Mahallel
Tlaleft
Korbet Ouled Chiar
Kef Charett
Chebket Meliane
Tazerdanet
R'bia
Glib ed Dokhan
Baten Rhzel
Touil Ech Cheik
Sidi Toui
Garech Chraia
El Kouif
Oum El Brechen
Gar El Mezoued
Doharet Bihim
Goraet El Arta
Seigdell
Chelgaka
Abrêque El Ouacdia
Gour Chouachi
Oued Nekirif
Sanghar
Garet Makrouga
Gara Afin

MISSION ASTRONOMIQUE AU SUD

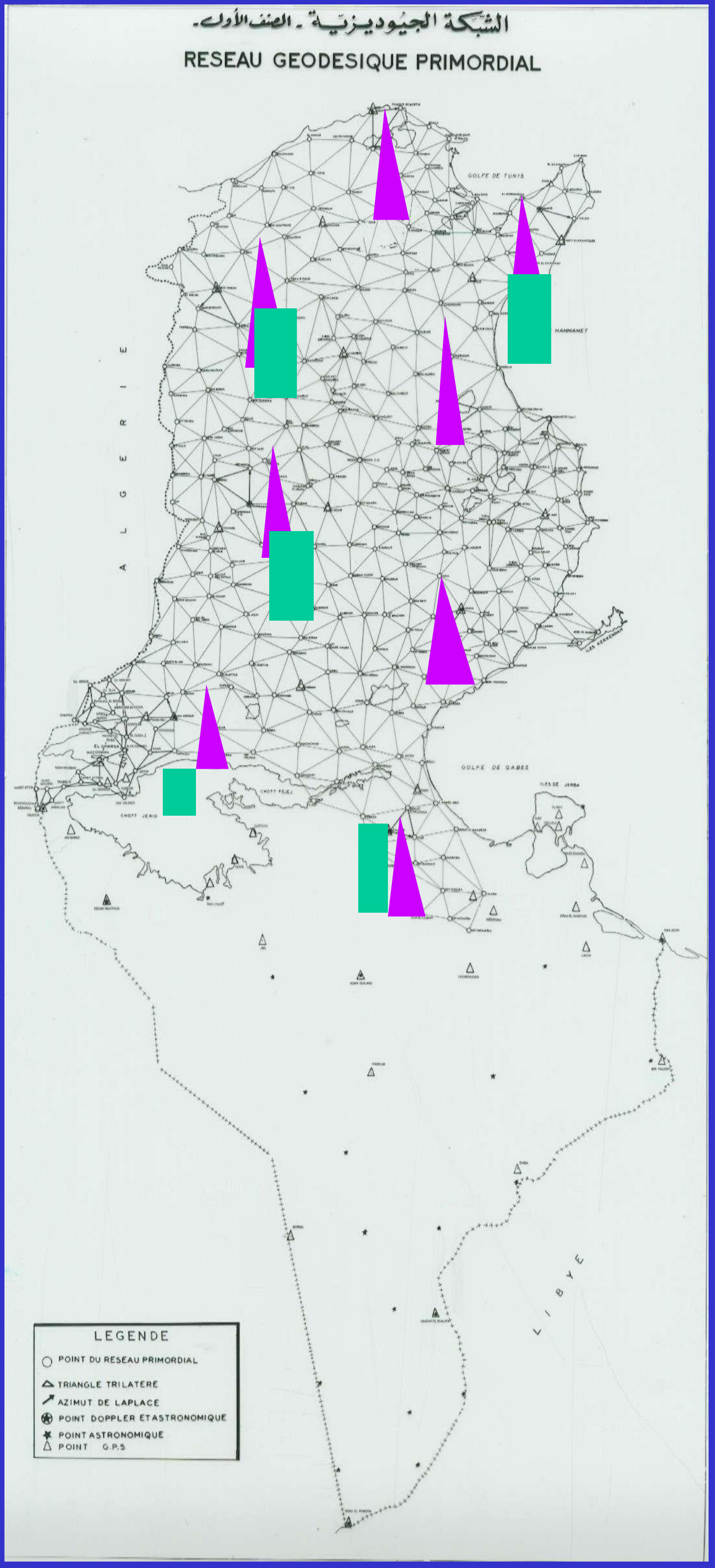
Travaux de Modernisation de la Géodésie Tunisienne 1978-1984:

- Ellipsoïde de référence Clarke F. 1880.
- Nouvelles observations angulaires + les anciennes observations angulaires pour les anciens points conservés (avant 1978).
- Mesures de 8 points de Laplace (latitude, longitude et azimut astronomiques) et de 24 distances dans 8 triangles.

- Fixation de 5 points anciens (observés par Doppler) avec un écart-type de 0.50 m.

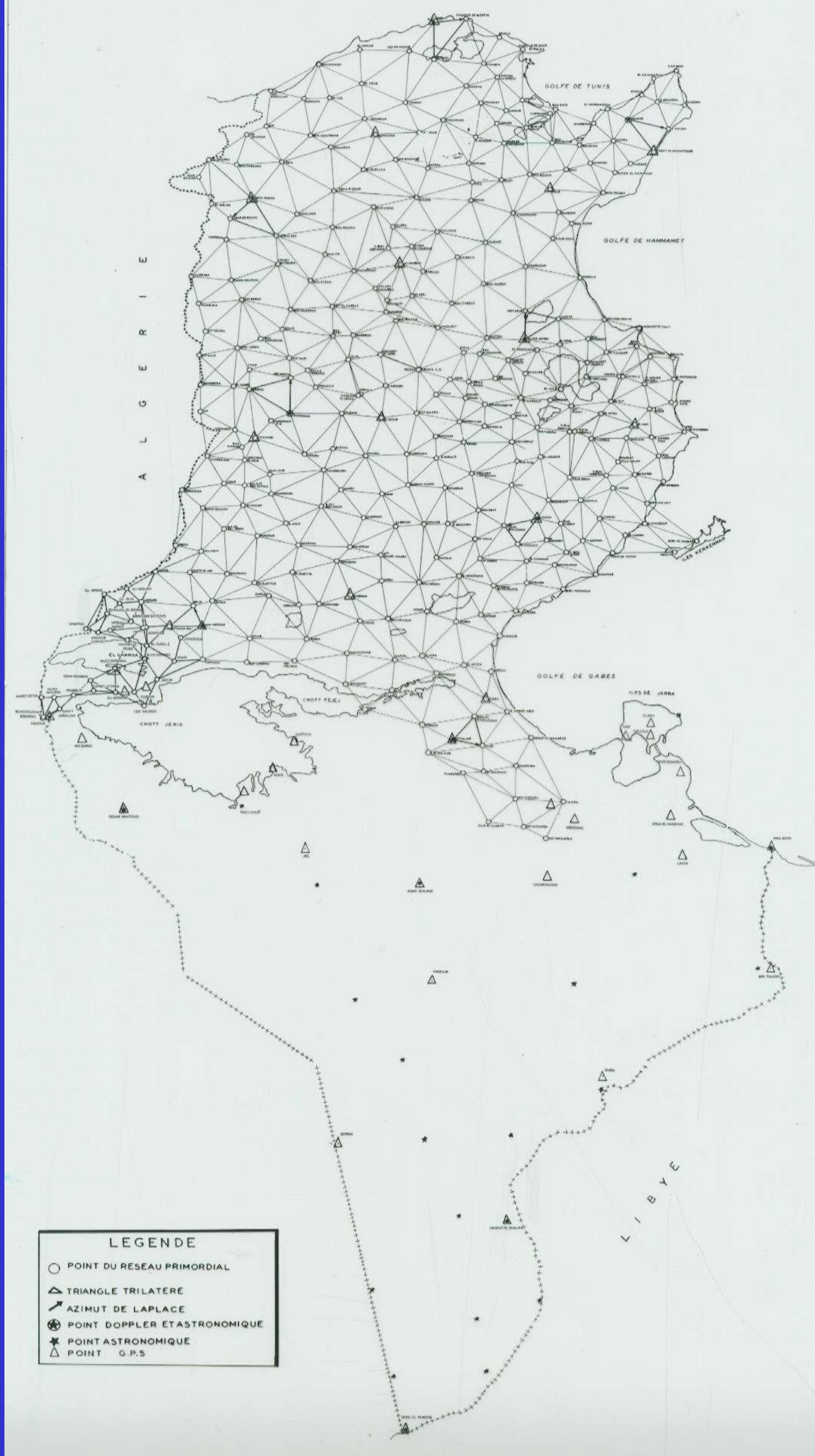
- Compensation globale par la méthode des moindres carrés (312 points).

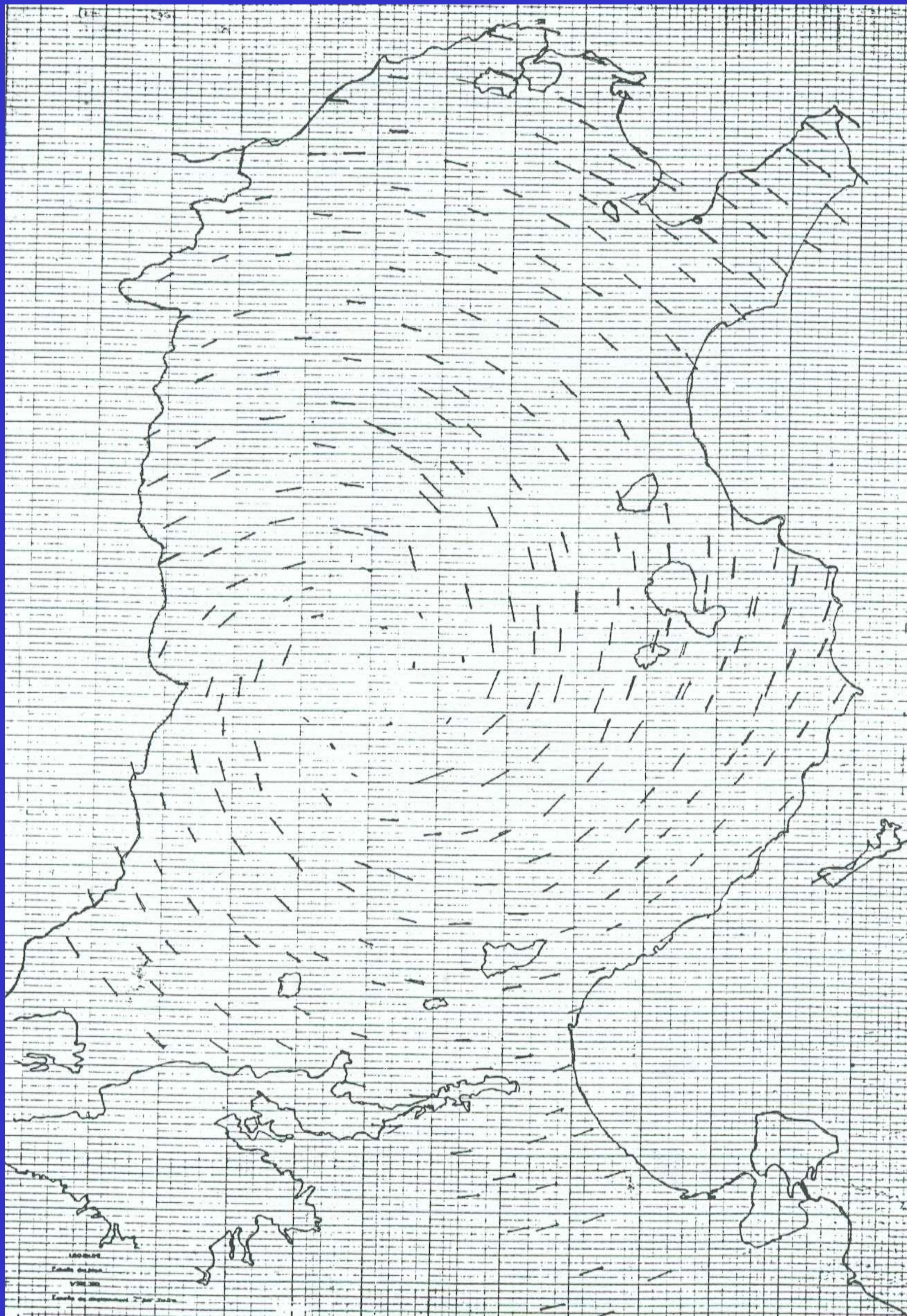
On a obtenu de nouvelles coordonnées qui ont constitué un nouveau système géodésique nommé **CALCUL84**.



الشبكة الجيوديزية - الصنف الأول -

RESEAU GEODESIQUE PRIMORDIAL





Déplacements entre Carthage34 et Calcul84

En comparant les anciennes coordonnées avec les nouvelles, il y décalage variant de zéro une dizaine de mètres. C’est une rotation dans le sens des gisements d’environ 28 dmgr.

Le Calcul 1986

Faute de l'application du Calcul84, et pour tenir compte des travaux géodésiques exécutés, un nouveau calcul a été effectué en 1986 reposant sur :

- l'introduction des coordonnées Carthage34 des points anciens conservés,

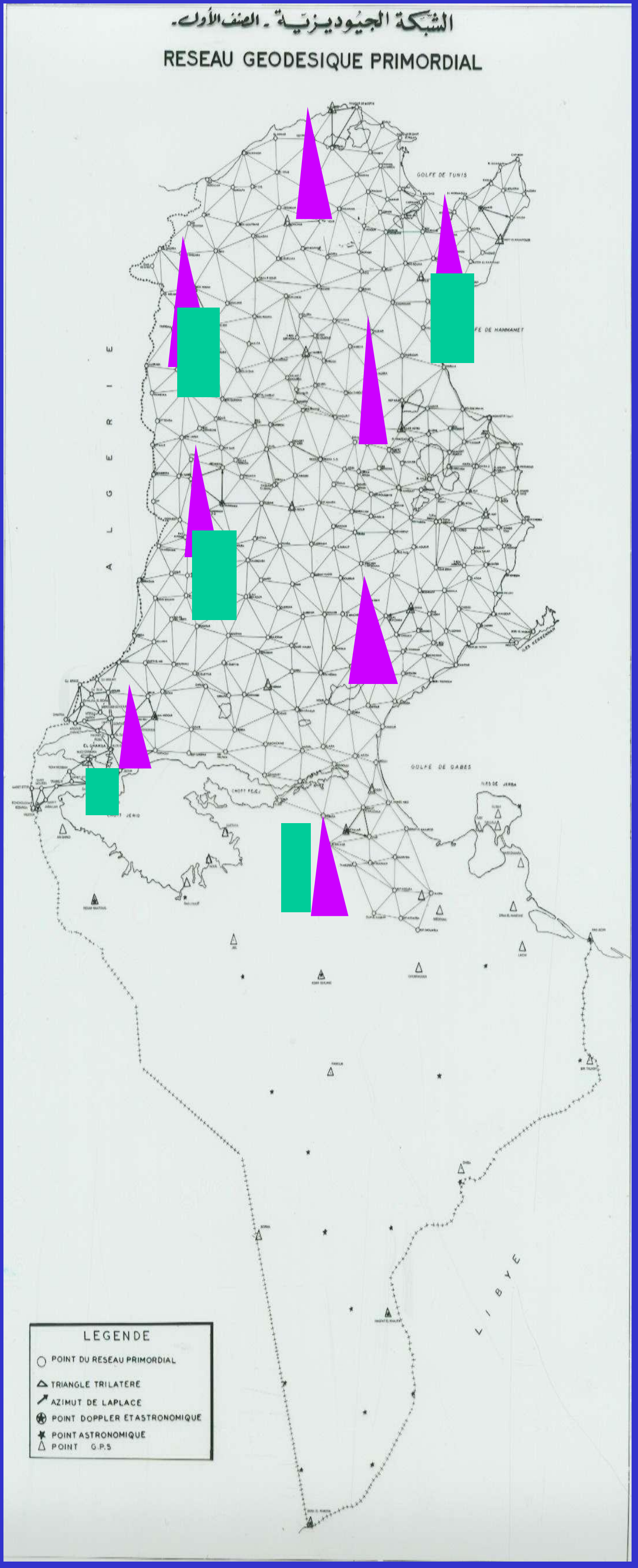
- Calcul en 3 blocs par les moindres carrés en utilisant les observations de 1984 sans les nouveaux azimuts astronomiques, ni les distances mesurées

- Ellipsoïde de Clarke Français 1880.

Résultat : coordonnées voisines à celles de Carthage34 sans aucune homogéinité (calcul en 3 blocs, absence d'accords en azimuts et en distances).

Les Caractéristiques de la NTT

- Ellipsoïde de référence Clarke 1880.
- Nouvelles observations angulaires + les anciennes observations angulaires des anciens points conservés (avant 1978).
- Mesures de 8 points de Laplace (latitude, longitude et azimut astronomiques) et de 24 distances dans 8 triangles.



- Fixation des coordonnées de 5 points anciens (observés par Doppler) avec un écart-type de 0.50 m.

- Compensation globale par les moindres carrés (312 points).

Le Nouveau Système Géodésique Terrestre Tunisien

La commission permanente technique de la géodésie de l'OTC a proposé, après études et différents tests effectués sur des parcelles choisies au nord, centre et au sud, le système géodésique issu des calculs 1984 comme nouveau système géodésique terrestre tunisien appelé ‘’ **NTT- la Nouvelle Triangulation Tunisienne**’’.

L’Arrêté du 10 Février 2009

<u>L’arrêté du ministre de la Défense nationale du 10 février 2009</u>, paru dans le Journal Officiel de la République Tunisienne n° 14 du 17 février 2009, a fixé:

1. Le système national de référence unifié de la géodésie.

2. Le système national de référence de la projection cartographique: c’est la représentation plane UTM avec les caractéristiques suivantes:
   - ellipsoïde de référence : ellipsoïde Clarke Français 1880,
   - Fuseau n°32, soit λ_0=9° Est de Greenwich,
   - coefficient de réduction: k=0.9996.

3. Le système national de référence du nivellement.

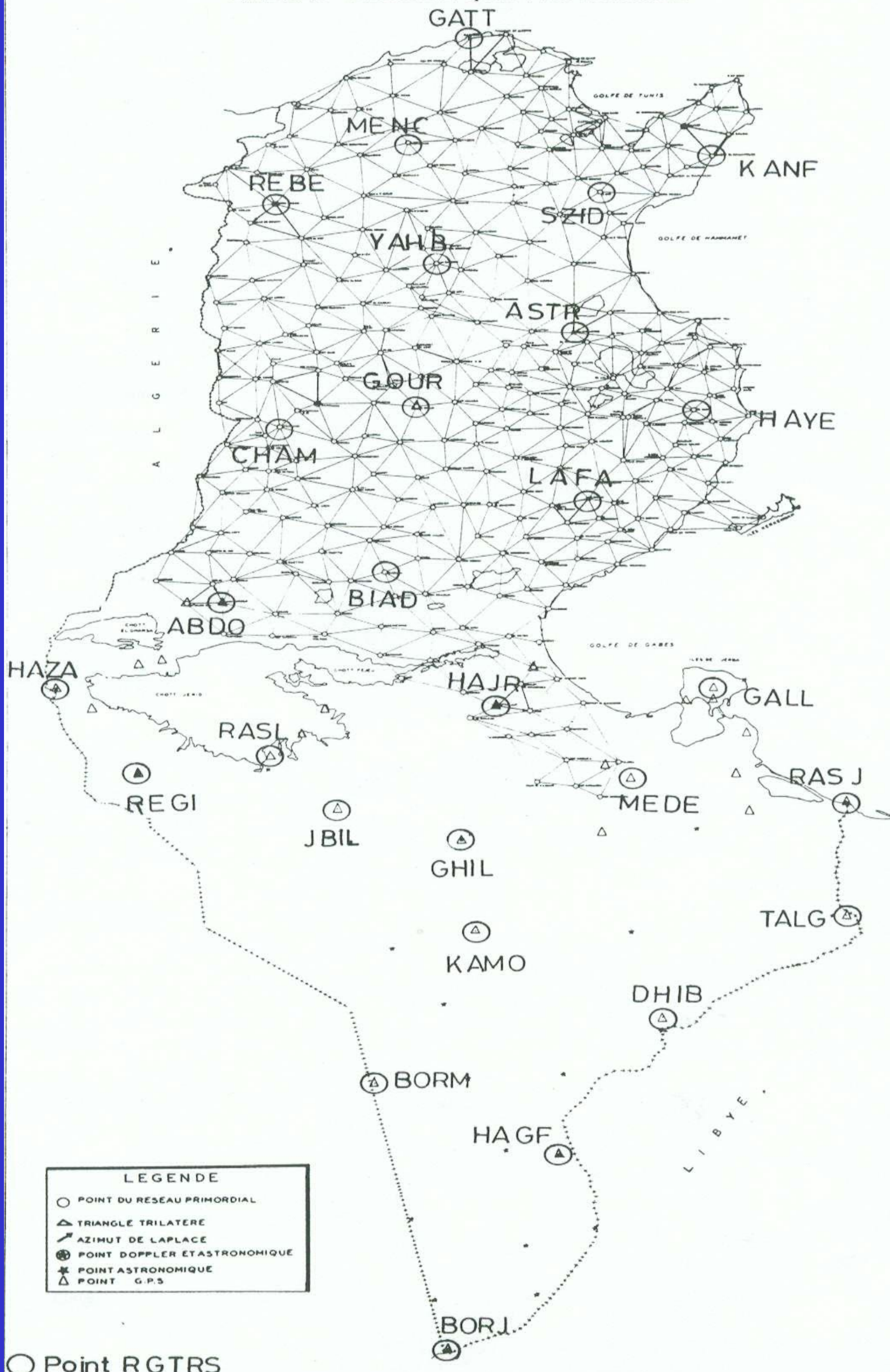
Le Réseau GPS Tunisien de Référence Spatiale (RGTRS)

Ce Réseau est constitué de 28 points du RGP et de nouveaux points au sud (sahara):

- observé en 1998 de août - décembre, avec 4 récepteurs GPS bi-fréquences de type Aschtec,
- durée minimum 72 heures.
- Les coordonnées des 28 points sont exprimées dans le système spatial WGS84 avec ellipsoïde de référence l'ellipsoïde GRS80.

الشبكة الجيوديزية - الصنف الأول

RESEAU GEODESIQUE PRIMORDIAL



Les différents ellipsoïdes géodésiques

Nom de l'Ellipsoïde	Demi-grand axe Demi-petit axe	$1/f$	e^2	Paramètres de définition
Clarke Français 1880	6 378 249.200 6 356 515.000	293.46602	0.0068034877	a, b
Clarke Anglais 1880	6 378 249.145 6 356 514.8696	293.46500	0.00680351128	$a, 1/f$
Hayford 1909 ou International 1924	6 378 388.000 6 356 911.940	297.00000	0.0067226700	a $1/f$
Krassovsky[7]	6 378 245.000 6 356 863.0188	298.30000	0.00669342162	$a, 1/f$
GRS 1967 (AIG)	6 378 160.000 6 356 774.516	298.24717	0.0066946053	a, e^2
NWL 8	6 378 145.000 6 356 759.770	298.25000	0.0066945419	$a, 1/f$
WGS72	6 378 135.000 6 356 750.520	298.26000	0.0066943178	$a, 1/f$
AIG 1975	6 378 140.000 6 356 755.288	298.25700	0.0066943850	$a, 1/f$
APL Navigation	6 378 144.000 6 356 757.339	298.23000	0.0066949901	$a, 1/f$
GRS80 (AIG)	6 378 137.000 6 356 752.3141	298.257222101	0.0066943800229	a, b
WGS84	6 378 137.000 6 356 752.3142	298.257223563	0.0066943799	$a, 1/f$

F- Les Représentations Planes

Introduction

Le géodésien par le moyen des représentations planes appelées incorrectement projections, donne une représentation du modèle terrestre (sphère ou ellipsoïde) sur le plan où il est plus facile d'effectuer les calculs d'angles, de distances et de gisements.

On va établir une correspondance entre les points d'une surface modèle σ et les points d'une surface image Σ, dans le cas particulier où :

- la surface σ est sphérique ou ellipsoïdique,
- la surface Σ est plane.

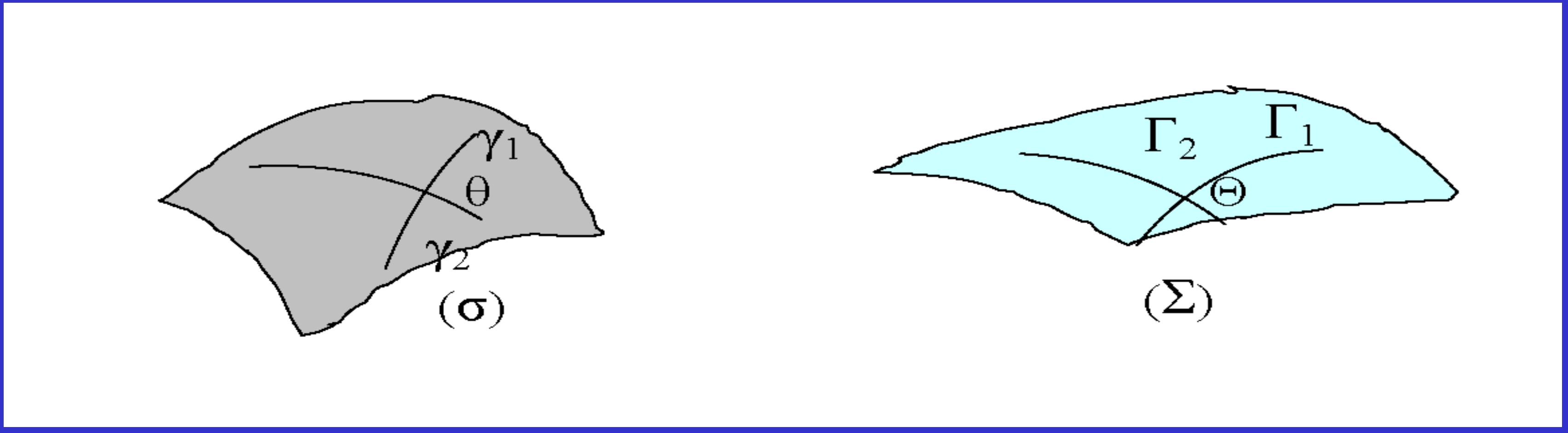
Eléments correspondants

Représenter la surface *(σ)* sur *(Σ)* consiste à définir une bijection *B* de $\sigma \Rightarrow \Sigma$: à $m(u,v) \in (\sigma) \Rightarrow M(U,V) \in (\Sigma)$

avec : $U = U(u,v)$, $V = V(u,v)$ et $\mathbf{O'M} = B(\mathbf{om})$.

Les points *m(u,v)* et *M(U,V)* sont appelés points correspondants.

Si le point *m* décrit une courbe (γ_1) sur (σ), son image *M* décrit une courbe (Γ_1), on dit que les courbes (γ_1) et (Γ_1) sont dites courbes correspondantes.



Les angles θ et Θ sont dits angles correspondants.

Courbes coordonnées: les courbes *u= constante*, *v= constante* sont les courbes coordonnées sur la surface modèle *(σ)*. De même, les courbes *U=cte*, *V=Cte* sont les courbes coordonnées de l'image *(Γ)*.

L'Altération Angulaire: On appelle altération angulaire la différence des deux angles correspondants soit :

$$\Theta - \theta$$

Le Module Linéaire dans une direction δ: Soit δ la direction de la tangente en un point donné *m* du modèle (σ), *s* et *S* les abscisses curvilignes sur les 2 courbes correspondantes de *(σ)* et *(Σ)*.

Définition: On appelle module linéaire dans la direction δ le rapport :

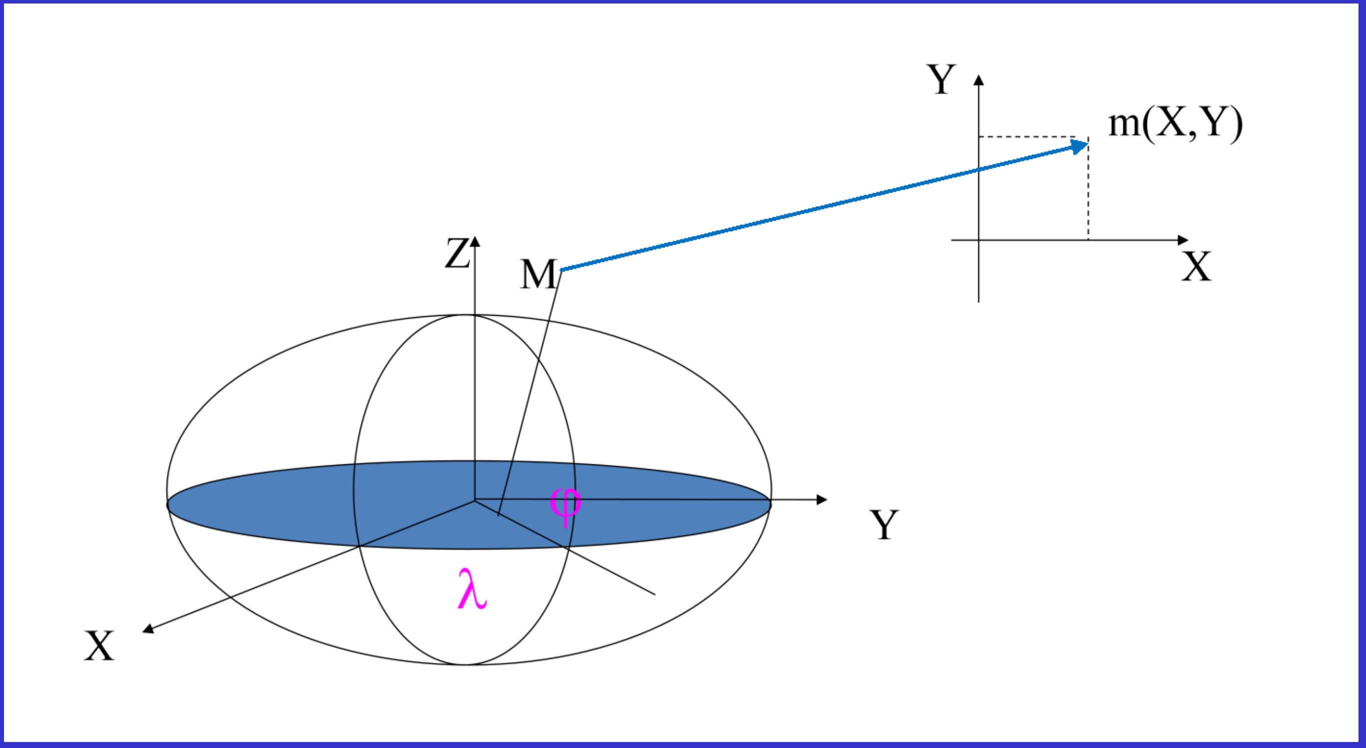
$$\boxed{m_\delta(u,v) = \frac{dS}{ds} = \frac{\|\boldsymbol{dM}(U,V)\|}{\|\boldsymbol{dm}(u,v)\|} = \sqrt{\frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}}}$$

Définition: On appelle altération linéaire dans la direction δ la quantité sans unité:

$$\boxed{\epsilon = m_\delta - 1}$$

Définition de la représentation plane

A un point M sur l'ellipsoïde de référence, on lui associe son image le point m(X,Y) sur le plan:



Nous avons l'application :

$$M(\varphi,\lambda) ====\Rightarrow m\,(X,Y) : X = X\,(\varphi,\lambda)$$
$$Y=Y(\varphi,\lambda),$$

avec $X(\varphi,\lambda)$, $Y(\varphi,\lambda)$ sont fonctions lisses des variables φ et λ.

Application:

On considère la représentation suivante de la sphère de rayon R sur le plan:

à $m(\varphi,\lambda)$ sur la sphère $\Rightarrow$ $M(X,Y)$ sur le plan tel que:

$$X = X(\varphi,\lambda) = R.\lambda,$$

$$Y = Y(\varphi,\lambda) = \mathrm{Logtg}(\pi/4+\varphi/2).$$

1. Quels sont les courbes coordonnées sur la sphère.
2. Calculer le module linéaire.

Les Représentations Planes en Tunisie

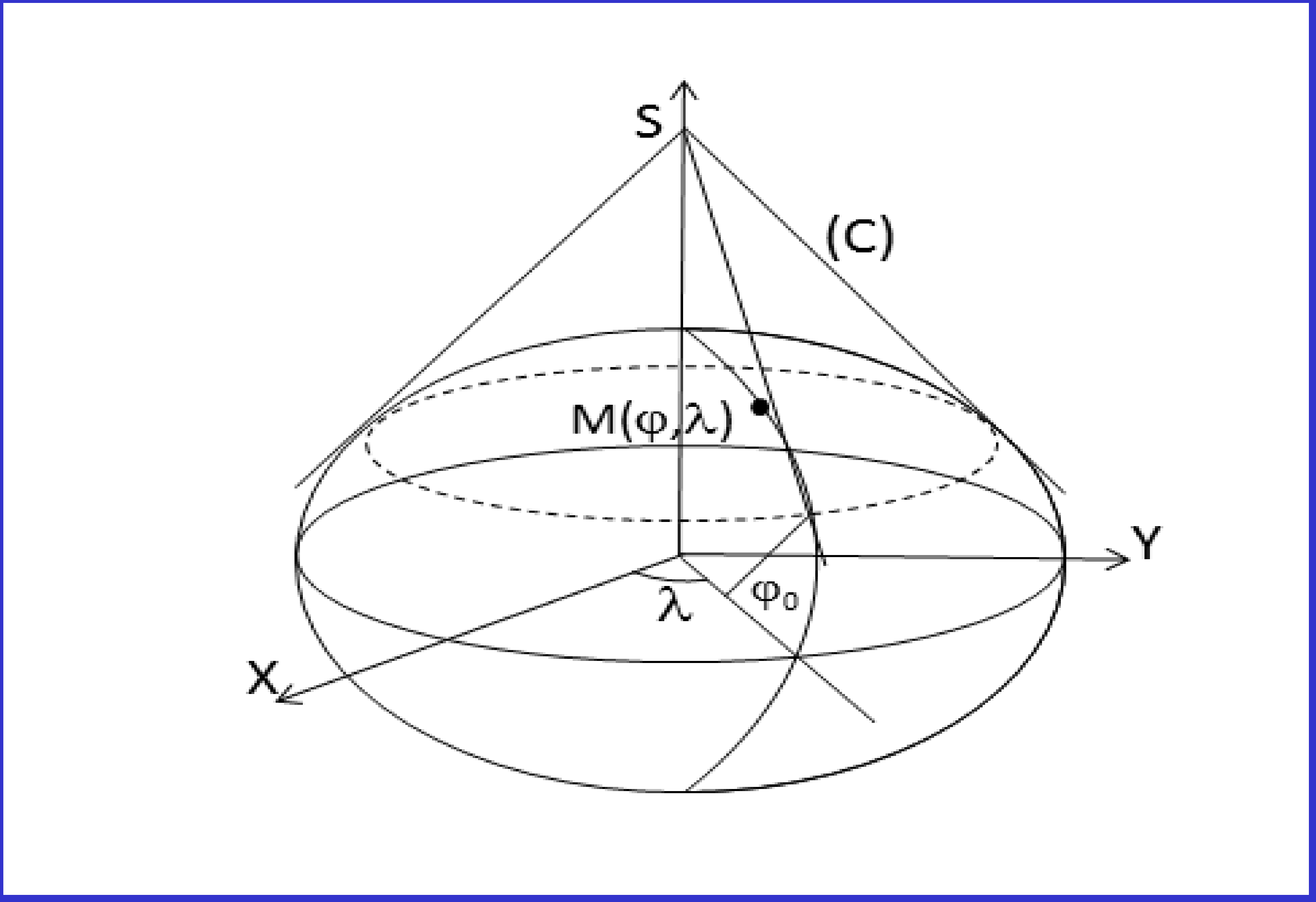
La représentation plane Lambert Tunisie

Définition et Propriétés:

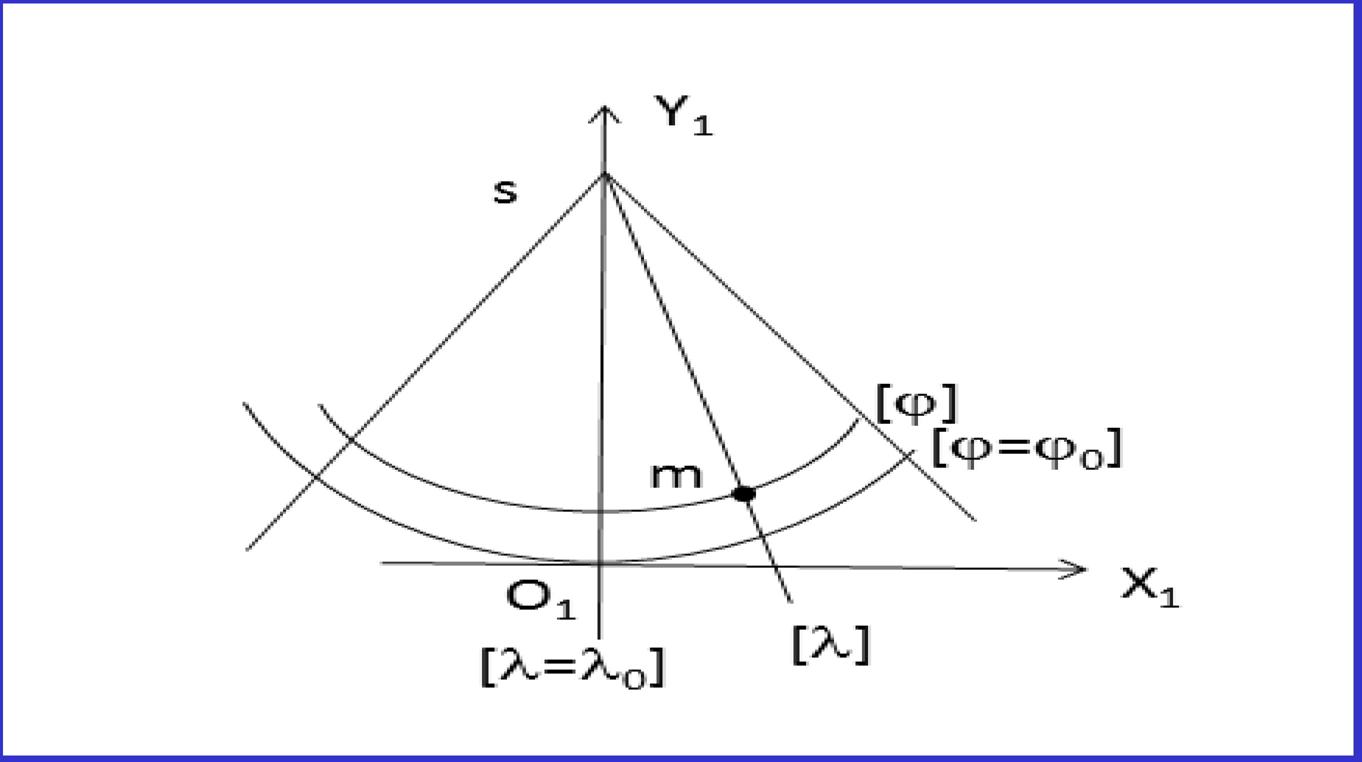
La représentation plane Lambert est une représentation conique, conforme et directe d'un modèle ellipsoïdique :

- conique : on utilise les coordonnées polaires (R,Ω),
- conforme : conservation des angles ou l'altération angulaire est nulle,
- directe : les coordonnées polaires sont des fonctions de la forme :
- $R = R(\varphi)$,
- $\Omega = \Omega(\lambda)$,

où (φ, λ) sont les coordonnées d'un point sur le modèle ellipsoïdique.



- Les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques, celles des méridiens sont des droites concordantes.



- Afin d'éviter les déformations trop importantes, la représentation Lambert Nord Tunisie a été adoptée pour la partie Nord du pays (latitude comprise entre 37.5 gr et 42.5 gr) et la représentation Lambert Sud Tunisie a été adoptée pour la partie sud (latitude comprise entre 34.5 gr et 39.5 gr).

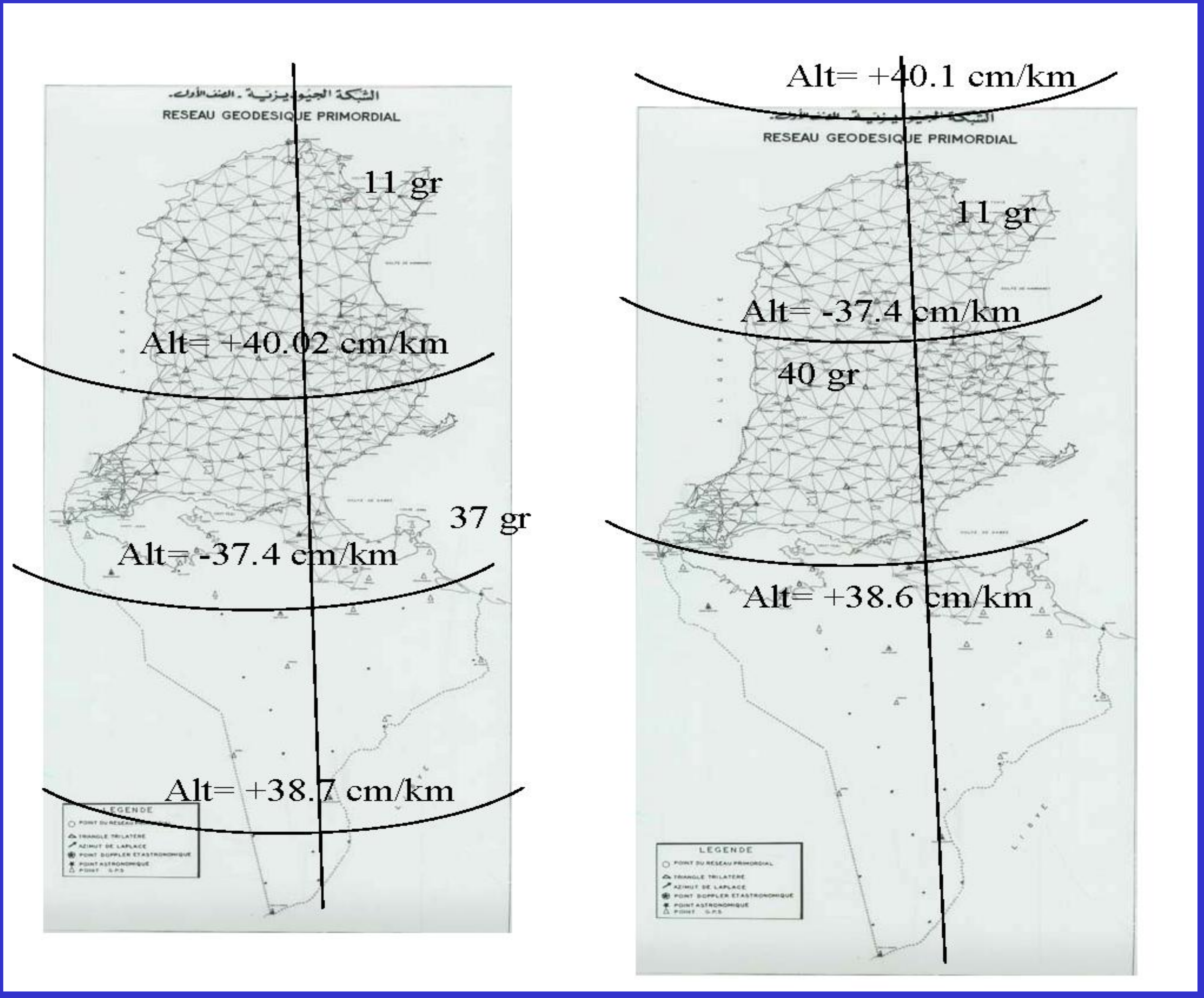
Les Eléments de définition du Lambert Nord Tunisie:

- Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français (a= 6378249.200 m, b = 6356515.000 m et e^2 = 0.0068034877).
- Latitude parallèle origine = φ_0 = 40 gr = 36°.
- Longitude méridien origine = λ_0 = 11 gr Est Greenwich = 9°54'.
- Facteur d'échelle =k_N= 0.999 625 544.
- Constante translation X = 500 000.00 m.
- Constante translation Y = 300 000.00 m.
- Amplitude de la latitude = 37.5 gr < φ < 42.5 gr.

Les Eléments de définition du Lambert Sud Tunisie:

- Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français (a= 6378249.200 m, b = 6356515.000 m et e^2 = 0.0068034877).
- Latitude parallèle origine = φ_0 = 37 gr = 33°18'.
- Longitude méridien origine = λ_0 = 11 gr Est Greenwich = 9°54'.
- Facteur d'échelle =k_S= 0.999 625 769.
- Constante translation X = 500 000.00 m.
- Constante translation Y = 300 000.00 m.
- Amplitude de la latitude = 34.5 gr < φ < 39.5 gr.

Valeurs de l'altération linéaire



La représentation plane UTM

Définition et Propriétés:

La représentation plane UTM (Universal Transverse Mercator) est l'une des représentations la plus utilisée dans le monde. Elle est la représentation officielle en Tunisie.

C'est une représentation :

- conforme d'un modèle ellipsoïdique,
- transverse : c'est-à-dire l'image de l'équateur (en partie) est l'axe OX (vers l'Est) et l'image d'un méridien appelé méridien central, de longitude que nous supposons égale à 0, est l'axe OY (vers le Nord) du plan.

Les coordonnées rectangulaires (X,Y) d'un point sont des fonctions de la forme :

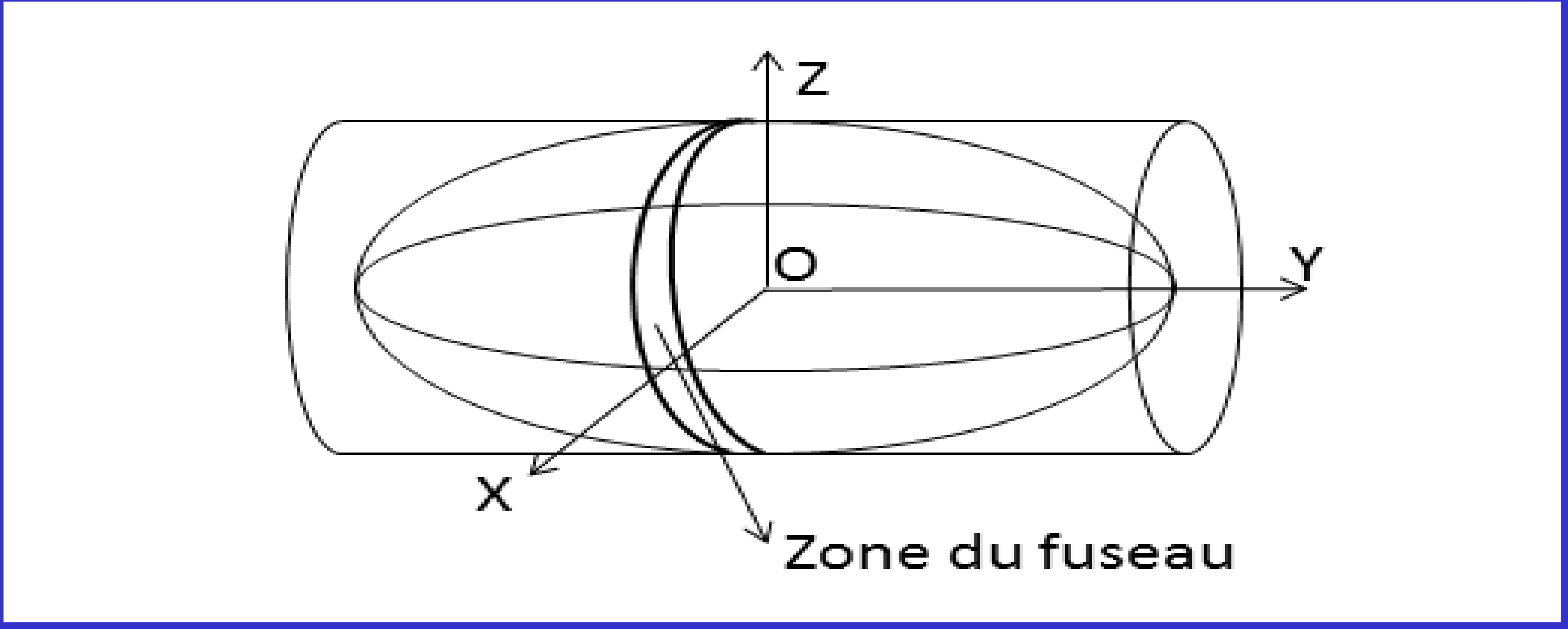
$$X=X(\varphi, \lambda),$$

$$Y=Y(\varphi, \lambda),$$

où (φ, λ) sont les coordonnées du point sur le modèle ellipsoïdique.

Propriétés:

Dans la représentation UTM, on restreint λ à varier dans l'intervalle [-3°,+3°]. Cet intervalle définit un fuseau de méridien central $\lambda_0=0°$ et d'amplitude 6°. Ainsi, la Terre est divisé en 360°/6°= **60** fuseaux qu'on numérote de 1 à 60 ce qui explique l'utilisation mondialement de la représentation UTM. Une interprétation géométrique de la représentation UTM est comme suit:



Formules directes:

Nous donnons les formules directes sans démonstration:

On pose :

$$\Lambda = \lambda - \lambda_0 \tag{11.14}$$

alors les formules définitives du calcul direct sont en s'arrêtant à l'ordre 8 :

$$\boxed{\begin{aligned} X &= a_1\Lambda - a_3\Lambda^3 + a_5\Lambda^5 - a_7\Lambda^7 \\ Y &= \beta(\varphi) - a_2\Lambda^2 + a_4\Lambda^4 - a_6\Lambda^6 + a_8\Lambda^8 \end{aligned}} \tag{11.15}$$

En général, on applique à X, Y un facteur de réduction $k = 0.9996$ et une constante de translation en X de $500\,000\,m$, les coordonnées obtenues sont :

$$\boxed{\begin{aligned} X' &= k.X + 500\,000.00\,\mathrm{m} \\ Y' &= k.Y \end{aligned}} \tag{11.16}$$

Les coefficients a_i (i=1,8) et β sont des fonctions de la latitude géodésique φ. L'angle Λ est exprimé en rd.

Avantages de la représentation UTM

Avec la représentation plane UTM, tout le pays se trouve à l'intérieur du fuseau n°32 de méridien central $\lambda_0 = 9°$ Est de Greenwich. Elle fournit donc un seul couple de coordonnées pour tout point du territoire tunisien.

Bibliographie:

Abdelmajid BEN HADJ SALEM. *2017. Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens, publié par Nour-Publishing, 365 pages. ISBN - 13 : 978-3-330-96843-1 (lien:https //www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-desmoindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1). Une première version était publiée en 2015 au site: https ://vixra.org/pdf/1511.0131v1.pdf, 390 pages.*

W.A. Heiskanen & H. Moritz. *1967. Physical Geodesy. Freeman, San Francisco.*

C. Fezzani. *1979. Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 314p.*

MERCI DE VOTRE ATTENTION