# Transcendance des factorielles de Carlitz-Goss aux places finies

David Adam

Tahiti, France.

Contributing authors: david.adam.tahiti@outlook.fr;

**Résumé**

Dans cette article, nous caractérisons les monômes en les valeurs de la factorielle de Carlitz-Goss définie sur le complété de $\mathbb{F}_q(T)$ en une place finie qui sont algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$. En particulier, cela confirme la conjecture de Wen-Yao énoncée en 2003 . Celle-ci donne une condition necessaire et suffisante sur un entier $p$-adique pour que la valeur de la factorielle de Carlitz-Goss en celui-ci soit algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Lorsque restreint aux arguments rationnels, nous déterminons toutes les relations algébriques entre les valeurs prises par cette fonction, ce qui donne le pendant pour les places finies d'un résultat de Chang, Papanikolas, Thakur et Yu obtenu dans le cas de la place infinie.

**Keywords:** factorielles de Carlitz-Goss, transcendance, indépendance algébrique

**MSC Classification:** 11J81 , 11T55

## 1 Introduction

Soit $p$ un nombre premier et $q = p^f$ avec $f \in \mathbb{N}^*$. Dans les années 1930, Carlitz a développé une arithmétique dans $\mathbb{F}_q[T]$ analogue à celle de $\mathbb{Z}$. Soit $n$ un entier naturel de décomposition en base $q$

$$n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s \qquad (n_i \in [\![0, q-1]\!] \text{ pour tout } i \in [\![0, s]\!]).$$

Alors, on définit la $n^e$ *factorielle de Carlitz* $n!_{\mathcal{C}}$ par

$$n!_{\mathcal{C}} = \prod_{i=0}^{s} D_i^{n_i},$$

où l'on a posé

$$D_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = [n]D_{i-1}^q \text{ avec } [n] = T^{q^n} - T.$$

La factorielle de Carlitz possède de nombreuses propriétés analogues à la factoeille classique. Par exemple, on dispose de la formule de Sinnott [18] :

$$n!_{\mathcal{C}} = \prod_{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q[T]}} P^{\sum_{e \geqslant 1} \left[\frac{n}{q^{e \deg P}}\right]}$$

où $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q[T]}$ désigne l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{F}_q[T]$. C'est l'analogue de la formule de Legendre pour $n!$ :

$$n! = \prod_{p \text{ premier}} p^{\sum_{e \geqslant 1} \left[\frac{n}{p^e}\right]}.$$

Les coefficients binomiaux construits à partir de la factorielle de Carlitz possède la propriété d'intégralité [9, (2.5)] : pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ $(m \leqslant n)$,

$$\binom{n}{m}_{\mathcal{C}} = \frac{n!_{\mathcal{C}}}{m!_{\mathcal{C}}(n-m)!_{\mathcal{C}}} \in \mathbb{F}_q[T].$$

Les propriétés de la factorielle de Carlitz peuvent s'interpréter dans le contexte plus général des factorielles de Bhargava (voir [4] ou [7]). Dans [17] (voir aussi [18]), Goss considère une fonction $\Pi_{\mathcal{C}}$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$ qui interpole de manière continue la fonction $n!_{\mathcal{C}}/T^{\deg(n!_{\mathcal{C}})}$ sur $\mathbb{Z}_p$. Pour $n \in \mathbb{Z}_p$ de décomposition en base $q$

$$n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^i \qquad (n_i \in [\![0, q[\![ \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}),$$

on pose

$$\Pi_{\mathcal{C}}(n) = \prod_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{D_i}{T^{iq^i}}\right)^{n_i}.$$

La convergence du produit provient de la convergence de la suite $(D_i/T^{iq^i})_i$ vers 1 dans $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$.

**Remarque 1** C'est un exercice facile de monter qu'il n'existe pas de fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$ qui interpole la factorielle de Carlitz.

Dasn toute la suite, *algébrique* signifiera algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. On fixe donc une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de $\mathbb{F}_q(T)$.

Après des résultats partiels obtenus par Thakur ([29], [31], [32] et [33]), Thiéry [39] et Yu [42], Mendes-France et Yao ont montré dans [23] que pour un entier $p$-adique $n$, $\Pi_{\mathcal{C}}(n)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ si et seulement si $n$ est un entier naturel. Ici comme souvent, les résultats connus en arithmétique de $\mathbb{F}_q[T]$ sont beaucoup plus satisfaisants que dans le cas de la caractéristique nulle. Rappelons qu'en caractéristique nulle, la nature arithmétique pour $\Gamma(r)$ ($r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$) n'est connue que pour $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{4}$ et des valeurs que l'on déduit en utilisant les relations classiques satisfaites par la fonction $\Gamma$ [12]. Notons que dans le cas de la factorielle de Carlitz-Goss, Chang Papanikolas, Thakur, Yu en appliquant le maintenant célèbre critère **ABP** (voir [2]) déterminent toutes les relations algébriques des valeurs rationnelles parmi les valeurs en des arguments rationnels de la fonction $\Pi_{\mathcal{C}}$ [10].

En 1975, Morita [24] a défini un analogue $\Gamma_p$ de la fonction $\Gamma$ pour $\mathbb{Z}_p$ : pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on pose

$$\Gamma_p = \lim_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\to x}} (-1)^n \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ (j,p)=1}} j,$$

où la limite est prise dans $\mathbb{Z}_p$ pour la topolgie induite par la valuation $p$-adique de $\mathbb{Z}$.

Comme conséquence de leur célèbre formule, Gross et Koblitz ont montré que $\Gamma_p(r/N)$ est algébrique pour tous entier $N$ tel que $p \equiv 1 \pmod N$ et tout $r \in [\![0, n[\![$ (voir [19]). Merken et Aşan ont montré la transcendence de $\Gamma(\lambda)$ quand $\lambda$ est un nombre de Liouville $p$-adique (voir [3, Theorem 2.2]). Toujours dans [18] (voir aussi [18, Chapter 9]), Goss a défini pour $\mathbb{F}_q[T]$ un analogue de la fonction $\Gamma_p$. Soit $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q[T]}$ de degré $d$. Pour tout entier $p$-adique $n$ de décomposition en base $q$

$$n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^i \qquad (n_i \in [\![0, q[\![ \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}),$$

on définit $n!_{\mathcal{C},P}$ par

$$n!_{\mathcal{C},P} = \prod_{i=0}^{+\infty} (-D_{i,P})^{n_i},$$

où, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a posé

$$D_{i,P} = \prod_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg h<i\\ P\nmid T^i+h}} (T^i + h)$$

La fonction $n!_{\mathcal{C},P}$ est à valeurs dans $\mathbb{F}_q[T]_P$, le complété de $\mathbb{F}_q[T]$ pour la topologie induite par la valuation $P$-adique de $\mathbb{F}_q[T]$. La convergence du produit définissant $n!_{\mathcal{C},P}$ est assurée par le fait que la suite $(-D_{i,P})_i$ converge vers 1 dans $\mathbb{F}_q[T]_P$.

**Remarque 2** Dans [8, (2.8)] (voir aussi [18, Chapter 3]), Carlitz prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D_n = \prod_{\substack{h \in \mathbb{F}_q[T] \\ \deg h < n}} (T^n + h)$. Ceci implique que

$$D_{n,P} = \begin{cases} D_n & \text{si } n < \deg P, \\ \frac{D_n}{P^{q^{n-d}} D_{n-d}} & \text{autrement.} \end{cases} \tag{1}$$

Par un calcul direct, Thakur montre que si $N$ est un entier naturel tel que $N$ divise $q^d - 1$, alors pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, $(i/N-1)!_{\mathcal{C},P}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ [30, Corollary of Theorem V]. Développant la méthode de Thakur, Wen et Yao ont prouvé [40, §5] la

**Proposition 3** *Soit $n \in \mathbb{Z}_p$ tel la suite de ses $q$-chiffres soit ultimement $d$-périodique. Alors $n!_{\mathcal{C},P}$ est algébrique.*

**Remarque 4** Comme l'a remarqué Yao [41], cette propositon est déjà intrinsèquement présente dans [30] où il est prouvé l'analogue du théorème de Gross-Koblitz pour $\mathbb{F}_q[T]$ [30, Theorem VI]. En effet, on en déduit que pour tout $j \in [\![0, d[\![$, $\left(\frac{q^j}{1-q^d}\right)!_{\mathcal{C},P}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ et de là, on obtient facilement que si la suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de $[\![0, q-1]\!]$ ultimement $d$-périodique, alors pour $n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^i \in \mathbb{Z}_p$, $n!_{\mathcal{C},P}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Dans le cas où $P$ est de degré $d = 1$, Wen et Yao obtiennent la caractérisation des entiers $p$-adiques dont leur factorielle de Goss est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ :

**Théorème 5** *[40, Theorem 2] Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré 1 et $n \in \mathbb{Z}_p$, $n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^i$ $(0 \leqslant n_i < q)$. Alors $n!_{\mathcal{C},P}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ si et seulement si la suite $(n_i)_i$ est ultimement constante.*

**Remarques 6**
1. En fait, par un changement de variables, la partie transcendante du Théorème 5 est une conséquence immédiate de la preuve que $\Pi_{\mathcal{C}}(n)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$ si $n$ est un entier $p$-adique non naturel (voir [35, Theorem 11.3.7].
2. Dire qu'une suite est ultimement constante revient bien évidemment à dire qu'elle est ultimement 1-périodique.

Ce résultat a mené Wen et Yao à formuler la conjecture suivante dans le cas général, qui est reprise dans [34–38] :

**Conjecture** *[40, §10] Soit $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q[T]}$ de degré $d$ et $n \in \mathbb{Z}_p$, $n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^i$ $(0 \leqslant n_i < q)$. Alors $n!_{\mathcal{C},P}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ si et seulement si la suite $(n_i)_i$ est ultimement $d$-périodique.*

Dans cet article, nous montrons que la conjecture de Wen-Yao est vraie. En fait nous montrons un résultat plus géneral. Nous caractérisons les monômes en les $n!_{\mathcal{C},P}$ $(n \in \mathbb{Z}_p)$ qui sont algébriques.

**Théorème 7** *Soit $\delta$ un entier naturel non nul, $(u_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ ($i \in [\![1,\delta]\!]$) des sous-suites de $[\![0,q-1]\!]$ et $\lambda_1,\cdots,\lambda_\delta$ des entiers. Posons pour tout $i \in [\![1,\delta]\!]$, $n_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j^{(i)} q^j$, Alors,*

$$\prod_{i=1}^{\delta} (n_i!_{\mathcal{C},P})^{\lambda_i}$$

*est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ si et seulement si la suite $(\sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i u_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}}$ est ultimement $d$-périodique.*

Dans la dernière partie de cet article, nous determinons toutes les relations algébriques entre les $\Pi_{\mathcal{C},P}(r)$ ($r \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$). C'est le pendant aux places finies du résultat sus-cité de Chang, Papanikolas, Thakur et Yu. Contrairement à ces auteurs, nous n'utilisons pas le critère **APB** (son énoncé aux places finies est disponible dans [11]), mais un analogue du théorème de Nishioka (voir le Théorème 29) qui donne l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlérienne. La remarque fondamentale que certaines quantités arithmétiques dans les corps de fonctions sont des valeurs de fonctions mahlérienne est due à Denis ([13], [14], [28]). La preuve de la conjecture de Wen-Yao que nous proposons est aussi une variante de la méthode de Mahler. C'est un plaisir pour l'auteur de mettre en avant la méthode de Denis qui n'a pas eu la publicité qu'elle méritait, certainement en raison de sa concomitance avec la publication du critère **ABP**.

# 2 Réduction de la conjecture de Wen-Yao

Comme déja noté dans l'introduction, la suffissance dans la conjecture de Wen-Yao a été montré par ces deux auteurs. Nous en donnons une preuve simplifiée.

**Notations :** Dans toute la suite, si $\mathbb{F}$ est un corps fini et $\kappa \in \mathbb{F}$, on note $v_\kappa$ la valuation $(T-\kappa)$-adique de $\mathbb{F}(T)$ normalisée par $v_\kappa(T-\kappa) = 1$, $\mathbb{F}(T)_\kappa$ le complété de $\mathbb{F}(T)$ pour cette valuation et $\Omega_\kappa$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}(T)_\kappa$ qui contient $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. L'unique valuation de $\Omega_\kappa$ prolongeant $v_\kappa$ sera encore notée $v_\kappa$. On note $\mathcal{D}_\kappa$ le disque unité de $\Omega_\kappa$ :

$$\mathcal{D}_\kappa = \{z \in \Omega_\kappa \mid v(z) > 0\},$$

et pour tout réel stritement positif $r$

$$\mathcal{A}_{\kappa,r} = \{z \in \Omega_\kappa \mid v(z) > r\}.$$

Par [25, Chapter II, (5.2)], il existe un éléemnt $\alpha \in \mathbb{F}_q(T)_P$ de degré $d$ sur $\mathbb{F}_q$ tel que $\mathbb{F}_q(T)_P = \mathbb{F}_{q^d}(T)_\alpha$ en notant $\mathbb{F}_{q^d} = \mathbb{F}_q(\alpha)$. Puisque la valuation $z_\alpha$ sera omniprésente dans la suite, elle sera désignée plus simplement par $v$ dans la suite.

*Démonstration de la Proposition 3* Il suffit de montrer que pour tout $j \in [\![0,d[\![$, $H_j = \prod_{i=0}^{+\infty}(-D_{di+j,P})$ est algébrique. On pose $H_j(m) = \prod_{i=0}^{m}(-D_{di+j,P})$. Puisque

$$H_j(m) = (-1)^{m+1} P^{\frac{q^{md+j}-q^{j-d}}{q^d-1}} \frac{D_{md+j}}{D_j},$$

on a

$$\begin{aligned} H_j(m)/H_j^{q^d}(m-1) &= -P^{q^{j-d}} D_j^{q^d-1} \left( \frac{D_{dm+j}}{D_{d(m-1)+j}^{q^d}} \right) \\ &= -P^{q^{j-d}} D_j^{q^d-1} \prod_{l=1}^{d} (T^{q^{d(m-1)+j+l}} - T)^{q^{d-l}} \\ &= -P^{q^{j-d}} D_j^{q^d-1} \prod_{l=1}^{d} \left( (T-\alpha)^{q^{d(m-1)+j+l}} - (T-\alpha^{q^{j+l}}) \right)^{q^{d-l}} \end{aligned}$$

Quand $m$ tend vers $+\infty$, on obtient

$$H_j^{1-q^d} = (-1)^{d-1} P^{q^{j-d}} D_j^{q^d-1} \prod_{l=1}^{d} (T - \alpha^{q^{j+l}})^{q^{d-l}}.$$

□

Dans cette preuve, on voit apparaître l'uniformisante algébrique $T-\alpha$ qui joue un rôleprépondérant dans le reste de cet article.

**Notation :** Pour une suite $\underline{\mathbf{u}} = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{F}_q$, on note $F_{\underline{\mathbf{u}}}(z)$ la série formelle de $\Omega_\alpha[[Z]]$

$$F_{\underline{\mathbf{u}}}(Z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{u_i}{T-\alpha^{q^i}} \frac{Z^{q^i}}{Z^{q^i} - T + \alpha^{q^i}}.$$

Dans la suite, lorsqu'il n'y a pas d'ambigúïté, on utilise la même notation pour désigner une série formelle et la fonction qu'elle induit sur une partie de $\Omega_\alpha$ par évaluation. Nous montrerons dans la Partie 3 le

**Théorème 8** *Soit $\underline{\mathbf{u}}$ une suite de $\mathbb{F}_{q^d}$ non ultimement nulle. Alors, $F_{\underline{\mathbf{u}}}(\beta)$ est transcendant pour tout $\beta \in \mathcal{D}_\alpha \bigcap \left( \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0, T^{1/q^k} - \alpha \mid k \in \mathbb{N}^*\} \right)$.*

Le lien entre le Théorème 7 et le théorème précédent est donné par le

**Théorème 9** *Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{Z}$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ avec la propriété que la suite $(u_i \pmod{p^k})_{i\in\mathbb{N}}$ ne soit pas ultimement $d$-périodique. Alors, $\prod_{i=0}^{+\infty} (-D_{i,P})^{u_i}$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Ici, comme dans la suite, la notation $a \pmod h$ pour des entiers $a$ et $h$ ($h \geqslant 0$) désigne l'unique entier de $[\![0, h[\![$ congru à $a$ modulo $h$.

*Démonstration* Posons $k'$ le plus petit entier naturel tel que la suite $(u_i \pmod{p^{k'}})_{i\in\mathbb{N}}$ ne soit pas ultimement $d$-périodique, mais que $(u_i \pmod{p^{k'-1}})_{i\in\mathbb{N}}$ le soit. On a $k' \geqslant 1$.
**Cas 1.** Supposons $k'=1$. Notons $\aleph_{\underline{\mathbf{u}}} = \prod_{i=0}^{+\infty} (-D_{i,P})^{u_i}$. Puisque pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $D_i' =$

$-D_{i-i}^q$, et que la dérivation sur $\mathbb{F}_q(T)$ se prolonge de manière continue (et unique) sur $\mathbb{F}_q(T)_P$, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{\aleph'_{\underline{\mathbf{u}}}}{\aleph_{\underline{\mathbf{u}}}} &= \sum_{i=1}^{d} \frac{u_i}{T^{q^i}-T} + u_d\frac{P'}{P} + \sum_{i=d+1}^{+\infty} u_i\left(\frac{1}{T^{q^i}-T} - \frac{1}{T^{q^{i-d}}-T}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{u_i}{T^{q^i}-T} + u_d\frac{P'}{P} + \sum_{i=d+1}^{+\infty} \frac{u_i}{T-\alpha^{q^i}}\left(\frac{T^{q^i}-\alpha^{q^i}}{T^{q^i}-T} - \frac{T^{q^{i-d}}-\alpha^{q^{i-d}}}{T^{q^{i-d}}-T}\right) \\
&= F_{\underline{\mathbf{v}}}(T-\alpha) - \sum_{i=1}^{d} \frac{u_i}{T-\alpha^{q^i}} + u_d\frac{P'}{P},
\end{aligned}$$

où $\underline{\mathbf{v}}$ est la suite $(u_i - u_{i+d} \pmod p)_{i\in\mathbb{N}}$. Par le Théorème 8, $\frac{\aleph'_{\underline{\mathbf{u}}}}{\aleph_{\underline{\mathbf{u}}}}$ est transcendant. Il en est donc de même de $\aleph_{\underline{\mathbf{u}}}$, puisque la dérivée d'un élément de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}\cap\mathbb{F}_q(T)_P$ est aussi algébrique.

**Cas 2.** Il existe $\delta\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $j\geqslant\delta$, $p^{k'-1}$ divise $u_{j+d}-u_j$. Soit $j\in[\![0,d[\![$. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, $p^{-k'}(u_{id+\delta+j}-u_{\delta+j})$ est un entier, que l'on note $m_{id+\delta+j}$. Par le choix de $k'$, la suite $(m_i \pmod p)_{i\geqslant\delta+j}$ n'est pas ultimement $d$-périodique. Comme

$$\begin{aligned}
\aleph_{\underline{\mathbf{u}}} &= \Big(\prod_{i=0}^{\delta-1}(-D_{i,P})^{u_i}\Big)\prod_{j=0}^{d-1}\Big(\prod_{i=0}^{+\infty} -D_{id+\delta+j,P}\Big)^{p^{k'}m_{id+\delta+j}+u_{\delta+j}} \\
&= \Big(\prod_{i=0}^{\delta-1}(-D_{i,P})^{u_i}\Big)\prod_{j=0}^{d-1}\Big(\prod_{i=0}^{+\infty} -D_{id+\delta+j,P}\Big)^{u_{\delta+j}}\Big(\prod_{i\geqslant\delta}(-D_{i,P})^{m_i}\Big)^{p^{k'}},
\end{aligned}$$

par le cas 1 et la Proposition 3, $\aleph_{\underline{\mathbf{u}}}$ est transcendant. $\square$

Le Théorème 7 est une conséquence du théorème précédent.

*Démonstration du Théorème 7* La suite $(\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée, disons par $\mu\in\mathbb{R}^+$. Supposons qu'elle ne soit pas $d$-périodique. Pour tout entier $k$ tel que $p^k>\mu$, la suite $(\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_j^{(i)} \pmod{p^k})_{j\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas non plus. Comme

$$\prod_{i=1}^{\delta}(n_i!_{\mathcal{C},P})^{\lambda_i} = \prod_{j=0}^{+\infty}(-D_{j,P})^{\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_j^{(i)}},$$

le Théorème 9 implique que $\prod_{i=1}^{\delta}(n_i!_{\mathcal{C},P})^{\lambda_i}$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$. Supposons maintenant que la suite $(\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}}$ soit ultimement $d$-périodique. Il existe un entier $\Lambda_0$ tel que pour tout entier $\Lambda\geqslant\Lambda_0$, on ait $\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_\Lambda^{(i)}=\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_{\Lambda+d}^{(i)}$. On obtient que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{\delta}(n_i!_{\mathcal{C},P})^{\lambda_i} &= \prod_{\Lambda=0}^{\Lambda_0-1}(-D_{\Lambda,P})^{\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_\Lambda^{(i)}}\prod_{j=0}^{d-1}\prod_{\nu=0}^{+\infty}(-D_{j+\Lambda_0+\nu d,P})^{\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_{j+\Lambda_0+\nu d}^{(i)}} \\
&= \prod_{\Lambda=0}^{\Lambda_0-1}(-D_{\Lambda,P})^{\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_\Lambda^{(i)}}\prod_{j=0}^{d-1}\Big(\prod_{\nu=0}^{+\infty} -D_{j+\Lambda_0+\nu d,P}\Big)^{\sum_{i=1}^{\delta}\lambda_i u_{j+\Lambda_0}^{(i)}}.
\end{aligned}$$

Par la Proposition 3, $\prod_{i=1}^{\delta}(n_i!_{\mathcal{C},P})^{\lambda_i}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. $\square$

En particulier, on a le

**Théorème 10** *La conjecture de Wen-Yao est vraie. Autrement dit, si* $\underline{\mathbf{n}} = (n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* $[\![0, q-1]\!]$ *et* $n$ *est l'entier* $p$*-adique défini par* $n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^i$*, alors* $n!_{\mathcal{C},P}$ *est algébrique sur* $\mathbb{F}_q(T)$ *si et seulement si la suite* $\underline{\mathbf{n}}$ *est ultimement* $d$*-périodique.*

# 3 La preuve de transcendance

Si $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$, on note $\rho(\beta)$ le polynôme unitaire de $\mathbb{F}_{q^d}[T]$ de degré minimal tel que $\rho(\beta)\beta$ soit un entier de $\mathbb{F}_{q^d}(T)(\beta)$ c'est-à-dire appartient à la clôture intégrale de $\mathbb{F}_{q^d}[T]$ dans $\mathbb{F}_{q^d}(T)(\beta)$. On définit la taille $t(\beta)$ de $\beta$ par :

$$t(\beta) = \max\big(\max_{\sigma\in\mathcal{H}} \deg(\sigma(\beta)), \deg(\rho(\beta))\big),$$

où $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q(T)}/\mathbb{F}_{q^d}(T))$.

Présentons une variante de l'inégalité de Liouville qui permet d'estimer la valuation d'un élément algébrique en fonction de sa taille. Elle est une conséquence immédiate de [42, Lemma 4.2] et [42, Lemma 4.2].

**Proposition 11** (Inégalité de Liouville) *Soit* $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ *et* $K$ *une extension finie de* $\mathbb{F}_{q^d}(T)$ *de degré* $\Xi$ *qui contient* $\beta$*. Alors, on a*

$$\deg(\alpha) \geqslant -2\Xi t(\beta) \, et \; v(\beta) \leqslant 2\Xi t(\beta).$$

La taille vérifie les propriétés suivantes.

**Lemme 12** *Soit* $(\beta, \gamma) \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}^2$*. On a*

$$t(\beta) + t(\gamma) \geqslant \max(t(\beta+\gamma), t(\beta\gamma)) \; \text{et si } \gamma \neq 0, \; t\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leqslant 2[K : \mathbb{F}_{q^d}(T)]t(\gamma),$$

*pour toute extension finie* $K$ *de* $\mathbb{F}_{q^d}(T, \gamma)$*.*

*Démonstration* Attardons nous seulement sur la dernière inégalité. Par l'inégalité de Liouville, on a pour tout $\sigma \in \mathcal{H}$, $-\deg(\sigma(\gamma^{-1})) \leqslant 2[K : \mathbb{F}_{q^d}(T)]t(\gamma)$ et donc $\overline{|\gamma^{-1}|} \leqslant 2[K : \mathbb{F}_{q^d}(T)]t(\gamma)$. Puisque $\mathcal{N}_{K/\mathbb{F}_{q^d}(T)}(\rho(\gamma)\gamma)\gamma^{-1}$ est entier sur $\mathbb{F}_{q^d}(T)$, $\rho(\gamma^{-1})$ divise $\mathcal{N}_{K/\mathbb{F}_{q^d}(T)}(\rho(\gamma)\gamma)$ dans $\mathbb{F}_{q^d}[T]$. En particulier, on a $\deg(\rho(\gamma^{-1})) \leqslant \deg(\mathcal{N}_{K/\mathbb{F}_{q^d}(T)}(\rho(\gamma)\gamma)) \leqslant 2[K : \mathbb{F}_{q^d}(T)]t(\gamma)$. □

**Notations :**

1. Dans toute la suite, $\beta$ désigne un élément de $\overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0, T^{1/q^k} - \alpha \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ de degré $\Xi$ sur $\mathbb{F}_{q^d}(T)$ de valuation $v$-adique strictement positive et $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{F}_{q^d}$ non ultimement nulle de premier terme $u_0$ nul.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n$ la fraction rationnelle de $(\mathbb{F}_{q^d}(T))(Z)$

$$E_n(Z) = \frac{u_n}{T^q - \alpha^{q^n}} \frac{Z}{Z - T + \alpha^{q^n}}$$

et $\varPhi_n$ la série formelle de $\mathbb{F}_{q^d}(T)[[Z]]$ définie par

$$\varPhi_n(Z) = \sum_{k\geqslant 0} E_{n+k}(Z^{q^k}).$$

La série formelle $\varPhi_0$ sera notée plus simplement $\varPhi$.
La suite $(\varPhi_n)_n$ vérifie la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varPhi_{n+1}(Z^q) = \varPhi_n(Z) - E_n(Z).$$

Par itération, on obtient la relation

$$\varPhi_n(Z^{q^n}) = \varPhi(Z) - \sum_{k=0}^{n-1} E_k(Z^{q^k}). \tag{2}$$

Pour tout $(n, l) \in \mathbb{N}^2$, il existe des éléments $g_{n,l,\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{N}$) de $\mathbb{F}_{q^d}(T)$ tels que

$$\varPhi_n^l(Z) = \sum_{\lambda\geqslant 0} g_{n,l,\lambda} Z^\lambda.$$

**Lemme 13** *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{N}$, *on a* $\deg(g_{n,l,\lambda}) \leqslant 0$, $v(g_{n,l,\lambda}) \geqslant -\lambda-l$ *et* $[d]^{l+\lambda} g_{n,l,\lambda} \in \mathbb{F}_{q^d}[T]$. *Si de plus,* $g_{n,l,\lambda}$ *est non nul, alors* $\deg(\rho(g_{n,l,\lambda})) \leqslant q^d(\lambda + l)$.

*Démonstration* De l'égalité

$$E_{n+k}(Z^{q^k}) \;=\; -\frac{u_{n+k}}{(T-\alpha^{q^{n+k}})^2} \times \frac{Z^{q^k}}{1-\frac{Z^{q^k}}{T-\alpha^{q^{n+k}}}},$$

on en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, on a

$$g_{n,1,\lambda} = -\sum_{\substack{(i,k)\in\mathbb{N}^2\\(i+1)q^k=\lambda}} \frac{u_{n+k}}{(T-\alpha^{q^{n+k}})^{2+i}}. \tag{3}$$

Clairement, $\deg(g_{n,1,\lambda}) \leqslant 0$, $v(g_{n,1,\lambda}) \geqslant -\lambda - 1$ et $[d]^{\lambda+1} g_{n,1,\lambda}$ est un élément de $\mathbb{F}_{q^d}[T]$. Comme

$$g_{n,l,\lambda} = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_l)\in\mathbb{N}^l\\ i_1+\cdots+i_l=\lambda}} g_{n,1,i_1}\cdots g_{n,1,i_l},$$

il vient que $\deg(g_{n,l,\lambda}) \leqslant 0$ et $v(g_{n,l,\lambda}) \geqslant -\lambda-l$. Soit $(i_1, \cdots, i_l) \in \mathbb{N}^l$ tel que $i_1+\cdots+i_l = \lambda$. Alors $[d]^{i_1+1}\cdots[d]^{i_l+1} g_{n,1,i_1}\cdots g_{n,1,i_l}$ appartient à $\mathbb{F}_{q^d}[T]$. Par conséquent, $[d]^{\lambda+l} g_{n,l,\lambda}$ est un élément de $\mathbb{F}_{q^d}[T]$, $\rho(g_{n,l,\lambda})$ divise $[d]^{\lambda+l}$ et $\deg(\rho(g_{n,l,\lambda})) \leqslant q^d(\lambda + l)$. □

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas ultimement nulle, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \neq 0\}$ est infini. Notons ses éléments $\eta_1 < \cdots < \eta_k < \cdots$.

**Proposition 14** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n$ est transcendante sur $\mathbb{F}_{q^d}(T)(Z)$.*

*Démonstration* Il suffit de prouver que $\Phi$ est transcendante sur $\mathbb{F}_{q^d}(T)(Z)$. Supposons que cela ne soit pas le cas. La famille $\{\Phi^{q^j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ est $\mathbb{F}_{q^d}(T)(Z)$-liée. Soit $P_0, \cdots, P_s$ des polynômes de $\mathbb{F}_{q^d}(T)[Z]$, avec $P_s$ non nul de degré $\delta$, tels que

$$P_0(Z)\Phi(Z) + \cdots + P_s(Z)\Phi^{q^s}(Z) = 0.$$

Il existe $\kappa_0 \in \mathbb{F}_{q^d}$ tel que l'ensemble $\mathcal{S} = \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha^{q^{\eta k}} = \kappa_0\}$ est infini. On note ses éléments $l_0 < l_1 < l_2 < \cdots$. On pose

$$\mathscr{T} = \mathcal{A}_{\kappa_0, q^{\eta l_{\delta+1}}} \setminus \left( \mathcal{A}_{\kappa_0, q^{\eta l_{\delta+1}}} \cap \{ \sqrt[q^{\eta l_j}]{T} - \alpha \mid j \in [\![0, \delta]\!]\} \right).$$

Par le Lemme 13, la série formelle $\Phi$ peut être evaluée sur $\mathcal{A}_{\kappa_0,1}$. D'après la Proposition 36, pour tout $z \in \mathscr{A}_{\kappa_0,1}$, on a

$$P_0(z)\Phi(z) + \cdots + P_s(z)\Phi^{q^s}(z) = 0.$$

Notons $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} E_k(z^{q^k})$ la $n^{\mathrm{e}}$ somme partielle de la série $\sum_{k \geqslant 1} E_k(z^{q^k})$. Puisque le suite de fonction $(E_n(z^{q^n}))_n$ converge uniformément vers 0 sur $\mathscr{T}$, la suite de fonctions rationnelles $(s_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathscr{T}$ vers une fonction $\widetilde{\Phi}$ dont la restriction à $\mathcal{A}_{\kappa_0,1}$ est $\Phi$. Comme les fonctions polynomiales $P_i$ sont bornées sur $\mathscr{T}$ et que pour tout $j \in [\![0, s]\!]$, la suite de fonctions $(s_n^{q^j}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathscr{T}$ vers $\widetilde{\Phi}^{q^j}$, la fonction $P_0(z)\widetilde{\Phi}(z) + \cdots + P_s(z)\widetilde{\Phi}^{q^s}(z)$ est un élément analytique au sens de Krasner de $\mathscr{T}$ (voir [15] ou [21]) dont la restriction à $\mathcal{A}_{\kappa_0,1}$ est la fonction nulle. Clairement $\mathscr{T}$ est quasi-connexe [20]. Le principe d'unicité du prolongement analytique pour les éléments analytiques sur un quasi-connexe [21] implique que pour tout $z \in \mathscr{T}$,

$$P_0(z)\widetilde{\Phi}(z) + \cdots + P_s(z)\widetilde{\Phi}^{q^s}(z) = 0.$$

Pour tout $j \in [\![0, \delta]\!]$, $\sqrt[q^{\eta l_j}]{T} - \alpha$ est un pôle de $\widetilde{\Phi}$. Ceci contredit la Proposition 34. Ainsi, $\Phi$ l'est sur transcendante sur $\mathbb{F}_{q^d}(T)(Z)$. □

Du Lemme 12, on déduit l'estimation (grossière, mais suffisante) suivante de la taille des sommes partielles de $\Phi_k(\beta)$.

**Lemme 15** *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$t(\sum_{j=0}^{k} E_j(\beta^{q^j})) \leqslant (2\Xi + 1) \left( \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} t(\beta) + k \right).$$

*Démonstration* On a pour tout $j \in [\![0, k]\!]$,

$$t\big(E_j(\beta^{q^j})\big) \; = \; t\left( \frac{1}{T - \alpha^{q^j}} \times \frac{u_j \beta^{q^j}}{\beta^{q^j} - T + \alpha^{q^j}} \right) \leqslant (2\Xi + 1)q^j t(\beta) + 2\Xi + 1.$$

Ainsi,

$$t(\sum_{j=0}^{k} E_j(\beta^{q^j})) \; \leqslant \; \sum_{j=0}^{k} (2\Xi + 1)q^j t(\beta) + 2\Xi + 1 \leqslant (2\Xi + 1) \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} t(\beta) + (2\Xi + 1)k.$$

□

**Théorème 16** *Supposons que* $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \eta_{k+1}-\eta_k = +\infty$. *Alors* $\Phi(\beta)$ *est transcendant sur* $\mathbb{F}_q(T)$.

*Démonstration* Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\beta_k = \sum_{j=0}^{\eta_k} E_j(\beta^{q^j})$. Par définition de la suite $(\eta_l)_{l\in\mathbb{N}}$, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Phi(\beta) - \beta_{k-1} = \sum_{j=k}^{+\infty} E_{\eta_j}(\beta^{q^{\eta_j}}).$$

Puisque $v(T-\alpha^{q^j})$ vaut 1 si $d$ divise $j$ et est nulle autrement, il existe un entier $j_0$ tel que pour tout $j \geqslant j_0$, on ait

$$v(E_{\eta_j}(\beta^{q^{\eta_j}})) = \begin{cases} q^{\eta_j} v(\beta) - 2 & \text{si } d \mid \eta_j \\ q^{\eta_j} v(\beta) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, il existe un entier $j_1 \geqslant j_0$ tel que si $\eta_k$ est supérieur à $j_1$, alors pour tout entier $j > \eta_k$, on a $q^{\eta_j} v(\beta) - 2 > q^{\eta_k} v(\beta)$ et donc

$$v(E_{\eta_j}(\beta^{q^{\eta_j}})) > v(E_{\eta_k}(\beta^{q^{\eta_k}})).$$

On en déduit que

$$v(\Phi(\beta) - \beta_{k-1}) = v(E_{\eta_k}(\beta^{q^{\eta_k}})) = q^{\eta_k} v(\beta) + \varepsilon_k,$$

avec $\varepsilon_k \in \{-2, 0\}$. En particulier $\Phi(\beta) - \beta_{k-1}$ est non nul. Supposons que $\Phi(\beta)$ soit algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ (donc sur $\mathbb{F}_{q^d}(T)$). On pose $K = \mathbb{F}_{q^d}(T)(\Phi(\beta), \beta)$ et $\Xi$ le degré de l'extension $K/\mathbb{F}_{q^d}(T)$. Par le Lemme 15, on a

$$t(\Phi(\beta) - \beta_{k-1}) \leqslant t(\Phi(\beta)) + (2\Xi+1)\frac{q^{\eta_{k-1}+1}-1}{q-1} t(\beta) + (2\Xi+1)\eta_{k-1}$$

L'inégalité de Liouville implique que

$$q^{\eta_k} v(\beta) + \varepsilon_k \leqslant 2\Xi\left(t(\Phi(\beta)) + (2\Xi+1)\frac{q^{\eta_{k-1}+1}-1}{q-1} t(\beta) + (2\Xi+1)\eta_{k_l-1}\right).$$

Comme $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \eta_{k+1}-\eta_k = +\infty$, il existe une suite $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que $\lim_{l\to+\infty} \eta_{k_l+1} - \eta_{k_l} = +\infty$. Pour tout entier $l$ tel que $\eta_l > k_1$, on a donc

$$q^{\eta_{k_l}} v(\beta) + \varepsilon_{k_l} \leqslant 2\Xi\left(t(\Phi(\beta)) + (2\Xi+1)\frac{q^{1+\eta_{k_{l-1}}}-1}{q-1} t(\beta) + (2\Xi+1)\eta_{k_{l-1}})\right).$$

Ceci entraîne que

$$\overline{\lim}_{l\to+\infty} q^{\eta_{k_l}-\eta_{k_{l-1}}} v(\beta) \leqslant \frac{q(2\Xi+1)}{q-1}.$$

Puisque $v(\beta) > 0$, ceci est impossible pour des entiers $l$ assez grands. □

**Notation :** Pour $\nu \in \mathbb{N}\bigcup\{-\infty\}$, on note $\mathbb{A}_\nu$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{F}_{q^d}(T)$ de degré inférieur à $\nu$.

**Proposition 17** *Soit* $\delta \in \mathbb{N}^*$ *et* $\varsigma = q^d\delta(\delta+1)^2$. *Il existe des polynômes* $(V_{\delta,l})_{0\leqslant l\leqslant\delta}$ *de* $\mathbb{A}_\varsigma[Z]$ *de degré en* $Z$ *inférieur à* $\delta$ *non tous nuls et une suite non majorée* $(z_n)_n$ *de* $\mathbb{N}$ *tels que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on ait*

$$\operatorname{ord}\left(\sum_{l=0}^{\delta} V_{\delta,l}(Z)\Phi_{z_k}^l(Z)\right) \geqslant \delta^2 + \delta.$$

*Démonstration* Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $V_{\delta,n,l}(Z) = \sum_{\lambda=0}^{\delta} a_{\delta,n,l,\lambda} Z^{\lambda}$. On a

$$\sum_{l=0}^{\delta} V_{\delta,n,l}(Z)\Phi_n^l(Z) = \sum_{t \geqslant 0} \sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{N}^2 \\ r+s=t}} \Big( \sum_{l=0}^{\min(r,\delta)} a_{\delta,n,l,r} g_{n,l,s} \Big) Z^t. \tag{4}$$

Si tous les $g_{n,l,s}$ ($(l,s) \in [\![0,\delta]\!]^2$) sont nuls, il est clair qu'il existe des éléments non tous nuls de $\mathbb{A}_{\varsigma}[Z]$ tels que

$$\mathrm{ord}\left( \sum_{l=0}^{\delta} V_{\delta,n,l}(Z)\Phi_n^l(Z) \right) \geqslant \delta^2 + \delta.$$

Sinon, le Lemme 13 et un lemme de Siegel (voir [1, Lemme 11]) permet d'obtenir la même conclusion. Puisque l'ensemble $\{(V_{\delta,n,l})_{0\leqslant l\leqslant\delta} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini, par le principe des tiroirs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite non majorée $(z_n)_n$ de $\mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\mathrm{ord}\left( \sum_{l=0}^{\delta} V_{\delta,n_0,l}(Z)\Phi_{z_n}^l(Z) \right) \geqslant \delta^2 + \delta.$$

□

**Definition 18** Soit $w$ et $n$ deux entiers naturels. On appelle *troncature de $\Phi_n$ à l'ordre $w$*, que l'on note $\mathrm{Tronc}_w(\Phi_n)$, la fraction rationnelle

$$\mathrm{Tronc}_w(\Phi_n)(Z) = \sum_{k=1}^{w-1} E_{n+k}(Z^{q^k}).$$

**Notation :** Soit $\delta \in \mathbb{N}^*$. On note $H_\delta(Z,X)$ le polynôme de $(\mathbb{F}_{q^d}(T))[Z,X]$

$$H_\delta(Z,X) = \sum_{l=0}^{\delta} V_{\delta,l}(Z)X^l,$$

où les polynômes $V_{\delta,l}$ sont definis dans la preuve de la Proposition ci-dessus. Par la Proposition 14, pour tout $\delta \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la série formelle $H_\delta(Z, \Phi_{z_k}(Z))$ n'est pas nulle et son ordre $H_\delta(Z, \Phi_{z_k}(Z))$ est un entier naturel.

**Théorème 19** *S'il existe un entier naturel $\delta_0$ tel que la suite $(\mathrm{ord}(H_{\delta_0}(Z, \Phi_{z_k}(Z))))_k$ ne soit pas pas majorée, alors $\Phi(\beta)$ est transcendant.*

*Démonstration* Supposons qu'il existe un entier naturel $m$ tel que $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \eta_k - \eta_{k-1} = m$. Il existe une suite extraite $(w_n)_n$ de $(z_n)_n$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{ord}(H_{\delta_0}(Z, \Phi_{w_n}(Z))) = +\infty$. L'ensemble $\mathscr{A} = \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ étant fini, il en est de même pour l'ensemble $\{\mathrm{Tronc}_{lm}(\Phi_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $l$ est un entier naturel. Posons $k_0 = w_0$ et notons $H_0$ l'ensemble $\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Il existe un entier $k_1 \in H_0$ ($k_1 > k_0$) tel que l'ensemble $H_1 = \{l \in H_0 \mid \mathrm{Tronc}_m(\Phi_{k_1}) = \mathrm{Tronc}_m(\Phi_l)\}$ est infini. Par récurrence, on construit une suite strictement croissante d'entiers $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ et une suite décroissante d'ensembles infinis $(H_l)_l$ en considérant un entier $k_{l+1} > k_l$ qui vérifie la propriété que l'ensemble $H_{l+1} = \{u \in H_l \mid \mathrm{Tronc}_{lm}(\Phi_{k_{l+1}}) = \mathrm{Tronc}_{lm}(\Phi_u)\}$ est infini. On pose pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $\Theta_l = \mathrm{Tronc}_{lm}(\Phi_{k_{l+1}})$. Par construction, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Theta_{l+1} - \Theta_l = \sum_{j=(l-1)m}^{lm-1} E_{k_{l+1}+j}(Z^{q^j}). \tag{5}$$

On en déduit que

$$\mathrm{ord}(\Theta_{l+1} - \Theta_l) \geqslant q^{(l-1)m}.$$

Par conséquent, la suite $(\Theta_l)_l$ converge dans $\mathbb{F}_{q^d}(T)[[Z]]$, disons vers $\Theta$. De plus, la suite $(\mathrm{ord}(H_{\delta_0}(Z, \Theta_l(Z))))_l$ tend vers $+\infty$. En effet, soit $M$ un réel. Puisque $\mathrm{ord}(\Phi_{k_l} - \Theta_l) \geqslant q^{(l-1)m}$, il existe un entier naturel $l_0$ tel que pour tout entier $l \geqslant l_0$ on ait $\mathrm{ord}(\Phi_{k_l} - \Theta_l) \geqslant M$. Pour tout entier $r$ suffisamment grand, on a $\mathrm{ord}(H_{\delta_0}(Z, \Phi_{w_r}(Z))) \geqslant M$. L'égalité

$$H_{\delta_0}(Z, \Theta_l(Z)) = \sum_{\lambda=0}^{\delta_0} V_{\delta_0,\lambda}(Z)\Phi_{k_l}^{\lambda}(Z) + \sum_{\lambda=0}^{\delta_0} V_{\delta_0,\lambda}(Z) \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \Theta^{\lambda-j}(Z)(\Phi_{k_l}(Z) - \Theta_l(Z))^j$$

implique donc que $\mathrm{ord}(H_{\delta_0}(Z, \Theta_l(Z))) \geqslant M$ si $l$ est assez grand. Autrement dit,

$$\lim_{l\to+\infty} \mathrm{ord}(H_{\delta_0}(Z, \Theta_l(Z))) = +\infty.$$

On obtient donc que

$$\sum_{l=0}^{\delta_0} V_{\delta_0,l}(Z)\Theta^l(Z) = 0.$$

On peut supposer que $V_{\delta_0,\delta_0}$ est non nul. Indexons les éléments de $\mathscr{A}$ : $\mathscr{A} = \{E_{\epsilon_1}, \cdots, E_{\epsilon_y}\}$ et posons $m' = (\delta_0 + 1)q^d m$. Il existe des entiers $c_j$ de $[\![1, s]\!]$ ($j \in [\![0, m' - 1]\!]$) tels que pour tout entier $l$ supérieur à $m'$

$$\Theta_l = \sum_{j=0}^{m'-1} E_{\epsilon_{c_j}}(Z^{q^j}) + Z^{q^{m'}} \mathscr{F}_l(Z),$$

où $\mathscr{F}_l$ appartient à $\mathbb{F}_{q^d}(T)[[Z]]$. Par définition de $m$, il existe au moins $q^d(\delta_0+1)$ indices $j$ de $[\![0, m'-1]\!]$ tels que $E_{\epsilon_{c_j}}$ est non nul. Ainsi, il existe $\kappa_0 \in \mathbb{F}_{q^d}$, un réel $r > 0$, un entier naturel $n_0$ et un sous-ensemble $\mathscr{B}$ de $\mathcal{A}_{\kappa_0,r}$ de cardinal $\delta_0 + 1$ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la fonction $\Theta_n$ admet un pôle en chaque élément de $\mathscr{B}$ et ceux-ci sont les seuls pôles de $\Theta_n$ (sur $\mathcal{A}_{\kappa_0,r}$). Le théorème d'Eisenstein [5, Lemma 2.1] implique que $\Theta$ admet un rayon de convergence non nul dans $\Omega_{\kappa_0}$. Suivant l'Égalité 5, la suite $(\Theta_n)_n$ converge uniformément sur $\mathcal{A}_{\kappa_0,r} \setminus \mathscr{B}$ vers une fonction $\widetilde{\Theta}$. Comme dans la preuve du Théorème 14, pour tout $z \in \mathcal{A}_{\kappa_0,r}$, on a

$$\sum_{l=0}^{\delta_0} V_{\delta_0,l}(z)\widetilde{\Theta}^l(z) = 0.$$

La Proposition 33 implique que la fonction $\widetilde{\Theta}$ admet $\delta_0 + 1$ pôles sur $\mathcal{A}_{\kappa_0,r}$. Ceci contredit la Proposition 34. Ainsi, $\overline{\lim_{k\to+\infty}} \eta_k - \eta_{k-1} = +\infty$ et par le Théoème 16, $\Phi(\beta)$ est transcendant. $\square$

D'après le résultat précédent, pour montrer le Théorème 8, il suffit de le prouver dans le cas où pour tout $\delta \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\mathrm{ord}(H_\delta(Z, \Phi_{z_k}(Z)))_k$ est majorée. Dans tout la suite, on supposera cette condition satisfaite. On note $I_\delta$ un majorant entier de la suite $(\mathrm{ord}(H_\delta(Z,\Phi_{z_k}(Z)))_k$. Il existe $M_\delta \in [\![0, I_\delta]\!]$ et une suite extraite $(z_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $l \in \mathbb{N}$, on ait $\mathrm{ord}(H_\delta(Z,\Phi_{z_{k_l}}(Z))) = M_\delta$. On pose

$$H_\delta(Z,\Phi_{z_{k_l}}(Z)) = \sum_{\lambda\geqslant M_\delta} R_{l,\lambda} Z^\lambda,\ (\forall\,\lambda \geqslant M_\delta,\ R_{l,\lambda} \in \mathbb{F}_{q^d}(T)).$$

Par définition, on a $R_{l,M_\delta} \neq 0$.

**Lemme 20** *Pour tout $(l,\lambda) \in \mathbb{N}^2$ avec $\lambda \geqslant M_\delta$, on a $v(R_{l,\lambda}) \geqslant -\lambda-\delta$. De plus, on a $v(R_{l,M_\delta}) \leqslant 2q^d\Xi\max(M_\delta, \delta(\delta+1)^2)$.*

*Démonstration* Soit $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geqslant M_\delta$. On a par l'Egalité 4 et le Lemme 17,

$$\sum_{\sigma=0}^{\delta} V_{\delta,\sigma}(Z)\Phi_{z_{k_l}}^{\sigma}(Z) = \sum_{t\geqslant M_\delta}\sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{N}^2\\ r+s=t}} \Big(\sum_{\sigma=0}^{\min(r,\delta)} a_{\delta,\sigma,r}\, g_{z_{k_l},\sigma,s}\Big) Z^t,$$

avec les $a_{\delta,\sigma,r}$ appartenant à $\mathbb{A}_\varsigma$. Le Lemme 13 implique que

$$v(R_{l,\lambda}) \geqslant \min_{\substack{0\leqslant\mu\leqslant\lambda\\ 0\leqslant\xi\leqslant\delta}} v(g_{z_{k_l},\xi,\mu}) \geqslant \min_{\substack{0\leqslant\mu\leqslant\lambda\\ 0\leqslant\xi\leqslant\delta}} -\mu-\xi \geqslant -\lambda-\delta.$$

De nouveau par le Lemme 13, $[d]^{M_\delta} R_{l,M_\delta}$ appartient à $\mathbb{F}_{q^d}[T]$ et $\deg(R_{l,M_\delta}) \leqslant \varsigma$. Par définition $R(l,M_\delta)$ est non nul. Par les estimations précédentes, une majoration de sa taille est :

$$t(R_{l,M_\delta}) \leqslant \max(q^d M_\delta, \varsigma).$$

L'inégalité de Liouville implique que $v(R_{l,M_\delta}) \leqslant 2\Xi\max(q^d M_\delta,\varsigma)$. □

**Proposition 21** *Il existe un entier naturel $l_0$ tel que pour tout entier $l$ avec $l \geqslant l_0$, on ait $H_\delta(\beta^{q^{z_{k_l}}}, \Phi_{z_{k_l}}(\beta^{q^{z_{k_l}}})) \neq 0$ et*

$$v\big(H_\delta(\beta^{q^{z_{k_l}}}, \Phi_{z_{k_l}}(\beta^{q^{z_{k_l}}}))\big) \geqslant -M_\delta - \delta + M_\delta q^{z_{k_l}} v(\beta).$$

*Démonstration* Soit $l \in \mathbb{N}$. On a pour tout $\lambda > M_\delta$,

$$v\big(R_{l,M_\delta}\beta^{q^{M_\delta z_{k_l}}}\big) - v\big(R_{l,\lambda}q^{\lambda z_{k_l}}\big) \leqslant \lambda+\delta-2q^d\Xi\max(M_\delta,\delta(\delta+1)^2) + v(\beta)(q^{M_\delta z_{k_l}} - q^{\lambda z_{k_l}})$$

Puisque la suite $(z_{k_l})_l$ tend vers $+\infty$ et $v(\beta) > 0$, il existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour entier $l \geqslant l_0$, on ait $v\big(R_{l,M_\delta}\beta^{q^{M_\delta z_{k_l}}}\big) - v\big(R_{l,\lambda}q^{\lambda z_{k_l}}\big) < 0$. Ceci entraine que

$$v\big(H_\delta(\beta^{q^{z_k}}, \Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}}))\big) = v\big(R_{l,M_\delta}\beta^{M_\delta q^{z_{k_l}}}\big) \geqslant -M_\delta-\delta+M_\delta q^{z_{k_l}} v(\beta).$$

De plus, puisque $R_{l,M_\delta} \neq 0$, on a en particulier $H_\delta(\beta^{q^{z_{k_l}}}, \Phi_{z_{k_l}}(\beta^{q^{z_{k_l}}})) \neq 0$. □

**Proposition 22** *Soit $k \in \mathbb{N}$. On a*

$$t\big(H_\delta(\beta^{q^{z_k}}, \Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}}))\big) \leqslant \delta\left[q^d(\delta+1)^2 + \Big(t(\Phi(\beta)) + (2\Xi+1)\Big(\frac{q^{z_k}-1}{q-1}t(\beta)+z_k-1\Big)\Big)\right].$$

*Démonstration* Posons $\chi_k = H_\delta(\beta^{q^{z_k}}, \Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}}))$. Puisque pour tout $i \in [\![0,\delta]\!]$, $V_i$ appartient à $\mathbb{A}_\varsigma[Z]$, on a

$$\overline{\left|V_i(\beta^{q^{z_k}})\Phi^i_{z_k}(\beta^{q^{z_k}})\right|} \leqslant \varsigma + \delta \max\left(0, \overline{\left|\Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}})\right|}\right).$$

On en déduit que

$$\overline{|\chi_k|} \leqslant \varsigma + \delta \max\left(0, \overline{\left|\Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}})\right|}\right).$$

De plus, on remarque que $\left(\rho(\Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}}))\right)^\delta \chi_k$ est entier sur $\mathbb{F}_{q^d}(T)$. Par conséquent, on obtient que

$$t(\chi_k) \leqslant \varsigma + \delta t\big(\Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}})\big).$$

De nouveau, par le Lemme 15, on a

$$t\big(\Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}})\big) = t\Big(\Phi(\beta) - \sum_{j=0}^{z_k-1} E_j(\beta^{q^j})\Big) \leqslant t(\Phi(\beta)) + (2\Xi+1)\Big(\frac{q^{z_k}-1}{q-1}t(\beta) + z_k - 1\Big).$$

On en conclut que

$$t\big(H_\delta(\beta^{q^{z_k}}, \Phi_{z_k}(\beta^{q^{z_k}}))\big) \leqslant \varsigma + \delta\left(t(\Phi(\beta)) + (2\Xi+1)\Big(\frac{q^{z_k}-1}{q-1}t(\beta) + z_k - 1\Big)\right).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

**Théorème 23** *Supposons que pour tout $\delta \in \mathbb{N}$ la suite $(\mathrm{ord}(H_\delta(Z, \Phi_{z_k}(Z)))_k$ est majorée. Alors $\Phi(\beta)$ est transcendant.*

*Démonstration* Puisque $H_\delta(\beta^{q^{z_{k_l}}}, \Phi_{z_{k_l}}(\beta^{q^{z_{k_l}}}))$ est non nul (Proposition 21), par l'inégalité de Liouville et la Proposition précédente, on a pour tout $l \geqslant l_0$,

$$v\big(H_\delta(\beta^{q^{z_{k_l}}}, \Phi_{z_{k_l}}(\beta^{q^{z_{k_l}}}))\big) \leqslant 2\Xi\delta\left[q^d(\delta+1)^2 + \left(t(\Phi(\beta)) + (2\Xi+1)\Big(\frac{q^{z_{k_l}}-1}{q-1}t(\beta) + z_{k_l} - 1\Big)\right)\right].$$

Par conséquent,

$$\overline{\lim_{l\to+\infty}} \frac{v\big(H_\delta(\beta^{q^{z_{k_l}}}, \Phi_{z_{k_l}}(\beta^{q^{z_{k_l}}}))\big)}{q^{z_{k_l}}} \leqslant \frac{2\delta\Xi(2\Xi+1)}{q-1}.$$

Cependant, par la Proposition 21, on a

$$\overline{\lim_{l\to+\infty}} \frac{v\big(H_\delta(\beta^{q^{z_{k_l}}}, \Phi_{z_{k_l}}(\beta^{q^{z_{k_l}}}))\big)}{q^{z_{k_l}}} \geqslant M_\delta v(\beta) \geqslant \delta^2 v(\beta).$$

Ces deux inégalités sont mutuellement contradictoires si $\delta$ est choisi suffisamment grand. Cela prouve la transcendance de $\Phi(\beta)$. □

**Remarque 24** L'adaptation de cette preuve au cas des factorielles de Carlitz-Goss en la place infinie est facile. Cela fournit une nouvelle preuve du théorème de Mendes-France et Yao.

# 4 Indépendance algébrique en les arguments rationnels

Dans cette partie, nous déterminons les relations algébriques entre les éléments de $\Pi_{\mathcal{C},P}(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$.

**Proposition 25** *Les éléments suivants sont algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$ :*

1. $r!_{\mathcal{C},P}$ $(r \in \mathbb{Z})$ ;
2. $r!_{\mathcal{C},P}/(r - \lceil r \rceil)!_{\mathcal{C},P}$ $(r \in \mathbb{Q} \cap (\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}))$ *où* $\lceil r \rceil$ *désigne la valeur entière par excès de* $r$ ;
3. $\prod_{u=0}^{l-1} \left(\frac{q^{ud+j}}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P}$ $(l \in \mathbb{N}^*,\ j \in [\![0, d-1]\!])$.

*Démonstration* 1) C'est trivial si $r \in \mathbb{N}$. Comme $-1 = \sum_{i=0}^{+\infty}(q-1)q^i$, par la Proposition 3, $(-1)!_{\mathcal{C},P} \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Si $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, en écrivant la décomposition en base $q$ de $-r-1$, $-1-r = \sum_{i=0}^{u} \nu_i q^i$ $(u \in \mathbb{N})$, on a

$$r = \sum_{i=0}^{u}(q-1-\nu_i)q^i + \sum_{i=u+1}^{+\infty}(q-1)q^i$$

On conclut encore avec la Proposition 3.
2) Soit $r = \sum_{i=s}^{+\infty} \nu_i q^i$ la décomposition en base $q$ de $r$ $(s \in \mathbb{N},\ \nu_s \neq 0)$. On a $r - 1 = \sum_{i=0}^{s-1} \nu_i q^i + (\nu_s - 1)q^s + \sum_{i=s+1}^{+\infty} \nu_i q^i$. Par conséquent,

$$\frac{r!_{\mathcal{C},P}}{(r-1)!_{\mathcal{C},P}} = \frac{D_{s,P}}{\left(\prod_{i=0}^{s-1} D_{i,P}\right)^{q-1}} \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}.$$

Par itération, on obtient que $r!_{\mathcal{C},P}/(r - \lceil r \rceil)!_{\mathcal{C},P}$ est algébrique sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$.
3) On a $\prod_{u=0}^{l-1} \left(\frac{q^{ud+j}}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P} = \prod_{i=0}^{+\infty} D_{id+j,P}$ qui est algébrique par la Proposition 3. □

**Notations :** Jusqu'à la fin de ce paragraphe $l$ désgine un entier supérieur á 2. On pose

$$\Upsilon_{(l-1)d}(Z) = \prod_{i=1}^{+\infty} \prod_{\nu=0}^{d} \left( \frac{Z^{q^{ild}} - (T^{q^\nu} - \alpha)}{Z^{q^{ild-d}} - (T^{q^\nu} - \alpha)} \right)$$

et pour tout $j \in [\![0, (l-1)d-1]\!]$

$$\Upsilon_j(Z) = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{Z^{q^{j+ild}} - (T - \alpha^{q^j})}{Z^{q^{j+ild-d}} - (T - \alpha^{q^j})}.$$

On remarque que pour tout $j \in [\![0, (l-1)d]\!]$

$$\Upsilon_j(Z^{q^{ld}}) = \varphi_j(Z)\Upsilon_j(Z) \tag{6}$$

avec

$$\varphi_j(Z) = \begin{cases} \frac{Z^{q^{j+ld-d}} - (T-\alpha^{q^j})}{Z^{q^{j+ld}} - (T-\alpha^{q^j})} & \text{si } j \in [\![0,(l-1)d-1]\!] \\ \prod_{\nu=0}^{d} \left( \frac{Z^{q^{ld-d}} - (T^{q^\nu} - \alpha)}{Z^{q^{ld}} - (T^{q^\nu} - \alpha)} \right) & \text{si } j = (l-1)d. \end{cases} \tag{7}$$

Nous montrons qu'un monôme non trivial en les $\Upsilon_j$ ($j \in [\![0,(l-1)d]\!]$) n'est pas rationnel.

**Lemme 26** *Soit $\nu_0, \cdots, \nu_{ld}$ des entiers non tous nuls. Alors, $\prod_{j=0}^{(l-1)d} \Upsilon_j^{\nu_j}$ n'est pas une fraction rationnelle de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}(Z)$.*

*Démonstration* Notons $j_0$ le plus petit entier de $[\![0,(l-1)d]\!]$ tel que $\nu_{j_0}$ est non nul. On peut supposer que $\nu_{j_0} > 0$. Si $j_0 < (l-1)d$, évaluons les séries formelles $\Upsilon_j$ ($j \in [\![0,(l-1)d]\!]$) dans $\mathcal{D}_{\alpha^{q^{j_0}}}$. La fonction $\Upsilon_{j_0}$ admet pour tout $i \in \mathbb{N}$ un zéro en $\sqrt[q^{j_0+ild}]{T - \alpha^{q^{j_0}}}$. En effet, si $z$ est un élément de $\mathcal{D}_{\alpha^{q^{j_0}}}$ tel qu'il existe $(i,i') \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec

$$z^{q^{j_0+ild}} - (T - \alpha^{q^{j_0}}) = z^{q^{j_0+i'ld-d}} - (T - \alpha^{q^{j_0}}),$$

on obtient que $z \in \overline{\mathbb{F}_q}$, ce qui est impossible. Pour $j \in [\![0,(l-1)d]\!]$, notons

$$S_j = \{z \in \mathcal{D}_{\alpha^{q^{j_0}}} \mid z \text{ est un pôle ou zéro de } \Upsilon_j\}.$$

Si $j \neq j_0$, une vérification immédiate dans le style précédent montre que $S_j \cap S_{j_0} = \emptyset$. On en déduit que la fonction $\prod_{j=0}^{(l-1)d} \Upsilon_j^{\nu_j}(z)$ admet une infinité de zéros dans $\mathcal{D}_{\alpha^{q^{j_0}}}$. Ainsi la série formelle $\prod_{j=0}^{(l-1)d} \Upsilon_j^{\nu_j}$ n'est donc pas rationnelle. Si $j_0 = (l-1)d$, on montre de même que la fonction $\Upsilon_{(l-1)d}(z)$ admet une infinité de zéros dans $\mathcal{D}_\alpha$. Elle n'est donc pas rationnelle et donc la série formelle $\Upsilon_{(l-1)d}$ non plus. □

Nous montrons maintenant comment passer pour les séries formelles $\Upsilon_j$ de la non rationnalité de leurs monômes en leur indépendance algébrique. La Proposition ci-dessous est une adaptation dans notre contexte de [27, Theorem 3.6.1].

**Proposition 27** *Les séries formelles $\Upsilon_h$ ($h \in [\![0,(l-1)d]\!]$) sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}(Z)$.*

*Démonstration* Montrons par récurrence sur $h$ que la famille $\{\Upsilon_j \mid j \in [\![0,h]\!]\}$ est algébriquement indépendante sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}(Z)$. Le cas $h = 0$ résulte du fait que la fait que la fonction $\Upsilon_0$ admet une infinité de zéros dans $\mathcal{D}_\alpha$ d'aprè le preuve du lemme précédent. Supposons maintenant que $h \geqslant 1$ et $\Upsilon_h$ est algébrique sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}(Z)(\Upsilon_0, \cdots, \Upsilon_{h-1})$. Il existe un entier naturel $u$ non nul (que l'on peut supposer minimal) et des fractions rationnelles $P_0, \cdots, P_{u-1}$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}(Z, X_0, \cdots, X_{h-1})$ telles que

$$\sum_{i=0}^{u-1} P_i(Z, \Upsilon_0(Z), \cdots, \Upsilon_{h-1}(Z))\Upsilon_h^i(Z) + \Upsilon_h^u(Z) = 0.$$

Comme $\Upsilon_h$ n'est pas nulle, par minimalité de $u$, $P_0$ est non nulle. Il existe deux polynômes non nuls $Q_0$ et $Q_1$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}[Z, X_0, \cdots, X_{h-1}]$ tels que $P_0 = Q_0/Q_1$. Écrivons

$$Q_0(Z, X_0, \cdots, X_{h-1}) = \sum_{\underline{\mathbf{i}}=(i_0,\cdots,i_{h-1})\in\mathfrak{S}_0} A_{\underline{\mathbf{i}}}(Z) X_0^{i_0} \cdots X_{h-1}^{i_{h-1}}$$

et

$$Q_1(Z, X_0, \cdots, X_{h-1}) = \sum_{\underline{\mathbf{j}}=(j_0,\cdots,j_{h-1})\in\mathfrak{S}_1} B_{\underline{\mathbf{j}}}(Z) X_0^{j_0} \cdots X_{h-1}^{j_{h-1}}$$

où $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_1$ sont des ensembles finis de $\mathbb{N}^h$ et les $A_{\underline{\mathbf{i}}}$ ($\underline{\mathbf{i}} \in \mathfrak{S}_0$) et $B_{\underline{\mathbf{j}}}$ ($\underline{\mathbf{j}} \in \mathfrak{S}_1$) sont des polynômes non nuls de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}[Z]$. Notons $\underline{\mathbf{I}} = (I_0, \cdots, I_{h-1})$ (resp. $\underline{\mathbf{J}} = (J_0, \cdots, J_{h-1})$) l'élément maximal de $\mathfrak{S}_0$ (resp. de $\mathfrak{S}_1$) pour l'ordre lexicographique. Les relations fonctionnelles 6 impliquent que

$$\sum_{i=0}^{u-1} \left( \varphi_h^{-u}(Z) P_i(Z, \Upsilon_0(Z), \cdots, \Upsilon_{h-1}(Z)) - P_i(Z^{q^{ld}}, \Upsilon_0(Z^{q^{ld}}), \cdots, \Upsilon_{h-1}(Z^{q^{ld}})) \right) \Upsilon_h^i(Z) = 0.$$

Par minimalité de $u$, on a

$$\varphi_h^{-u}(Z) P_i(Z, \Upsilon_0(Z), \cdots, \Upsilon_{h-1}(Z)) - P_i(Z^{q^{ld}}, \Upsilon_0(Z^{q^{ld}}), \cdots, \Upsilon_{h-1}(Z^{q^{ld}})) = 0$$

pour tout $i \in [\![0, u-1]\!]$. En particulier, l'hypothèse de récurrence implique la nullité de la fraction rationnelle

$$\varphi_h^{-u}(Z) P_0(Z, X_0, \cdots, X_{h-1}) - P_0(Z^{q^{ld}}, \varphi_0(Z) X_0, \cdots, \varphi_{h-1}(Z) X_{h-1}).$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient que

$$\varphi_h^{-u}(Z) A_{\underline{\mathbf{I}}}(Z) B_{\underline{\mathbf{J}}}(Z^{q^{ld}}) \varphi_0^{I_1}(Z) \cdots \varphi_{h-1}^{I_{h-1}}(Z) - A_{\underline{\mathbf{I}}}(Z^{q^{ld}}) B_{\underline{\mathbf{J}}}(Z) \varphi_0^{J_1} \cdots \varphi_{h-1}^{J_{h-1}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_h^{-u}(Z) \prod_{\nu=0}^{h-1} \varphi_\nu^{I_\nu - J_\nu}(Z) = \frac{A_{\underline{\mathbf{I}}}(Z) B_{\underline{\mathbf{J}}}(Z^{q^{ld}})}{A_{\underline{\mathbf{I}}}(Z^{q^{ld}}) B_{\underline{\mathbf{J}}}(Z)}. \tag{8}$$

Par les Égalités 7, on a $\operatorname{ord}\left(\varphi_h^{-u}(Z) \prod_{\nu=0}^{h-1} \varphi_\nu^{I_\nu - J_\nu}(Z)\right) = 0$. Par conséquent, les polynômes $A_{\underline{\mathbf{I}}}(Z)$ et $B_{\underline{\mathbf{J}}}(Z)$ ont le même ordre et la suite $\left(A_{\underline{\mathbf{I}}}(Z^{q^{ild}})/B_{\underline{\mathbf{J}}}(Z^{q^{ild}})\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{F}_q(T)}[[Z]]$ vers un élément de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$, disons $\mathfrak{r}$. Toujours par les Égalités 7, on a

$$\lim_{i\to+\infty} \prod_{i=1}^{+\infty} \varphi_h^{-u}(Z^{q^{ild}}) \prod_{\nu=0}^{h-1} \varphi_\nu^{I_\nu - J_\nu}(Z^{q^{ild}}) = \mathfrak{r} \frac{A_{\underline{\mathbf{I}}}(Z)}{B_{\underline{\mathbf{J}}}(Z)}.$$

On en déduit que la série formelle $\Upsilon_h^{-u}(Z) \prod_{\nu=0}^{h-1} \Upsilon_\nu^{I_\nu - J_\nu}(Z)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}_q(T)}(Z)$. Ceci contredit le Lemme 26. □

**Théorème 28** *Soit $l$ un entier supérieur à 2. La famille $\left\{ \frac{q^j}{1-q^{ld}} \mid j \in [\![0, d(l-1)-1]\!] \right\}$ est algébriquement indépendante sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$.*

*Démonstration* Par l'Égalité 1, $\Upsilon_j(T-\alpha) \dfrac{\left[\left(\frac{q^{j-1}}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P}\right]^q}{\left(\frac{q^j}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P}}$ appartient à $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ pour tout $j \in [\![1, (l-1)d]\!]$. Il en de même pour $\Upsilon_{(l-1)d}(T-\alpha) \dfrac{\left[\left(\frac{q^{(l-1)d-1}}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P}\right]^{q^{d+1}}}{\left(\frac{1}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P}}$. Le théorème de

Nishioka (voir ci-dessous) implique que les $\Upsilon_j(T-\alpha)$ ($j \in [\![0,(l-1)d[\![$) sont algébriqement indépendants sur $\mathbb{F}_q(T)$. Comme le corps $\mathbb{F}_q(T)\left(\{\Upsilon_j(T-\alpha) \mid j \in [\![0,(l-1)d[\![\}\right)$ est inclus dans $\mathbb{F}_q(T)\left(\{\left(\frac{q^j}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P} \mid j \in [\![0,(l-1)d[\![\}\right)$, on conclut que

$$\deg.\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q(T)}\, \mathbb{F}_q(T)\left(\left\{\left(\frac{q^j}{1-q^{ld}}\right)!_{\mathcal{C},P} \mid j \in [\![0,(l-1)d[\![\right\}\right) = (l-1)d.$$

□

Le théorème de Nishioka (voir [26] ou [27]) est un analogue du théorème de Siegel-Shidlovskii pour les fonctions mahlériennes. Son adaptation à la caractéristique finie a été écrite par Fernandes [16]. Elle se place dans le cadre du complété d'une clôture algébrique du complété de $\mathbb{F}_q(T)$ pour la place à l'infini. On remarque que sa preuve s'adapte ad verbum au cas où on se situe dans le complété d'un clôture algébrique du complété de $\mathbb{F}_q(T)$ en une place finie. On peut donc énoncer le

**Théorème 29** *Soit $L$ un extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$, $n \geqslant 1$, $d \geqslant 2$ deux entiers et $f_1(z), \dots, f_n(z) \in L[[z]]$ des fonctions analytiques au voisinage de l'origine vérifiant le système d-mahlérien*

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_n(z^d) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$$

*où $A(z) \in \mathrm{GL}_n(L(z))$.*
*Soit $\alpha \in \overline{L} \setminus \{0\}$ avec $z_\alpha(a) > 0$ tel que $\alpha$ n'est pas un pôle de $A$ et de $A^{-1}$. Alors, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\deg.\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q(T)}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \deg.\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q(T)(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}.$$

Tout élément $r \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ peut s'écrire sous la forme $n + \frac{c}{1-q^{ld}}$ avec $l$ un entier naturel non nul, $n$ un entier et $c \in [\![0, q^{ld}-1]\!]$. Le Théorème 28 permet donc de décrire toutes les relations algébriques entre les $r!_{\mathcal{C},P}(r)$ ($r \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$)

**Corollaire 30** *Toutes les relations algébriques entre les $r!_{\mathcal{C},P}(r)$ ($r \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$) sont déduites des relations monomiales de la Proposition 25.*

**Remarque 31** Là aussi, il est facile d'adapter la preuve ci dessus au cas de la place infinie. On obtient une nouvelle démonstation de [10, Corollary 3.3.3] et des affiramtios de [10, Remark 3.3.4].

# 5 Appendice

Dans cet appendice, nous collectons certains résultats qui sont bien connus en caractéristique 0 et utilisés couramment en caractéristique finie. Mais dans ce cadre, l'auteur n'a pas été capable de trouver dans la littérature une preuve écrite. Nous complétons ici ce manque.

On considère un corps valué $(\Omega, |.|)$ Soit $X$ une partie de $\Omega$ et $f$ une fonction définie sur $X$ à valeurs dans $\Omega$.

**Definition 32** Soit $a \in \overline{X} \setminus X$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $a$ est un pôle de $f$ d'ordre $k$ si la fonction $g : X \to \Omega$, $z \mapsto (z-a)^k f(z)$ admet une limite finie en $a$ dans $\Omega \setminus \{0\}$.
2. On dit que $a$ est un pôle de $f$ si $a$ est un pôle d'ordre $k$ de $f$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

**Proposition 33** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $X$ à valeurs dans $\Omega$, convergente uniformément vers $f$ sur $X$. S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ admet un pôle d'ordre $k$ en $a$ noté $c_n$ et si la suite $(c_n)_n$ est ultimement constante non nulle, alors $f$ admet un pôle d'ordre $k$ en $a$.*

*Démonstration* Notons $c = \lim_{n \to +\infty} c_n$. On a $c \neq 0$. Soit $r > 0$. Pour tout $x \in D(a, r) \cap X$, on a

$$|(x-a)^k f_n(x) - (x-a)^k f(x)| \leqslant r^k \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

La suite $((x-a)^k f_n(x))_n$ est uniformément convergente sur $D(a, r) \cap X$. Par conséquent, on a

$$\lim_{\substack{x \in X \\ x \to a}} (x-a)^k f(x) = \lim_{\substack{x \in X \\ x \to a}} \lim_{n \to +\infty} (x-a)^k f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{\substack{x \in X \\ x \to a}} (x-a)^k f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} c_n = c \neq 0.$$

Ainsi $a$ est un pôle d'ordre $k$ de $f$. □

**Proposition 34** *Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble infini $X$ de $\Omega$. On suppose qu'il existe des polynômes $P_0, \cdots, P_n$ de $\Omega(z)$ ($P_n \neq 0$) tel que pour tout $z \in X$, on ait*

$$P_0(z) + P_1(z) f(z) + \cdots + P_n(z) f^n(z) = 0.$$

*Alors, le nombre de pôles de $f$ est inférieur à $\deg(P_n)$.*

*Démonstration* Soit $a \in \overline{X}$ un pôle de $f$ d'ordre $k$. On a $\lim_{\substack{x \in X \\ x \to a}} (z-a)^k f(z) = c$ avec $c \in \Omega \setminus \{0\}$. On en déduit que

$$\lim_{\substack{x \in X \\ x \to a}} (z-a)^{nk} (P_0(z) + P_1(z) f(z) + \cdots + P_n(z) f^n(z)) = P_n(a) c^n = 0.$$

Puisque $c \neq 0$, on a $P_n(a) = 0$ □

On considère l'anneau des séries formelles $\Omega[[Z]]$ muni de la topologie $Z$-adique et de la valuation ord normalisée par $\mathrm{ord}(Z) = 1$. Soit $C$ un réel strictement positif et

$$E_C = \left\{ \sum_{n \geqslant 0} a_n Z^n \in \Omega[[Z]] \mid \forall\, n \geqslant 0,\ |a_n| \leqslant C^n \right\}.$$

L'ensemble $E_C$ muni de l'addition et du produit des séries formelles est un sous-anneau unitaire de $\Omega[[Z]]$.

**Proposition 35** *L'ensemble $E_C$ est un fermé de $\Omega[[Z]]$.*

*Démonstration* Soit $(f_n)_n$ une suite de $E_C$ qui converge dans $\Omega[[Z]]$ disons vers $f$. Ecrivons $f_n = \sum_{k\geqslant 0} a_k^{(n)} Z^k$ et $f = \sum_{k\geqslant 0} a_k Z^k$. Pour tout entier $M > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f_{n_0} - f = \sum_{k\geqslant M} (a_k^{(n_0)} - a_k) Z^k.$$

En particulier, pour tout entier $k < M$, on a $a_k^{(n_0)} = a_k$. Ainsi $|a_k| = |a_k^{(n_0)}| \leqslant C^k$. On en déduit que $f \in E_C$. $\square$

**Proposition 36** *Pour tout $a \in \Omega$ tel que $|a| < 1/C$, l'évaluation en $a$*

$$\begin{array}{rccc} \sigma_a : & E_C & \to & \Omega \\ & \sum_{n\geqslant 0} a_n Z^n & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n a^n \end{array}$$

*est bien définie et est un morphisme d'anneaux continu.*

*Démonstration* Seule la continuité mérite de s'y attarder. Il suffit de vérifier la continuité en 0. Soit $(f_k)_k$ une suite de $E_C$ qui converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $C|a| < 1$, il existe un entier $M$ tel que $(C|a|)^M < \varepsilon$. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $z_Z(f_n) \geqslant M$. Ecrivons $f_n(Z) = \sum_{k\geqslant M} a_{n,k} Z^k$. On a

$$|\sigma_a(f_n)| = |f_n(a)| \leqslant \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\geqslant M}} |a_{n,k}|.|a|^k \leqslant (C|a|)^M,$$

(toujours par le fait que $C|a| < 1$). On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_a(f_n) = 0$. $\square$

# Références


[1] M. Ably, L. Denis, F. Recher, *Transcendance de l'invariant modulaire en caractéristique finie*, Math. Zeitschrift **231** (1999), 75–89.

[2] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* $\Gamma$*-values*, Ann. Math. **160.2** (2004), 237 ?-313.

[3] A. Aşan, H. Merken, *On some transcendental values of the p-adic gamma function*, Contemporary Mathematics **665** (2016), 159–164.

[4] M. Bhargava, *P-orderings and polynomial functions on arbitrary subsets of Dedekind rings*, J. reine angew. Math. **490** (1997), 101–127.

[5] J. Bell, N. Bruin, M. Coons, *Transcendence of generating functions whose coefficients are multiplicative*, Trans. American Math. Soc. **364.2**, 933–959.

[6] N. Bourbaki, *Elements de mathématiques : Algèbre Chapitre 4 à 7*, (2007) Springer Berlin, Heidelberg.

[7] P.J. Cahen, J.L. Chabert, *Old problems and new questions around integer-valued polynomials and factorial sequences*, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra, Springer (2006), 89–108.

[8] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Mathematical Journal, **1** (1935), 137–168.

[9] L. Carlitz, *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Mathematical Journal, **3.3** (1937), 503–517.

[10] C.Y. Chang, M. Papanikolas, D. Thakur, J. Yu *Algebraic independence of arithmetic gamma values and Carlitz zeta values*, Adv. Math. **223.4** (2010), 1137 ?-1154.

[11] Y.T. Chen *A $v$-adic variant of Anderson-Brownawell-Papanikolas linear independence criterion and its application*, prépublication.

[12] G.V. Chudnovsky, *Algebraic independence of constants connected with the exponential and elliptic functions*, Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A, **8** (1976), 698–701.

[13] L Denis, *Indépendance algébrique des dérivées d'une période du module de Carlitz*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **69.1** (2000), 8–18.

[14] L. Denis, *Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique $p$*, Bull. Austral. Math. Soc. **74.3** (2006), 461–470.

[15] A. Escassut, Analytic elements in $p$-adic analysis, World Scientific, 1995.

[16] G. Fernandes, *Méthode de Mahler en caractéristique non nulle : un analogue du théorème de Ku. Nishioka*, Annales de l'Institut Fourier **68.6** (2018), 2553–2580.

[17] D. Goss, *The $\Gamma$-function in the arithmetic of function fields*, Duke Math. J. **66** (1988), 163–191.

[18] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **35**, Springer Berlin (1996).

[19] B. Gross, N. Koblitz, *Gauss Sums and the $p$-adic $\Gamma$-function*, Ann. of Math. Second Series **109.3** (1979), 56–581

[20] M. Krasner, *Prolongement analytique dans les corps valués complets : domaines quasi-connexes*, C. R. Acad. Sc. Paris, **238**, 1954, 2385–2387 ;

[21] M. Krasner, *Prolongement analytique dans les corps valués complets : éléments analytiques, préliminaires du théorème d'unicité*, C. R. Acad. Sc. Paris, **239**, 1954, 468–470 et 745–747.

[22] Lindemann ,*Ueber die Zahl* $\pi$. Math. Ann. **20** (1882), 213–225.

[23] M. Mendès France, J.-Y. Yao, *Transcendence and the Carlitz-Goss gamma function*, J. Number Th. **63** (1997), 396–402.

[24] Y. Morita, *A p-adic analogue of the* $\Gamma$*-function*, J. Fac. Sc., University Tokyo, **1.22** (1975), 255–266.

[25] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Springer (1995).

[26] Ku. Nishioka, *New approach in Mahler ?s method*, J. Reine Angew. Math. **407** (1990), 202–219.

[27] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics **1631** (1996).

[28] F. Pellarin, *An introduction to mahler's method for transcendence and algebraic independence*, $t$-Motives : Hodge structures, transcendence and other motivic aspects, European Math. Soc. pub. (2020), 297–349.

[29] D.S. Thakur, *Gamma functions and Gauss sums for function fields and periods of Drinfeld modules*, Thesis, Harvard University, 1987.

[30] D. Thakur, *Gauss sums for* $\mathbb{F}_q[T]$, Inventiones Mathematicae, **94.1**, 105-112.

[31] D. Thakur, *Gamma functions for function fields and Drinfeld modules*, Ann. Math. **134** (1991), 25–64.

[32] D. Thakur, *On Gamma functions for function fields*, The Arithmetic of Function Fields, Walter de Gruyter (1992), 75 ?86.

[33] D. Thakur, *Transcendence of gamma values for* $\mathbb{F}_q[T]$, Ann. Math. **144** (1996), 181–188.

[34] D. Thakur, *Automata and Transcendence*, Contemp. Math. **210** (1997), 387–399.

[35] D. Thakur, *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2004.

[36] D. Thakur, *From rationality to transcendence in finite characteristic*, Journées Annuelles Société Mathématique de France (2012), 21–48.

[37] D. Thakur, *Arithmetic of Gamma, Zeta and Multizeta values for Function Fields*, Arithmetic geometry over Global Function Fields (Series : Advanced courses in Mathematics), Birkhauser (2014).

[38] D. Thakur, *Automata methods in transcendence*, $t$-Motives : Hodge structures, transcendence and other motivic aspects, European Math. Soc. pub. (2020), 351–372.

[39] A. Thiery, *Indépendance algeébrique des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfeld*, The Arithmetic of Function Fields, Walter de Gruyter (1992), 265–284.

[40] Z.Y Wen, J.Y Yao, *Transcendence, automata theory and gamma functions for polynomial rings*, Acta Arithmetica **101** (2002), 39–51.

[41] J.Y Yao, *Carlitz-Goss gamma function, Wade's method, and transcendence*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **579** (2005), 175–193.

[42] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic $p$*, Annals Math. **134.1** (1991), 1–23.

[43] J. Yu, *Transcendence in finite characteristic*, The Arithmetic of Function Fields, Walter de Gruyter (1992), 253–264.