

# Les preuves de Syracuse

Pierre Lamothe

Octobre 2023

## Abstract

The monoid algebra of transition functions between numbers of generalized Collatz sequences has revealed the universal cause of cycles and were used to demonstrate, both :

- The absolute truth of the Syracuse conjecture cannot be verified mathematically, as a random cycle is always possible when the ratio  $(d/m)$  of  $d$  divisions by 2 to  $m$  multiplications by 3 is a rational approximation of  $\log 3 / \log 2$ .
- The Syracuse conjecture remains true with a zero probability status in practice due to the exponential decay of its probability as a function of cycle length.

## Introduction

En préambule, avant d'aborder les démonstrations, voici un rapide coup d'œil sur la destination et sur l'itinéraire suivi, un peu inhabituel.

### Destination

La conjecture de Syracuse stipule que toute suite de Collatz aboutit au cycle (1 4 2 1). Soit elle est vraie, soit elle est fausse, présume-t-on. Et on semble croire qu'on pourrait éliminer tout doute en faveur de l'une des alternatives. La vérité accessible s'avère plus nuancée. S'appuyant sur les propriétés d'un invariant cyclique, on peut montrer à la fois

1. Qu'on ne peut éliminer la possibilité « théorique » d'un cycle extrêmement long
2. Qu'en raison de la décroissance exponentielle de la probabilité selon la longueur, cette possibilité est « pratiquement » nulle

### Itinéraire

Les suites de Collatz sont obtenues par itération en calculant le successeur de  $x$ , soit

$$\begin{aligned} C(x) &= 3x + 1 && \text{si } x \text{ est impair} \\ D(x) &= x/2 && \text{sinon} \end{aligned}$$

*Exemple* (9 28 14 7 22 11 34 17 52 26 13 ...)

On est certes en présence d'un système dynamique du fait d'une loi d'évolution, mais il s'agit d'une loi linéaire sur les entiers positifs. On n'est pas limité au calcul itératif à partir de valeurs  $x$  déterminées. En composant la chaîne de fonctions linéaires qui relie deux inconnues on obtient une équation diophantienne linéaire aisément résoluble. Une infinité de suites numériques sont décrites dans une solution paramétrique unique où on distingue aisément la minimale qui pourrait être cyclique.

On ne peut énumérer directement les suites finies de Collatz, mais on peut énumérer les chaînes de fonctions, créant ainsi un ordre qui se répercute sur les suites numériques. Puisque  $C(x)$  est toujours pair il est plus simple d'utiliser la fonction  $T(x) = (3x + 1)/2$  pour les suites réduites de Collatz. L'ordre des chaînes est alors

( T TD TT TDD TDT TTD TTT TDDD TDDT TDTD ... )

Il suffit de remplacer  $T$  par 1 et  $D$  par 0 dans ces chaînes pour obtenir le rang  $\rho$  de la chaîne en binaire

( 1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010 ... )

À la chaîne de rang  $\rho$  correspond une équation  $y = \omega(x)$  spécifique. La fonction  $\omega$  est la composée qui relie le début  $x$  et la fin  $y$  des suites possibles. Si on a  $m$  multiplications par 3 et  $d$  divisions par 2 on verra que  $\omega$  a la forme

$$\omega(x) = (3^m x + Q)/2^d$$

Ce qui est remarquable à propos des divers paramètres  $Q$  associés au même couple  $(m, d)$  c'est qu'ils forment des cycles

$$(Q_i)_m = (Q_1 Q_2 \dots Q_m)$$

liés à la fonction de rotation  $R^m(Q) = Q$  qu'on peut expliciter ainsi

$$R(Q) = (3Q + \delta) \text{ mod } 2 \quad \text{où } \delta = 2^d - 3^m$$

(le modulo multiplicatif est noté mod\*)

L'invariant qu'on découvre en posant la condition cyclique  $y = x$  devient dès lors compréhensible

$$\begin{aligned} x &= (3^m x + Q)/2^d \\ x &= Q/\delta \end{aligned}$$

ssi  $(Q \text{ mod } \delta = 0)$ . La solution entière  $Q/\delta$  implique la création d'un cycle numérique

$$\begin{aligned} (Q_i)_m &= (Q_1 Q_2 \dots Q_m) \\ (x_i)_m &= (Q_1/\delta Q_2/\delta \dots Q_m/\delta) \end{aligned}$$

Vu l'importance de ce résultat, on le démontrera dans le cadre plus complexe des suites de Collatz généralisées qui utilise  $p$  pour multiplier et  $r$  pour diviser. Le couple  $(3, 2)$  est un cas particulier de  $(p, r)$ .

Après avoir prouvé que  $Q$  et  $\delta$  sont indépendants algébriquement, on en conclura que là où  $Q \text{ mod } \delta = 0$  est possible, son occurrence est « essentiellement » aléatoire et donc théoriquement imprévisible. Mais il y a extinction pratique de sa probabilité là où c'est possible, liée à la croissance exponentielle des  $\delta$  minima le long de la ligne des  $d/m$  qui correspondent aux approximations rationnelles de  $\log 3 / \log 2$ .

## Pour composer aisément

Une première difficulté à contourner est la composition à la manière habituelle des longues chaînes de fonctions où l'appellation  $f_1 f_2 \dots f_n$  désigne la composée  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$

$$f_1 f_2 \dots f_n(x) = [f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1](x) = f_n(\dots(f_2(f_1(x))\dots))$$

On peut substituer à cette fastidieuse opération une algèbre d'opérateurs linéaires. À la fonction  $f(x) = (ax + c)/b$  où  $a, b, c$  sont des rationnels positifs on associe l'opérateur triplet  $\langle f \rangle = \langle a, b, c \rangle$  équivalent à  $f$

$$\langle f \rangle (x) = \langle a, b, c \rangle (x) = (ax + c)/b = f(x)$$

Noter qu'un tel triplet de rationnels est réductible à des entiers car  $\langle ka, kb, kc \rangle \equiv \langle a, b, c \rangle$ .

Et afin de pouvoir composer dans cet ordre  $\langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle \dots \langle f_n \rangle \equiv f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  on définit la loi de composition appropriée

$$\langle a, b, c \rangle \langle a', b', c' \rangle = \langle aa', bb', ca' + bc' \rangle$$

On forme ainsi un groupe dont l'élément neutre est  $\langle 1, 1, 0 \rangle$ . On n'utilisera pas de l'inverse  $\langle a, b, c \rangle^{-1} = \langle b, a, -c \rangle$  avec les chaînes de  $\langle T \rangle = \langle 3, 2, 1 \rangle$  et de  $\langle D \rangle = \langle 1, 2, 0 \rangle$  qui forment un monoïde et non un groupe. On démontre aisément par récurrence ces deux formules : Puissance  $\langle a, b, c \rangle^k$  et Produit  $\langle a_1, b_1, c_1 \rangle \langle a_2, b_2, c_2 \rangle \dots \langle a_n, b_n, c_n \rangle$ .

$$\langle a, b, c \rangle^k = \langle a^k, b^k, c(a^k - b^k)/(a - b) \rangle$$

$$\prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i, c_i \rangle = \langle a, b, c \rangle \text{ où}$$

$$a = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$b = \prod_{i=1}^n b_i$$

$$c = \begin{array}{ccccccc} & c_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ & + b_1 & c_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ & + b_1 & b_2 & c_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ + b_1 & b_2 & b_3 & c_4 & \cdots & a_n \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ + b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & c_n \end{array}$$

Voici une formule utile appliquée à l'exemple du cycle  $-17$  de Collatz-Kakutani, de chaîne  $TTTTDTTTDDD$  dont les impairs sont  $(-17 - 25 - 37 - 55 - 41 - 61 - 91 - 17)$ .

$$\langle T^a D^b \rangle = \langle 3^a, 2^{a+b}, 3^a - 2^a \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle TTTTDTTTDDD \rangle &= \langle T^4 D \rangle \langle T^3 D^3 \rangle \\ &= \langle 3^4, 2^5, 65 \rangle \langle 3^3, 2^6, 19 \rangle \\ &= \langle 3^7, 2^{11}, (65 \times 3^3 + 2^5 \times 19) \rangle = \langle 3^7, 2^{11}, 2363 \rangle \end{aligned}$$

$$(\text{entier cyclique}) \ x = 2363 / (2^{11} - 3^7) = -17$$

## Invariant cyclique

Les suites de Collatz généralisées sont constituées d'entiers relatifs sauf zéro. Dans leur forme réduite elles sont définies par

$$\begin{aligned} D(x) &= x/r && \text{si } x \bmod r = 0 \\ T(x) &= \lceil px/r \rceil && \text{sinon} \end{aligned}$$

Les paramètres  $p$  et  $r$  sont premiers entre eux et tels que  $p > r > 1$ . Pour la forme complète on utilise  $C = rT$  au lieu de  $T$ . Enfin la forme compacte, qui exclue ceux divisibles par  $r$ , est définie par  $N$ .

$$N(x) = T(x) \bmod^* r = \lceil px/r \rceil \bmod^* r$$

Ça correspond à peu de chose près à la définition de Hasse qui donne les mêmes suites en négatifs et qu'on obtient en utilisant la fonction plancher  $\lfloor x \rfloor$  au lieu de plafond  $\lceil x \rceil$ .

Pour simplifier, on considère seulement les suites finies dont le début et la fin ne sont pas divisibles par  $r$ . On peut mettre ainsi en bijection les trois ensembles ( $T$ ,  $C$  et  $N$ ) et passer d'une forme à l'autre sans entrave.

La fonction généralisée  $T(x)$  réintroduit la dynamique. Des valeurs  $x$  déterminées sont requises. Il faut alors utiliser ses éléments alternatifs  $T_q(x) = px + q$  ( $0 < q < r$ ) qui peuvent opérer avec des inconnues. L'énumération des chaînes de  $T_q$  et  $D$  se fait alors en base  $r$ . Par exemple en base  $r = 3$  on a

$$\begin{aligned} & (1 \ 2 \ 10 \ 11 \ 12 \ 20 \ 21 \ 22 \ 100 \ 101 \ \dots) \\ & (T_1 \ T_2 \ T_1 D \ T_1 T_1 \ T_1 T_2 \ T_2 D \ T_2 T_1 \ T_2 T_2 \ T_1 DD \ T_1 DT_1 \ \dots) \end{aligned}$$

Une fonction  $N_q(x)$  reste dynamique à un autre niveau. L'usage de  $x \bmod^* r$  requiert des valeurs  $x$  déterminées. Il faut alors utiliser les fonctions  $N_{qd} = T_q D^{d-1}$  pour constituer l'ensemble  $\Omega = \{\omega_\rho\}$  qui forme un monoïde libre sur la base illimitée des  $N_{qd}$ .

$$\begin{aligned} \omega_\rho &= \prod_{i=1}^m N_{q_i d_i} = \prod_{i=1}^m T_{q_i} D^{d_i-1} \\ \langle \omega_\rho \rangle &= \prod_{i=1}^m \langle p, r_i, q_i \rangle \quad \text{où } r_i = r^{d_i} \\ &= \langle p^m, r^d, Q \rangle \\ &\quad + q_1 \ p \ p \ p \quad \dots \quad p \\ &\quad + r_1 \ q_2 \ p \ p \quad \dots \quad p \\ &\quad + r_1 \ r_2 \ q_3 \ p \quad \dots \quad p \\ \text{où } Q &= + r_1 \ r_2 \ r_3 \ q_4 \quad \dots \quad p \\ &\quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ &\quad + r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \quad \dots \quad q_m \end{aligned}$$

Ça correspond à l'équation diophantienne

$$p^m x - r^d y + Q = 0 \quad (1)$$

dont le paramètre  $Q$  peut s'écrire de manière concise

$$Q = \sum_{i=1}^m q_i p^{m-i} r^{\sigma_i} \quad (2)$$

$$\text{où } \sigma_i = \sum_{k=1}^i d_{k-1} \quad \text{avec } d_0 = 0 \quad (3)$$

L'expression du rang  $\rho$  en base  $r$  fournit directement les deux suites requises  $(q_i)_m$  et  $(d_i)_m$  dont on tire aisément  $(\sigma_i)_m$ . Par exemple avec  $\rho = q_1 0 0 q_2 0 0 0 q_3 q_4 0 0 q_5 0$  en base  $r$  on peut écrire directement  $Q = q_1 p^4 + q_2 p^3 r^3 + q_3 p^2 r^7 + q_4 p r^8 + q_5 r^{11}$  car

$$(d_i)_m = (3 \ 4 \ 1 \ 3 \ 2) \rightarrow (\sigma_i)_m = (0 \ 3 \ 7 \ 8 \ 11)$$

L'équation cyclique devient  $p^m x - r^d x + Q = 0$  et son unique solution est l'invariant

$$x = Q/\delta \quad \text{où } \delta = r^d - p^m \quad (4)$$

## Rotation des indices

Dans quel type de cycle un entier  $x$  est-il inséré à titre de facteur de  $Q$ ? On suppose ici que c'est un cycle de rotation des indices  $i$  : tant des  $N_{q_i d_i}$  dans  $\omega_\rho$  que des  $q_i 0^{d_i-1}$  dans  $\rho$  en base  $r$ . Et on va tenter d'explicitier la fonction en vue  $R^m(Q) = Q$  en la construisant

$$\begin{aligned} Q &= [p^{m-1} \ p^{m-2} \ \dots \ p \ 1] [q_1 \ q_2 r^{\sigma_2} \ \dots \ q_m r^{\sigma_m}]^\top \\ pQ &= [p^m \ p^{m-1} \ \dots \ p^2 \ p] [q_1 \ q_2 r^{\sigma_2} \ \dots \ q_m r^{\sigma_m}]^\top \\ pQ + q_1 r^d &= [p^m \ p^{m-1} \ \dots \ p^2 \ p \ 1] [q_1 \ q_2 r^{\sigma_2} \ \dots \ q_m r^{\sigma_m} \ q_1 r^d]^\top \\ pQ + q_1 r^d - q_1 p^m &= [p^{m-1} \ \dots \ p^2 \ p \ 1] [q_2 r^{\sigma_2} \ \dots \ q_m r^{\sigma_m} \ q_1 r^d]^\top \\ (pQ + q_1 r^d) \bmod^* r &= [p^{m-1} \ p^{m-2} \ \dots \ p \ 1] [q_2 \ q_3 r^{\sigma_3 - \sigma_2} \ \dots \ q_1 r^{d - \sigma_2}]^\top \end{aligned} \quad (5)$$

où l'opérateur dynamique  $\bmod^* r$  équivaut ici à la division par  $r^{\sigma_2}$ . De toute évidence on a bien obtenue la rotation des  $q_i$  et aussi, quoique de façon moins apparente, celle des  $d_i$  :

1.  $(d_1 \rightarrow d_2)$  au début  $\sigma_2 = d_1$  est remplacé par  $\sigma_3 - \sigma_2 = d_2$
2.  $(d_m \rightarrow d_1)$  à la fin  $\sigma_m = d - d_m$  est remplacé par  $d - \sigma_2 = d - d_1$ .

Reste à remplacer la valeur spécifique  $q_1$  par son équivalent dynamique pour obtenir la fonction de rotation  $R(Q)$ . On va démontrer que  $q_1 = \phi Q \pmod r$  où  $\phi$  est une constante du triplet  $(p, r, m)$

$$\phi = p^{r-m \pmod{(r-1)}} \pmod r \quad (6)$$

de sorte qu'on ait

$$\boxed{R(Q) = (pQ + (\phi Q \pmod r) \delta) \pmod* r} \quad (7)$$

En effet, comme  $p$  et  $r$  sont premiers entre eux et que  $p > r$ , on a

$$Q = q_1 p^{m-1} + r \left( \sum_{i=2}^m q_i p^{m-i} r^{\sigma_i-1} \right)$$

$$pQ \equiv q_1 p^m \pmod r$$

Et comme  $p^r \equiv p \pmod r$  on obtient

$$p^r Q \equiv q_1 p^{m \pmod{(r-1)}} \pmod r$$

$$p^{r-m \pmod{(r-1)}} Q \equiv q_1 \pmod r$$

$$\phi Q \equiv q_1 \pmod r$$

On a donc bien une fonction dynamique  $R(Q)$  qui engendre les rotations  $(Q_i)_m$  dont on présume à ce moment-ci qu'elle engendre les cycles numériques lorsque  $Q \pmod \delta = 0$ .

REMARQUE Même si on n'a pas besoin d'en savoir davantage sur  $R(Q)$  pour la démonstration, on peut noter utilement que  $\phi$  et  $R(Q)$  ne dépendent pas de  $d$  et qu'il en découle des conséquences remarquables. On doit se contenter d'un exemple. Soit

$$\langle \omega \rangle = \langle T_a T_b T_c T_d \rangle = \langle p^4, r^4, Q \rangle$$

$Q = ap^3 + bp^2r + cpr^2 + dr^3$  se déduit aisément. À partir de cette valeur  $Q$  initiale on peut construire avec la fonction  $R(Q)$  l'ensemble illimité des valeurs  $Q$  dans les chaînes qui suivent et dans leurs rotations  $(b, c, d, a) .. (d, a, b, c)$  :

$$\{T_a D^x T_b D^y T_c D^z T_d D^t\} \quad (0 < a, b, c, d < r) \quad (0 \leq x, y, z, t < \infty)$$

Au début  $Q_1 = Q$ . Avec les  $\delta$  suivants les débuts des cycles sont les éléments des cycles antérieurs :  $Q_{11} = Q_1$ ,  $Q_{21} = Q_2$  ... jusqu'à  $Q_{451} = Q_{45}$  ici, mais c'est sans limite. À noter que deux cycles de  $\delta$  distincts peuvent partager deux valeurs  $Q$  tournant en sens inverse.

$$(\delta = r^4 - p^4) \quad (Q_1 \ Q_2 \ .. \ Q_4)$$

$$(\delta = r^5 - p^4) \quad (Q_{11} \ Q_{12} \ .. \ Q_{15}) \ .. \ (Q_{41} \ Q_{42} \ .. \ Q_{45})$$

$$(\delta = r^6 - p^4) \quad (Q_{111} \ Q_{112} \ .. \ Q_{116}) \ .. \ (Q_{451} \ Q_{452} \ .. \ Q_{456})$$

La REMARQUE visait seulement à laisser voir que l'ensemble  $\Omega$  est solidement structuré en couches  $m$  de même  $\phi$  séparées en sous-couches de cycles imbriqués, pour chacune des valeurs  $Q$  initiales associées à  $\delta = r^m - p^m$ .

Avec l'invariant (4) et la rotation (7) on peut seulement affirmer qu'il existe un cycle numérique  $(x_i)_m$  qui débute par  $x_1 = Q_1/\delta$  lorsque  $Q_1 \bmod \delta = 0$ . Pour  $(x_i)_m = (Q_i/\delta)_m$  il faut montrer que  $x_1 = Q_1/\delta$  entraîne  $x_2 = Q_2/\delta$ . À la fin de la construction (5) on avait

$$(pQ + q_1\delta) \bmod^* r = [p^{m-1} \ p^{m-2} \ \dots \ p \ 1] [q_2 \ q_3 r^{\sigma_3 - \sigma_2} \ \dots \ q_1 r^{d - \sigma_2}]^\top$$

où l'opérateur  $\bmod^* r$  remplaçait la division par  $r^{\sigma_2} = r^{d_1}$ . Ajoutant  $Q_1 = x_1\delta$  on a

$$\begin{aligned} Q_2 &= (pQ_1 + q_1\delta)/r^{d_1} \\ &= (px_1\delta + q_1\delta)/r^{d_1} \\ &= ((px_1 + q_1)/r^{d_1}) \delta \\ &= x_2 \delta \end{aligned}$$

Finalement par récurrence circulaire on obtient

$$(x_i)_m = (Q_i/\delta)_m = (Q_1/\delta \ Q_2/\delta \ \dots \ Q_m/\delta) \quad (8)$$

## Prévisibilité et aléatoire

D'un point de vue diophantien la solution  $x = Q/\delta$  de l'équation  $\omega(x) = x$  signifie que la condition cyclique d'une suite généralisée de Collatz est  $Q \bmod \delta = 0$  mais le lien avec la cyclicité reste un peu mystérieux. En plongeant cette équation dans les rationnels où cette condition disparaît on peut mettre en lumière la nature profonde de la cyclicité. En effet, toutes les équations  $\omega_\rho(x) = x$  ont une solution rationnelle unique  $x = Q_\rho/\delta_\rho$  reliée à un cycle paramétrique  $(Q_i)_m$  par rotation des indices dans l'expression de  $Q_\rho$ . La condition cyclique diophantienne  $Q \bmod \delta = 0$  n'a pas vraiment à voir avec la cyclicité comme telle. Dans le tissu rationnel, la cyclicité est omniprésente. La condition  $\delta|Q$  ne la fait pas surgir comme une exception autour de laquelle elle serait absente. Elle ne fait que sélectionner parmi tous ces cycles rationnels de rotation ceux qui ont seulement des  $x_i$  entiers.

En vue de saisir les limites de la prévisibilité des cycles on a besoin finalement de montrer que  $\delta_\rho$  ne peut pas être un facteur algébrique de  $Q_\rho$ . On a (2) et (4) :

$$\begin{aligned} Q_\rho &= \sum_{i=1}^m q_i p^{m-i} r^{\sigma_i} \\ \delta_\rho &= r^d - p^m \end{aligned}$$



En effet, en tant que polynômes à deux indéterminées  $p$  et  $r$ , les degrés de  $\delta_\rho$  ( $m$  et  $d$ ) sont supérieurs à ceux de  $Q_\rho$  ( $m - 1$  et  $\sigma_m = d - d_m$ ). L'entier  $\delta_\rho$  peut être un facteur numérique imprévu de l'entier  $Q_\rho$  mais  $\delta_\rho$  ne pas peut être un facteur algébrique prévisible de  $Q_\rho$ .

Pour la grande majorité des couples  $(m, d)$  il est aisé de prévoir qu'il ne peut y avoir de cycle quand par exemple il y a trop de divisions pour le nombre de multiplications. On verra en détail les contraintes qui réduisent la zone d'incertitude. S'il est prévisible que  $Q \bmod \delta$  ne puisse valoir zéro, on ne peut pour autant prévoir sa valeur encore aléatoire entre 1 et  $\delta - 1$  lorsque  $\delta > 2$ . Mais dans la zone d'incertitude la valeur zéro s'ajoute à l'aléatoire. S'en suit-il alors simplement qu'il est impossible de trouver par l'algèbre un cycle qui invaliderait la conjecture? Non, il y a beaucoup plus important :

On ne pourra exclure la possibilité théorique d'un cycle d'une longueur en pratique inaccessible lorsque le rapport  $d/m$  est très proche de  $\log p / \log r$ .

Posons  $Z = \log p / \log r$ . Si  $m \rightarrow \infty$  alors  $|\delta| \rightarrow \infty$  avec  $(d/m) = (\{Zm\}/m)$  mais paradoxalement  $\delta = 0$  pour  $(d/m) = (Zm/m)$ . Pour une valeur  $m$  donnée et  $d$  qui varie depuis  $d = m$  on a pour  $1 \leq d/m < Z$  des  $\delta$  négatifs croissants et des cycles négatifs. Et pour  $Z < d/m < \infty$  on a des  $\delta$  positifs décroissants et des cycles positifs.

### Prévoir certains cycles

On peut repérer aisément les cycles triviaux ayant  $|\delta| = 1$ . Si on mélange par exemple les suites  $(3^i)$  et  $(2^j)$  on a au départ 2 3 4 8 9 où se repèrent les trois cycles triviaux de Collatz-Kakutani ayant les  $\delta$  unitaires (2 - 3) (4 - 3) (8 - 9). On peut prévoir aussi des cycles très probables. Par exemple dans  $(p, r) = (5, 2)$  la proximité de  $5^3$  et  $2^7$  donne  $\delta = 3$ . Dans les cinq cycles paramétrique de  $(m, d) = (3, 7)$  on trouve effectivement deux cycles numériques :

$$\begin{array}{cccccc} (Q_i)_m & (39\ 99\ 249) & (43\ 109\ 137) & (51\ 129\ 81) & (53\ 67\ 169) & (61\ 77\ 97) \\ (x_i)_m & (13\ 33\ 83) & & (17\ 43\ 27) & & \end{array}$$

Pour des  $\delta$  plus élevés, la question se pose d'évaluer la probabilité d'occurrence de cycles non triviaux. Il n'est plus pertinent de travailler dans le cadre des suites de Collatz généralisées pour un calcul des probabilités ne visant que la « vérité pratique » de la conjecture de Syracuse. On se contentera de les évaluer dans le cadre des suites d'entiers relatifs non nuls de Collatz-Kakutani où  $(p, r) = (3, 2)$ .

### Probabilité selon la longueur

De quel type de probabilité sera-t-il question? Il n'y a pas ici de dynamique. Tout est déterminé. Ce sera comme un immense jeu de cartes dont le brassage est inconnu. On

évaluera simplement la probabilité de résultats de tirages selon le nombre de possibilités dans le  $\delta$  et le nombre de cas considérés, un peu comme des essais de tirage.

Pour tous les  $Q_{dm}$  formés avec  $m$  multiplications et  $d$  divisions le discriminant cyclique  $\delta = 2^d - 3^m$  est une constante. Si le rapport  $d/m$  est dans la zone d'incertitude, rien ne permet de distinguer la valeur zéro parmi les  $\delta$  valeurs possibles de  $v = Q_{dm} \bmod \delta$ . Alors on pourrait dire que la probabilité d'avoir zéro est  $|1/\delta|$  pour chaque  $Q_{dm}$  pris isolément.

Mais ce qui nous intéresse c'est la probabilité de trouver un nouveau cycle dans la classe  $K_{dm} = \{Q_{dm}\}$ . Il faut alors tenir compte de deux aspects. Le plus important d'abord : pour  $v = \text{zéro}$ , à l'encontre des autres valeurs, les cas  $dm$  ne sont pas indépendants. En effet on déduit de (8) que les valeurs  $Q_i \bmod \delta$  d'un cycle valent toutes zéro. Ce sont donc les cycles  $(Q_i)_m$  qui constituent les cas indépendants.

L'aspect secondaire concerne le calcul du nombre de cycles : en principe, il faudrait tenir compte des spirales qui sont les cycles à plusieurs tours. Lorsqu'il existe un cycle numérique  $(x_i)_m$  pour  $(m, d)$  il existe forcément pour tous les  $(km, kd)$  les mêmes cycles à  $k$  tours  $(x_i)_{km}$ . Si  $d/m$  est irréductible le nombre de cycles est  $e = \text{card } K_{dm} / m$  sinon on devrait réduire le nombre de cycles à considérer pour un nouveau cycle à un tour  $(x_i)_m$ . C'est une correction infime, correspondant à peu près à  $e = \lfloor \text{card } K_{dm} / m \rfloor$ , mais c'est surtout inutile : il est prévisible que partout où se retrouvent les spirales, à l'exception de  $(m, d) = (4, 6)$ , on le voit dans la figure (2), il ne peut y avoir de nouveau cycle à un tour.

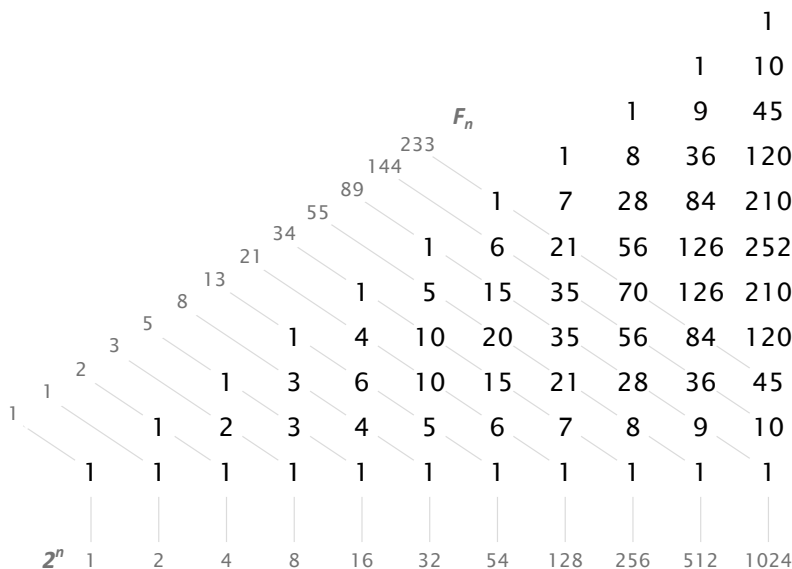


FIGURE 1 – Le triangle de Pascal de card  $K_{dm}$

Combien y a-t-il d'éléments dans la classe  $K_{dm}$ ? Ce nombre de  $Q_{dm}$  distincts formés avec  $m$  multiplications et  $d$  divisions est identique à celui du nombre de  $\rho$  distincts ayant

un total de  $d$  digits dont  $m$  digits 1. C'est un problème élémentaire dont la solution est résumée dans la figure (1) du triangle de Pascal où aux coordonnées  $(d, m)$  on trouve

$$\text{card } K_{dm} = \binom{d-1}{m-1} \quad (9)$$

En effectuant les sommes dans les alignements verticaux et diagonaux on trouve du coup le nombre  $2^{d-1}$  des cas de même  $d$  et le nombre de Fibonacci  $F_{d+m-1}$  de ceux de même longueur.

À partir de la probabilité  $P_{non}$  qu'il n'y ait pas de nouveau cycle dans la classe  $K_{dm}$  on peut calculer la probabilité approximative  $P_{oui} = 1/N$  qu'il y en ait au moins un, puis le nombre parlant  $N$ .

$$\begin{aligned} P_{non} &= \left( \frac{|\delta|-1}{|\delta|} \right)^e = 1 - \binom{e}{1} |\delta^{-1}| + \binom{e}{2} |\delta^{-2}| - \dots \\ &= 1 - e |\delta^{-1}| + \binom{e}{2} |\delta^{-2}| - \dots \\ &\cong 1 - e |\delta^{-1}| \\ P_{oui} &\cong e |\delta^{-1}| \equiv 1/N \\ N &\cong |\delta| e^{-1} \end{aligned}$$

Puisque  $e = \text{card } K_{dm} / m$  avec une erreur négligeable on obtient pour les grands nombres :

$$N \cong m |2^d - 3^m| \binom{d-1}{m-1}^{-1} \quad (10)$$

## Mince ligne d'incertitude

Voici  $N$  dans la zone autour de  $(m, d) = (53, 84)$  en supposant l'imprévisibilité.

4 044 932	1 341 818	441 311	137 956	35 977
647 273	208 151	60 226	11 148	4 145
94 851	23 166	36	6 551	7 641
5 999	4 479	6 929	6 810	5 994
5 901	6 455	868	5 048	4 280

TABLE 1 – Valeur de  $N$  pour  $(m, d) = (53, 84) \pm (2, 2)$

En fait, seulement (53,84) était imprévisible d'où on pouvait dire à juste titre : « il y a une chance sur 36 pour qu'il y ait au moins un cycle numérique parmi ses  $1,22 \cdot 10^{21}$  cycles paramétriques. Mais pour les  $(m, d)$  en périphérie il était prévisible qu'il ne pouvait y avoir de cycles ( $N = \infty$ ) à cause d'une valeur moyenne  $x_M$  (définie plus loin) des cycles possibles  $(x_i)_m$  permettant de réduire pratiquement la zone d'incertitude à une mince ligne de rapports  $d/m$  à proximité de  $\log 3 / \log 2$ .

Dans le second tableau de la table 2 on sait qu'il ne pouvait pas y avoir de cycle en dehors de (53,84) car les moyennes  $x_M$  qui entourent 8461 s'avèrent trop petites pour une suite cyclique compacte de 53 nombres dont une partie est inférieure à  $x_M$ .

On voit dans le premier tableau ce qui explique la disparité des valeurs  $N$ , soit la valeur de  $|\delta|$  comparée à celle de (53,84) qui vaut 40 432 553 845 953 101 497 907.

4195	4075	3386	3357	2401
1319	1199	960	481	475
360	240	1	477	1434
40	79	319	797	1754
66	186	425	904	1860

5	7	9	12	23
7	10	16	44	63
13	26	8461	25	13
60	43	16	10	7
21	11	8	6	5

TABLE 2 – Valeurs du  $|\delta|$  relatif et de  $x_M$  autour de (53,84)

Pour définir  $x_M$  on commence par définir la moyenne  $Q_M$  d'un cycle paramétrique  $(Q_i)_m$  quelconque dans  $(m, d)$  par

$$\begin{aligned} \left(\frac{3Q_M + \delta}{Q_M}\right)^m &= \prod_{i=1}^m \frac{3Q_i + \delta}{Q_i} & (11) \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{2^{d_i} Q_{(i+1) \bmod m}}{Q_i} \\ &= 2^d \quad (\text{car c'est un cycle}) \end{aligned}$$

$$Q_M = \frac{\delta}{2^{d/m} - 3} \quad (12)$$

Et on constate que  $Q_M$  est identique pour tous les cycles paramétriques dans  $(m, d)$ . Alors pour tout cycle d'entiers possible  $(x_i)_m$  de même que pour tous les cycles rationnels non entiers évoqués on a dans  $(m, d)$  une moyenne identique  $x_M = Q_M / \delta$ .

$$\boxed{x_M = (2^{d/m} - 3)^{-1}} \quad (13)$$

À  $d/m = 1$  on a le cycle  $(-1)$  et du côté positif à  $d/m = 2$  on a le cycle  $(1)$ . Y a-t-il alors un large secteur de cas  $d/m$  où on pourrait trouver des cycles? En fait ça se réduit

pour le moins à un seul  $d$  possible par  $m$  donné, et voici pourquoi. Si on fixe  $m$  et fait varier  $d$ , le plus petit  $|\delta|$  correspondra à  $d_M = \{m \log_2 3\}$  et en supposant l'imprévisibilité à la plus petite valeur  $N$  du voisinage. En calculant les valeurs  $x_M$  pour  $d_M - 1$  et  $d_M + 1$ , on constate qu'elles oscillent, quelque soit la grandeur de  $m$ , dans l'ordre de grandeur de  $m/2$ . On peut ainsi prévoir qu'aucun cycle  $(x_i)_m$  n'est possible.

$$x_M(m, d_M - 1) = (2^{(d_{M-1})/m} - 3) \approx m/2$$

$$x_M(m, d_M + 1) = (2^{(d_{M+1})/m} - 3) \approx m/2$$

La figure (2) représente le réseau des classes  $K_{dm}$  et la ligne d'incertitude. On peut

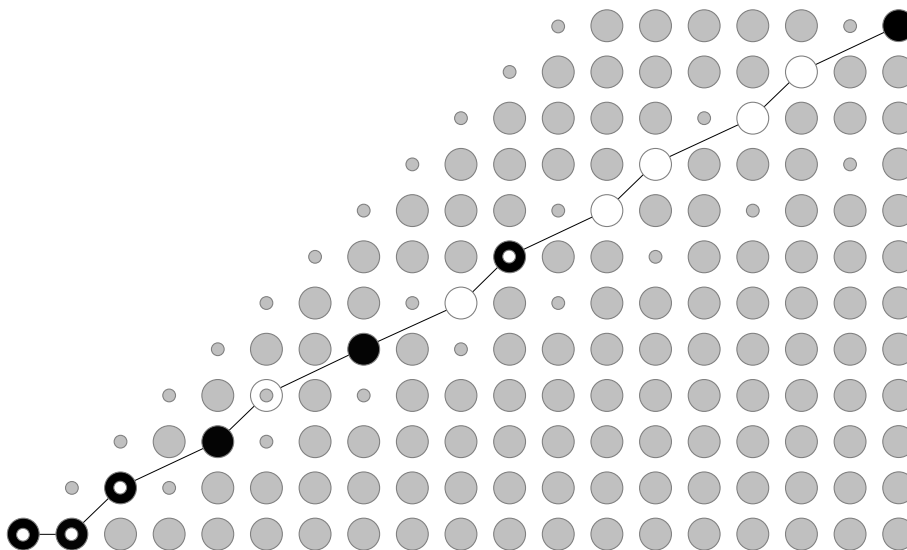


FIGURE 2 – Mince ligne de classes  $K_{dm}$  à potentiel de cycles

prévoir qu'il n'y a pas de cycle à un tour possible dans les classes en gris. Les petits cercles blancs sont les classes où se trouvent les quatre cycles connus  $(-1)$   $(1)$   $(-5)$   $(-17)$  et les petits cercles gris sont les classes où elles spiralent (plusieurs tours). Les cercles reliés par une ligne correspondent aux  $|\delta|$  et  $N$  minimaux, dont ceux en noir qui ont une valeur  $x_M$  suffisamment élevée pour qu'il puisse y avoir des cycles : ce sont les approximations rationnelles de  $\log 3 / \log 2$  qui se suivent ainsi ( $\nearrow$  à droite) ( $\searrow$  à gauche) dans l'arbre de Stern-Brocot :

$$\frac{1}{1} \nearrow \frac{2}{1} \searrow \frac{3}{2} \nearrow \frac{5}{3} \searrow \frac{8}{5} \searrow \frac{11}{7} \nearrow \frac{19}{12} \nearrow \frac{27}{17} \searrow \frac{46}{29} \searrow \frac{65}{41} \searrow \frac{84}{53} \nearrow \frac{149}{94} \dots$$

Il est inutile de vérifier si les cycles sont possibles dans les cercles intermédiaires blancs. Ce qu'on a en vue c'est de montrer la croissance exponentielle de  $N$  selon  $m$ . Il

y a des cycles possibles partout dans la suite de Stern-Brocot, qui contient notamment la suite des réduites de  $\log 3 / \log 2$  où se trouvent les minima de  $N$ . Voici les valeurs  $(d/m) = (A005663)/(A005664)$  de la 6<sup>e</sup> à la 13<sup>e</sup> réduites dans l'Encyclopédie OEIS.

$$\frac{84}{53} \quad \frac{485}{306} \quad \frac{1054}{665} \quad \frac{24727}{15601} \quad \frac{50508}{31867} \quad \frac{125743}{79335} \quad \frac{176251}{111202} \quad \frac{301994}{190537}$$

Les tables (1) et (2) correspondaient à la 6<sup>e</sup> réduite 84/53. Il suffit de ces huit  $(d/m)$  pour illustrer la chute vertigineuse de probabilité d'un cycle en regard de  $m$ . Étant donné la croissance exponentielle des valeurs, ce sont leurs logarithmes qui sont comparés pour la longueur  $m$  du cycle compact, pour la valeur moyenne  $x_M$  d'un cycle potentiel et pour l'inverse  $N$  de la probabilité. Voici le tableau final des valeurs. La dernière colonne où ne paraît que la valeur 20 est celle qui correspondrait au niveau atteint dans les vérifications systématiques de conformité à la conjecture.

$n^e$ réduite	6 <sup>e</sup>	7 <sup>e</sup>	8 <sup>e</sup>	9 <sup>e</sup>	10 <sup>e</sup>	11 <sup>e</sup>	12 <sup>e</sup>	13 <sup>e</sup>	?
$\log(m)$	1.7	2.5	2.8	4.2	4.5	4.9	5.0	5.3	?
$\log(x_M)$	3.9	5.0	6.7	8.5	9.2	9.9	10	12	20
$\log(N)$	1.6	8.4	16.1	374	763	1897	2658	4551	?

TABLE 3 – Chute vertigineuse de la probabilité  $1/N$

Le calcul direct avec une calculatrice de  $\log(N) = \log|\delta| - \log(e)$  n'est pas possible pour l'ensemble de ces réduites. Il a fallu diminuer la taille des opérands en utilisant la fonction *ln gamma* et passer par  $\log_2(\delta)$  pour faciliter la réduction.

$$\log(N) = \frac{\log_2(\delta)}{\log_2(10)} - \frac{\ln(e)}{\ln(10)}$$

où

$$\begin{aligned} \log_2|\delta| &= \log_2|2^d - 3^m| \\ &= \log_2|2^d - 2^{\lambda m}| \quad \text{où } \lambda = \log_2(3) \\ &= \log_2(2^d |1 - 2^{\lambda m - d}|) \\ &= \log_2|1 - 2^{\lambda m - d}| + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(e) &= \ln\left(\frac{d-1}{m-1}\right) - \ln(m) \\ &= \ln\left(\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(m)\Gamma(d-m+1)}\right) - \ln(m) \\ &= \ln\Gamma(d) - \ln\Gamma(m) - \ln\Gamma(d-m+1) - \ln(m) \end{aligned}$$

À la 13<sup>e</sup> réduite où les suites compactes n'ont que  $m = 190\,537$  entiers distincts il y a un nombre  $10^{10351}$  effarant de cycles paramétriques. Avec un aussi grand nombre d'« essais » on pourrait s'attendre à ce qu'il y en ait au moins un satisfaisant la condition cyclique aléatoire  $Q_\rho \bmod \delta = 0$ . Mais la grandeur  $\delta = 10^{90902}$  est plus effarante encore et la probabilité qu'on ait pu en trouver à cette étape pas encore très éloignée de vérification systématique était déjà aussi infime que

$$N^{-1} = 1/10^{4551}$$

Imaginez à l'étape actuelle où la valeur moyenne  $x_M$  atteindrait  $10^{20}$ . Une estimation très grossière peut découler du constat suivant : de la 9<sup>e</sup> à la 13<sup>e</sup> réduite, les valeurs successives de  $\log \log N / \log x_M$  sont : ( 0.303, 0.313, 0.331, 0.342, 0.305 ). En faisant l'hypothèse que  $\log \log N / 20 \approx 0.3$  on aurait une probabilité de l'ordre de

$$1/10^{1\text{million}}$$

## Discussion

Si le but avait été d'apporter la preuve que la conjecture de Syracuse est absolument vraie, il aurait fallu tenir compte aussi de la possibilité de suites divergentes. Ça devient inutile du moment qu'on peut affirmer de manière absolue qu'on ne peut pas éliminer la possibilité d'un cycle ayant des valeurs inaccessibles. La conjecture n'en devient pas fausse pour autant si on peut conjurer la menace de l'« accident » théorique à l'aide d'un argument pratique imparable. Mais la vérité change de statut.

Les approches du problème «  $3x + 1$  » sont multiples mais elles portent semble-t-il toujours sur les suites numériques elles-mêmes, là où tout est désordre. Les arbres creux de descente vers (1) que l'on publie illustrent bien ce chaos.

L'ordre parfait dans l'approche algébrique est illustré par un arbre dont les nœuds sont les fonctions  $\omega_\rho$  résultant de la composition des branches  $T_q$  et  $D$  qui y mènent depuis la racine *identité*. Avec  $T$  et  $D$  dans Collatz-Kakutani on obtient l'arbre binaire complet d'énumération des équations diophantienne  $y = \omega(x)$  dont les solutions paramétriques  $(x_0 + k2^d, y_0 + k3^m)$  relie le début et la fin de toutes les suites finies.

Là, tout n'est qu'ordre et beauté... À se demander où se cache le chaos. Il est totalement confiné en un seul imprévisible :  $Q \bmod \delta$  dont la valeur zéro sélectionne dans le tissu des cycles paramétriques les homologues numériques  $(Q_\rho / \delta)_m$  d'entiers.

Pour affirmer de manière absolue qu'on ne peut éliminer la possibilité d'un cycle ayant des valeurs inaccessibles il ne reste ainsi qu'à s'assurer qu'il existe bien des rapports  $d/m$  pour lesquels aucune contrainte possible n'empêche la valeur zéro. Et on en a la preuve pour les  $(d/m)$  qui convergent vers  $\log 3 / \log 2$  dans l'arbre de Stern-Brocot.

Quant à l'argument imparable qui conjure l'accident théorique d'un cycle inaccessible il consiste en l'appréciation de ce que signifie une probabilité de l'ordre de

$$1 / 10^{1\text{million}}$$