Triedrul lui Frenet de ordinul al doilea

Abel Cavași
abel.cavasi@gmail.com
Satu Mare, România

23 septembrie 2023

Rezumat

Bazându-mă pe proprietatea remarcabilă a vectorului lui Darboux de a fi perpendicular pe normală, definesc un nou triedru asociat curbelor din spațiu și demonstrez că și acest triedru satisface formulele lui Frenet. Spre deosebire de lucrarea anterioară ([2]), unde am folosit pentru simplitate forma trigonometrică a formulelor lui Frenet, în această lucrare construiesc o demonstrație bazată doar pe curbură și torsiune, respectiv, pe darbuzian și lancretian.

Cuvinte cheie: formulele lui Frenet, matricea Frenet, triedrul lui Frenet, curbură, torsiune, vectorul lui Darboux, recurență

MSC: 53A04, 15B10, 85-10, 70F10

1 Introducere

Studiind amănunțit elemente de teoria curbelor în spațiu din lucrări vaste și profunde ([8], [6]), am sintetizat ideile formulate și am constatat că se pot construi mai multe triedre asociate unei curbe, care triedre respectă și ele formulele lui Frenet. În cele ce urmează, pentru a putea descrie cât mai cursiv constatările mele, voi utiliza notațiile consacrate recent în domeniul geometriei diferențiale a curbelor în spațiu ([10], [11]). Astfel, din considerente de claritate, voi nota simplu și fără săgeată deasupra T, N și B versorii tangentă, normală și, respectiv, binormală, versori ce pot fi asociați oricărei curbe netede din spațiu și oricărei linii de câmp vectorial. De asemenea, voi nota cu un punct deasupra derivata mărimilor în raport cu parametrul canonic. Mai notez cu κ curbura curbei într-un anumit punct al curbei și cu τ torsiunea curbei în același punct.

În aceste condiții, se pot scrie matriceal celebrele formule ale lui Frenet ([11]), astfel:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Notând $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$ și $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$,

formulele lui Frenet pot fi scrise mai condensat

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}.$$

Mai reamintesc că vectorul lui Darboux ([10], [9]), notat și aici cu Ω, este vectorul cu proprietatea că

$$\dot{T} = \Omega \times T,$$
$$\dot{N} = \Omega \times N,$$
$$\dot{B} = \Omega \times B$$

și poate fi interpretat drept „viteză de rotație” a triedrului lui Frenet.

Atunci se poate scrie

$$\Omega = \tau T + \kappa B,$$

chestiuni bine cunoscute deja cititorilor avizați.

În continuare voi mai nota cu $d = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ și cu $l = \frac{\kappa}{\tau}$, numind acești parametri „darbuzian” și, respectiv, „lancretian”, în onoarea matematicienilor francezi Darboux și Lancret a căror contribuție la teoria curbelor a fost, după cum bine se știe ([3], [5]), covârșitoare.

2 Definiția triedrului de ordinul al doilea

Datorită faptului că vectorul lui Darboux nu are componentă pe normală, fiind astfel perpendicular pe normală, mi-am pus problema dacă se poate construi un triedru interesant pornind de la această proprietate remarcabilă. Răspunsul este pozitiv.

Pentru aceasta, asemănător propunerii matematicianului croat Stanko Bilinski ([1]), care a definit tangenta de ordinul al doilea drept normala de ordinul întâi, eu voi defini ca tangentă de ordinul al doilea tocmai versorul vectorului lui Darboux, așa cum am procedat în lucrarea anterioară ([2]) pe care am redactat-o pe vremea în care nu cunoșteam rezultatele domnului Bilinski. Adică, voi scrie

$$T_2 = \frac{1}{d}(\tau T + \kappa B) = \frac{\tau}{d}T + \frac{\kappa}{d}B.$$

Apoi definesc binormala de ordinul al doilea ca fiind opusul normalei, adică

$$B_2 = -N.$$

În fine, normala de ordinul al doilea va fi dată de produsul vectorial dintre binormala de ordinul al doilea și tangenta de ordinul al doilea, definite mai sus. Adică

$$N_2 = B_2 \times T_2 = -N \times (\frac{\tau}{d}T + \frac{\kappa}{d}B) =$$

$$= -\frac{\tau}{d}N \times T - \frac{\kappa}{d}N \times B =$$

$$= \frac{\tau}{d}B - \frac{\kappa}{d}T = \frac{1}{d}(-\kappa T + \tau B) = \frac{1}{d}\dot{N}.$$

Sintetizând în forma matriceală, avem triedrul lui Frenet de ordinul al doilea

$$\begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \tau & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

relație ce poate fi scrisă și mai condensat

$$\mathbf{T_2} = \frac{1}{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

unde am notat

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -d & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Derivatele versorilor de ordinul al doilea scrise în funcție de versorii de ordinul întâi

Voi calcula acum pe rând derivatele versorilor de ordinul al doilea, în raport cu parametrul canonic și voi scrie rezultatele în funcție de versorii de ordinul întâi.

3.1 Derivata tangentei de ordinul al doilea

$$\dot{T}_2 = \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{d}T + \frac{\kappa}{d}B\right) =$$

$$= \frac{\dot{\tau}d - \dot{d}\tau}{d^2}T + \frac{\tau}{d}\dot{T} + \frac{\dot{\kappa}d - \dot{d}\kappa}{d^2}B + \frac{\kappa}{d}\dot{B} =$$

$$= \frac{\dot{\tau}d - \dot{d}\tau}{d^2}T + \frac{\tau\kappa}{d}N + \frac{\dot{\kappa}d - \dot{d}\kappa}{d^2}B - \frac{\tau\kappa}{d}N =$$

$$= \frac{\dot{\tau}d - \dot{d}\tau}{d^2}T + \frac{\dot{\kappa}d - \dot{d}\kappa}{d^2}B =$$

$$= \frac{1}{d^2}[(\dot{\tau}d - \dot{d}\tau)T + (\dot{\kappa}d - \dot{d}\kappa)B] =$$

$$= \left(\frac{\dot{\tau}}{d}\right)T + \left(\frac{\dot{\kappa}}{d}\right)B.$$

3.2 Derivata normalei de ordinul al doilea

$$\dot{N}_2 = \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{d}B - \frac{\kappa}{d}T\right) =$$

$$= \left(\frac{\dot{\tau}}{d}\right)B + \frac{\tau}{d}\dot{B} - \left(\frac{\dot{\kappa}}{d}\right)T - \frac{\kappa}{d}\dot{T} =$$

$$= \left(\frac{\dot{\tau}}{d}\right)B - \frac{\tau^2}{d}N - \left(\frac{\dot{\kappa}}{d}\right)T - \frac{\kappa^2}{d}N =$$

$$= \left(\frac{\dot{\tau}}{d}\right)B - dN - \left(\frac{\dot{\kappa}}{d}\right)T =$$

$$= -\left(\frac{\dot{\kappa}}{d}\right)T - dN + \left(\frac{\dot{\tau}}{d}\right)B.$$

3.3 Derivata binormalei de ordinul al doilea

$$\dot{B}_2 = -\dot{N} = -(-\kappa T + \tau B) = \kappa T - \tau B.$$

3.4 Sinteza matriceală a rezultatelor

Rezultatele precedente pot fi sintetizate matriceal astfel:

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_2 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)} & 0 & \dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)} \\ -\left(\frac{\kappa}{d}\right) & -d & \left(\frac{\tau}{d}\right) \\ \kappa & 0 & -\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

4 Derivatele versorilor de ordinul al doilea scrise în funcție de versorii de ordinul al doilea

Acum voi scrie derivatele versorilor de ordinul al doilea în funcție de versorii de ordinul al doilea, nu de ordinul întâi. Așadar, cum îi putem scrie pe $\dot{T}_2$, pe $\dot{B}_2$ și pe $\dot{B}_2$ în funcție de T_2, N_2 și B_2?

Va trebui să inversăm matricea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -d & 0 \end{pmatrix}$$

de trecere din relația care leagă versorii de ordinul al doilea de versorii de ordinul întâi, adică din relația

$$\begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \tau & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

După ce o vom inversa, vom înmulți cu ea la stânga în această relație și vom

obține o relație inversă prin care putem scrie versorii de ordinul întâi în funcție de versorii de ordinul al doilea, relație necesară pentru obiectivul nostru.

4.1 Calculul inversei matricei A

Așadar calculăm $\mathbf{A}^{-1}$.

Avem întâi

$$\det \mathbf{A} = \kappa^2 d + \tau^2 d = d^3.$$

Apoi

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} \tau & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -d \\ \kappa & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Datorită faptului că

$a_{11} = \tau d$, $a_{12} = -\kappa d$, $a_{13} = 0$

$a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -d^2$

$a_{31} = \kappa d$, $a_{32} = \tau d$, $a_{33} = 0$, vom avea

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \tau d & -\kappa d & 0 \\ 0 & 0 & -d^2 \\ \kappa d & \tau d & 0 \end{pmatrix},$$

ceea ce ne permite să obținem matricea inversă căutată:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} \tau & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -d \\ \kappa & \tau & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{d^2} \cdot \mathbf{A}^t.$$

4.2 Scrierea relației inverse care dau versorii de ordinul întâi în funcție de versorii de ordinul al doilea

Înmulțind acum la stânga cu matricea $\mathbf{A}^{-1}$ în relația

$$\begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \tau & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

așa cum ne-am propus, obținem

$$\frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} \tau & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -d \\ \kappa & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} \tau & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -d \\ \kappa & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \tau & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

deci

$$\frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} \tau & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -d \\ \kappa & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d^3} \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \tau & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -d \\ \kappa & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Acum putem rescrie, în sfârșit, relația care ne dădea derivatele în funcție de versorii de ordinul întâi

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_2 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)} & 0 & \dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)} \\ -\left(\frac{\kappa}{d}\right) & -d & \left(\frac{\tau}{d}\right) \\ \kappa & 0 & -\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

astfel

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_2 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)} & 0 & \dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)} \\ -\left(\frac{\kappa}{d}\right) & -d & \left(\frac{\tau}{d}\right) \\ \kappa & 0 & -\tau \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \tau & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -d \\ \kappa & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{pmatrix}\dot{T}_2\\ \dot{N}_2\\ \dot{B}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix}\dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)} & 0 & \dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)}\\ -\left(\frac{\kappa}{d}\right) & -d & \left(\frac{\tau}{d}\right)\\ \kappa & 0 & -\tau\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tau & -\kappa & 0\\ 0 & 0 & -d\\ \kappa & \tau & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}T_2\\ N_2\\ B_2\end{pmatrix}.$$

Înmulțind matricele care apar în relația precedentă, obținem

$$\begin{pmatrix}\dot{T}_2\\ \dot{N}_2\\ \dot{B}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix}\tau\dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)}+\kappa\dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)} & -\kappa\dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)}+\tau\dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)} & 0\\ -\tau\left(\frac{\kappa}{d}\right)+\kappa\left(\frac{\tau}{d}\right) & \kappa\left(\frac{\kappa}{d}\right)+\tau\left(\frac{\tau}{d}\right) & d^2\\ 0 & -d^2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}T_2\\ N_2\\ B_2\end{pmatrix}.$$

Dar, având în vedere relația minunată

$$\tau\dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)}+\kappa\dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)} = \frac{\tau d\dot{\tau}-\tau^2\dot{d}+\kappa d\dot{\kappa}-\kappa^2\dot{d}}{d^2} =$$

$$= \frac{\tau\dot{\tau}+\kappa\dot{\kappa}}{d} - \frac{(\kappa^2+\tau^2)\dot{d}}{d^2} =$$

$$= \frac{\tau\dot{\tau}+\kappa\dot{\kappa}}{d} - \dot{d} =$$

$$= \frac{\tau\dot{\tau}+\kappa\dot{\kappa}}{d} - \frac{d}{ds}\sqrt{\kappa^2+\tau^2} =$$

$$= \frac{\tau\dot{\tau}+\kappa\dot{\kappa}}{d} - \frac{2(\kappa\dot{\kappa}+\tau\dot{\tau})}{2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = 0,$$

obținem că ultima relație matriceală devine

$$\begin{pmatrix}\dot{T}_2\\ \dot{N}_2\\ \dot{B}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix}0 & -\kappa\dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)}+\tau\dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)} & 0\\ -\tau\left(\frac{\kappa}{d}\right)+\kappa\left(\frac{\tau}{d}\right) & 0 & d^2\\ 0 & -d^2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}T_2\\ N_2\\ B_2\end{pmatrix}.$$

În fine, dacă notăm $\kappa_2 = \frac{1}{d}\cdot\left(-\kappa\dot{\left(\frac{\tau}{d}\right)}+\tau\dot{\left(\frac{\kappa}{d}\right)}\right)$ și $\tau_2 = d$, atunci ultima relație matriceală se poate scrie sugestiv

$$\begin{pmatrix}\dot{T}_2\\ \dot{N}_2\\ \dot{B}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa_2 & 0\\ -\kappa_2 & 0 & \tau_2\\ 0 & -\tau_2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}T_2\\ N_2\\ B_2\end{pmatrix},$$

relație în care puteți recunoaște ușor *formulele lui Frenet de ordinul al doilea* care leagă derivatele versorilor de ordinul al doilea de versorii de ordinul al doilea. Astfel, am atins obiectivul de a demonstra că nu doar triedrul lui Frenet de ordinul întâi respectă formulele lui Frenet, ci *și triedrul de ordinul al doilea*!

5 Despre curbura de ordinul al doilea

Doresc să mai adaug faptul că curbura de ordinul al doilea, notată cu κ_2, se poate scrie și ea încă

$$\kappa_2 = \frac{1}{d} \cdot \left(-\kappa \left(\frac{\dot{\tau}}{d}\right) + \tau \left(\frac{\dot{\kappa}}{d}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \frac{-\kappa d\dot{\tau} + \kappa\tau\dot{d} + \tau d\dot{\kappa} - \kappa\tau\dot{d}}{d^2} =$$

$$= \frac{-\kappa d\dot{\tau} + \tau d\dot{\kappa}}{d^3} = \frac{-\kappa\dot{\tau} + \tau\dot{\kappa}}{d^2} = \frac{\dot{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)}\tau^2}{d^2} = \frac{\tau^2}{d^2}\dot{l} =$$

$$= \frac{1}{1+l^2}\dot{l},$$

unde, reamintesc, l este lancretianul, iar $\dot{l}$ este derivata acestuia în funcție de parametrul canonic.

Acest ultim rezultat, ce poate fi regăsit (mai greu) într-o formă similară și în alte lucrări valoroase ([4], [7]), scoate în evidență faptul că curbura de ordinul al doilea depinde de derivata lancretianului. Altfel spus, dacă lancretianul (raportul dintre curbură și torsiune) este constant, ca în cazul curbelor numite „elice" care păstrează o direcție fixă în spațiu, atunci curbura a doua este nulă. Aceasta înseamnă că tangenta de ordinul al doilea devine constantă, fiind tocmai versorul acelei direcții fixe în spațiu în jurul căreia precesează tangenta de ordinul întâi a elicei.

Desigur, dacă derivata lancretianului nu este nulă, atunci tangenta de ordinul al doilea nu mai este fixă, ci precesează și ea în jurul unei alte „tangente de ordinul al treilea", fenomenul fiind recursiv ([1], [2]) și având o importantă semnificație fizică în studiul mișcărilor turbulente.

6 Cuvânt de final

Desigur, toate raționamentele prezentate aici pot fi generalizate cu ușurință prin inducție matematică la triedre de ordin superior, deschizându-se noi orizonturi pentru rezolvarea problemelor deschise din teoria curbelor. Dar, mai ales Fizica poate fructifica drumul pe care l-am deschis, redefinindu-și mai riguros noțiunile, înglobând apoi aceste raționamente în studiul mișcării de orice fel, inclusiv gravitaționale, turbulente sau cuantice.

Există o mare de oameni cărora ar trebui să le mulțumesc pentru existența acestui material, oameni fără de care aș fi fost flămând, plictisit sau lipsit de idei. Îi îmbrățișez tare pe toți cu gândul meu intens.

Fie ca însemnările acestea să producă un declic în mintea vreunui nemulțumit de lumea în care trăim și să-l ajute astfel să o îmbunătățească.

Bibliografie

[1] Bilinski, S., 1963, „Monatshefte für Mathematik”, 23(2014), No.2, pp. 175–182, (Monatshefte für Mathematik, accesat în iulie 2023).

[2] Cavași, A., 2014, „The recurrence theorem of Frenet formulae”, Creative Math.&Inf. 23(2014), No.2, pp. 175–182. („The recurrence theorem of Frenet formulae”, accesat în iulie 2023).

[3] Frenet, F., 1852, „Sur les courbes à double courbure”. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Serie 1, Volume 17, pp. 437–447. (http://www.numdam.org/item/JMPA_1852_1_17__437_0/, accesat în iulie 2023).

[4] İlkay Arslan Güven and Semra Kaya Nurkan and İpek Ağaoğlu Tor, 2015, „Notes on W-direction curves in Euclidean 3-space”, arxiv:1506.03938 (https://arxiv.org/pdf/1506.03938.pdf, accesat în iulie 2023).

[5] Lancret, M. A., 1802 „Mémoire sur les courbes à double courbure”, mémoires présentés à l'Institut des sciences, lettres et arts par divers savants, tome 1,(1806), pp. 416–454.

[6] „Mică enciclopedie matematică”, Editura Tehnică, București, traducere de Postelnicu, V. și Coatu, S., după lucrarea „Kleine Enzyklopädie Mathematik”, ediția a șasea, anul 1971, cu completările din ediția în limba engleză „Mathematics at a Glance”, apărută în 1975, pp. 704–708.

[7] Suleyman Senyurt and Mustafa Bilici and Mustafa Caliskan, 2010, „Some characterizations for the involute curves in dual space”, arxiv:1008.5276, (https://arxiv.org/pdf/1008.5276, accesat în iulie 2023).

[8] Vrănceanu, G. și Mărgulescu, G., 1973, „Geometrie analitică cu elemente de algebră liniară”, Editura Didactică și Pedagogică, București, pp. 206–227.

[9] Weisstein, Eric W. "Darboux Vector." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. (https://mathworld.wolfram.com/DarbouxVector.html, accesat în iulie 2023).

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Darboux_vector, accesat în iulie 2023.

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Frenet–Serret_formulas, accesat în iulie 2023.