below

Lifeguard, Snell's Law, Fermat's Principle and Brachistochrone

Leonardo ***Rubino***

August 2023

Abstract: Lifeguard, Snell's Law, Fermat's Principle and Brachistochrone.

1-The Lifeguard

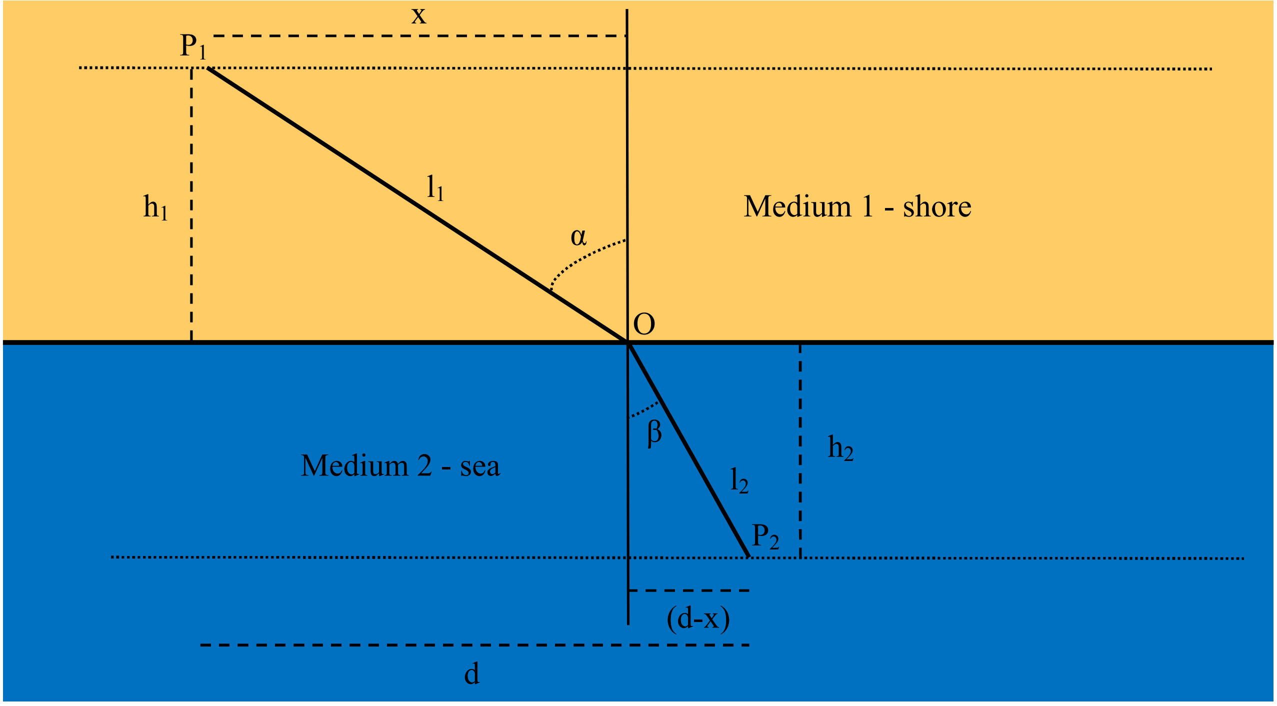

Fig. 1: The Lifeguard in P_1 sees the bather in trouble in P_2.

The Lifeguard in P_1 has to reach and help the bather in P_2; but he also knows that the speed v_1 of running on the shore is higher than the swimming speed v_2 in the water, so the geometrically shortest path given by the segment P_1-P_2 is not the fastest, as it forces the Lifeguard to stay too long in the water, where he is slower.

We evaluate the travelling time of the Lifeguard:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Now, in order to evaluate the minimum value t_B, we calculate the derivative and we put it to zero:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0$$, but we have:

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin\alpha$$ and $$\frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin\beta$$, so: $$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2\sin\alpha}{v_1} - \frac{2\sin\beta}{v_2} = 0$$, that is:

$$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta} = k \quad , \tag{1.1}$$

therefore, in both media (medium 1 and medium 2), the ratio between the sine of the angle made with the vertical line and the speed is constant.

2-Snell's Law

If paths l_1 and l_2 were light rays and media 1 and 2 were, for instance, air and water, then, after considering that for the refraction indexes n_1 and n_2 we have, by definition: $n_1 = \frac{c}{v_1}$ and $n_2 = \frac{c}{v_2}$, we get the Snell's Law: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1/c}{v_2/c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, which is the reason why a ladder into a pool looks bent.

3-Fermat's Principle

As the Snell's Law has come out as a calculation of the minimum travelling time, then Fermat's Principle is here confirmed, according to which a light ray follows the shortest path (in duration).

4-Brachistochrone

Even a body which falls or slides under the effect of the gravitational pull, as well as a light ray in case of refraction (from air to water) or also a Lifeguard from shore to water, goes from points with a certain speed (lower, in this case) to points with another speed (higher, in this case). So, we can think that a body which slides downwards under the gravitational pull, will cross an infinite number of thin layers, each of them with a different speed.

With reference to Fig. 2, also here one is led to ask oneself which is the fastest path.

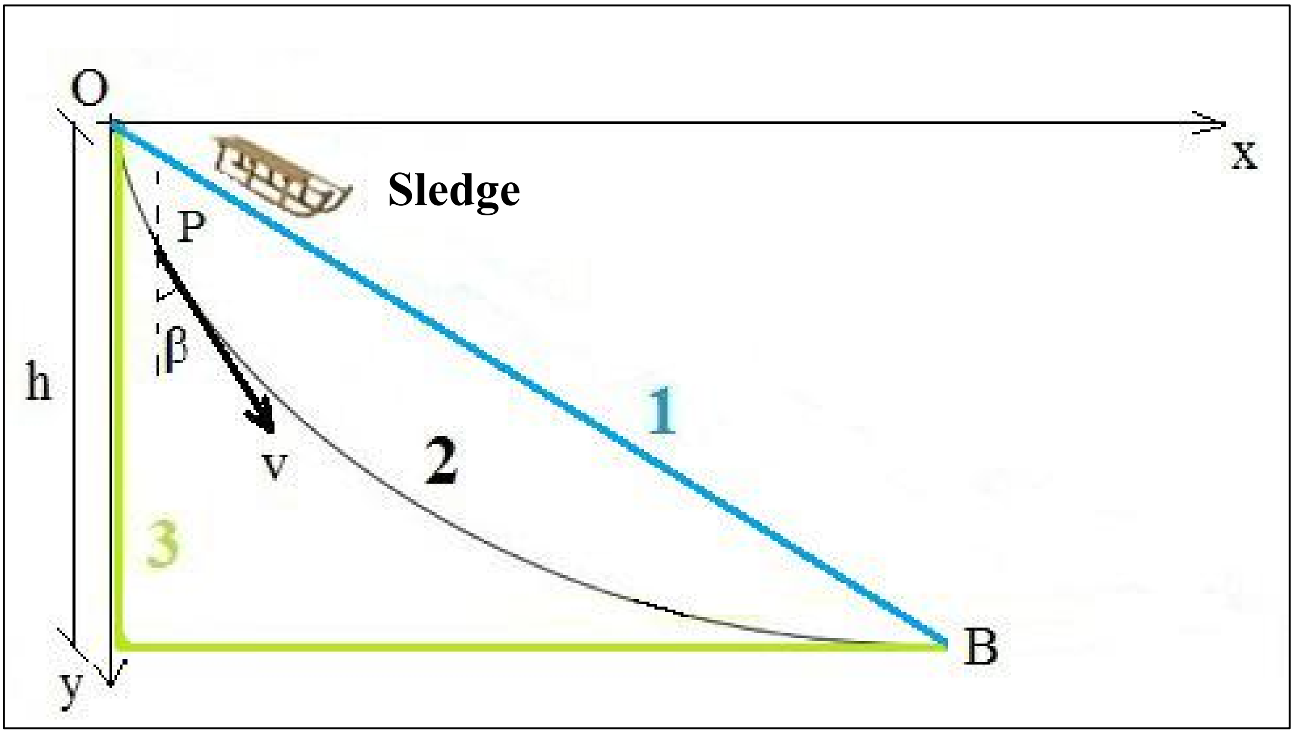

Fig. 2: Sledge sliding without friction along the inclined plane (1) or along the brachistochrone (2) or along the path (3) of vertical falling + sliding up to the final destination.

For sure the fastest is not the inclined plane (1); on the contrary, the fastest is the brachistochrone (2). Intuitively, it smartly starts very vertically, as chance would have it, at the top, where the speed is the lowest.

Let's consider the generic (for the time being) curve (2), with the sliding speed vector v in the generic point P, which makes an angle β with the vertical line.
Moreover, at the starting point O the speed is zero and so does the height, while at the arrival point B the speed will be a so known speed v and the height will be h and we know from physics that in case of no friction:

$\frac{1}{2}mv_{fin}^2 = mgh$, from which: $v_{fin} = \sqrt{2gh}$ and generically, at a height y:

$$v = \sqrt{2gy} \tag{4.1}$$

In fact, we are in a conservative field and the potential energy changes just with the height (r) and not with the path followed to go from a height to another one:

$$(U = -G\frac{Mm}{\textcircled{r}}).$$

As we said, every point P can be a border point between an imaginary layer and the next one, so, as well as in Fig. 1 and according to eq. (1.1), we can state that:

$\frac{v}{\sin\beta} = k \rightarrow \frac{v^2}{\sin^2\beta} = k^2$ and for the (4.1): $\frac{2gy}{\sin^2\beta} = k^2 \rightarrow y = \frac{k^2}{2g}\sin^2\beta$ and so the maximum value for y will be h, where, as a matter of fact, $\sin^2\beta$ is at its maximum, that is where $\sin\beta$ is at its maximum (=1), so: $y_{\max} = \frac{k^2}{2g} = h$, and therefore:

$$y = h\sin^2\beta \tag{4.2}$$

Now, if we calculate the derivative of the (4.2) with respect to β:

$$\frac{dy}{d\beta} = 2h\sin\beta\cos\beta = h\sin 2\beta \tag{4.3}$$

(as, according to the trigonometry, $2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta$); moreover, from Fig. 2 it comes out that $\frac{dx}{dy} = \tan\beta$ and so we also have that: $\frac{dx}{d\beta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\beta} = 2h\sin\beta\cos\beta\tan\beta =$

$$= 2h\sin^2\beta = h(1-\cos 2\beta) \tag{4.4}$$

(as, still according to the trigonometry, $\sin^2\beta = \frac{(1-\cos 2\beta)}{2}$). So, by gathering the (4.3) and the (4.4), we get:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{d\beta} &= h(1-\cos 2\beta) \\ \frac{dy}{d\beta} &= h\sin 2\beta \end{aligned}} \tag{4.5}$$

and by integrating the (4.5), we get:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= h(\beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta) + C_1 \\ y &= -\frac{h}{2}\cos 2\beta + C_2 \end{aligned}} \tag{4.6}$$

Now, as in the origin O we have β, x and y that are zero, we can calculate the constants C_1 and C_2 (respectively equal to 0 and h/2) and both the (4.6) become:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{h}{2}(2\beta-\sin 2\beta) \\ y &= \frac{h}{2}(1-\cos 2\beta) \end{aligned}} \qquad \text{Brachistochrone} \tag{4.7}$$

and the latter is obviously the same as the (4.2) from which we started.
The (4.7) are the equations describing the Brachistochrone and they also describe the Cycloid (Fig. 3)

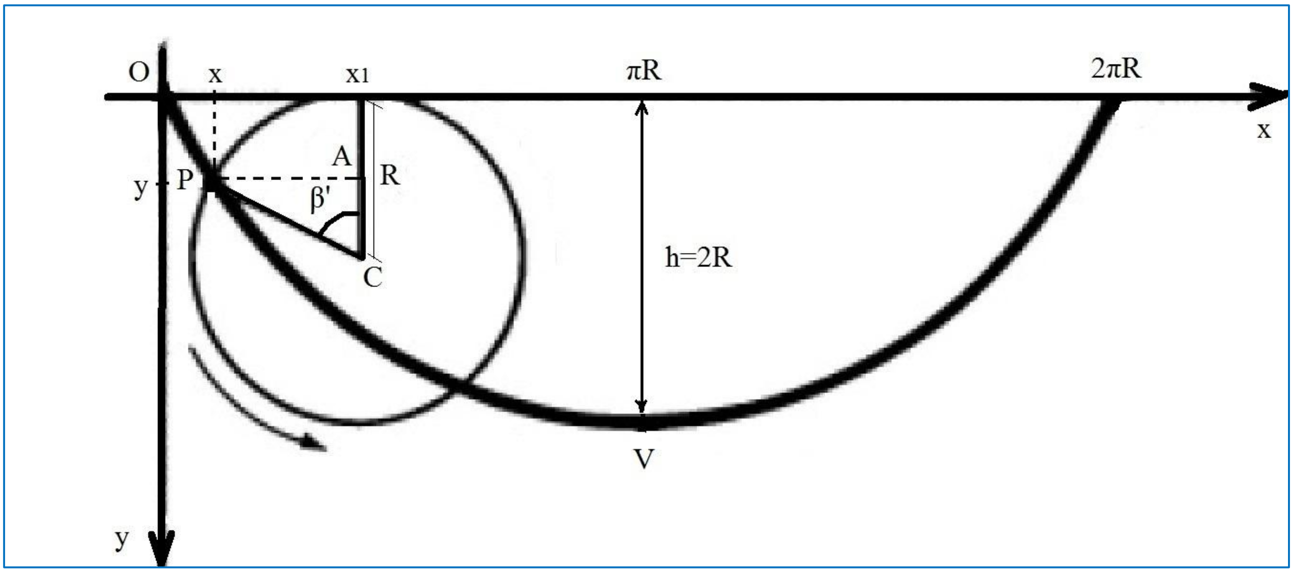

Fig. 3: The Cycloid. The circle, by rolling over the x axis, draws the Cycloid by the point P.

In fact, $x=\overline{Ox_1}-\overline{xx_1}$, but $\overline{Ox_1}=arc(\overline{x_1P})=\mathrm{R}\beta'$; moreover, $\overline{xx_1}=\mathrm{PA}=\mathrm{R}\sin\beta'$, so:

$$x=\overline{Ox_1}-\overline{xx_1}=\mathrm{R}\beta'\text{-}\mathrm{R}\sin\beta'=\mathrm{R}(\beta'\text{-}\sin\beta')=\mathrm{x} \tag{4.8}$$

On the contrary, about y, we simply have:

$$y=\overline{x_1C}-\overline{AC}=\mathrm{R}-\mathrm{R}\cos\beta'=\mathrm{R}(1-\cos\beta') \tag{4.9}$$

and so the (4.8) and (4.9), gathered together, yield the (4.10):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R(\beta'-\sin\beta') \\ y &= R(1-\cos\beta') \end{aligned}} \qquad \text{Cycloid} \tag{4.10}$$

and they are exactly the (4.7) with h/2=R and 2β=β’ .

-<u>The descent time to the bottom (from O to V , in Fig. 3)</u>:

From the (4.5) we get:

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\beta}\frac{d\beta}{dt}=h(1-\cos 2\beta)\dot{\beta}$$

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\beta}\frac{d\beta}{dt}=h(\sin 2\beta)\dot{\beta}$$

and, as a falling speed v, we obviously have:

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = h^2\dot{\beta}^2(1+\cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta + \sin^2 2\beta) = h^2\dot{\beta}^2(2-2\cos 2\beta) = 2h^2\dot{\beta}^2(1-\cos 2\beta) =$

$= 4h^2\dot{\beta}^2\sin^2\beta$, from which: $\dot{\beta}^2 = \dfrac{v^2}{4h^2\sin^2\beta}$ and according to the (4.2), we have: $\dot{\beta}^2 = \dfrac{v^2}{4h^2(y/h)} = \dfrac{v^2}{4hy}$ and as $v = \sqrt{2gy}$, it follows that: $\dot{\beta}^2 = \dfrac{g}{2h}$, so: $\dot{\beta} = \sqrt{\dfrac{g}{2h}} = \dfrac{d\beta}{dt}$ and:

$$\beta = \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot t \qquad (4.11)$$

By inserting the (4.11) into all the (4.7):

$$x = \frac{h}{2}\left(\sqrt{\frac{2g}{h}}t - \sin\sqrt{\frac{2g}{h}}t\right)$$

$$y = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{2g}{h}}t\right)$$

Now, with reference to Fig. 2, at the bottom point B (which also is point V in Fig. 3) we have a β=π/2 and by naming as T_B the time of Brachistochrone needed for the arrival at that point, then, according to the (4.11) we have:

$\dfrac{\pi}{2} = \sqrt{\dfrac{g}{2h}}T_B$, from which:

$$T_B = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}} \qquad (4.12)$$

If we carry out a comparison with an inclined plane which goes from O to V (rif. Fig. 3), it would have a length $l = \sqrt{h^2 + \dfrac{\pi^2 h^2}{4}} = \dfrac{h}{2}\sqrt{\pi^2+4}$ and after naming as φ the angle of inclination of the inclined plane itself, we have: $\sin\varphi = \dfrac{h}{\dfrac{h}{2}\sqrt{\pi^2+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$ and the acceleration "a" by which we have the downwards sliding through the inclined plane is: $a = g\sin\varphi = \dfrac{2g}{\sqrt{\pi^2+4}}$ and as $l = \dfrac{1}{2}aT_{p.i.}^2 = \dfrac{g}{\sqrt{\pi^2+4}}T_{i.p.}^2$ (where $T_{i.p.}$ as the sliding time along the inclined plane), then: $T_{i.p.} = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} = \sqrt{\dfrac{h(\pi^2+4)}{2g}} > T_B = \pi\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$.

- <u>Tautochrone Brachistochrone curve</u>:

With reference to Fig. 3, if a sledge starts sliding downwards (to V), no more starting necessarily from the origin O, but rather from a generic point $P_0(x_0,y_0)$ lower than O (and still starting from a still situation), then the time taken to reach V is still the same. It looks somewhat weird that if it starts from a point which is closer to the final destination, then the time taken is still the same, but starting from a farther point (still talking about a Brachistochrone) gives it a longer run and, in the end, it arrives in (V) still in the same time. Proof:
if the start is at height y_0 not necessarily equal to zero, then the speed reached in y will be:

$v = \frac{dl}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}$, with (y-y$_0$) as the travelled gap and dl ($= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$) which is equal to the infinitesimal length of curve travelled in the time dt. We have:

$$dt = \frac{dl}{v} = \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2)}{2g(y - y_0)}} \tag{4.13}$$

Now, let's recall all the (4.5) in the following form:

$$\boxed{\begin{array}{l} dx = h(1 - \cos 2\beta) d\beta \\ dy = h \sin 2\beta d\beta \end{array}} \tag{4.14}$$

Now, by inserting the (4.14) and the latter of the (4.7) into the (4.13):

$$dt = \sqrt{\frac{[h(1 - \cos 2\beta) d\beta]^2 + [h \sin 2\beta d\beta]^2}{2g[\frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta) - \frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta_0)]}} = \sqrt{\frac{h(1 - \cos 2\beta)^2 + h \sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta)}} d\beta$$

and so, as in V the angle β is π/2:

$$T = \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{h(1 - \cos 2\beta)^2 + h \sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta)}} d\beta = \sqrt{\frac{h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta + \sin^2 2\beta}{\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta}} d\beta =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta}} d\beta = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{2 \sin^2 \beta}{2\cos^2 \beta_0 - 1 - 2\cos^2 \beta + 1}} d\beta =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta_0 - \cos^2 \beta}} d\beta = T \tag{4.15}$$

(as, for the trigonometry, $\sin^2 \beta = \frac{(1 - \cos 2\beta)}{2}$ and $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1$)

Now, in the (4.15) we carry out the following change of variable:

$u = \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0}$, from which: $du = -\frac{\sin \beta}{\cos \beta_0} d\beta$, and so the (4.15) becomes (for β= β$_0$→u=1 and for β=π/2→u=0):

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_1^0 \frac{-\sin \beta}{\cos \beta_0 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta_0}}} \frac{\cos \beta_0}{\sin \beta} du = \sqrt{\frac{2h}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left| \arcsin u \right|_0^1 = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}$$

, that is:

$T = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}$ (T does not depend on β$_0$, that is it doesn't depend on the starting point !!!!)

Il bagnino, Legge di Snell, Principio di Fermat e Brachistocrona

Leonardo ***Rubino***

Agosto 2023

Abstract: Il bagnino, Legge di Snell, Principio di Fermat e Brachistocrona.

1-Il bagnino

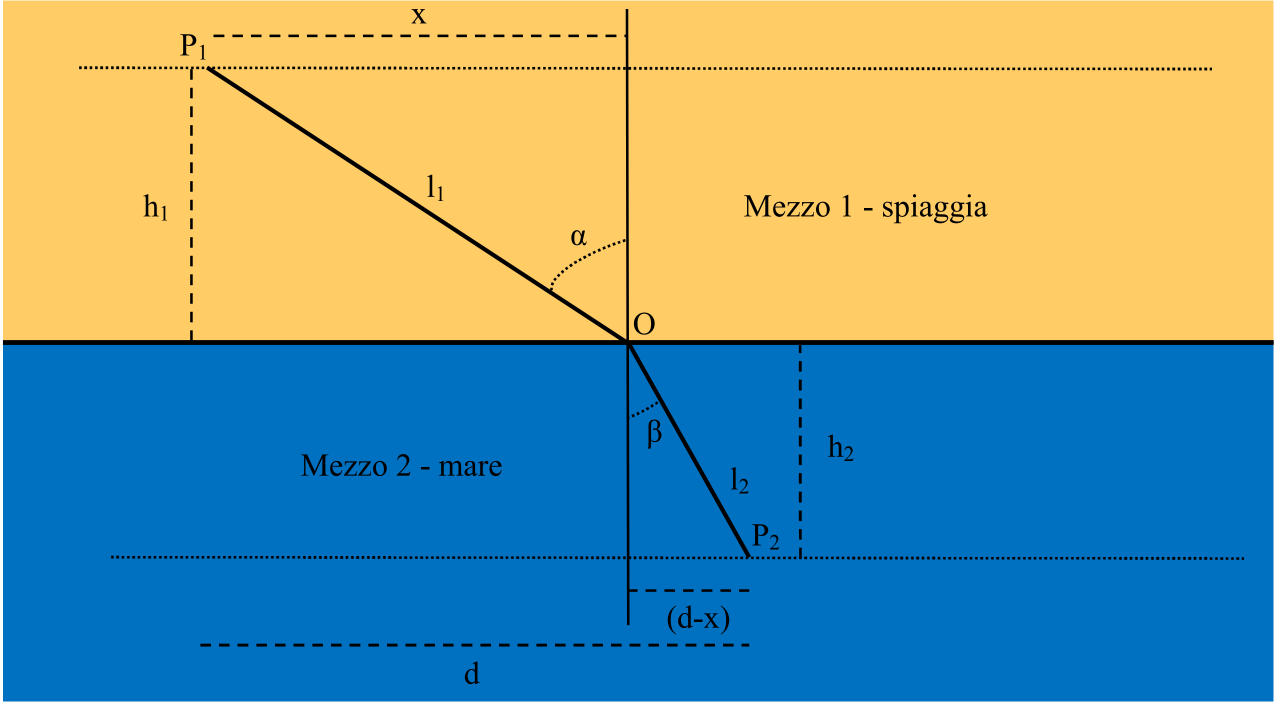

Fig. 1: Il bagnino in P_1 vede il bagnante in difficoltà in P_2.

Il bagnino in P_1 deve raggiungere e soccorrere il bagnante in P_2; egli, però, sa anche che la corsa sulla spiaggia avviene a velocità v_1 maggiore della velocità v_2 del nuoto in acqua, dunque il percorso geometricamente più breve, dato dal segmento P_1-P_2 non è il più veloce, perché fa stare il bagnino troppo in acqua, dove è più lento.

Valutiamo il tempo di percorrenza del viaggio del bagnino:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Ora, per valutare il minimo di t_B, calcoliamo la derivata ed annulliamola:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0$$, ma si ha che:

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin\alpha \quad \text{e} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin\beta$$, da cui: $$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2\sin\alpha}{v_1} - \frac{2\sin\beta}{v_2} = 0$$, ossia:

$$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta} = k \ , \qquad (1.1)$$

dunque, in entrambi gli strati (mezzo 1 e mezzo 2), il rapporto tra il seno dell'angolo con la verticale e la velocità è costante.

2-Legge di Snell

Se i percorsi l_1 ed l_2 fossero dei raggi di luce ed i mezzi 1 e 2 fossero, ad esempio, aria ed acqua, considerando che, per gli indici di rifrazione n_1 ed n_2 si ha, per definizione: $n_1 = \frac{c}{v_1}$ e $n_2 = \frac{c}{v_2}$, si ottiene la Legge di Snell: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 / c}{v_2 / c} = \frac{c / v_2}{c / v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, che è la responsabile del fatto che una scala semi immersa in una piscina la vediamo piegata.

3-Principio di Fermat

Essendo che la Legge di Snell è qui scaturita anche come calcolo del tempo di percorrenza minimo, viene confermato il Principio di Fermat, secondo cui il raggio di luce segue il cammino più breve.

4-Brachistocrona

Anche un corpo che cade o scivola sotto l'effetto del campo gravitazionale, così come un raggio di luce nel caso della rifrazione (da aria ad acqua) o come il bagnino da spiaggia ad acqua, passa da punti ad una certa velocità (minore, in questo caso) a punti ad un'altra velocità (maggiore, in questo caso). Dunque, si può immaginare che un corpo che scivola verso il basso, sotto l'effetto del campo gravitazionale, attraversa infiniti strati di spessore infinitesimo, ognuno a velocità diversa.

Con riferimento alla Fig. 2, viene allora spontaneo chiedersi, anche qui, quale sia il percorso più veloce.

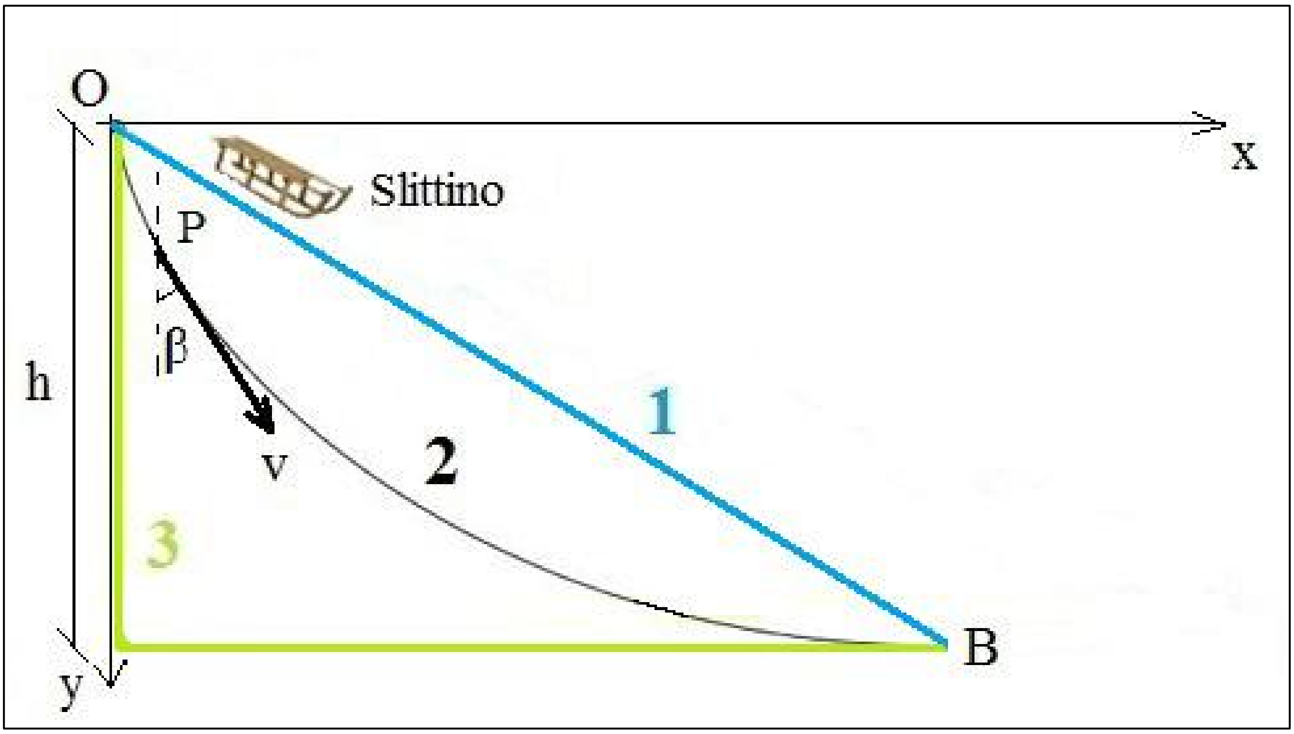

Fig. 2: Slittino che scivola senza attrito lungo il piano inclinato (1) o lungo la brachistocrona (2) o lungo il percorso (3) di caduta verticale + scivolamento fino a destinazione.

Sicuramente il più veloce non è il piano inclinato (1); è invece più veloce la brachistocrona (2). Intuitivamente, essa intelligentemente parte molto verticale, guarda caso all'inizio (in cima), dove la velocità è minore.

Consideriamo la (per ora) generica curva (2), con il vettore velocità di scivolamento v nel generico punto P e formante un angolo β con la verticale.

Inoltre, alla partenza O la velocità è nulla e la quota anche, mentre all'arrivo B la velocità sarà una tal v e la quota sarà h e sappiamo dalla meccanica che, in assenza di attrito:

$\frac{1}{2}mv_{fin}^2 = mgh$, da cui: $v_{fin} = \sqrt{2gh}$ e genericamente, a quota y:

$$v = \sqrt{2gy} \tag{4.1}$$

Siamo infatti in un campo di forze conservativo e l'energia potenziale varia solo con la quota (r) e non con il percorso seguito per passare da una quota all'altra

$(U = -G\frac{Mm}{\textcircled{r}})$.

Come dicevamo, ogni punto P può essere un punto di confine tra uno strato immaginario e l'altro, dunque, in analogia con la Fig. 1 e per l'equazione (1.1), possiamo scrivere:

$\frac{v}{\sin\beta} = k \rightarrow \frac{v^2}{\sin^2\beta} = k^2$ e per la (4.1): $\frac{2gy}{\sin^2\beta} = k^2 \rightarrow y = \frac{k^2}{2g}\sin^2\beta$ e dunque il massimo di y sarà h, dove infatti $\sin^2\beta$ è massimo, ossia dove $\sin\beta$ è massimo (=1), dunque: $y_{\max} = \frac{k^2}{2g} = h$, e allora:

$$y = h\sin^2\beta \tag{4.2}$$

Derivando ora la (4.2) rispetto a β:

$$\frac{dy}{d\beta} = 2h\sin\beta\cos\beta = h\sin 2\beta \tag{4.3}$$

(poiché, per la trigonometria, $2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta$); inoltre, dalla Fig. 2 emerge che $\frac{dx}{dy} = \tan\beta$ e dunque si ha anche che: $\frac{dx}{d\beta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\beta} = 2h\sin\beta\cos\beta\tan\beta =$

$$= 2h\sin^2\beta = h(1-\cos 2\beta) \tag{4.4}$$

(poiché, per la trigonometria, $\sin^2\beta = \frac{(1-\cos 2\beta)}{2}$). In definitiva, raggruppando le (4.3) e (4.4), si ha:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{dx}{d\beta} = h(1-\cos 2\beta) \\ \frac{dy}{d\beta} = h\sin 2\beta \end{array}} \tag{4.5}$$

ed integrando le (4.5), si ottiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = h(\beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta) + C_1 \\ y = -\frac{h}{2}\cos 2\beta + C_2 \end{array}} \tag{4.6}$$

Ora, visto che nell'origine O si ha che β, x ed y sono tutti nulli, si possono determinare le costanti C_1 e C_2 (uguali rispettivamente a 0 e h/2) e le (4.6) diventano:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{h}{2}(2\beta - \sin 2\beta) \\ y &= \frac{h}{2}(1 - \cos 2\beta) \end{aligned}} \qquad \text{Brachistocrona} \qquad (4.7)$$

la seconda delle quali, ovviamente, coincide con la (4.2) di partenza.
Le (4.7) sono le equazioni che descrivono la Brachistocrona e descrivono altresì la Cicloide (Fig. 3)

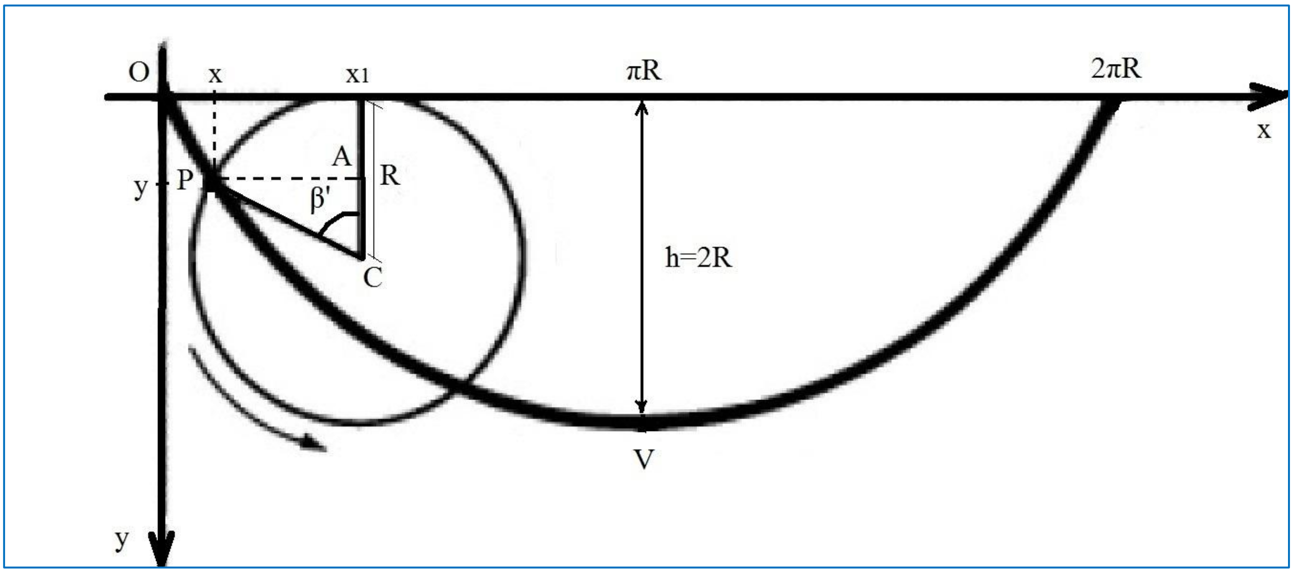

Fig. 3: La Cicloide. Il cerchio, rotolando sull'asse x, descrive la Cicloide col punto P.

Infatti, $x = \overline{Ox_1} - \overline{xx_1}$, ma $\overline{Ox_1} = arco(\overline{x_1P}) = \mathrm{R}\beta'$; inoltre, $\overline{xx_1} = \mathrm{PA} = \mathrm{R}\sin\beta'$, da cui:

$$x = \overline{Ox_1} - \overline{xx_1} = \mathrm{R}\beta'\text{-}\mathrm{R}\sin\beta' = \mathrm{R}(\beta'\text{-}\sin\beta') = \mathrm{x} \qquad (4.8)$$

Invece, riguardo y, si ha semplicemente che:

$$y = \overline{x_1C} - \overline{AC} = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos\beta' = \mathrm{R}(1 - \cos\beta') \qquad (4.9)$$

e dunque le (4.8) e (4.9), raccolte insieme, danno le (4.10):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R(\beta' - \sin\beta') \\ y &= R(1 - \cos\beta') \end{aligned}} \qquad \text{Cicloide} \qquad (4.10)$$

che altro non sono che le (4.7) con h/2=R e 2β=β' .

-<u>Tempo di discesa a valle (da O a V , in Fig. 3)</u>:

Dalle (4.5) si ottiene:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = h(1 - \cos 2\beta)\dot{\beta}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = h(\sin 2\beta)\dot{\beta}$$

e, ovviamente, per la velocità di caduta v, si ha:

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = h^2\dot{\beta}^2(1+\cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta + \sin^2 2\beta) = h^2\dot{\beta}^2(2-2\cos 2\beta) = 2h^2\dot{\beta}^2(1-\cos 2\beta) =$

$= 4h^2\dot{\beta}^2\sin^2\beta$, da cui: $\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{4h^2\sin^2\beta}$ e per la (4.2), si ha: $\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{4h^2(y/h)} = \frac{v^2}{4hy}$ ed essendo che $v = \sqrt{2gy}$, segue che: $\dot{\beta}^2 = \frac{g}{2h}$, dunque: $\dot{\beta} = \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{d\beta}{dt}$ e:

$$\beta = \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot t \qquad (4.11)$$

Inserendo ora la (4.11) nelle (4.7):

$$x = \frac{h}{2}(\sqrt{\frac{2g}{h}}t - \sin\sqrt{\frac{2g}{h}}t)$$

$$y = \frac{h}{2}(1 - \cos\sqrt{\frac{2g}{h}}t)$$

Adesso, con riferimento alla Fig. 2, al punto di valle B (che sarebbe anche il punto V della Fig. 3) corrisponde un β=π/2 ed indicando con T$_B$ il tempo di Brachistocrona necessario per l'approdo a tale punto, per la (4.11) si ha:

$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{g}{2h}}T_B$, da cui:

$$T_B = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}} \qquad (4.12)$$

Volendo fare un confronto con un piano inclinato che va da O a V (rif. Fig. 3), questo avrebbe lunghezza $l = \sqrt{h^2 + \frac{\pi^2 h^2}{4}} = \frac{h}{2}\sqrt{\pi^2+4}$ e chiamando φ l'angolo di inclinazione del piano inclinato stesso, si ha: $\sin\varphi = \frac{h}{\frac{h}{2}\sqrt{\pi^2+4}} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$ e l'accelerazione "a" con cui avviene la scivolata lungo il piano è: $a = g\sin\varphi = \frac{2g}{\sqrt{\pi^2+4}}$ ed essendo che $l = \frac{1}{2}aT_{p.i.}^2 = \frac{g}{\sqrt{\pi^2+4}}T_{p.i.}^2$ (con $T_{p.i.}$ il tempo di scivolata lungo il piano inclinato), allora: $T_{p.i.} = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{h(\pi^2+4)}{2g}} > T_B = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$.

-<u>Brachistocrona curva Tautocrona</u>:

Con riferimento alla Fig. 3, se una slitta inizia a scivolare verso la valle V, ma non più partendo necessariamente dall'origine O, bensì anche eventualmente da un generico punto P$_0$(x$_0$,y$_0$) più in basso di O (e sempre partendo da fermo), allora il tempo impiegato per giungere in V è sempre lo stesso. Sembra strano il fatto che se parte da più vicino ci metta sempre lo stesso tempo, ma il fatto è che chi parte da più lontano, sempre nel caso della Brachistocrona, prende più rincorsa e alla fine giunge a destinazione (V) sempre nello stesso tempo. Dimostrazione:

se si parte da quota y$_0$ non necessariamente uguale a zero, allora la velocità raggiunta in y sarà:

$v = \frac{dl}{dt} = \sqrt{2g(y-y_0)}$, con (y-y$_0$) come dislivello percorso e dl ($= \sqrt{(dx^2+dy^2)}$) pari alla lunghezza infinitesima di curva percorsa nel tempo dt. Si ha:

$$dt = \frac{dl}{v} = \sqrt{\frac{(dx^2+dy^2)}{2g(y-y_0)}} \qquad (4.13)$$

Richiamiamo ora le (4.5) nella seguente forma:

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= h(1-\cos 2\beta)d\beta \\ dy &= h\sin 2\beta d\beta \end{aligned}} \qquad (4.14)$$

Inseriamo ora le (4.14) e la seconda delle (4.7) nella (4.13):

$dt = \sqrt{\frac{[h(1-\cos 2\beta)d\beta]^2+[h\sin 2\beta d\beta]^2}{2g[\frac{h}{2}(1-\cos 2\beta)-\frac{h}{2}(1-\cos 2\beta_0)]}} = \sqrt{\frac{h(1-\cos 2\beta)^2+h\sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0-\cos 2\beta)}}d\beta$ e dunque, visto che in V l'angolo β vale π/2:

$$T = \int_{\beta_0}^{\pi/2}\sqrt{\frac{h(1-\cos 2\beta)^2+h\sin^2 2\beta}{g(\cos 2\beta_0-\cos 2\beta)}}d\beta = \sqrt{\frac{h}{g}}\int_{\beta_0}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1+\cos^2 2\beta-2\cos 2\beta+\sin^2 2\beta}{\cos 2\beta_0-\cos 2\beta}}d\beta =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\int_{\beta_0}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{\cos 2\beta_0-\cos 2\beta}}d\beta = \sqrt{\frac{2h}{g}}\int_{\beta_0}^{\pi/2}\sqrt{\frac{2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta_0-1-2\cos^2\beta+1}}d\beta =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\int_{\beta_0}^{\pi/2}\frac{\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta_0-\cos^2\beta}}d\beta = T \qquad (4.15)$$

(poiché, per la trigonometria, $\sin^2\beta = \frac{(1-\cos 2\beta)}{2}$ e $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$)

Adesso, nella (4.15) effettuiamo il seguente cambio di variabile:

$u = \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0}$, da cui: $du = -\frac{\sin\beta}{\cos\beta_0}d\beta$, sicchè la (4.15) diviene (per β= β₀→u=1 e per β=π/2→u=0):

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\int_1^0 \frac{-\sin\beta}{\cos\beta_0\sqrt{1-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta_0}}}\frac{\cos\beta_0}{\sin\beta}du = \sqrt{\frac{2h}{g}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left|\arcsin u\right|_0^1 = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$$, ossia:

$T = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$ (T non dipende da β₀ , ossia non dipende dal punto di partenza !!!!)