# UN TROISIÈME THÉORÈME CRUCIAL POUR LA REFONDATION DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES ET L'ENSEIGNEMENT DE CETTE DISCIPLINE POUR LES FUTURES GÉNÉRATIONS

*par*

Nhat-Anh Phan

---

*One third crucial theorem for the refoundation of elementary set theory and the teaching of that discipline to future generations*

RÉSUMÉ :

Pour $A$ un ensemble infini dénombrable donné, nous démontrons que $A$ est un ensemble infini dénombrable si et seulement si $A$ est égal à un ensemble infini dénombrable indexé à l'infini. Dit autrement nous démontrons que $A$ est un ensemble infini dénombrable *ssi* $\exists$ une infinité d'éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_i \neq a_j$, tels que $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$.

A cette occasion, pour les ensembles infinis dénombrables constitués par l'union de deux ensembles infinis dénombrables donnés $A$ et $B$, $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$, nous introduisons la notion d'ensemble infini dénombrable indéterminé pour designer les ensembles infinis dénombrables dont une indexation explicite n'est pas déterminée cependant qu'une telle indexation doit nécessairement exister.

ABSTRACT :

For a given infinite countable set $A$, we demonstrate that $A$ is an infinite countable set if and only if $A$ is equal to an infinite countable set indexed to the infinity. Said otherwise we demonstrate that $A$ is an infinite countable set $iff$ $\exists$ an infinite number of non-empty, distinct elements $a_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_i \neq a_j$ such that $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$.

At this occasion, for infinite countable sets constituted by the union of two given infinite countable sets $A$ and $B$, $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$, we introduce the notion of undetermined infinite countable set in order to designate infinite countable sets for which an explicit indexation is not determined meanwhile such indexation must necessarily exist.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A17, 05A18 — Mots clés : ensemble, sous-ensemble, infini, dénombrable, indexation.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A17, 05A18 — Key words : set, sub-set, infinite, countable, indexation.

Cet article fait suite aux précédents articles par le présent auteur sur les ensembles infinis dénombrables (N-A. Phan, 2021, [2], 2022, [3], 2022 [4]). Aussi les formalismes introduits dans les précédents articles (N-A. Phan, 2022, [3], 2022, [4]) sont également employés dans ce présent article.

***Lemme 1.*** — *$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $A, card(A) = N$, un ensemble fini dénombrable, nous avons :*

$$A, card(A) = N, \text{ un ensemble fini dénombrable}$$

$$\Rightarrow \exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}.$$

*Dit autrement :*

*si $A, card(A) = N$, est un ensemble fini dénombrable alors il existe $N$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$.*

***1ière Preuve***

Démontrons par récurrence le **Lemme 1**.

Pour $N = 1$ nous avons $card(A) = 1$. $A$ est donc un ensemble contenant un unique élément non-vide que nous noterons par "$x$". Il s'ensuit que $A = \{x\}, x \neq \emptyset$. En posant $x = a_1$, il s'ensuit que $A = \{x\} = \{a_1\}$. Dit autrement en posant $x = a_1$ l'unique élément non-vide de $A$, il s'ensuit que $A = \{x\} = \{a_1\}$. Le **Lemme 1** est donc vrai pour $N = 1$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*, N > 1$, donné, supposons que le **Lemme 1** soit vrai pour $N$.

Soit $A, card(A) = N$, un ensemble fini dénombrable donné. Adjoignons par union un $(N+1)^{\text{ième}}$ élément non vide donné que nous noterons par "$y$" à $A, card(A) = N$, tel que $\forall i \in [1, N], a_i \neq y, card(A \cup \{y\}) = N + 1$.

Comme nous avons supposé que le **Lemme 1** était vrai pour $N \in \mathbb{N}^*, N > 1$, en posant $A' = A \cup \{y\}$ et $y = a_{N+1}$, il vient que $\exists$ $N$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que :

$$A' = A \cup \{y\} = \left(\bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}\right) \cup \{a_{N+1}\} = \bigcup_{i=1}^{N+1} \{a_i\}$$

Etant donné que $A, card(A) = N$, est un ensemble fini dénombrable donné et que $y$ est élément non vide donné tel que $\forall i \in [1, N], a_i \neq y, card(A \cup \{y\}) = N + 1$, il vient qu'effectivement $A'$ est un ensemble fini dénombrable donné tel que $card(A') = N + 1$ et tel que $A' = \bigcup_{i=1}^{N+1} \{a_i\}, a_i \neq \emptyset, i \in [1, N+1], \forall i, j \in [1, N+1], i \neq j, a_i \neq a_j$.

Le **Lemme 1** est donc vrai pour $N + 1$. Conséquemment le **Lemme 1** est établi.

***2ième Preuve***

Démontrons par récurrence le **Lemme 1**.

Pour $N = 1$ nous avons $card(A) = 1$. $A$ est donc un ensemble contenant un unique élément non-vide que nous noterons par "$x$". Il s'ensuit que $A = \{x\}, x \neq \emptyset$. En posant $x = a_1$, il s'ensuit que $A = \{x\} = \{a_1\}$. Dit autrement en posant $x = a_1$

l'unique élément non-vide de $A$, il s'ensuit que $A = \{x\} = \{a_1\}$. Le **Lemme 1** est donc vrai pour $N = 1$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*, N > 1$, donné, supposons que le **Lemme 1** soit vrai pour $N$.

Soit $A', card(A') = N + 1$, un ensemble fini dénombrable donné. Soustrayons par exclusion un unique élément non-vide donné de $A', card(A') = N + 1$, que nous noterons par "$y$", tel que $y \in A', card(A' \setminus \{y\}) = N$.

Comme nous avons supposé que le **Lemme 1** était vrai pour $N \in \mathbb{N}^*, N > 1$, en posant $A = A' \setminus \{y\}$, il vient que $\exists$ $N$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que :

$$A = A' \setminus \{y\} = \textstyle\bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$$

Notons que comme $card(A') = N + 1$, nécessairement $y \neq \emptyset$ et $\forall i \in [1, N], a_i \neq y$. Par suite en posant $y = a_{N+1}$, il vient que :

$$A' = A \cup \{y\} = (A' \setminus \{y\}) \cup \{y\} = \left(\textstyle\bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}\right) \cup \{a_{N+1}\} = \textstyle\bigcup_{i=1}^{N+1} \{a_i\}$$

Il existe donc bien $N + 1$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A' = \bigcup_{i=1}^{N+1} \{a_i\}$.

Le **Lemme 1** est donc vrai pour $N + 1$. Conséquemment le **Lemme 1** est établi.

***Lemme 2.*** — *$\forall N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $A, card(A) = N$, un ensemble fini ou infini dénombrable, nous avons :*

$$A, card(A) = N, \text{ un ensemble fini ou infini dénombrable}$$

$$\Rightarrow \exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}.$$

*Dit autrement :*

*si $A, card(A) = N$, est un ensemble fini ou infini dénombrable alors il existe $N$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$.*

***Preuve***

Le **Lemme 1** signifie que le **Lemme 2** est vrai $\forall N \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons par l'absurde le cas où $N = +\infty$.

Supposons que le **Lemme 2** soit faux pour $N = +\infty$. Il s'ensuit qu'il existe un maximum $M \in \mathbb{N}^*$ pour lequel, pour un ensemble fini dénombrable donné $A, card(A) = M$, $\nexists$ $M$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, M], \forall i, j \in [1, M], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{M} \{a_i\}$.

Le fait que $\nexists$ $M$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, M], \forall i, j \in [1, M], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{M} \{a_i\}$ est en contradiction avec le **Lemme 1**. Conséquemment le **Lemme 2** est vrai dans le cas où $N = +\infty$ et le **Lemme 2** est établi.

***Théorème 1.*** — *$\forall N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $A, card(A) = N$, un ensemble fini ou infini dénombrable, nous avons :*

$$A, card(A) = N, \text{ un ensemble fini ou infini dénombrable}$$

$$\Leftrightarrow \exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}.$$

*Dit autrement :*

*$A, card(A) = N$, est un ensemble fini ou infini dénombrable si et seulement si il existe $N$ éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$.*

***Preuve***

$\forall N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, il est évident que si $\exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$ alors $A, card(A) = N$, est un ensemble fini ou infini dénombrable. Dit autrement $\forall N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ nous avons :

$\exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\} \Rightarrow A, card(A) = N$, un ensemble fini ou infini dénombrable

Le **Lemme 2** ayant établi la réciproque de la proposition ci-dessus, il vient que le **Théorème 1** est établi.

* * *

Remarquons que l'équivalence entre le fait que $A, card(A) = +\infty$, soit un ensemble infini dénombrable et le fait que $\exists a_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\}$ établie par le **Théorème 1**, est donc cruciale en ce qu'elle énonce que tout ensemble infini dénombrable ***existe sous la forme d'un ensemble infini dénombrable indexé à l'infini***.

Dit autrement, pour tout ensemble infini dénombrable donné, le **Théorème 1** impose ***la nécessité de l'existence formelle*** d'une infinité d'éléments $a_i \neq \emptyset, i \in [1, +\infty[, \forall i, j \in [1, +\infty[, i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\}$.

Aussi, l'équivalence établie par le **Théorème 1**, nous permet de considérer le **Théorème 1** ***comme la définition même des ensembles finis ou infinis dénombrables***.

***Corollaire 1.*** — *Soient $A, B, card(A) = card(B) = N, N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ deux ensembles finis ou infinis dénombrables, nous avons :*

$$A, B, card(A) = card(B) = N, A = B \Leftrightarrow \exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = B = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$$

*Dit autrement :*

*$A, B, card(A) = card(B) = N$, sont deux ensembles finis ou infinis dénombrables égaux si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, éléments non-vides distincts $a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j$ tels que $A = B = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$.*

***Preuve***

Soit la proposition suivante :

$$A, B, card(A) = card(B) = N, A = B \Rightarrow \exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = B = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\} \textbf{ (I.1)}$$

Soient $A, B, card(A) = card(B) = N, N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, deux ensembles finis ou infinis dénombrables donnés tels que $A = B$.

En appliquant le **Théorème 1** à l'ensemble fini ou infini dénombrable $A$, il vient que $\exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$. Or comme $A = B$, il s'ensuit que $\exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = B = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$.

Conséquemment la proposition **(I.1)** est établie.

*

Soit la réciproque de la proposition **(I.1)** :

$$\exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = B = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\} \Rightarrow A, B, card(A) = card(B) = N, A = B \textbf{ (II.1)}$$

Si $\exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, a_i \neq a_j, A = B = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$, alors nous avons bien $A, B, card(A) = card(B) = N, A = B$, en ce que le premier fait énonce déjà le second fait. Ce qui établit immédiatement la proposition **(II.1)**.

Conséquemment le **Corollaire 1** est établi.

***Corollaire 2.*** — *Soit $A$ un ensemble dénombrable, nous avons :*

$$A, card(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$$

*Dit autrement :*

*$A$ est un ensemble dénombrable tel que $card(A) = 0$ si seulement si $A$ est l'ensemble vide.*

***Preuve***

Soit la proposition suivante :

$$A = \emptyset \Rightarrow A, card(A) = 0 \textbf{ (1)}$$

Démontrons par l'absurde la proposition **(1)**.

Soit $A = \emptyset$.

Supposons que $card(A) = N, N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}, card(A) \geq 1$.

D'après le **Théorème 1**, il s'ensuit que $\exists a_i \neq \emptyset, i \in [1, card(A)], \forall i, j \in [1, card(A)], i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{card(A)} \{a_i\}$. A n'est donc pas l'ensemble vide. Ce qui est une contradiction.

Conséquemment la proposition **(1)** est établie.

Dit autrement, d'après le **Théorème 1** nous avons :

$$A, card(A) \geq 1 \Rightarrow \exists a_1 \neq \emptyset, a_1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset \textbf{ (1.a)}$$

La proposition **(1)** étant la contraposée de la proposition **(1.a)**, conséquemment la proposition **(1)** est établie.

*

Soit la réciproque de la proposition **(1)** :

$$A, card(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \; \mathbf{(2)}$$

Démontrons par l'absurde la proposition **(2)**.

Soit $A, card(A) = 0$, un ensemble dénombrable donné.

Supposons que $A \neq \emptyset$. Comme $A \neq \emptyset$, d'après le **Théorème 1**, il s'ensuit que $\exists$ au moins un élément $a_1 \neq \emptyset, a_1 \in A$. Ce qui implique que $card(A) \geq 1$. Ce qui est une contradiction.

Conséquemment la proposition **(2)** est établie et le **Corollaire 2** également.

Dit autrement, d'après le **Théorème 1** nous avons :

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_1 \neq \emptyset, a_1 \in A \Rightarrow A, card(A) \geq 1 \; \mathbf{(2.a)}$$

La proposition **(2)** étant la contraposée de la proposition **(2.a)**, conséquemment la proposition **(2)** est établi et le **Corollaire 2** également.

* * *

Le **Corollaire 2** établit le fait que, en ce qui concerne les ensembles dénombrables, l'ensemble vide noté "$\emptyset = \{\}$" est de cardinal $card(\emptyset) = card(\{\}) = 0$ et est unique.

Une manière intuitive de comprendre le **Corollaire 2** est de considérer que pour tout ensemble dénombrable $A, card(A) \geq 1$, donné, d'après le **Théorème 1**, il existe au moins $a_1 \in A$; ce qui nous permet dès lors d'écrire que "$A = \{a_1, ..., ..., ...\}$, $card(\{a_1, ..., ..., ...\}) \geq 1$". Or c'est en écrivant "$A = \{a_1, ..., ..., ...\}$, $card(\{a_1, ..., ..., ...\}) \geq 1$" que la nature de l'ensemble vide "$\emptyset = \{\}$", en ce qui concerne les ensembles dénombrables, se révèle dans toute sa clarté.

***Corollaire 3.*** — *Soient* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, a_i \neq a_j$, *un ensemble infini dénombrable et* $B = \bigcup_{i=1}^{N}\{b_i\}, b_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, b_i \neq b_j, N \in \mathbb{N}^*$, *un ensemble fini dénombrable, tels que* $A \cap B = \emptyset$, *nous avons :*

$$A', card(A') = +\infty, A' = A \cup B$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists a'_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a'_i \neq a'_j, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\},$$

*avec*

$$A = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\}, E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j},$$
$$B = \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots, e_{b_N}\}, \forall j \in [1, N], e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in [1, N], i > j, e_{b_i} > e_{b_j},$$
$$E_A \cap E_B = \emptyset, E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*$$

*Dit autrement :*

$A', card(A') = +\infty$, *est un ensemble infini dénombrable égal à l'union de* $A$ *et de* $B$ *si seulement si il existe une infinité d'éléments non-vides distincts* $a'_i$ *tels que* $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}$ *avec* $A = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\}$ *où l'ensemble des index* $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}$ *est strictement croissant et avec* $B = \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}$ *où l'ensemble des index* $E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots, e_{b_N}\}$ *est strictement croissant, et tels que* $E_A \cap E_B = \emptyset, E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*$.

***Preuve***

Soient $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, a_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_i \neq a_j$, un ensemble infini dénombrable donné et $B = \bigcup_{i=1}^{N}\{b_i\}, b_i \neq \emptyset, i \in [1, N], \forall i, j \in [1, N], i \neq j, b_i \neq b_j, N \in \mathbb{N}^*$, un ensemble fini dénombrable donné, tels que $A \cap B = \emptyset$.

Soit $A' = A \cup B$.

Si $A'$ est un ensemble infini dénombrable de cardinal $card(A') \geq card(A) \geq +\infty$ alors, d'après le **Théorème 1**, il vient que : $\exists a'_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a'_i \neq a'_j, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\}$.

Comme $card(E_B) < +\infty$, en appliquant le **Corollaire 2** de l'article [4], (N-A. Phan, 2022, [4], page 10), à $A'$, il est légitime de partitionner $A'$ comme suit :

$$A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \left[\bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')} = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$$

$$avec$$

$$E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j},$$

$$E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots, e_{b_N}\}, \forall j \in [1, N], e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in [1, N], i > j, e_{b_i} > e_{b_j},$$

$$E_A \cap E_B = \emptyset, E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*.$$

En posant $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in E_A, a'_{e_{a_j}} = a_j$, d'après le **Corollaire 1**, nous avons $\bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = A$.

En posant $\forall j \in [1, N], e_{b_j} \in E_B, a'_{e_{b_j}} = b_j$, d'après le **Corollaire 1**, nous avons $\bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\} = \bigcup_{i=1}^{N}\{b_i\} = B$.

Ce qui nous permet d'établir qu'effectivement :

$$A', card(A') = +\infty, A' = A \cup B$$

$$\Rightarrow$$

$$\exists a'_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a'_i \neq a'_j, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\},$$

$$avec$$

$$A = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\}, E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j},$$

$$B = \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots, e_{b_N}\}, \forall j \in [1, N], e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in [1, N], i > j, e_{b_i} > e_{b_j},$$

$$E_A \cap E_B = \emptyset, E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*$$

Dit autrement, il est établi que si $A', card(A') = +\infty$, est un ensemble infini dénombrable égal à l'union de $A$ et de $B$ alors il existe une infinité d'éléments non-vides distincts $a'_i$ tels que $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$ avec $A = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}$ est strictement croissant et avec $B = \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots, e_{b_N}\}$ est strictement croissant, et tels que $E_A \cap E_B = \emptyset, E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*$.

*

Réciproquement, s'il existe une infinité d'éléments non-vides distincts $a'_i$ tels que $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$ avec $A = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}$ est strictement croissant et avec $B = \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots, e_{b_N}\}$ est strictement croissant, et tels que $E_A \cap E_B = \emptyset, E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*$ alors nous avons bien $A', card(A') = +\infty, A' =$

$\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\} = A \cup B$, en ce que le premier fait énonce déjà le second fait.

Conséquemment le **Corollaire 3** est établi.

***Corollaire 4.*** — *Soient* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, a_i \neq a_j$ *et* $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, b_i \neq b_j$*, deux ensembles infinis dénombrables tels que* $A \cap B = \emptyset$*, nous avons :*

$$A', card(A') = +\infty, A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists a'_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a'_i \neq a'_j, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \left[\bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')},$$
$$\textit{avec}$$
$$A = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\}, E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j},$$
$$B = \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{b_i} > e_{b_j},$$
$$E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$$

*Dit autrement :*

$A', card(A') = +\infty$*, est un ensemble infini dénombrable égal à l'union de A et de B si seulement si il existe une infinité d'éléments non-vides distincts* $a'_i$ *tels que* $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \left[\bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}$ *avec* $A = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\}$ *où l'ensemble des index* $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}$ *est strictement croissant et avec* $B = \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}$ *où l'ensemble des index* $E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}$ *est strictement croissant, et tels que* $E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$.

***Preuve***

Soient $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, a_i \neq a_j$ et $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, b_i \neq b_j$, deux ensembles infinis dénombrables donnés tels que $A \cap B = \emptyset$.

Soit $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$.

Si $A'$ est un ensemble infini dénombrable de cardinal $card(A') \geq card(A) \geq +\infty$ alors, d'après le **Théorème 1**, il vient que : $\exists a'_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a'_i \neq a'_j, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\}$.

En appliquant le **Théorème 1** de l'article [3], (N-A. Phan, 2022, [3], page 10), à $A'$, il est légitime de partitionner $A'$ comme suit :

$$A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \left[\bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}$$
$$\textit{avec}$$
$$E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j},$$
$$E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{b_i} > e_{b_j},$$
$$E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*.$$

En posant $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in E_A, a'_{e_{a_j}} = a_j$, d'après le **Corollaire 1**, nous avons $\bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = A$.

En posant $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in E_B, a'_{e_{b_j}} = b_j$, d'après le **Corollaire 1**, nous avons $\bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{b_i\} = B$.

Ce qui nous permet d'établir qu'effectivement :

$$A', card(A') = +\infty, A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$$
$$\Rightarrow$$
$$\exists a'_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a'_i \neq a'_j, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a'_i\} = \left[\bigcup_{i \in E_A} \{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')},$$
$$avec$$
$$A = \bigcup_{i \in E_A} \{a'_i\}, E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j},$$
$$B = \bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{b_i} > e_{b_j},$$
$$E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$$

Dit autrement, il est établi que si $A', card(A') = +\infty$, est un ensemble infini dénombrable égal à l'union de $A$ et de $B$ alors il existe une infinité d'éléments non-vides distincts $a'_i$ tels que $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a'_i\} = \left[\bigcup_{i \in E_A} \{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}$ avec $A = \bigcup_{i \in E_A} \{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}$ est strictement croissant et avec $B = \bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}$ est strictement croissant, et tels que $E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$.

*

Réciproquement, s'il existe une infinité d'éléments non-vides distincts $a'_i$ tels que $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a'_i\} = \left[\bigcup_{i \in E_A} \{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}$ avec $A = \bigcup_{i \in E_A} \{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}$ est strictement croissant et avec $B = \bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\}$ où l'ensemble des index $E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}$ est strictement croissant, et tels que $E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$ alors nous avons bien $A', card(A') = +\infty, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a'_i\} = \left[\bigcup_{i \in E_A} \{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B} \{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')} = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$, en ce que le premier fait énonce déjà le second fait.

Conséquemment le **Corollaire 4** est établi.

***Corollaire 5.*** — *Soit $A, card(A) = +\infty$, un ensemble infini dénombrable, nous avons :*

$$A, card(A) = +\infty, \textit{ un ensemble infini dénombrable}$$
$$\Rightarrow$$
$$\exists a_{k_i} \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_{k_i} \neq a_{k_j}, \forall k \in \mathbb{N}^*, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_{k_i}\}$$

*Dit autrement :*

*si $A, card(A) = +\infty$, est un ensemble infini dénombrable alors il existe une infinité d'indexations légitimes de $A$ tels que*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_{k_i}\}, a_{k_i} \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_{k_i} \neq a_{k_j} \ .$$

***Preuve***

Soit $A, card(A) = +\infty$, un ensemble infini dénombrable donné.

En appliquant le **Théorème 1** à $A, card(A) = +\infty$, il s'ensuit que : $\exists a_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$.

Comme $\forall i \in \mathbb{N}^*, card(\{a_i, a_{i+1}\}) = 2$, en appliquant le **Corollaire 2** de l'article [4], (N-A. Phan, 2022, [4], page 10), à l'ensemble $A$, nous obtenons :

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i, a_{i+1}\}$$

Dès lors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ en posant lorsque $i = k$, $a_{k_k} = a_{k+1}, a_{k_{k+1}} = a_k$ et en posant $\forall i \in \mathbb{N}^*, i \neq k, a_{k_i} = a_i, a_{k_{i+1}} = a_{i+1}$, il vient que :

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i, a_{i+1}\} = \left(\bigcup_{i=1, i\neq k}^{+\infty}\{a_i, a_{i+1}\}\right) \cup \{a_{k+1}, a_k\} = \left(\bigcup_{i=1, i\neq k}^{+\infty}\{a_i, a_{i+1}\}\right) \cup \{a_{k_k}, a_{k_{k+1}}\} = \left(\bigcup_{i=1, i\neq k}^{+\infty}\{a_{k_i}, a_{k_{i+1}}\}\right) \cup \{a_{k_k}, a_{k_{k+1}}\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_{k_i}\}$$

Ce qui établit que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists a_{k_i} \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_{k_i} \neq a_{k_j}$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_{k_i}\}$.

Conséquemment, le **Corollaire 5** est établi.

* * *

Le **Corollaire 5** signifie que pour un ensemble infini dénombrable donné $A, card(A) = +\infty$, ***il existe une infinité d'indexations légitimes de*** $A$ ***qui soient*** $A$.

***Corollaire 6.*** — *Soient* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, a_i \neq a_j$ *et* $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, b_i \neq b_j$, *deux ensembles infinis dénombrables tels que* $(\forall a_i \in A, a_i \in B) \cap (\forall b_i \in B, b_i \in A)$.

*En considérant l'espace de probabilité* $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ *et l'espace de probabilité* $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, *et soient* $a \in [0,1]$, $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = a$ *et* $b \in [0,1]$, $P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = b$, *il vient que :*

$$\textit{Si } P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \textit{ alors } A \neq B.$$

*Dit autrement :*

$$P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \Rightarrow A \neq B.$$

***Preuve***

Par définition nous avons :

$$\begin{aligned}
& A = B \\
\Rightarrow\ & \langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \\
& \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \\
& \{a_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle \\
\Rightarrow\ & P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \ \textbf{(I.6)}
\end{aligned}$$

Dit autrement : si $A = B$ alors par définition l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ est égale à l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, ce qui implique dès lors que $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$.

Effectivement : si $A = B$ alors en substituant symboliquement c-à-d en remplaçant la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" nous obtenons immédiatement $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$.

En prenant la contraposée de **(I.6)** :

$$\begin{aligned}
&\neg(P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})) \\
\Rightarrow\ &\neg(\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \\
&\Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \\
&\{a_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle) \\
\Rightarrow\ &\neg(A = B)
\end{aligned}$$

Dit autrement : si $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ n'est pas égale à $P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ alors par définition l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ n'est pas égale à l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, ce qui implique dès lors que $A \neq B$. Conséquemment le **Corollaire 6** est établit.

Effectivement : sachant que $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ si $A = B$ alors en substituant symboliquement c-à-d en remplaçant la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" nous obtenons immédiatement $P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$. Ce qui est une contradiction. Dans la mesure où substituer symboliquement c-à-d remplacer la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" implique une contradiction, il vient que nécessairement $A \neq B$.

* * *

Notons que le **Corollaire 6** est la généralisation du **Lemme 3** et du **Lemme 4** de l'article [2], (N-A. Phan, 2021, [2], page 3 et page 14 respectivement).

***Corollaire 7.*** — *Soit $A, card(A) = +\infty$, un ensemble infini dénombrable, nous avons :*

$$A, card(A) = +\infty, \text{ un ensemble infini dénombrable}$$
$$\Rightarrow$$
$$\exists B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{b_i\} \neq A, \forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \in A, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, b_i \neq b_j, \forall x \in A, x \in B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{b_i\}$$

*Dit autrement :*

*si $A, card(A) = +\infty$, est un ensemble infini dénombrable alors il existe un ensemble infini dénombrable indexé $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{b_i\} \neq A$ tel que*

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \in A, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, b_i \neq b_j, \forall x \in A, x \in B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{b_i\}$$

***Preuve***

Soit $A, card(A) = +\infty$, un ensemble infini dénombrable donné.

En appliquant le **Théorème 1** à $A, card(A) = +\infty$, il s'ensuit que : $\exists a_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a_i \neq a_j, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$.

Soit $f : \mathbb{N}^* \to f(\mathbb{N}^*)$, une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $f(\mathbb{N}^*)$, définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \begin{cases} n + k, \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k \\ n + (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+1 \\ n - (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 2 \end{cases}$$

dont la bijection réciproque $f^{-1} : f(\mathbb{N}^*) \to \mathbb{N}^*$ est définie comme suit :

$$\forall m \in f(\mathbb{N}^*), f^{-1}(m) = \begin{cases} m - k, \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = f(3k) = 3k + k \\ m - (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = f(3k+1) = 3k+1+(k+1) \\ m + (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = f(3k+2) = 3k+2-(k+1) \end{cases}$$

En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{-1}(f(n)) = \begin{cases} n = (3k+k) - k, \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k \\ n = [3k+1+(k+1)] - (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+1 \\ n = [3k+2-(k+1)] + (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+2 \end{cases}$$

Notons que $f : \mathbb{N}^* \to f(\mathbb{N}^*)$ est la même bijection que celle définie pour la preuve du **Corollaire 1** de l'article [2], (N-A. Phan, 2021, [2], page 9) mais dont le domaine de définition a été restreint à $\mathbb{N}^*$.

Posons $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, b_i = a_{f(i)}$, comme $f : \mathbb{N}^* \to f(\mathbb{N}^*)$ est une bijection, il s'ensuit que $(\forall b_i \in B, b_i \in A) \cap (\forall a_i \in A, a_i \in B)$.

En considérant l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$, il est clair que $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2}$.

De même en considérant l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, il est clair que $P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$.

Comme $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \neq P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$, en appliquant le **Corollaire 6**, il vient que $A \neq B$.

$B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\} \neq A$ est donc effectivement un ensemble infini dénombrable indexé tel que $\forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \in A, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, b_i \neq b_j, \forall x \in A, x \in B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\}$.

Conséquemment le **Corollaire 7** est établi.

* * *

Le **Corollaire 7** signifie que pour un ensemble infini dénombrable donné $A, card(A) = +\infty$, ***il est illégitime de procéder à une indexation arbitraire de*** $A$, en ce qu'une telle indexation arbitraire peut constituer un ensemble infini dénombrable qui ne soit pas égal à $A$.

***Définition 1.*** — *Soient* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, a_i \neq a_j$ *et* $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \neq \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, b_i \neq b_j$*, deux ensembles infinis dénombrables tels que* $A \cap B = \emptyset$.

*Soit un ensemble infini dénombrable égal à l'union de A et de B,* $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}, A = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\}, E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j}, B = \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{b_i} > e_{b_j}, E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$*, nous écrivons :*

$$A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')} \text{ est un ensemble infini dénombrable indéterminé}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\exists X \in \mathbb{N}^*, \forall e_{a_j} \in E_A, e_{a_j} \geq X,\ e_{a_j} \text{ n'a pas de valeur numérique donnée}) \cup$$
$$(\exists X \in \mathbb{N}^*, \forall e_{b_j} \in E_B, e_{b_j} \geq X,\ e_{b_j} \text{ n'a pas de valeur numérique donnée}).$$

*qui se lit : "$A'$ égal à l'union de A et de B (comme partition de $A'$) est un ensemble infini dénombrable indéterminé si et seulement si il existe un entier naturel $X \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall e_{a_j} \in E_A, e_{a_j} \geq X$, l'index $e_{a_j}$ n'a pas de valeur numérique donnée, ou si et seulement si il existe un entier naturel $X \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall e_{b_j} \in E_B, e_{b_j} \geq X$, l'index $e_{b_j}$ n'a pas de valeur numérique donnée".*

* * *

Notons que la **Définition 1** est énoncée sous la forme d'une équivalence en écriture, en ce que si nous écrivons "$A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ est un ensemble infini dénombrable indéterminé" alors il existe un entier naturel $X \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall e_{a_j} \in E_A, e_{a_j} \geq X$, l'index $e_{a_j}$ n'a pas de valeur numérique donnée. Réciproquement si nous écrivons qu'il existe un entier naturel $X \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall e_{a_j} \in E_A, e_{a_j} \geq X$, l'index $e_{a_j}$ n'a pas de valeur numérique donnée alors $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ est un ensemble infini dénombrable indéterminé.

L'ensemble infini dénombrable indéterminé $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ est "indéterminé" en ce qu'il existe une infinité d'index $e_{a_j} \in E_A, \forall e_{a_j} \geq X$, dont ***la valeur numérique*** n'est pas donnée ou une infinité d'index $e_{b_j} \in E_B, \forall e_{b_j} \geq X$, dont ***la valeur numérique*** n'est pas donnée. $a'_X$ qui est le $X^{\text{ième}}$ élément de $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$, est donc le premier élément pour lequel nous ne savons pas si $a'_X \in A$ ou si $a'_X \in B$.

Dit autrement, le **Corollaire 4** stipule ***la nécessité de l'existence formelle*** des sous-ensembles $A = \bigcup_{i=E_A}\{a'_i\}$ et $B = \bigcup_{i=E_B}\{a'_i\}$ cependant que le caractère "indéterminé" de $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ se porte sur le fait qu'il existe $X$ pour lequel $\forall e_{a_j} \geq X$, l'index $e_{a_j}$ n'a pas de valeur numérique donnée, ou qu'il existe $X$ pour lequel $\forall e_{b_j} \geq X$, l'index $e_{b_j}$ n'a pas de valeur numérique donnée.

Il faut donc bien distinguer le fait que $\forall j \in \mathbb{N}^*$ l'index $e_{a_j} \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel (comme le stipule le **Corollaire 4**), et le fait que l'index $e_{a_j}$ prend une valeur numérique donnée ou pas. Par exemple l'index $e_{a_1}$ peut prendre la valeur numérique donnée de 1, auquel cas nous pourrons écrire "$e_{a_1} = 1$". Dans le cas où il n'est pas posé "$e_{a_1} = n$" pour une valeur $n \in \mathbb{N}^*$ donné, il est qualifié que l'index $e_{a_1}$ "n'a pas de valeur numérique donnée".

***Corollaire 8.*** — *Soient* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, a_i \neq a_j$ *et* $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, b_i \neq \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, b_i \neq b_j$*, deux ensembles infinis dénombrables tels que* $A \cap B = \emptyset$.

*Soit un ensemble infini dénombrable égal à l'union de* $A$ *et de* $B$, $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}, A = \bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\}, E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j}, B = \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{b_i} > e_{b_j}, E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$*, nous avons :*

$$\exists X \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X,\ e_{a_j} \text{ a une valeur numérique donnée}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \text{ a une valeur numérique donnée}) \cup (\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \text{ a une valeur numérique donnée}).$$

*Dit autrement : Il existe* $X \in \mathbb{N}^*$*, tel que* $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X$*, l'index* $e_{a_j}$ *a une valeur numérique donnée si et seulement si* $\forall j \in \mathbb{N}^*$*, l'index* $e_{a_j}$ *a une valeur numérique donnée ou si et seulement si* $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j}$ *a une valeur numérique donnée.*

***Preuve***

Soit la proposition suivante :

$$\exists X \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X,\ e_{a_j} \text{ a une valeur numérique donnée}$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \text{ a une valeur numérique donnée. } \mathbf{I.8}$$

Soit $X \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X$, l'index $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée.

Dans le cas où $X = 1$, il s'ensuit que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, l'index $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée. Conséquemment la proposition **I.8** est établie dans le cas où $X = 1$.

Dans le cas où $X > 1$. Nous avons :

**(a)** soit $\forall i \in [1, X[, a'_i \in A$, auquel cas nous avons : $e_{a_1} = 1, e_{a_2} = 2, \ldots, e_{a_i} = i, \ldots, e_{a_{X-1}} = X - 1$.

**(b)** soit $\forall i \in [1, X[, a'_i \in B$, auquel cas nous avons : $e_{b_1} = 1, e_{b_2} = 2, \ldots, e_{b_i} = i, \ldots, e_{b_{X-1}} = X - 1$.

**(c)** soit $X = 3$. Il s'ensuit que soit $(e_{a_1} = 1) \cap (e_{b_1} = 2)$ ou soit $(e_{a_1} = 2) \cap (e_{b_1} = 1)$.

**(d)** soit $X > 4$. Il s'ensuit qu'il existe un sous-ensemble $S_A \subset [1, X[, S_A = \{s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_j}, \ldots, s_{a_{f_a}}\}, f_a \in [1, X-2], \forall j \in [1, f_a], s_{a_j} \in [1, X[, \forall i,j \in [1, f_a], i > j, s_{a_i} > s_{a_j}$, et qu'il existe un sous-ensemble $S_B \subset [1, X[, S_B = \{s_{b_1}, s_{b_2}, \ldots, s_{b_j}, \ldots, s_{b_{f_b}}\}, f_b \in [1, X-2], \forall j \in [1, f_b], s_{b_j} \in [1, X[, \forall i,j \in [1, f_b], i > j, s_{b_i} > s_{b_j}$, tels que $S_A \cap S_B = \emptyset, S_A \cup S_B = [1, X[, f_a + f_b = card([1, X[) = X - 1$. Auquel cas nous avons : $e_{a_1} = s_{a_1}, e_{a_2} = s_{a_2}, \ldots, e_{a_j} = s_{a_j}, \ldots, e_{a_{f_a}} = s_{a_{f_a}}$ et $e_{b_1} = s_{b_1}, e_{b_2} = s_{b_2}, \ldots, e_{b_j} = s_{b_j}, \ldots, e_{b_{f_b}} = s_{b_{f_b}}$.

Comme dans chacun des cas **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)**, nous avons attribué aux index $\forall e_{a_j} < X$ une valeur numérique donnée, et étant donné que $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X$, $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée, il s'ensuit que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée.

Notons que dans chacun des cas **(a), (b), (c), (d)**, nous avons attribué aux index $\forall e_{a_j} < X$ une valeur numérique donnée de manière arbitraire, cependant que cette manière arbitraire est conditionnée par le fait qu'initialement $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X$, $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée.

Le fait qu'initialement $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X$, $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée fait que l'ensemble $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ soit un ensemble infini dénombrable déterminé cependant que nous avons attribué aux index $\forall e_{a_j} < X$ une valeur numérique donnée de manière arbitraire.

La proposition **I.8** est établie dans le cas où $X > 1$. Conséquemment la proposition **I.8** est établie $\forall X \in \mathbb{N}^*$.

*

Réciproquement à la proposition **I.8**, si $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée alors nous avons bien $\exists X \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \geq X$, $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée, en ce que le premier fait énonce déjà le second fait, en posant $X = 1$.

*

Comme $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{b_i} > e_{b_j}, E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$, le fait que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, l'index $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée, implique donc que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, l'index $e_{b_j}$ a une valeur numérique donnée.

Vice-versa, comme $E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{b_i} > e_{b_j}, E_A \cap E_B = \emptyset, [E_A \cup E_B]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$, le fait que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, l'index $e_{b_j}$ a une valeur numérique donnée, implique donc que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, l'index $e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée.

Conséquemment le **Corollaire 8** est établi.

* * *

**(a)**, **(b)**, **(c)** et **(d)** signifient que dans chacun de ces cas, nous avons attribué arbitrairement une valeur numérique donnée aux index $e_{a_i} < X$ et $e_{b_i} < X$. Lequel de ces 4 cas possibles **(a), (b), (c), (d)** est applicable dépend des valeurs numériques attribuées initialement aux index $e_{a_j} \geq X$.

Par exemple dans le cas où $X = 3$, nous avons : $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \{a'_1 = a_1\} \cup \{a'_2 = b_1\} \cup \left(\bigcup_{i=3}^{+\infty}\{a'_i\}\right) = \{a'_1 = a'_{e_{a_1}=1}\} \cup \{a'_2 = a'_{e_{b_1}=2}\} \cup \left(\bigcup_{i=3}^{+\infty}\{a'_i\}\right) = \{a'_1 = b_1\} \cup \{a'_2 = a_1\} \cup \left(\bigcup_{i=3}^{+\infty}\{a'_i\}\right) = \{a'_1 = a'_{e_{b_1}=1}\} \cup \{a'_2 = a'_{e_{a_1}=2}\} \cup \left(\bigcup_{i=3}^{+\infty}\{a'_i\}\right) = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\bigcup_{i \in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i \in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}$.

C'est précisément parce que nous avons attribué arbitrairement une valeur numérique donnée aux index $e_{a_i} < X$ et $e_{b_i} < X$, qu'il résulte que $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée et que $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j}$ a une valeur numérique donnée.

Le fait que $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j}$ a une valeur numérique donnée, s'oppose au cas stipulé par la **Définition 1** où les index $e_{a_i} \geq X$ ou les index $e_{b_i} \geq X$ n'ont pas valeurs numériques donnés.

C'est précisément cette absence d'attribution de valeurs numériques aux index $e_{a_i} \geq X$ ou aux index $e_{b_i} \geq X$ qui justifie l'emploi du terme "indéterminé" dans la **Définition 1**.

Etant donné que la proposition **I.8** a été démontrée $\forall X \in \mathbb{N}^*$, il est très intéressant de faire tendre $X$ vers $+\infty$. Pour $X \to +\infty$, il est clair que les cas **(a), (b), (c)** ne sont pas applicables étant donné que $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$. Seul le cas **(d)** est donc applicable et nous obtenons : $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}\right]_{\mathcal{P}(A')}, A = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\}, B = \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$ avec $E_A = S_A$ et $E_B = S_B$. $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ est donc un ensemble infini dénombrable déterminé arbitrairement en ce que $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} = s_{a_j}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*, e_{b_j} = s_{b_j}$.

Dit autrement, dans le cas où $X = +\infty$, $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ est un ensemble infini dénombrable déterminé arbitrairement, et dans le cas où $X < +\infty$, $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ est un ensemble infini dénombrable déterminé par les index $e_{a_j} \geq X$ auxquels des valeurs numériques données ont été initialement attribuées.

Un ensemble infini dénombrable est donc qualifié de "déterminé" dès lors qu'une valeur numérique donnée a été attribuée à chaque index $e_{a_j}, \forall j \in \mathbb{N}^*$. Ce qui signifie que le **Corollaire 8** constitue une définition des ensembles infinis dénombrables "déterminés".

A contrario, un ensemble infini dénombrable est qualifié "d'indéterminé" dès lors qu'il existe $X$ tel qu'aucune valeur numérique donnée n'a été attribuée aux index $e_{a_j} \geq X$ ou qu'il existe $X$ tel qu'aucune valeur numérique donnée n'a été attribuée aux index $e_{b_j} \geq X$.

* * * * *

**Exemple 1**

Soit $A = \emptyset$, $B = \emptyset$ et $C = \emptyset$.

Il vient que : $A = B = C = \emptyset$ et $card(A) = card(B) = card(C) = 0$ (cf. **Corollaire 2**).

**Exemple 2**

Soit $A = \{lux\}$.

Il vient que : $lux \in A = \{lux\}$ et $card(A) = 1$ (cf. **Théorème 1**).

**Exemple 3**

Soit $A = \{$ Bételgeuse, Antarès, Alpha Andromède $\}$.

D'après le **Théorème 1**, il vient que :

$A = \{a_1 =$ Bételgeuse, $a_2 =$ Antarès, $a_3 =$ Alpha Andromède$\} = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $card(A) = 3$.

$B = \{b_1 =$ Bételgeuse, $b_2 =$ Alpha Andromède, $b_3 =$ Antarès$\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ et $card(B) = 3$.

$C = \{c_1 =$ Antarès, $c_2 =$ Bételgeuse, $c_3 =$ Alpha Andromède$\} = \{c_1, c_2, c_3\}$ et $card(C) = 3$.

$D = \{d_1 =$ Antarès, $d_2 =$ Alpha Andromède, $d_3 =$ Bételgeuse$\} = \{d_1, d_2, d_3\}$ et $card(D) = 3$.

$E = \{e_1 =$ Alpha Andromède, $e_2 =$ Antarès, $e_3 =$ Bételgeuse$\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $card(E) = 3$.

$F = \{f_1 =$ Alpha Andromède, $f_2 =$ Bételgeuse, $f_3 =$ Antarès$\} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $card(F) = 3$.

Il vient que : $A = B = C = D = E = F = \{$ Bételgeuse, Antarès, Alpha Andromède $\}$ et $card(A) = card(B) = card(C) = card(D) = card(E) = card(F) = 3$ (cf. **Corollaire 1**).

Il y a donc 6 manières distinctes d'indexer l'ensemble fini dénombrable $A = \{$ Bételgeuse, Antarès, Alpha Andromède $\}$.

**Exemple 4**

Soit $A = \mathbb{N}^*$.

D'après le **Théorème 1**, il vient que : $A = \mathbb{N}^* = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i = i\}$ et $card(A) = +\infty$.

D'après le **Théorème 1** de l'article [3], (N-A. Phan, 2022, [3], page 10), il vient que : $A = \mathbb{N}^* = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i = i\} = \left[\bigcup_{i=\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}\{a_i = i\} \cup \bigcup_{i=\{2k:k\in\mathbb{N}^*\}}\{a_i = i\}\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$.

**Exemple 5**

Soit $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, card(A) = +\infty$, un ensemble infini dénombrable donné.

Soit $B = \{b_1, b_2, b_3\}, card(B) = 3$, un ensemble fini dénombrable donné.

Soit $A' = A \cup B$.

D'après le **Corollaire 3**, il s'ensuit que : $\exists a'_i \neq \emptyset, i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, a'_i \neq a'_j, A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$, avec $A = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\}, E_A = \{e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_j}, \ldots\}, \forall j \in \mathbb{N}^*, e_{a_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, e_{a_i} > e_{a_j}$, $B = \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}, E_B = \{e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_j}, \ldots, e_{b_N}\}, \forall j \in [1, N], e_{b_j} \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in [1, N], i > j, e_{b_i} > e_{b_j}$, $E_A \cap E_B = \emptyset, E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*$.

En effet, en posant $a'_1 = b_1, a'_2 = b_2, a'_3 = b_3$ et $\forall i \in ]3, +\infty[, a'_i = a_{i-3}$, nous obtenons : $A' = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\} = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\} \cup \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$, $A = \bigcup_{i\in E_A}\{a'_i\}$, $B = \bigcup_{i\in E_B}\{a'_i\}$, $E_A = ]3, +\infty[, E_B = [1, 3]$, $E_A \cap E_B = \emptyset$, $E_A \cup E_B = \mathbb{N}^*$.

**Exemple 6**

Soit $A = \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathbb{P} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{p_i\}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}^*, p_i$ est un nombre premier, et tel que $\forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, p_i > p_j$.

D'après le **Théorème 1** de l'article [3], (N-A. Phan, 2022, [3], page 10), il vient que : $A = \mathbb{N}^* = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{S}}\{a_i = i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{P}}\{a_i = i\}\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$ avec $\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{s_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, s_i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, s_i > s_j$, $\mathbb{P} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{p_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, p_i \in \mathbb{N}^*, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i > j, p_i > p_j$, $\mathbb{S} \cap \mathbb{P} = \emptyset, [\mathbb{S} \cup \mathbb{P}]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$.

$\mathbb{S}$ est donc l'ensemble infini dénombrable des entiers naturels non-premiers. Ainsi nous avons : $s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 6, s_4 = 8, s_5 = 9, s_6 = 10, \ldots$, etc.

D'après la **Définition 1**, l'ensemble infini dénombrable $\mathbb{N}^* = [\mathbb{S} \cup \mathbb{P}]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$ est donc un **ensemble infini dénombrable indéterminé** cependant que l'ensemble infini dénombrable $\mathbb{N}^* = \left[\bigcup_{i=\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}\{a_i = i\} \cup \bigcup_{i=\{2k:k\in\mathbb{N}^*\}}\{a_i = i\}\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$ défini dans l'**Exemple 4** est un ensemble infini dénombrable déterminé.

Dans le cas de $\mathbb{N}^* = [\mathbb{S} \cup \mathbb{P}]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$, c'est bien l'ensemble $[\mathbb{S} \cup \mathbb{P}]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$ comme union des ensembles $\mathbb{S}$ et $\mathbb{P}$, qui est indéterminé.

Dans le cas de $\mathbb{N}^* = \left[\bigcup_{i=\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}\{a_i = i\} \cup \bigcup_{i=\{2k:k\in\mathbb{N}^*\}}\{a_i = i\}\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$, c'est bien l'ensemble $\left[\bigcup_{i=\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}\{a_i = i\} \cup \bigcup_{i=\{2k:k\in\mathbb{N}^*\}}\{a_i = i\}\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$ comme union des ensembles $\bigcup_{i=\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}\{i\}$ et $\bigcup_{i=\{2k:k\in\mathbb{N}^*\}}\{i\}$, qui est déterminé.

Cette exemple-ci illustre bien la **Définition 1** en ce qu'il met en évidence que le caractère "indéterminé" pour un ensemble infini dénombrable donné $A' = [A \cup B]_{\mathcal{P}(A')}$ se réfère à l'union de deux ensembles infinis dénombrables donnés $A$ et $B$.

**Exemple 7**

Soient $O = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{o_i\}$ et $L = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{l_i\}$ deux ensembles infinis dénombrables donnés.

Soit $A' \in \mathcal{C}\langle[O \cup L]\rangle$ un ensemble infini dénombrable donné (cf. **Définition 2**, N-A. Phan, 2022, [2], page 2).

Dit autrement $A'$ est un ensemble infini dénombrable qui est un élément de la classe des ensembles constitués par l'union de $O$ et de $L$.

Dit autrement $A' = [O \cup L]_{\mathcal{P}(A')}$. D'après la **Définition 1**, $A' = [O \cup L]_{\mathcal{P}(A')}$ est donc un **ensemble infini dénombrable indéterminé** cependant que la **Théorème 1** stipule que $\exists a'_i \neq \emptyset, i \in [1, +\infty[, \forall i, j \in [1, +\infty[, i \neq j, a'_i \neq a'_j$ tels que $A' = [O \cup L]_{\mathcal{P}(A')} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a'_i\}$.

**Exemple 8**

Soient $O = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{o_i\}$ et $L = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{l_i\}$ deux ensembles infinis dénombrables donnés.

Soit $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{i=\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}\{a_i = o_{1+k}\} \cup \bigcup_{i=\{2k:k\in\mathbb{N}^*\}}\{a_i = l_k\}\right]_{\mathcal{P}(A)}$.

Soit $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\} = \left[\bigcup_{i=\{3k+1:k\in\mathbb{N}\}}\{b_i = a_{4k+2} = l_{2k+1}\} \cup \bigcup_{i=\{3k+2:k\in\mathbb{N}\}}\{b_i = a_{4k+4} = l_{2k+2}\} \cup \bigcup_{i=\{3k+3:k\in\mathbb{N}\}}\{b_i = a_{2k+1} = o_{1+k}\}\right]_{\mathcal{P}(B)}$.

D'après le **Corollaire 8**, les ensembles infinies dénombrables $A, B \in \mathcal{C}\langle[O \cup L]\rangle$ sont donc des ensembles infinies dénombrables déterminés à la différence de l'ensemble infini dénombrable indéterminé $A' \in \mathcal{C}\langle[O \cup L]\rangle$ défini dans l'**Exemple 6**.

En considérant l'espace de probabilité $\langle\Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle = \langle\Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i \in A : a_i \in O\}, \{a_i \in A : a_i \in L\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ , il est clair que $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_A(\{a_i \in A : a_i \in O\}) = \frac{1}{2}$.

En considérant l'espace de probabilité $\langle\Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{a_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle = \langle\Omega_B = B, \mathcal{F}_B =$

$\{\emptyset, \{b_i \in B : b_i \in O\}, \{b_i \in B : b_i \in L\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$ , il est clair que $P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{b_i \in B : b_i \in O\}) = \frac{1}{3}$.

Comme $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_A(\{a_i \in A : a_i \in O\}) = \frac{1}{2} \neq P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{b_i \in B : b_i \in O\}) = \frac{1}{3}$, d'après le **Corollaire 6**, il vient que $A \neq B$ cependant que $(\forall a_i \in A, a_i \in B) \cap (\forall b_i \in B, b_i \in A)$.

*

Considérerons une illustration de l'exemple ci-dessus. Soit un univers cosmique $Y$ donné qui contient une infinité d'étoiles, parmi lesquelles étoiles il y a une infinité qui soit occupée par une forme de vie et une infinité qui soit libre de toute forme de vie. Notons respectivement ces deux derniers ensembles infinis dénombrables par $O$ et par $L$. Il s'ensuit que $Y \in \mathcal{C}\langle [O \cup L] \rangle$. $Y$ est donc un ensemble infini dénombrable indéterminé. Il est intéressant de noter que $Y \in \mathcal{C}\langle [O \cup L] \rangle$ cependant que $O \subset Y$ et $L \subset Y$.

Par exemple, il est possible que $Y = A$ ou que $Y = B$ auquel cas $Y$ sera un ensemble infini dénombrable déterminé. De plus nous savons déjà que l'univers $A$ est différent de l'univers $B$ en ce que $P_A(\{a_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_A(\{a_i \in A : a_i \in O\}) = \frac{1}{2} \neq P_B(\{a_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{b_i \in B : b_i \in O\}) = \frac{1}{3}$.

**Exemple 9**

Soient $O = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{o_i\}$ et $L = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{l_i\}$ deux ensembles infinis dénombrables donnés. Soient $\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{s_i\}$ et $\mathbb{P} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{p_i\}$ deux ensembles infinis dénombrables tels que définis dans l'**Exemple 6**.

Soit $C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{c_i\} = \left[ \bigcup_{i \in \{s_k : k \in \mathbb{N}^*\}} \{c_i = o_k\} \cup \bigcup_{i \in \{p_k : k \in \mathbb{N}^*\}} \{c_i = l_k\} \right]_{\mathcal{P}(C)}$.

Soit $D = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{d_i\} = \left[ \bigcup_{i \in \{s_k : k \in \mathbb{N}^*\}} \{d_i = l_k\} \cup \bigcup_{i \in \{p_k : k \in \mathbb{N}^*\}} \{d_i = o_k\} \right]_{\mathcal{P}(D)}$.

D'après la **Définition 1**, les ensembles infinies dénombrables $C, D \in \mathcal{C}\langle [O \cup L] \rangle$ sont donc des ensembles infinies dénombrables indéterminés.

* * * * *

Le **Théorème 1** est crucial pour la théorie élémentaire des ensembles en ce qu'il lie par une équivalence le caractère ***dénombrable*** avec le caractère ***indexable*** des ensembles infinis dénombrables.

En effet, dès lors que nous pouvons ***compter*** les éléments d'un ensemble dénombrable, nous pouvons par là-même ***indexer*** les éléments d'un ensemble dénombrable.

C'est en ce que nous pouvons ***compter*** à l'infini les éléments d'un ensemble dénombrable que ce-dit ensemble est effectivement infini, par là-même c'est en ce que nous pouvons ***indexer*** à l'infini les éléments d'un ensemble dénombrable que ce-dit ensemble est effectivement infini.

En effet, si tel n'était pas le cas, comment savoir qu'un ensemble infini dénombrable est ***effectivement infini***?

C'est précisément à cette question que le **Théorème 1** répond en rendant actuel formellement le caractère infini d'un ensemble infini dénombrable donné, là où le caractère infini d'un ensemble infini dénombrable pouvait n'être que, pour ainsi dire, latent ou présupposé.

C'est en imposant la nécessité d'une existence formelle des ensembles infinis dénombrables sous une forme indexée que le **Théorème 1** nous permet de déterminer la légitimité de certaines opérations mathématiques sur les ensembles infinis dénombrables, en particulier au regard des probabilités inhérentes à ces-dits ensembles infinis dénombrables.

## Références

[1] N-A. Phan, *Equiprobability for any non null natural integer of having either an odd or even number of prime factor(s) counted with multiplicity*, (2021). *https : //vixra.org/abs/*2101.0093

[2] N-A. Phan, *Un théorème fondamental concernant les ensembles infinis dénombrables*, (2021). *https : //vixra.org/abs/*2107.0046

[3] N-A. Phan, *Un premier théorème crucial pour la refondation de la théorie élémentaire des ensembles et l'enseignement de cette discipline pour les futures générations*, (2022). *https : //vixra.org/abs/*2210.0095

[4] N-A. Phan, *Un deuxième théorème crucial pour la refondation de la théorie élémentaire des ensembles et l'enseignement de cette discipline pour les futures générations*, (2022). *https : //vixra.org/abs/*2211.0102

Nhat-Anh Phan • *E-mail :* nhat_anh_phan_math@yahoo.com