Часть 1. Большой подграф Г(1)

Пытаясь дать конструктивное доказательство гипотезы Зейделя-Конвея о 99 вершинном графе, мы можем устанавливать существование в любом соответствующем графе некоторого остовного подграфа с достаточно большим числом рёбер. Это позволяет упростить поиск требуемого графа.

Все рассматриваемые далее графы содержат отличное от нуля конечное число вершин.

Определение 1. Будем называть графом Конвея граф, в котором любые смежные вершины имеют в точности одного общего соседа, а несмежные – в точности двух общих соседей.

Далее будем называть связным граф, содержащий две не соединённые путём вершины. Множество соседей вершины v графа будем обозначать как N_v.

Теорема 1. Граф Конвея связен и регулярен.

Доказательство. Связность следует из того, что любые несмежные вершины в графе Конвея имеют общего соседа. Докажем регулярность, которая очевидно выполнена для любого графа, содержащего менее трёх вершин. Таким образом, Рассмотрим граф Конвея $G = (V, E)$, такой что $|V| \geq 3$. Предположим, что вершины $a, b \in V$ смежны, и докажем выполнение условия $\deg a = \deg b$. В соответствии с Определением 1 найдётся в точности одна вершина $c \in V \backslash \{a, b\}$, смежная одновременно с a и b. Пусть $d = \deg a$ и $N_a = \{u_1, \dots, u_d\}$, причём $u_1 = b$, $u_2 = c$. Рассмотрим следующую последовательность элементов $v_1, \dots, v_d$, принадлежащих N_b. Положим $v_1 = a$, $v_2 = c$. При $d > 2$ для каждого $3 \leq i \leq d$ заметим, что $\{u_i, b\} \notin E$ (так как в противном случае смежные вершины a и b будут иметь двух общих соседей c и u_i). Для каждого $3 \leq i \leq d$ в качестве v_i выберем, таким образом, единственную отличную от a вершину, смежную одновременно с u_i и b. Предположим, что среди вершин $v_1, \dots, v_d$ имеются одинаковые, скажем, $v_i = v_j$, $1 \leq i < j \leq d$. Видим, что $j \geq 3$ (иначе $a = c$). По построению $v_j \neq a$, откуда $i \geq 2$. Если $i = 2$, то $v_j = v_i = c$, что даёт противоречие, поскольку смежные вершины a и c в этом случае будут иметь двух общих соседей, b и u_j. Отсюда имеем $3 \leq i < j \leq d$. Это приводит к тому, что различные вершины a и $v_i = v_j$ имеют трёх общих соседей b, u_i и u_j. Это даёт противоречие – рассматриваемые две вершины не могут быть ни смежными, ни несмежными. Таким образом, N_b содержит по крайней мере столько же вершин, сколько N_a, т. е. $|N_b| \geq |N_a|$. Проводя аналогичное рассуждение в другую сторону, получаем $|N_a| \geq |N_b|$ и $|N_a| = |N_b|$, т. е. $\deg a = \deg b$. Для доказательства регулярности выберем теперь произвольную вершину a степени d. Из доказанного следует, что все смежные с a вершины имеют степень d. Это же верно для любой несмежной с a вершины b, так как, рассматривая их общего соседа c, из доказанного получаем $\deg a = \deg c = \deg b$. Итак, G d регулярен ■

Далее для положительного целого m будем использовать обозначение $[m] = \{1, \dots, m\}$.

Определение 2. Для каждого положительного целого m определим граф $\Phi_m = (V, E)$, такой что

$$V = [2m + 1]$$

$$E = \big\{\{1,2\}, \dots, \{2m-1, 2m\}\big\} \cup \big\{\{2m+1, 1\}, \dots, \{2m+1, 2m\}\big\}$$

Окрестностью вершины v графа далее будем называть множество $O_v = N_v \cup \{v\}$, состоящее из самой вершины и её соседей. Подграф графа $G = (V, E)$, порождённый множеством $A \subseteq V$, будем обозначать как $\langle A \rangle$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ и произвольного множества A $\mathcal{P}_m(A)$ будет означать множество m элементных подмножеств A.

Теорема 2. Для каждого натурального $m \geq 2$ и m вершинного графа Конвея $G = (V, E)$ найдётся положительное чётное число d, такое что для каждой вершины $v \in V$ существует изоморфизм f из $\langle O_v \rangle$ в $\Phi_{\frac{d}{2}}$, такой что $f(v) = d + 1$.

Доказательство. Существование натурального d, такого что G – d регулярный следует из Теоремы 1. Из условия $m \geq 2$ и Определения 1, кроме того, следует, что $d > 0$. Пусть далее $v \in V$ и $N_v = \{u_0, \dots, u_{d-1}\}$. Определим рекурсивно функции A и S:

$$A_0 = S_0 = \{u_0, \text{единственная смежная с } u_0 \text{ вершина из } N_v\}$$

Для каждого положительного целого i, если $N_v \backslash S_{i-1} \neq \emptyset$ и для наименьшего $k \in \mathbb{N}$, такого что $u_k \in N_v \backslash S_{i-1}$, единственная смежная с u_k вершина $w \in N_v$ принадлежит $N_v \backslash S_{i-1}$, то

$$A_i = \{u_k, w\}$$

$$S_i = S_{i-1} \cup A_i$$

Иначе

$$A_i = \emptyset$$

$$S_i = S_{i-1}$$

Для любого натурального i имеем $A_i \subseteq S_i$. Воспользовавшись индукцией, кроме того, для любых натуральных $i \leq j$ получаем $S_i \subseteq S_j$. Нетрудно видеть, что для любого положительного целого i выполнено условие $A_i \cap S_{i-1} = \emptyset$. Отсюда для любых натуральных $i < j$ получаем $A_i \cap A_j = \emptyset$ (это следует из условий $A_j \cap S_{j-1} = \emptyset$ и $A_i \subseteq S_i \subseteq S_{j-1}$). Следовательно, поскольку множества $A_0, A_1, \ldots$ являются подмножествами конечного множества N_v, множество $\{i \in \mathbb{N}: A_i \neq \emptyset\}$ является конечным.

Далее для любого $i \in \mathbb{N}$ убеждаемся, что, если $A_i \neq \emptyset$, то A_i состоит из двух смежных вершин N_v. Воспользовавшись индукцией, получаем, что для любого натурального i и $a \in S_i$ найдётся такое натуральное $k \leq i$, что $a \in A_k$. Отсюда для каждого положительного целого i, если $N_v \backslash S_{i-1} \neq \emptyset$, то для наименьшего $k \in \mathbb{N}$, такого что $u_k \in N_v \backslash S_{i-1}$, единственная смежная с u_k вершина $w \in N_v$ принадлежит $N_v \backslash S_{i-1}$. В самом деле, если w не принадлежит $N_v \backslash S_{i-1}$, то $w \in S_{i-1}$. Отсюда найдётся такое $j \leq i - 1$, что $w \in A_j$. Пусть t – смежная с w вершина из A_j. Имеем $t \in A_j \subseteq S_j \subseteq S_{i-1}$, откуда $t \notin N_v \backslash S_{i-1}$ и $t \neq u_k$. Отсюда смежные вершины v и w имеют двух общих соседей, u_k и t, что даёт противоречие.

Непустота и конечность $\{i \in \mathbb{N}: A_i \neq \emptyset\}$ позволяет выбрать наибольшее натуральное j, такое что $A_j \neq \emptyset$. Следовательно, $A_{j+1} = \emptyset$. Из доказанного выше предложения следует, что $N_v \backslash S_j = \emptyset$. С другой стороны, воспользовавшись индукцией, убеждаемся, что $S_j \subseteq N_v$, откуда $N_v = S_j$. Отсюда, поскольку для любого $a \in S_j$ найдётся такое натуральное $k \leq j$, что $a \in A_k$, $N_v = A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ Заключаем, что N_v образуется объединением непустого конечного семейства попарно непересекающихся двухэлементных множеств, образованных смежными вершинами. Отсюда, в частности, заключаем, что d чётное. Без потери общности пусть $N_v = \{u_0, u_1\} \cup \ldots \cup \{u_{d-2}, u_{d-1}\}$, где $\{u_0, u_1\}, \ldots, \{u_{d-2}, u_{d-1}\} \in E$. Рассмотрим биекцию $f: O_v \to \{1, \ldots, d+1\}$, такую что

$$f(v) = d + 1$$

$$f(u_i) = i + 1 \text{ для натуральных } i < d$$

Мы видим, что $\langle O_v \rangle$ содержит рёбра $\{u_0, u_1\}, \dots, \{u_{d-2}, u_{d-1}\}, \{v, u_0\}, \dots, \{v, u_{d-1}\}$, причём множеством рёбер $\Phi_{\frac{d}{2}}$ является

$$\big\{\{f(u_0), f(u_1)\}, \dots, \{f(u_{d-2}), f(u_{d-1})\}, \{f(v), f(u_0)\}, \dots, \{f(v), f(u_{d-1})\}\big\}$$

В свою очередь, другие пары $\{x, y\} \in \mathcal{P}_2(O_v)$ не являются рёбрами O_v. В самом деле, любая такая пара образована элементами x и y, выбранными из различных множеств $\{u_0, u_1\}, \dots, \{u_{d-2}, u_{d-1}\}$. Пусть без потери общности $x = u_0$, $y = u_2$. Тогда смежные вершины v и u_0 будут иметь двух общих соседей u_1 и u_2, что противоречит Определению 1. Таким образом, f – изоморфизм из $\langle O_v \rangle$ в $\Phi_{\frac{d}{2}}$, такой что $f(v) = d + 1$ ■

Теорема 3. Любой 99 вершинный граф Конвея 14 регулярен.

Доказательство. Рассмотрим 99 вершинный граф Конвея $G = (V, E)$. В соответствии с Теоремой 2 найдётся положительное чётное d, такое что для каждой вершины $v \in V$ существует изоморфизм f из $\langle O_v \rangle$ в $\Phi_{\frac{d}{2}}$, такой что $f(v) = d + 1$. Поскольку степень вершины $d + 1$ в $\Phi_{\frac{d}{2}}$ равна d, достаточно убедиться, что $d = 14$.

Без потери общности положим $\langle O_v \rangle = \Phi_{\frac{d}{2}}$, $v = d + 1$. В соответствии с Определением 2 в $\mathcal{P}_2(\,N_v)$ рёбрами G не являются те и только те элементы, которые образованы двумя вершинами, выбранными из различных множеств $\{1,2\}, \dots, \{d-1, d\}$. Пусть $d = 2k$ и $D = \big\{\{x, y\} \in \mathcal{P}_2(N_v) \colon \{x, y\} \notin E\big\}$. С учётом сказанного, если $k = 1$, то $|D| = 0$, если же $k > 1$, то $|D| = 4C_k^2 = 2k(k-1)$. Отсюда в общем случае $|D| = 2k(k-1)$.

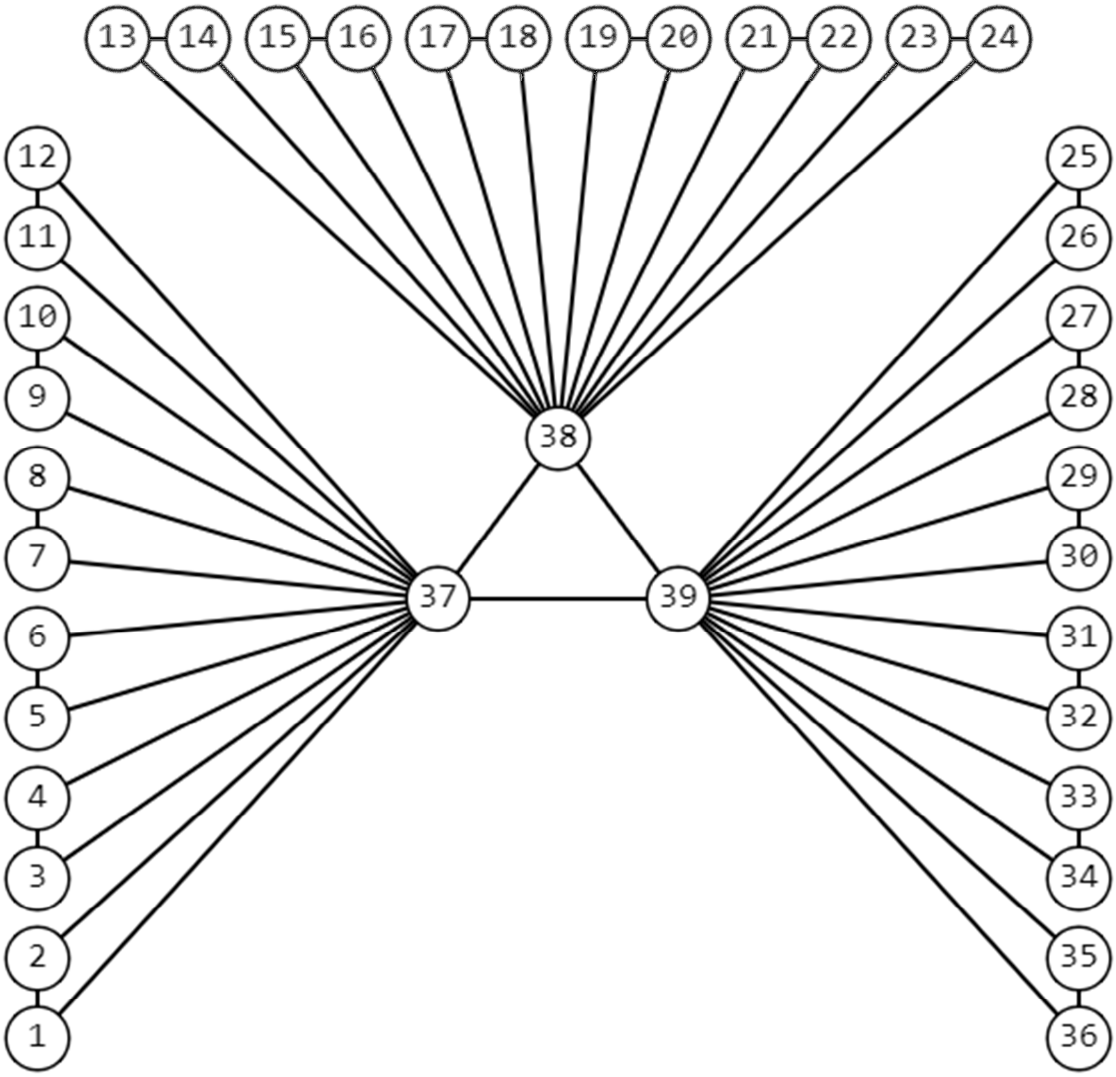
Заметим, что для каждого элемента $\{x, y\} \in D$ в G имеется в точности один отличный от v общий сосед x и y, $z_{\{x,y\}}$. Видим, что $z_{\{x,y\}} \in V \backslash O_v$. Кроме того, для различных $\{x, y\}, \{x', y'\} \in D$ выполнено условие $z_{\{x,y\}} \neq z_{\{x',y'\}}$, иначе вершины $z_{\{x,y\}}$ и v имеют более двух общих соседей в $\{x, y, x', y'\}$, что противоречит Определению 1. Таким образом, мы получаем инъективную функцию $z \colon D \to V \backslash O_v$. Поскольку каждая вершина $u \in V \backslash O_v$ несмежна с v, множество N_v содержит в точности две смежные с u вершины x и y. Из Определения 1 следует, что данные вершины несмежны (они имеют двух общих соседей u и v), откуда $\{x, y\} \in D$ и далее $z_{\{x,y\}} = u$. Отсюда z – сюръективная и, следовательно, биективная функция. Отсюда получаем

$$2k(k-1) = |D| = |V \backslash O_v| = 99 - (d+1) = 98 - 2k$$

$$k = 7, d = 14$$

■

Определение 3. Обозначим как $\Gamma(1)$ следующий 99 вершинный граф:



Определение 4. Определим функции $Q: [3] \to \mathcal{P}([36])$ и $H: [3] \times [6] \to \mathcal{P}([36])$:

$$Q(1) = \{1, \dots, 12\}$$

$$Q(2) = \{13, \dots, 24\}$$

$$Q(3) = \{25, \dots, 36\}$$

$$H(1,1) = \{1,2\}$$

$$H(1,2) = \{3,4\}$$

$$H(1,3) = \{5,6\}$$

$$H(1,4) = \{7,8\}$$

$$H(1,5) = \{9,10\}$$

$$H(1,6) = \{11,12\}$$

$$H(2,1) = \{13,14\}$$

$$H(2,2) = \{15,16\}$$

$$H(2,3) = \{17,18\}$$

$$H(2,4) = \{19,20\}$$

$$H(2,5) = \{21,22\}$$

$$H(2,6) = \{23,24\}$$

$$H(3,1) = \{25,26\}$$

$$H(3,2) = \{27,28\}$$

$$H(3,3) = \{29,30\}$$

$$H(3,4) = \{31,32\}$$

$$H(3,5) = \{33,34\}$$

$$H(3,6) = \{35,36\}$$

Определим также $q: [36] \to [3]$, $h: [36] \to [6]$, $c: [36] \to [36]$, $a: [36] \to \{37,38,39\}$, указав значения данных функций для произвольного $x \in [36]$:

$q(x)$ – единственное $m \in [3]$, такое что $x \in Q(m)$

$h(x)$ – единственное $m \in [6]$, такое что $x \in H(q(x), m)$

$c(x)$ – единственный элемент множества $H\big(q(x), h(x)\big) \backslash \{x\}$

$a(x)$ – единственная смежная с x в $\Gamma(1)$ вершина $y \in \{37,38,39\}$

Далее удобно интерпретировать множество $[36]$ как множество людей города, разбитого на районы $Q(1)$, $Q(2)$ и $Q(3)$. При этом $q(x)$ – номер района, в котором проживает x. Так, поскольку $17 \in \{13, \dots ,24\} = Q(2)$, имеем $q(17) = 2$. Далее в районе с номером $m \in [3]$ находится шесть домов $H(m, 1)$, …, $H(m, 6)$, в каждом из которых живёт по два человека. При этом $h(x)$ – номер дома, в котором живёт x, а $c(x)$ – сожитель x. Так, поскольку 17 принадлежит второму из множеств $H(2,1) = \{13,14\}$, $H(2,2) = \{15,16\}$, $H(2,3) = \{17,18\}$, $H(2,4) = \{19,20\}$, $H(2,5) = \{21,22\}$, $H(2,6) = \{23,24\}$, имеем $h(17) = 3$, $c(17) = 18$.

Теорема 4. Всякий 99 вершинный граф Конвея изоморфен графу H со множеством вершин $[99]$, такому что:

1. $\Gamma(1)$ – подграф H.
2. Для любых различных $m, n \in [3]$ каждая вершина из $Q(m)$ смежная в точности с одной вершиной из $Q(n)$.
3. Для каждого $m \in [3]$ и любой пары несмежных вершин $\{x, y\} \in \mathcal{P}_2(Q(m))$ найдётся в точности одна вершина $z_{\{x,y\}} \in \{40, \dots ,99\}$, являющаяся общим соседом x и y. При этом для различных пар несмежных вершин $\{x, y\}, \{x', y'\} \in \mathcal{P}_2(Q(m))$ выполнено условие $z_{\{x,y\}} \neq z_{\{x',y'\}}$.
4. Для любого $x \in \{40, \dots ,99\}$, $m \in [3]$ в $Q(m)$ имеются в точности две смежные с x вершины, причём две указанные вершины несмежны.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – 99 вершинный граф Конвея. Без потери общности положим $V = [99]$. Обращаясь к Теоремам 2 и 3, без потери общности положим, что граф, порождённый окрестностью вершины 37 в G, равен графу, порождённому окрестностью вершины 37 в $\Gamma(1)$. Нетрудно видеть, что определяемые для G множества $N_{37}\backslash\{38,39\}$, $N_{38}\backslash\{37,39\}$ и $N_{39}\backslash\{37,38\}$ попарно не пересекаются. В самом деле, непустота, скажем, $(N_{37}\backslash\{38,39\}) \cap N_{38}\backslash\{37,39\}$ означает наличие у смежных вершин 37 и 38 ещё одного общего соседа, помимо вершины 39. Отсюда в соответствии с Теоремой 3 можем положить $N_{38}\backslash\{37,39\} = \{13, \dots ,24\}$, $N_{39}\backslash\{37,38\} = \{25, \dots ,36\}$. Кроме того, применяя Теорему 2 соответственно к вершинам 38 и 39, без потери общности можем считать, что G содержит рёбра $\{13,14\}$, $\{15,16\}$, $\{17,18\}$, $\{19,20\}$, $\{21,22\}$, $\{23,24\}$ и $\{25,26\}$, $\{27,28\}$, $\{29,30\}$, $\{31,32\}$, $\{33,34\}$, $\{35,36\}$. Таким образом, $\Gamma(1)$ – подграф G, т. е. для G выполнено условие 1 доказываемой теоремы. Докажем, что для данного графа выполнены и остальные условия.

Для любых $m \in [3]$, $x \in Q(m)$ докажем, что для каждого $n \in [3]\backslash\{m\}$ в $Q(n)$ содержится в точности одна вершина, смежная с x. Пусть $y \in Q(n)$. Заметим, что x несмежна с вершиной $a(y)$. В самом деле, x несмежна с $a(y)$ в Γ, поскольку $a(y) \neq a(x)$. Отсюда наличие ребра $\{x, a(y)\}$ в G приведёт к условию $\deg a(y) \geq 15$, тогда как по Теореме 3 G – 14 регулярный граф. Отсюда, помимо общего соседа $a(x)$, x и $a(y)$ имеют в точности одного общего соседа f_x. В силу 14 регулярности множество соседей $a(y)$ в G совпадает со множеством соседей данной вершины в $\Gamma(1)$, последнее, в свою очередь, равно

$$\left(\{37,38,39\} \backslash a(y)\right) \cup Q(n)$$

Рассуждая как ранее, получаем $f_x \notin \{37,38,39\} \backslash a(y)$, откуда $f_x \in Q(n)$. Итак, для любых $m \in [3]$, $x \in Q(m)$, $n \in [3] \backslash \{m\}$ в $Q(n)$ содержится в точности одна вершина, смежная с x, т. е. доказано условие 2.

Заметим далее, что для каждого $m \in [3]$ любая пара вершин $\{x, y\} \in \mathcal{P}_2\big(Q(m)\big)$, такая что $h(x) \neq h(y)$, несмежна. В самом деле, в противном случае смежные вершины x и $a(x)$ имеют двух общих соседей $c(x)$ и y, что противоречит Определению 1. С другой стороны, любая пара $\{x, y\} \in \mathcal{P}_2\big(Q(m)\big)$, такая что $h(x) = h(y)$, является ребром, поскольку G содержит подграф $\Gamma(1)$. Отсюда для любого $m \in [3]$ выполнено условие $|D_m| = 4C_6^2 = 60$, где

$$D_m = \Big\{\{x, y\} \in \mathcal{P}_2\big(Q(m)\big) \colon \{x, y\} \notin E\Big\}$$

Для каждого $m \in [3]$, помимо общего соседа $a(x)$, каждая пара $\{x, y\} \in D_m$ имеет в точности одного общего соседа $z_{\{x,y\}}$, отсутствующего у данных вершин в $\Gamma(1)$. Имеем $z_{\{x,y\}} \notin \{37,38,39\}$, поскольку каждая из вершин данного множества имеет степень 14 в $\Gamma(1)$ и, следовательно, в G. Если $z_{\{x,y\}} \in Q(m)$, то с учётом доказанного выше $z_{\{x,y\}} = c(x)$, тогда как y несмежна с $c(x)$. Если $z_{\{x,y\}} \in [36] \backslash Q(m)$, то вершины $a(x)$ и $z_{\{x,y\}}$ имеют трёх общих соседей $a\big(z_{x,y}\big)$, x и y. Это противоречит Определению 1, в соответствии с которым две различные вершины G должны иметь не более двух общих соседей. Отсюда следует, что $z_{\{x,y\}} \in \{40, \dots, 99\}$. Заметим, кроме того, что для различных элементов $\{x, y\}, \{x', y'\} \in D_m$ выполнено условие $z_{\{x,y\}} \neq z_{\{x',y'\}}$. В самом деле, в противном случае $a(x)$ и $z_{\{x,y\}}$ имеют по крайней мере трёх общих соседей в $\{x, y, x', y'\}$. Это доказывает условие 3 и позволяет рассматривать z как определяемую для каждого $m \in [3]$ инъективную функцию $D_m \to \{40, \dots, 99\}$. Выполнение условия $|D_m| = 60 = |\{40, \dots, 99\}|$ влечёт, в свою очередь, биективность и, следовательно, сюръективность данной функции. Отсюда для любых $x \in \{40, \dots, 99\}$, $m \in [3]$ найдутся две смежные с x вершины $u, v \in Q(m)$, причём u и v несмежны. В свою очередь, отсутствие трёх общих соседей у x и $a(u)$ ведёт к более сильной форме полученного утверждения, выраженной условием 4 ■

Часть 2. Почти граф Конвея Z(4)

Далее для для построения 99 вершинного графа Конвея мы пробуем применить конструкцию, успешно использованную Берлекампом для 243 вершинного графа Конвея. В данной конструкции вершинам сопоставлены упорядоченные множества (векторы).

Определение 5. Пусть

$$V = \{0,1,2\}^4$$

$$B = \{(0,0,0,1),(0,0,0,2),(0,0,1,0),(0,0,2,0),(0,1,0,0),(0,2,0,0),(1,0,0,0),(2,0,0,0)\}$$

Обозначим как $\mathrm{Z}(4)$ граф $\big(V,\big\{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(V): x - y \in B\big\}\big)$, где вычитание осуществляется в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4 = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Теорема 5. $\mathrm{Z}(4)$ – 81 вершинный 8 регулярный граф, в котором любая пара смежных вершин имеет в точности одного общего соседа, а любая пара различных несмежных вершин либо не имеет общих соседей, либо имеет в точности двух общих соседей.

Доказательство. $\mathrm{Z}(4) = (V,E)$ – 81 вершинный, поскольку $|V| = |\{0,1,2\}^4| = 81$. Далее произвольная вершина $x \in V$ смежна с вершиной $x + y$, где y – произвольный элемент множества B из Определения 5, поскольку $(x + y) - x = y$. Напротив, если x и z смежные вершины, то $x - z, z - x \in B$. Полагая $y = z - x$, получаем $z = x + y$, где $y \in B$. Таким образом, с x смежны те и только те вершины, которые имеют вид $x + y$, где $y \in B$. Отсюда в силу импликации $y \neq y' \to x + y \neq x + y'$, $\deg x = |B| = 8$. Следовательно, Δ – 8 регулярный граф.

Для произвольных вершин $u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ рассмотрим далее расстояние Хэмминга (число инверсий):

$$i_{u,v} = |\{n \in [4]: u_n \neq v_n\}|$$

Из доказанного выше следует, что смежными являются те и только те вершины $u, v \in V$, для которых выполняется условие $i_{u,v} = 1$. Пусть далее вершины

$u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ смежны, С учётом сказанного без потери общности положим $u_1 \neq v_1$, $u_k = v_k$ для всех $k \in \{2,3,4\}$. Видим, что $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, где $t_1 \in \{0,1,2\} \backslash \{u_1, v_1\}$, $t_k = u_k$ для всех $k \in \{2,3,4\}$ – общий сосед u и v. Пусть далее $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ – произвольный общий сосед u и v. Положим $w = u + y$, где $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in B$. Заметим, что $y_1 \neq 0$ (следовательно, $y_2 = y_3 = y_4 = 0$). В самом деле, в противном случае мы получим $i_{v,w} = i_{v,w+y} = 2$, откуда v и w будут несмежны. Отсюда $w_k = u_k = v_k$ для всех $k \in \{2,3,4\}$, и далее u_1, v_1, w_1 – попарно различные числа из $\{0,1,2\}$. Отсюда $w = t$. Таким образом, любые смежные вершины $\mathrm{Z}(4)$ имеют в точности одного общего соседа.

Пусть далее различные вершины u и v несмежны, откуда $i_{u,v} \geq 2$. При $i_{u,v} \geq 3$ для любого соседа w вершины u имеем $i_{w,v} \geq 2$, откуда w и v несмежны. Отсюда при $i_{u,v} \geq 3$ u и v не имеют общих соседей. Обратимся к случаю $i_{u,v} = 2$, положив без потери общности $u_1 \neq v_1$, $u_2 \neq v_2$, $u_3 = v_3$, $u_4 = v_4$. Рассуждая как выше, убеждаемся, что единственными общими соседями u и v являются (u_1, v_2, u_3, u_4) и (v_1, u_2, u_3, u_4). Отсюда различные несмежные вершины либо не имеют общих соседей, либо имеют в точности двух общих соседей ■

Часть 3. Треугольники и 4-циклы

Пытаясь опровергнуть рассматриваемую гипотезу, мы можем отдельно описать некоторую функцию от числа вершин n для графов, у которых любые смежные вершины имеют в точности одного общего соседа, описав далее данную функцию для графов, у которых любая пара различных вершин имеет в точности двух общих соседей. Если при $n = 99$ полученные функции возвращают разное значение, то мы приходим к желаемому противоречию. Далее в качестве указанной функции мы пробуем выбрать число треугольников и число 4 циклов. Выясняется, что граф Конвея на 99 вершинах содержит минимальное количество 4 циклов среди 99 вершинных графов, у которых любая пара различных несмежных вершин имеет в точности двух общих соседей.

Теорема 6 (Ray-Chaudhuri-Wilson). Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, A – m элементное множество, B – конечное множество натуральных чисел, и $D \subseteq \mathcal{P}_n(A)$, причём $|B| \leq n$, и для любых различных множеств $x, y \in D$ выполнено условие $|x \cap y| \in B$. Тогда $|D| \leq C_m^{|B|}$.

Определение 6. Для натурального $m \geq 3$ множество m циклов графа G будем обозначать как $\mathcal{Z}_m(G)$ или просто $\mathcal{Z}_m$, если рассматривается единственный граф G. Также будем использовать обозначение $z_m(G) = |\mathcal{Z}_m(G)|$ или просто z_m.

Теорема 7. Для m рёберного графа, в котором любая пара смежных вершин имеет в точности одного общего соседа, выполнены условия

$$z_3 = \frac{m}{3}$$

$$z_4 \leq C_{m/3}^4$$

Доказательство. Наличие трёх или двух общих рёбер у двух треугольников ведёт к одному и тому же треугольнику, отсюда два различных треугольника имеют не более одного общего ребра. Рассматривая треугольники abc и abd, где $c \neq d$, видим, что смежные вершины a и b имеют двух общих соседей (c и d). Следовательно, различные треугольники рассматриваемого графа G не пересекаются по рёбрам.

Положим далее $m \neq 0$, так как в противном случае доказываемые утверждения очевидным образом верны. Пусть $\mathcal{E} = E(G)$. Рассмотрим функцию $e: \mathcal{Z}_3 \to \mathcal{P}_3(\mathcal{E})$, такую что для любого треугольника $t \in \mathcal{Z}_3$ $e(t) = E(t)$. В силу доказанного выше для различных $t, t' \in \mathcal{Z}_3$ выполнено условие $e(t) \cap e(t') = \emptyset$. Пусть $\mathcal{Z}_3 = \{t_1, \dots, t_{z_3}\}$. Нетрудно видеть, что каждое ребро рассматриваемого графа принадлежит в точности одному треугольнику, откуда $\mathcal{E} = e(t_1) \cup \dots \cup e(t_{z_3})$. Из доказанного выше, таким образом, следует

$$m = |\mathcal{E}| = |e(t_1)| + \dots + |e(t_{z_3})| = 3z_3$$

$$z_3 = \frac{m}{3}$$

Для получения неравенства $z_4 \leq C_{m/3}^4$ заметим, что для каждого 4 цикла можно указать в точности четыре пересекающихся с ним по рёбрам треугольника. Это позволяет определить функцию $f: \mathcal{Z}_4 \to \mathcal{P}_4(\mathcal{Z}_3)$, такую что для любых различных 4 циклов $z, z' \in \mathcal{Z}_4$ выполнено условие $|f(z) \cap f(z')| \leq 3$ (т. е. f инъективна). Обращаясь к Теореме 6 при $B = \{0,1,2,3\}$, получаем

$$z_4 = |f(\mathcal{Z}_4)| \leq C_{z_3}^4 = C_{m/3}^4$$

■

Теорема 8. Для m рёберного n вершинного графа, в котором любая пара различных несмежных вершин имеет в точности двух общих соседей, выполнено условие

$$\frac{C_n^2 - m}{2} \le z_4$$

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – рассматриваемый граф. Заметим, что при отсутствии различных несмежных вершин $m = C_n^2$, откуда левая часть доказываемого неравенства обращается в ноль, и неравенство выполнено. Положим, таким образом, что граф содержит антиребро $\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(V) \backslash E$. Сопоставим последнему единственный содержащий a и b 4 цикл, образованный двумя общими соседями данных вершин. Таким образом, определена функция $f: \mathcal{P}_2(V) \backslash E \to \mathcal{Z}_4$. Положим $f(\mathcal{P}_2(V) \backslash E) = \{z_1, \dots, z_k\}$ и рассмотрим разбиение

$$\mathcal{P}_2(V) \backslash E = f^{-1}(z_1) \sqcup \dots \sqcup f^{-1}(z_k)$$

Каждое из множеств разбиения содержит не более двух антирёбер (вершины одного 4 цикла образуют не более двух антирёбер). Отсюда получаем

$$C_n^2 - m = |\mathcal{P}_2(V) \backslash E| = |f^{-1}(z_1)| + \dots + |f^{-1}(z_k)| \le 2k \le 2z_4$$

$$\frac{C_n^2 - m}{2} \le z_4$$

■

Теорема 9. Для m рёберного n вершинного графа Конвея выполнено условие

$$\frac{C_n^2 - m}{2} = z_4 \le \min\{C_{m/3}^4, C_m^2\}$$

Доказательство. Рассматривая равенство, обратимся к доказательству Теоремы 8. Из наличия в точности одного общего соседа у смежных вершин следует, что для каждого 4 цикла $abcd$ $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ являются антирёбрами. Отсюда получаем

$$|f^{-1}(z_1)| = \cdots = |f^{-1}(z_k)| = 2$$

$$k = z_4$$

$$\frac{C_n^2 - m}{2} = z_4$$

Для доказательства неравенства в силу Теоремы 7 достаточно убедиться, что $z_4 \le C_m^2$. С этой целью сопоставим каждому 4 циклу множество его рёбер, являющееся подмножеством множества рёбер E рассматриваемого графа. Таким образом, определена инъективная функция $\varphi: \mathcal{Z}_4 \to \mathcal{P}_4(E)$, причём для любых различных 4 циклов $z, z' \in \mathcal{Z}_4$ выполнено условие $|\varphi(z) \cap \varphi(z')| \le 1$. В самом деле, из условия $|\varphi(z) \cap \varphi(z')| \in \{3,4\}$ следует $z = z'$. Если же различные циклы $abcd$ и $a'b'c'd'$ пересекаются в точности по двум рёбрам, то, полагая без потери общности $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, $d' \ne d$, придём к противоречию – несмежные вершины a и c имеют трёх общих соседей, b, d, d'. Обращаясь к Теореме 6 при $B = \{0,1\}$, получаем

$$z_4 = |\varphi(\mathcal{Z}_4)| \le C_m^2$$

■

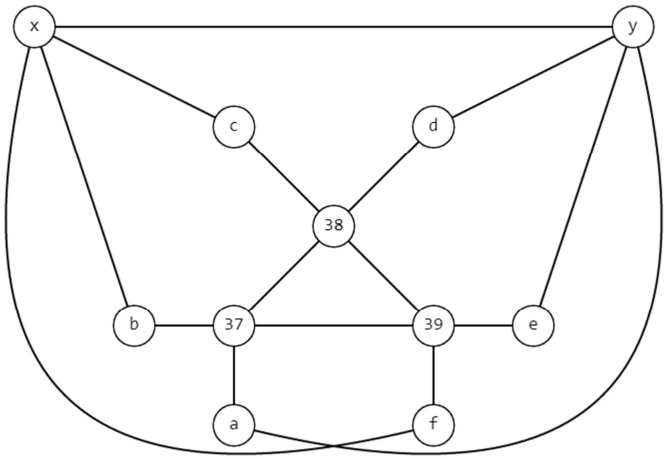
Замечание 1. Из Теоремы 3 и леммы о рукопожатиях следует, что в 99 вершинном графе Конвея $\frac{14 \cdot 99}{2} = 693$ рёбер. Отсюда в соответствии с Теоремой 9 он должен иметь 2079 4 цикла, причём данное число меньше $\min\{C_{m/3}^4, C_m^2\} = \min\{C_{231}^4, C_{693}^2\} = 239778$.

Часть 4. Планарность и независимость

Несмотря на то, что проблема планарности (в смысле используемых доказательных техник) является больше топологической, чем теоретико-графовой, получаемые при её изучении результаты очень важны, когда мы хотим представить, как «выглядит» граф, который мы строим. Последнее достигается и в случае определения числа независимости.

Теорема 10. Граф Конвея на 99 вершинах содержит подграф, гомеоморфный K_5.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – 99 вершинный граф Конвея. В соответствии с Теоремой 4 без потери общности положим $V = [99]$ и будем считать, что граф Г из Определения 3 является подграфом G. Воспользовавшись условиями 4 и 3 Теоремы 4, далее далее будем считать, что для различных вершин $x, y \in \{40, \dots, 99\}$ в каждом из множеств Q_1, Q_2, Q_3 найдутся две различные вершины, первая из которых смежна с x, а вторая с y. Выберем x и y смежными (в соответствии с условием 4 и Теоремой 3 подграф $\langle\{40, \dots, 99\}\rangle$ 8 регулярный), положив, что в Q_1, Q_2, Q_3 x смежна соответственно с b, c, f, а y – с a, d, e. Отсюда G содержит следующий подграф:



Данный граф гомеоморфен K_5, поскольку образуется соответственным добавлением вершин a, b, c, d, e, f к рёбрам $\{y, 37\}$, $\{x, 37\}$, $\{x, 38\}$, $\{y, 38\}$, $\{y, 39\}$, $\{x, 39\}$ полного графа со множеством вершин $\{37, 38, 39, x, y\}$ ■

Теорема 11 (Kuratowski-Понтрягин). Граф планарен тогда и только тогда, когда не содержит подграфа, гомеоморфного K_5, и не содержит подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$.

Теорема 12 (Euler). В n вершинном планарном графе не более $3n - 6$ рёбер.

Теорема 13. 99 вершинный граф Конвея непланарен.

Доказательство. Утверждение является следствием Теорем 10 и 11, а также следствием Теоремы 12, поскольку число рёбер рассматриваемого графа $693 > 3 \cdot 99 - 6 = 291$ ■

Далее α – число независимости графа.

Теорема 14. Для 99 вершинного графа Конвея выполнено условие $\alpha \leq 49$.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – рассматриваемый граф, и $A \subseteq V$ – максимальное независимое множество. Для любой вершины $a \in A$ имеем $N_a \subseteq V \backslash A$. Любые различные вершины $a, b \in A$, являясь несмежными, имеют в точности двух общих соседей x, y, которые, стало быть, принадлежат $V \backslash A$. Из наличия в точности одного общего соседа у смежных вершин следует, что x и y несмежны. Таким образом, определена функция

$$f: \mathcal{P}_2(A) \to \mathcal{P}_2(V \backslash A) \backslash E$$

Из наличия в точности двух общих соседей у различных несмежных вершин следует, что f инъективна. Отсюда в силу 14 регулярности

$$C_\alpha^2 = |\mathcal{P}_2(A)| \leq |\mathcal{P}_2(V \backslash A) \backslash E| = C_{99-\alpha}^2 - (693 - 14\alpha)$$

Упрощая данное неравенство, получаем доказываемое выражение ■

Теорема 15 (1, стр. 55). Множеством собственных значений сильно регулярного графа $srg(n, d, \lambda, \mu)$ является $\left\{d, \frac{\lambda-\mu-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{\lambda-\mu+\sqrt{\Delta}}{2}\right\}$, где $\Delta = (\lambda - \mu)^2 + 4(d - \mu)$.

Теорема 16 (2, стр. 39). Для n вершинного $d > 0$ регулярного графа с минимальным собственным значением l выполнено условие

$$\alpha \leq \frac{n(-l)}{d - l}$$

Теорема 17. Для 99 вершинного графа Конвея выполнено условие $\alpha \leq 22$.

Доказательство. Рассматриваемый граф является графом $srg(99,14,1,2)$, откуда по Теореме 15 его собственными значениями являются -4, 3, 14. Далее применяем Теорему 16 ■

Далее χ и Δ обозначают соответственно хроматическое число и максимальную степень вершин графа.

Теорема 18 (Brooks). Для графа, не являющегося полным и не являющегося циклом нечётной длины, выполнено условие $\chi \leq \Delta$.

Теорема 19 (3, стр. 20). Для любого n вершинного графа $\alpha \geq \lceil n/\chi \rceil$.

Теорема 20. Для 99 вершинного графа Конвея выполнено условие $\alpha \geq 8$.

Доказательство. В соответствии с Теоремой 18 и Теоремой 3 $\chi \leq 14$. Следовательно, по Теореме 19 $\alpha \geq \left\lceil \frac{99}{14} \right\rceil = 8$ ■

Теорема 21. Для 99 вершинного графа Конвея выполнено условие $\alpha \geq 10$.

Доказательство. Обращаясь к Теоремам 2 и 3, без потери общности положим, что подграфом рассматриваемого графа $G = (V, E)$ является граф Φ_7 из Определения 2, при этом $V = [99]$. Из Теоремы 3 и наличия в точности одного общего соседа у двух смежных вершин в G следует, что $\langle O_{15} \rangle = \Phi_7$, в частности, $A = \{1,3,5,7,9,11,13\}$ и $B = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ являются независимыми множествами в G. Далее любая пара $\{x, y\} \in \mathcal{P}_2([14]) \backslash E$, имеет в G в точности одного отличного от 15 общего соседа $z_{\{x,y\}}$. Из сказанного выше $z_{\{x,y\}} \in \{16, \dots, 99\}$. Далее для различных пар $\{x, y\}, \{x', y'\} \in \mathcal{P}_2([14]) \backslash E$ выполнено условие $z_{\{x,y\}} \neq z_{\{x',y'\}}$, иначе 15 и $z_{x,y}$ будут иметь трёх общих соседей в $\{x, y, x', y'\}$. Отсюда $C = \left\{z_{\{2,4\}}, z_{\{2,6\}}, z_{\{2,8\}}, z_{\{2,10\}}, z_{\{2,12\}}, z_{\{2,14\}}\right\}$ является 6 элементным множеством. При этом $C \cap A = \emptyset$, и любой элемент $z_{\{x,y\}} \in C$ несмежен ни одним элементом $a \in A$ (иначе, x, y, a – общие соседи 15 и $z_{\{x,y\}}$). Поскольку $C \subseteq N_2$, и любые смежные вершины имеют в G в точности одного общего соседа, $\langle C \rangle$ содержит не более трёх рёбер, причём эти рёбра попарно не пересекаются. Отсюда существует независимое множество $C' \subseteq C$, содержащее по крайней мере три элемента. Следовательно, $A \cup C'$ – независимое множество, причём $|A \cup C'| \geq 10$ ■

Часть 5. Склейка почти графов Конвея

Далее мы обобщим конструкцию части 2. Также будет указан способ построения почти графов Конвея, в которых любые смежные вершины имеют в точности одного общего соседа, а две несмежные вершины – не более двух общих соседей. Будет приведён пример почти графа Конвея с 99 вершинами и 324 рёбрами.

Определение 7. Почти графом Конвея будем называть граф, в котором любые смежные вершины имеют в точности одного общего соседа, а любые две несмежные вершины – не более двух общих соседей.

Замечание 2. Любой граф Конвея является почти графом Конвея, но не всякий почти граф Конвея (скажем, граф, состоящий из двух изолированных вершин) является графом Конвея.

Определение 8. Пусть n – положительное целое число. Расстояние Хэмминга (число инверсий) между последовательностями $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ будет определяться как

$$i(u, v) = |\{k \in [n]: u_k \neq v_k\}|$$

Определение 9. Пусть n – положительное целое число. Положим

$$\mathrm{Z}(n) = \left(\{0,1,2\}^n, \{\{u, v\} \in \mathcal{P}_2(\{0,1,2\}^n): i(u, v) = 1\}\right)$$

Замечание 3. $\mathrm{Z}(n)$ является графом Хэмминга $H(n, 3)$.

Теорема 22. Пусть n – положительное целое число. Тогда для любой пары $\{u, v\} \in \mathcal{P}_2(\{0,1,2\}^n)$ выполнены следующие условия:

1. Если $i(u, v) = 1$, т. е. u и v смежны в $\mathrm{Z}(n)$, u и v имеют в точности одного общего соседа в $\mathrm{Z}(n)$.

2. Если $i(u,v) = 2$, u и v имеют в точности двух общих соседей в $\mathrm{Z}(n)$.

3. Если $i(u,v) \geq 3$, u и v не имеют общих соседей в $\mathrm{Z}(n)$.

Доказательство. При $n = 1$ в выполнении условий 1-3 убеждаемся непосредственно. Поэтому положим $n \geq 2$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ и проведём доказательство аналогично доказательству Теоремы 5.

Условие 1. Без потери общности положим $u_1 \neq v_1$, $u_k = v_k$ для любого $k \in \{2, \dots, n\}$. Пусть a – единственный элемент множества $\{0,1,2\} \backslash \{u_1, v_1\}$. Тогда $w = (a, u_2, \dots, u_n)$ – общий сосед u и v. С другой стороны, любая отличная от v и w смежная с u вершина w' такова, что $i(v, w') = 2$. Отсюда w' несмежна с v. Следовательно u и v имеют в точности одного общего соседа.

Условие 2. Без потери общности положим $u = (u_1, u_2, \dots)$, $v = (v_1, v_2, \dots)$, $u_1 \neq v_1$, $u_2 \neq v_2$. Видим, что $w = (v_1, u_2, \dots)$, $w' = (u_1, v_2, \dots)$ (где при $n \geq 3$ $w_3 = w'_3 = u_3$, …, $w_n = w'_n = u_n$) являются различными общими соседями u и v. Нетрудно убедиться, что для отличной от w и w' смежной с u вершины w'' будет выполнено условие $i(v, w'') \geq 2$. Следовательно u и v имеют в точности двух общих соседей.

Условие 3. Данное условие выполнено потому, что для любой смежной с u вершины w $i(v,w) \geq 2$.

■

Теорема 23. Для любого положительного целого числа n $\mathrm{Z}(n)$ – почти граф Конвея.

Доказательство. Следует из Теоремы 22 и Определений 7 и 9 ■

Определение 10. Независимое множество вершин графа G будем называть хорошим, если любые две вершины данного множества не имеют общих соседей в G.

Замечание 4. В соответствии с Теоремой 22 и Определением 9 для любого целого $n \geq 3$ любое подмножество $A \subseteq \{0,1,2\}^n$, такое что для любых различных $u, v \in A$ выполнено условие $i(u, v) \geq 3$, является хорошим независимым множеством $\mathrm{Z}(n)$.

Объединением $G_1 \cup G_2$ графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ далее будем называть граф $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Теорема 24. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ – почти графы Конвея, причём $V_1 \cap V_2$ – хорошее независимое множество в каждом из данных графов. Тогда выполнены следующие условия:

1. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

2. Любое хорошее независимое множество какого-либо из графов G_1 и G_2 (в частности, $V_1 \cap V_2$) является хорошим независимым множеством $G_1 \cup G_2$.

3. $G_1 \cup G_2$ – почти граф Конвея.

Доказательство

Условие 1. Пусть $\{a, b\} \in E_1 \cap E_2$, тогда $a, b \in V_1 \cap V_2$, и данные вершины смежны в G_1. Это противоречит тому, что $V_1 \cap V_2$ – независимое множество G_1. Следовательно, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Условие 2. Пусть без потери общности $A \subseteq V_1$ – хорошее независимое множество G_1. Если найдутся различные вершины, $a, b \in A$, такие что $\{a, b\}$ – ребро $G_1 \cup G_2$, то $\{a, b\} \in E_2$. В часстности, $a, b \in V_2$. Следовательно, $a, b \in V_1 \cap V_2$, при этом a и b смежны в G_2. Это противоречит тому, что $V_1 \cap V_2$ – независимое множество G_2. Отсюда A является независимым множеством $G_1 \cup G_2$.

Положим теперь, что c – общий сосед различных вершин $a, b \in A$ в $G_1 \cup G_2$. Поскольку A – хорошее независимое множество G_1, хотя бы одно из рёбер $\{a, c\}$ и $\{b, c\}$ отсутствовало в E_1. Пусть без потери общности $\{a, c\} \notin E_1$. Отсюда следует, что $\{a, c\} \in E_2$. В частности, $a \in V_1 \cap V_2$ и, следовательно, $c \in V_2 \setminus V_1$ (иначе независимое множество G_2 $V_1 \cap V_2$ содержит смежные вершины). Из последнего следует $\{b, c\} \in E_2$, в частности, $b \in V_1 \cap V_2$. Но тогда a и b – вершины $V_1 \cap V_2$, имеющие общего соседа в G_2. Это противоречит тому, что $V_1 \cap V_2$ – хорошее независимое множество G_2. Следовательно, различные вершины A не имеют общих соседей в $G_1 \cup G_2$, и с учётом доказанного выше A – хорошее независимое множество $G_1 \cup G_2$.

Условие 3. Пусть a и b – смежные вершины $G_1 \cup G_2$, скажем, $\{a, b\} \in E_1$. Поскольку G_1 – почти граф Конвея, a и b имеют единственного общего соседа c в G_1и, следовательно, в $G_1 \cup G_2$. Предполагая наличие в $G_1 \cup G_2$ у a и b общего соседа $c' \neq c$, видим, что по крайней мере одно из рёбер $\{a, c'\}$, $\{b, c'\}$ не принадлежит E_1. Пусть без потери общности $\{a, c'\} \notin E_1$, откуда $\{a, c'\} \in E_2$. В частности, $a \in V_1 \cap V_2$ и, следовательно, $c' \in V_2 \backslash V_1$ (иначе независимое множество G_2 $V_1 \cap V_2$ содержит смежные вершины). Из последнего следует $\{b, c'\} \in E_2$, в частности, $b \in V_1 \cap V_2$. Но тогда a и b – вершины $V_1 \cap V_2$, имеющие общего соседа в G_2. Это противоречит тому, что $V_1 \cap V_2$ – хорошее независимое множество G_2. Отсюда смежные вершины $G_1 \cup G_2$ имеют в точности одного общего соседа.

Пусть теперь a и b – различные несмежные вершины $G_1 \cup G_2$. Рассмотрим два случая.

Вершины a и b одновременно принадлежат одному из множеств V_1 или V_2. Пусть без потери общности $a, b \in V_1$. Данные вершины несмежны в G_1, поскольку они несмежны в $G_1 \cup G_2$. Отсюда они имеют в G_1 в точности двух общих соседей c и c', являющихся, разумеется, общими соседями данных вершин в $G_1 \cup G_2$. Предполагая наличие в $G_1 \cup G_2$ у a и b общего соседа $c'' \notin \{c, c'\}$, видим, что по крайней мере одно из рёбер $\{a, c''\}$, $\{b, c''\}$ не принадлежит E_1. Пусть без потери общности $\{a, c''\} \notin E_1$, откуда $\{a, c''\} \in E_2$. В частности, $a \in V_1 \cap V_2$ и, следовательно, $c'' \in V_2 \backslash V_1$ (иначе независимое множество G_2 $V_1 \cap V_2$ содержит смежные вершины). Из последнего следует $\{b, c''\} \in E_2$, в частности, $b \in V_1 \cap V_2$. Но тогда a и b – вершины $V_1 \cap V_2$, имеющие общего соседа в G_2. Это противоречит тому, что $V_1 \cap V_2$ – хорошее независимое множество G_2. Отсюда a и b имеют в точности двух общих соседей в $G_1 \cup G_2$.

Ни одно из множеств V_1 и V_2 не содержит одновременно a и b. Пусть без потери общности $a \in V_1$. Тогда $b \in V_2 \backslash V_1$. Наличие в $G_1 \cup G_2$ общего соседа c у a и b, стало быть, означает, что $c \in V_2$. Если $c \notin V_1$, то $a \in V_2$, что противоречит начальному условию. Следовательно, $c \in V_1 \cap V_2$. Наличие в $G_1 \cup G_2$ у a и b общего соседа $c' \neq c$ аналогичным образом будет означать $c' \in V_1 \cap V_2$. Но тогда различные вершины $c, c' \in V_1 \cap V_2$ имеют в $G_1 \cup G_2$ общих соседей. Это противоречит доказанному выше условию 2, в соответствии с которым $V_1 \cap V_2$ – хорошее независимое множество $G_1 \cup G_2$. Следовательно, a и b имеют в $G_1 \cup G_2$ не более одного общего соседа. Это завершает доказательство того, что $G_1 \cup G_2$ – почти граф Конвея ■

Пример 1. Теоремы 23 и 24 позволяют выполнять рекурсивное построение почти графов Конвея. Для примера обратимся к четырём копиям $\mathrm{Z}(3)$ – G_1, G_2, G_3, G_4. Положим, что $V(G_2)$, $V(G_3)$, $V(G_4)$ попарно не пересекаются, а $V(G_1)$ пересекается с $V(G_2)$, $V(G_3)$ и $V(G_4)$ соответственно по множествам $\{(0,0,0),(1,1,1),(2,2,2)\}$, $\{(0,0,1),(1,1,2),(2,2,0)\}$ и $\{(0,0,2),(1,1,0),(2,2,1)\}$. В соответствии с Определением 9 и Теоремой 22 данные множества являются хорошими независимыми множествами $\mathrm{Z}(3)$. Обращаясь к Теоремам 23 и 24, последовательно заключаем:

1. $G_1 \cup G_2$ – почти граф Конвея с хорошим независимым множеством $\{(0,0,1),(1,1,2),(2,2,0)\}$.

2. $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ – почти граф Конвея с хорошим независимым множеством $\{(0,0,2),(1,1,0),(2,2,1)\}$

3. $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ – почти граф Конвея.

Из Определения 9 следует, что $\mathrm{Z}(3)$ – 27 вершинный 6 регулярный граф, содержащий, стало быть, $\frac{6\cdot 27}{2} = 81$ ребро. Отсюда с учётом условия 1 Теоремы 24 число вершин и рёбер $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ соответственно равно $27 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 99$ и $81 \cdot 4 = 324$.

Часть 6. Запрещённый подграф

Следующий результат демонстрирует, что не всякий почти граф Конвея может быть расширен до графа Конвея с тем же числом вершин.

Теорема 25. Любой 99 вершинный граф Конвея не содержит в качестве подграфов попарно не пересекающиеся по вершинам графы G_1, G_2, G_3, такие что $G_1 \simeq \mathrm{Z}(4)$, $G_2 \simeq \mathrm{Z}(2)$, $G_3 \simeq \mathrm{Z}(2)$.

Доказательство. Докажем утверждение от противного, обращаясь к 99 вершинному графу Конвея $H = (V, \mathcal{E})$, содержащему не пересекающиеся по вершинам подграфы G_1, G_2, G_3, такие что $G_1 \simeq \mathrm{Z}(4)$, $G_2, G_3 \simeq \mathrm{Z}(2)$. Пусть без потери общности $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где $V_1 = \{0,1,2\}^4$, $V_2 = \{0\} \times \{0,1,2\}^2$, $V_3 = \{1\} \times \{0,1,2\}^2$. Пусть также для любых $a, b \in V_1$ и для любых $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \{0,1,2\}^2$ соответственно выполнены условия

$$\{a,b\} \in E\big(\mathrm{Z}(3)\big) \rightarrow \{a,b\} \in \mathcal{E} \ (1)$$

$$\{(u_1,u_2),(v_1,v_2)\} \in E\big(\mathrm{Z}(2)\big) \rightarrow \{(0,u_1,u_2),(0,v_1,v_2)\},\{(1,u_1,u_2),(1,v_1,v_2)\} \in \mathcal{E} \ (2)$$

Будем считать, что G_1, G_2 и G_3 – соответственно графы со множеством вершин V_1, V_2 и V_3 и рёбрами, определёнными условиями 1 и 2.

Поскольку $G_2, G_3 \simeq \mathrm{Z}(2)$, а $\mathrm{Z}(2)$ (как можно непосредственно убедиться) является графом Конвея, каждая вершина u из V_1 смежна не более чем с одной вершиной из V_2 и не более чем с одной вершиной из V_3, при этом каждая вершина u из V_2 (V_3) смежна не более чем с одной вершиной из V_3 (V_2). В самом деле, предполагая противное, в V_2 или V_3 можно будет указать две смежные вершины, имеющие двух общих соседей, либо две различные несмежные вершины, имеющие трёх общих соседей (в данных случаях соответственно вторым и третьим соседом будет вершина u). Это противоречит тому, что H – граф Конвея.

Поскольку граф H является 14 регулярным (Теорема 3), а $\mathrm{Z}(2)$ – 4 регулярный граф, каждая вершина u из V_2 (V_3) имеет в H в точности 10 соседей $\mathcal{N}_u$, не являющихся её соседями в G_2 (G_3). Поскольку $\mathrm{Z}(2)$ – граф Конвея, $\mathcal{N}_u \cap V_2 = \emptyset$ ($\mathcal{N}_u \cap V_3 = \emptyset$). В силу сказанного выше $|\mathcal{N}_u \cap V_3| \leq 1$ ($|\mathcal{N}_u \cap V_2| \leq 1$), причём строгое неравенство приведёт к противоречию с тем, что в V_1 каждая вершина смежна не более чем с одной вершиной из V_2 (V_3). В самом деле, строгое неравенство будет означать, что от V_2 (V_3) отходит по крайней мере $9 \cdot 8 + 10 = 82$ ребра к V_1, тогда как $|V_1| = 3^4 = 81$. Обозначая как $u_1, \dots, u_9$ вершины V_2 (V_3), таким образом, видим, что $\mathcal{M}_{u_1} = \mathcal{N}_{u_1} \cap V_1$, …, $\mathcal{M}_{u_9} = \mathcal{N}_{u_9} \cap V_1$ – попарно не пересекающиеся 9 элементные подмножества V_1. Кроме того, в силу условия $|\mathcal{N}_u \cap V_3| = 1$ для каждого $u \in V_2$ ($|\mathcal{N}_u \cap V_2| = 1$ для каждого $u \in V_3$) имеется такая биекция $f: V_2 \rightarrow V_3$, что

$$\big\{\{u,v\}: u \in V_2, v \in V_3\big\} \cap \mathcal{E} = \big\{\{u,f(v)\}: p \in V_2\big\}$$

Из доказанного следует, что каждая вершина $u \in V_1$ смежна в точности с одной вершиной u' из V_2 и в точности с одной вершиной u'' из V_3. Покажем, что пары (u', u'') и (v', v''), определяемые таким образом для различных вершин $u, v \in V_1$ различны. Предположив противное, видим, что $u, v \in \mathcal{M}_{u'} \cap \mathcal{M}_{u''}$. Заметим, что для любой вершины $w \in V_2 \cup V_3$ и любых различных вершин $p, q \in \mathcal{M}_w$ выполнено условие $i(p,q) \geq 3$. В самом деле, в противном случае по Теореме 22 и Определению 9 p и q смежны и имеют в точности одного общего соседа в V_1 или несмежны и имеют в точности двух общих соседей в V_1. В первом случае w будет вторым общим соседом двух смежных вершин, во втором – третьим общим соседом двух различных вершин, что даст противоречие. Используя для $p \in V_1$ обозначение (p_1, p_2, p_3, p_4), для $k \in \{1,2,3,4\}$, $a \in \{0,1,2\}$ положим

$$n_{w,k,a} = |\{p \in \mathcal{M}_w : p_k = a\}|$$

Заметим, что для любых $k \in \{1,2,3,4\}$, $a \in \{0,1,2\}$ выполнено условие $n_{w,k,a} \leq 3$, и, следовательно, $n_{w,k,a} = 3$, поскольку $n_{w,k,0} + n_{w,k,1} + n_{w,k,2} = |\mathcal{M}_w| = 9$. В самом деле, пологая, что $n_{w,k,a} \geq 4$ для некоторых значений $k \in \{1,2,3,4\}$, $a \in \{0,1,2\}$, рассмотрим четыре элемента $p, q, r, s \in \mathcal{M}_w$, таких что $p_k = q_k = r_k = s_k = a$. Пусть $l \in \{1,2,3,4\} \backslash \{k\}$, тогда среди чисел p_l, q_l, r_l, s_l найдутся два одинаковых. Полагая без потери общности $p_l = q_l$, получаем $i(p,k) \leq 2$, что противоречит условию $i(p,k) \geq 3$. Докажем теперь, что в действительности для любых различных вершин $p, q \in \mathcal{M}_w$ выполнено условие $i(p,q) = 3$. Предположим противное, тогда $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$, $p_3 \neq q_3$, $p_4 \neq q_4$. Воспользовавшись полученным выше результатом, рассмотрим два отличных от q элемента $x, y \in \mathcal{M}_w$, таких что $x_1 = y_1 = q_1$. В силу условий $i(x,q) \geq 3$, $i(y,q) \geq 3$ имеем $x_2, y_2, p_2 \in \{0,1,2\} \backslash \{q_2\}$, $x_3, y_3, p_3 \in \{0,1,2\} \backslash \{q_3\}$, $x_4, y_4, p_4 \in \{0,1,2\} \backslash \{q_4\}$. Кроме того, поскольку $i(x,y) \geq 3$, выполнены условия $x_2 \neq y_2$, $x_3 \neq y_3$, $x_4 \neq y_4$. Отсюда выполнено одно из условий $i(x,p) \leq 2$ или $i(y,p) \leq 2$, дающих противоречие. Следовательно, $i(p,q) = 3$. Возвращаясь к элементам u и v выше, отсюда без потери общности положим $u_1 = v_1$, $u_2 \neq v_2$, $u_3 \neq v_3$, $u_4 \neq v_4$. Рассмотрим отличный от u и v элемент $p \in \mathcal{M}_{u'}$, такой что $p_1 = u_1$. В силу условий $i(u,p) \geq 3$, $i(v,p) \geq 3$, значения p_2, p_3, p_4 являются единственными элементами множеств $\{0,1,2\} \backslash \{u_2, v_2\}$, $\{0,1,2\} \backslash \{u_3, v_3\}$, $\{0,1,2\} \backslash \{u_4, v_4\}$ соответственно. Видим, что элемент p однозначно определяется u и v, откуда $p \in \mathcal{M}_{u''}$. Далее условие $u, v, p \in \mathcal{M}_{u'} \cap \mathcal{M}_{u''}$ даёт противоречие – трёх общих соседей различных вершин u' и u''. Следовательно, пары (u', u'') и (v', v'') вершин из V_2 и V_3, смежных с различными вершинами $u, v \in V_1$, различны. Отсюда, поскольку $|V_1| = 81 = |V_2| \cdot |V_3|$, для каждой пары (u, v) вершин из V_2 и V_3 найдётся вершина $w \in V_1$, смежная с обеими этими вершинами. Наконец заключаем, что для любых вершин $u \in V_2$, $v \in V_3$, множества $\mathcal{M}_u$ и $\mathcal{M}_v$ пересекаются, причём в силу доказанного выше – в точности по одному элементу.

В силу доказанного для каждого $u \in V_2 \cup V_3$ и любых различных $v, w \in \mathcal{M}_u$ выполнено условие $i(v,w) = 3$, откуда по Определению 9 и Теореме 22 вершины $\mathcal{M}_u$ попарно несмежны и не имеют общих соседей. Посольку степень любой вершины в $\mathrm{Z}(4)$ равна 8, а $|\mathcal{M}_u| = 9$, заключаем, что вершины $\mathcal{M}_u$ смежны с $8 \cdot 9 = 72$ вершинами из $V_1 \backslash \mathcal{M}_u$. Но $|V_1 \backslash \mathcal{M}_u| = 81 - 9 = 72$, откуда каждая вершина $V_1 \backslash \mathcal{M}_u$ смежна с некоторой вершиной $\mathcal{M}_u$.

Пусть далее $u \in V_2$, $v = f(u)$. Пусть, кроме того, w – смежная с u вершина G_2. Рассмотрим единственную вершину $p \in \mathcal{M}_w \cap \mathcal{M}_v$. Имеем $\mathcal{M}_w \subseteq V_1 \backslash \mathcal{M}_u$, откуда в силу доказанного выше найдётся вершина $q \in \mathcal{M}_u$, смежная с p. Можно видеть, что v, w, q – три общих соседа различных вершин u и p, что даёт противоречие, завершающее доказательство ■

Пример 2. Разумеется, объединение Q графов G_1, G_2, G_3 из доказательства Теоремы 25 является почти графом Конвея. Более того, мы можем добавить к Q 162 ребра, получив 99 вершинный почти граф Конвея с 522 рёбрами. Добавляться будет по 9 рёбер от каждой вершины $V_2 \cup V_3$ к некоторой вершине V_1. С этой целью достаточно привести два разбиения $S_1 = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_9\}$ и $S_2 = \{\mathcal{M}_1', \dots, \mathcal{M}_9'\}$ множества V_1 на девять 9 элементных хороших независимых множества, таких что для любого $k \in [9]$ выполнено условие $|\mathcal{M}_k \cap \mathcal{M}_k'| = 1$. Полагая $V_2 = \{u_1, \dots, u_9\}$, $V_3 = \{v_1, \dots, v_9\}$, для каждого $k \in 9$ соединим вершины u_k и v_k с каждой из вершин $\mathcal{M}_k$ и $\mathcal{M}_k'$ соответственно.

Для получения S_1 обратимся к хорошему независимому множеству

$$X = \{(0,0,0,0), (0,1,1,1), (0,2,2,2), (1,0,1,2), (1,1,2,0), (1,2,0,1), (2,0,2,1), (2,1,0,2), (2,2,1,0)\}$$

Подразумевая далее сложение в $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$, нетрудно убедиться, что в качестве S_1 можно выбрать семейство $\{\{u + (0,0,a_1,a_2) : u \in X\} : a_1, a_2 \in \{0,1,2\}\}$. Аналогичным образом положим $S_2 = \{\{u + (0,0,a_1,a_2) : u \in Y\} : a_1, a_2 \in \{0,1,2\}\}$, где

$$Y = \{(0,0,0,0), (0,1,2,2), (0,2,1,1), (1,0,2,1), (1,1,1,0), (1,2,0,2), (2,0,1,2), (2,1,0,1), (2,2,2,0)\}$$

Компьютерная проверка (21.01.20. Большой почти граф Конвея) показывает, что любые множества $A \in S_1$ и $B \in S_2$ пересекаются в точности по одному элементу.

Часть 7. Большой подграф Г(2)

Далее мы применяем изоморфизм гиперграфов, чтобы ограничиться в выборе остовных подграфов определённого вида в 99 вершинном графе Конвея.

Определение 11. Пара (V, F), где $F \subseteq \mathcal{P}(V)$, будет называться гиперграфом. При этом элементы V и F будут соответственно называться вершинами и гиперрёбрами. Изоморфизмом гиперграфов (V_1, F_1), (V_2, F_2) будет называться такая биекция $f: V_1 \to V_2$, для которой выполнено условие $\forall\big(S \in \mathcal{P}(V_1)\big): S \in F_1 \leftrightarrow fS \in F_2$. Здесь $fS = \{f(s): s \in S\}$. Элементы V и F будут соответственно называться вершинами и открытыми множествами.

Замечание 5. В соответствии с Теоремами 2 и 3 в любом графе Конвея $G = (V, E)$ на 99 вершинах можно выделить такое 15 элементное множество вершин $V' = \{u, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{7,1}, v_{7,2}\}$, что вершина u смежна со всеми вершинами $V' \backslash \{u\}$, и для любых $i, j \in [7]$, $k, l \in [2]$ вершины $v_{i,k}$ и $v_{j,l}$ смежны в том и только том случае, если $i = j$ и $k \neq l$. Поскольку G 14 регулярный, для любых $i \in [7]$, $j \in [2]$ вершина $v_{i,j}$ смежна ещё с двенадцатью вершинами, помимо u и $v_{i,k}$, где $k \in [2] \backslash \{j\}$. Обозначая соответствующее 12 элементное множество как $S_{i,j}$, видим, что $S_{i,j} \subseteq V \backslash V'$. Поскольку $|V \backslash V'| = 99 - 15 = 84$, без потери общности положим $V \backslash V' = [84]$. Для любого $i \in [7]$, поскольку u является общим соседом смежных вершин $v_{i,1}$ и $v_{i,2}$, имеем $S_{i,1} \cap S_{i,2} = \emptyset$. С другой стороны, для любых $i, j \in [7]$, $k, l \in [2]$, где $i \neq j$, несмежные вершины $v_{i,k}$ и $v_{j,l}$ имеют в точности одного общего соседа x, помимо u. Нетрудно видеть, что $x \in V \backslash V'$, откуда при заданных условиях $\left|S_{i,k} \cap S_{j,l}\right| = 1$. Наконец для любых попарно различных $i, j, k \in [7]$ и для любых $l, m, n \in [2]$ выполнено условие $S_{i,l} \cap S_{j,m} \cap S_{k,n} = \emptyset$, так как в противном случае вершина $x \in S_{i,l} \cap S_{j,m} \cap S_{k,n}$ и u имеют трёх общих соседей $v_{i,l}$, $v_{j,m}$, $v_{k,n}$. Данное замечание объясняет следующее определение.

Определение 12. Гиперграфом Конвея будем называть гиперграф $([84], F)$, где F – 14 элементное семейство подмножеств $S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{7,1}, S_{7,2} \subseteq [84]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\forall(i \in [7])\forall(j \in [2]): \left|S_{i,j}\right| = 12$
2. $\forall(i \in [7]): S_{i,1} \cap S_{i,2} = \emptyset$
3. $\forall(i, j \in [7])\forall(k, l \in [2]): i \neq j \to \left|S_{i,k} \cap S_{j,l}\right| = 1$
4. $\forall(i, j, k \in [7])\forall(l, m, n \in [2]): i \neq j \land i \neq k \land j \neq k \to S_{i,l} \cap S_{j,m} \cap S_{k,n} = \emptyset$

Теорема 26. Существует единственный с точностью до изоморфизма гиперграф Конвея.

Доказательство. Пусть $G_1 = ([84], F)$ и $G_2 = ([84], F')$ – гиперграфы Конвея, где $F = \{S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{7,1}, S_{7,2}\}$ и $F' = \{S'_{1,1}, S'_{1,2}, \dots, S'_{7,1}, S'_{7,2}\}$, и нумерация гиперрёбер соответствует Определению 12. Укажем перестановку σ на множестве $[84]$, являющуюся изоморфизмом G_1 и G_2. В соответствии с условием 3 Определения 12 84 множества $S_{i,j} \cap S_{k,l}$, таких что $i, k \in [7]$, $j, l \in [2]$, $i < k$, содержат в точности один элемент. Обозначая соответствующие элементы как $a_{i,j,k,l}$ и обращаясь к условиям 2 и 4 Определения 12, видим, что для различных наборов (i_1, j_1, k_1, l_1), (i_2, j_2, k_2, l_2), удовлетворяющих приведённому условию, $a_{i_1,j_1,k_1,l_1} \neq a_{i_2,j_2,k_2,l_2}$. Аналогично определим элементы $a'_{i,j,k,l}$ для G_2. Таким образом, рассматривая все наборы (i,j,k,l), такие что $i,k \in [7]$, $j,l \in [2]$, $i < k$, и полагая $\sigma(a_{i,j,k,l}) = a'_{i,j,k,l}$, мы определяем биекцию $\sigma\colon [84] \to [84]$.

Для произвольных $i \in [7]$, $j \in [2]$ далее видим, что

$$S_{i,j} = \{a_{i,j,k,l}\colon k \in [7], l \in [2], i < k\} \cup \{a_{k,l,i,j}\colon k \in [7], l \in [2], k < i\}$$

Отсюда

$$\sigma S_{i,j} = \{\sigma(a_{i,j,k,l})\colon k \in [7], l \in [2], i < k\} \cup \{\sigma(a_{k,l,i,j})\colon k \in [7], l \in [2], k < i\} =$$
$$= \{a'_{i,j,k,l}\colon k \in [7], l \in [2], i < k\} \cup \{a'_{k,l,i,j}\colon k \in [7], l \in [2], k < i\} = S'_{i,j}$$

С другой стороны

$$\sigma^{-1} S'_{i,j} = \{\sigma^{-1}(a'_{i,j,k,l})\colon k \in [7], l \in [2], i < k\} \cup \{\sigma^{-1}(a'_{k,l,i,j})\colon k \in [7], l \in [2], k < i\} =$$
$$= \{a_{i,j,k,l}\colon k \in [7], l \in [2], i < k\} \cup \{a_{k,l,i,j}\colon k \in [7], l \in [2], k < i\} = S_{i,j}$$

■

Пример 3. Следующие подмножества [84] определяют гиперграф Конвея (нумерация соответствует Определению 12):

$$S_{1,1} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

$$S_{1,2} = \{13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24\}$$

$$S_{2,1} = \{1,13,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34\}$$

$$S_{2,2} = \{2,14,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44\}$$

$$S_{3,1} = \{3,15,25,35,45,46,47,48,49,50,51,52\}$$

$$S_{3,2} = \{4,16,26,36,53,54,55,56,57,58,59,60\}$$

$$S_{4,1} = \{5,17,27,37,45,53,61,62,63,64,65,66\}$$

$$S_{4,2} = \{6,18,28,38,46,54,67,68,69,70,71,72\}$$

$$S_{5,1} = \{7,19,29,39,47,55,61,67,73,74,75,76\}$$

$$S_{5,2} = \{8,20,30,40,48,56,62,68,77,78,79,80\}$$

$$S_{6,1} = \{9,21,31,41,49,57,63,69,73,77,81,82\}$$

$$S_{6,2} = \{10,22,32,42,50,58,64,70,74,78,83,84\}$$

$$S_{7,1} = \{11,23,33,43,51,59,65,71,75,79,81,83\}$$

$$S_{7,2} = \{12,24,34,44,52,60,66,72,76,80,82,84\}$$

Определение 13. Графом $\Gamma(2)$ будем называть граф со смножеством вершин

$$\{0\} \cup [7] \times [2] \cup [84]$$

и множеством рёбер

$$\big\{\{0, v\}: v \in [7] \times [2]\big\} \cup \big\{\{(i,1),(i,2)\}: i \in [7]\big\} \cup \bigcup_{(i,j)\in[7]\times[2]} \big\{\{(i,j),x\}: x \in S_{i,j}\big\}$$

Здесь множества $S_{i,j}$ определены как в Примере 3.

Теорема 27. Любой граф Конвея на 99 вершинах содержит остовный подграф, изоморфный $\Gamma(2)$.

Доказательство. Рассуждаем как в Замечании 4 и применяем Теорему 26 ■

Часть 8. Граф Конвея 99 не содержит Z(4)

Далее мы исключаем возможность построения графа Конвея 99 путём добавления вершин и рёбер к графу Z(4).

Граф Конвея на n вершинах будем называть далее графом Конвея n.

Теорема 28. Граф Конвея 99 не содержит изоморфного Z(4) подграфа.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – граф Конвея 99, и утверждение не выполнено. Без потери общности положим, что Z(4) – подграф G. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ – различные вершины Z(4), несмежные в Z(4). В соответствии с Определением 9 $i(u, v) \geq 2$, а в соответствии с Теоремой 22 – при $i(u, v) = 2$ данные вершины имеют двух общих соседей в Z(4). Отсюда, если u и v смежны в G, $i(u, v) \geq 3$, иначе смежные вершины будут иметь двух общих соседей. Покажем, более того, что при смежности рассматриваемых вершин невозможен случай $i(u, v) = 3$. Предположим противное, без потери общности считая $u_1 = v_1$, $u_2 \neq v_2$, $u_3 \neq v_3$, $u_4 \neq v_4$. Заметим, что v смежна с вершиной $w = (v_1, u_2, v_3, v_4) = (u_1, u_2, v_3, v_4)$. Имеем $i(u, w) = 2$, откуда по Теореме 22 u и w имеют в Z(4) двух общих соседей, разумеется, отличных от v, поскольку по условию u и v несмежны в Z(4). Отсюда наличие ребра $\{u, v\}$ в G делает v третьим общим соседом u и w, что противоречит тому, что G – граф Конвея. Следовательно, если u и v смежны в G, $i(u, v) = 4$.

Покажем далее, что в G каждая вершина Z(4) смежна не более чем с двумя другими вершинами Z(4), с которыми она не была смежна в Z(4). Предполагая противное, положим, что u, v, w, x – четыре различные вершины Z(4), такие что u несмежна с каждой из остальных трёх вершин в Z(4), но смежна с ними в G. Из доказанного имеем

$$i(u, v) = i(u, w) = i(u, x) = 4$$

Заметим, что v и w несмежны в Z(4). В самом деле, по Теореме 23 Z(4) – почти граф Конвея, откуда смежность данных вершин означала бы наличие у них общего соседа, который вместе с вершиной u дал бы двух общих соседей смежных вершин v и w в G. Следовательно, $i(v, w) \geq 2$, но, обращаясь к Теореме 22, мы должны исключить случай $i(v, w) = 2$, при котором в G у вершин v и w появится три общих соседа. Следовательно, $i(v, w) \geq 3$. Без потери общности положим $v_1 \neq w_1$, $v_2 \neq w_2$, $v_3 \neq w_3$. Отсюда получаем

$$x_1 \in \{0,1,2\} \backslash \{u_1\} = \{v_1, w_1\}$$

$$x_2 \in \{0,1,2\} \backslash \{u_2\} = \{v_2, w_2\}$$

$$x_3 \in \{0,1,2\} \backslash \{u_1\} = \{v_3, w_3\}$$

Следовательно, выполнено условие $i(x,v) \leq 2$ или $i(x,w) \leq 2$, тогда как, рассуждая как выше, мы получаем $i(x,v) \geq 3$ и $i(x,w) \geq 3$. Данное противоречие доказывает, что в G каждая вершина $\mathrm{Z}(4)$ смежна не более чем с двумя другими вершинами $\mathrm{Z}(4)$, с которыми она не была смежна в $\mathrm{Z}(4)$.

Из Определения 9 следует, что $\mathrm{Z}(4)$ 8 регулярный 81 вершинный граф. С другой стороны, G – 14 регулярный 99 вершинный граф. Отсюда в силу доказанного в G от вершин $\mathrm{Z}(4)$ отходит по крайней мере $81 \cdot (14 - 8 - 2) = 324$ ребра к $99 - 81 = 18$ вершинам $V \backslash \{0,1,2\}^4$. Но от последних может отходить не более $18 \cdot 14 = 252$ рёбер к вершинам $\mathrm{Z}(4)$ (т. е. к $\{0,1,2\}^4$). Данное противоречие доказывает, что G не содержит изоморфного $\mathrm{Z}(4)$ подграфа ■

Часть 9. Достаточное условие для почти графа Конвея и графа Конвея

В соответствии с Теоремой 3 любой граф Конвея на 99 вершинах 14 регулярен. Первая из двух следующих теорем является ослабленной формой обратного утверждения, ссылающейся на 14 регулярный почти граф Конвея. В свою очередь, во второй из теорем приведено достаточное условие для того, чтобы почти графом Конвея был локально линейный граф.

Теорема 29. Любой 99 вершинный 14 регулярный почти граф Конвея является графом Конвея.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – 99 вершинный 14 регулярный почти граф Конвея. Пусть $v \in V$ и $N_v = \{a_1, \ldots, a_{14}\}$. Для каждого $i \in [14]$ положим $A_i = N_{a_i} \cap (V \backslash O_v)$. Нетрудно видеть, что гиперграф $(V \backslash O_v, \{A_i : i \in [14]\})$ изоморфен гиперграфу Конвея, следовательно, в соответствии с Теоремой 26 – гиперграфу из Примера 3. В свою очередь в последнем каждая вершина встречается в точности в двух открытых множествах. Отсюда следует, что любая несмежная с v вершина имеет в точности двух общих соседей с v ■

Определение 14. Локально линейным называется граф, в котором каждая пара смежных вершин имеет в точности одного общего соседа.

Теорема 30. Локально линейный граф без 4-циклов является почти графом Конвея.

Доказательство. В соответствии с Определениями 7 и 14 достаточно убедиться, что каждая пара несмежных вершин a и b не может иметь двух общих соседей c и d. Это действительно так, поскольку в противном случае будет получен 4-цикл $acbd$ ■

Часть 10. Невоможность декартова разложения графа Конвея 99

Далее исключается возможность представления графа Конвея 99 в виде декартова произведения нетривиальных графов.

Определение 15. Декартовым произведением графов G и H будем называть граф $G \square H$ со множеством вершин $V(G) \times V(H)$, такой что различные его вершины (u, v) и (u', v') смежны тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы (и, следовательно, в точности) одно из условий $u = u' \wedge \{v, v'\} \in E(H)$ и $\{u, u'\} \in E(G) \wedge v = v'$.

Теорема 31. Пусть G и H – графы, $u \in V(G)$, $v \in V(H)$. Тогда

$$\deg_{G \square H}(u, v) = \deg_G u + \deg_H v$$

Доказательство. Множество вершин, смежных с (u, v) в $G \square H$ равно множеству

$$\{(u, v') : \{v, v'\} \in E(H)\} \cup \{(u', v) : \{u, u'\} \in E(G)\}$$

Поскольку $\{(u, v') : \{v, v'\} \in E(H)\} \cap \{(u', v) : \{u, u'\} \in E(G)\} = \emptyset$,

$$\deg_{G \square H}(u, v) = |\{(u, v') : \{v, v'\} \in E(H)\} \cup \{(u', v) : \{u, u'\} \in E(G)\}| =$$

$$= |\{(u, v') : \{v, v'\} \in E(H)\}| + |\{(u', v) : \{u, u'\} \in E(G)\}| = \deg_H v + \deg_G u$$

■

Определение 16. Будем называть граф дуальным, если любые две несмежные вершины в нём имеют не более двух общих соседей.

Теорема 32. Пусть G и H – графы, тогда:

1. $|V(G\square H)| = |V(G)||V(H)|$

2. $|E(G\square H)| = |E(H)||V(G)| + |E(G)||V(H)|$

3. Если G и H соответственно k и l регулярны, то $G\square H$ $k + l$ регулярен.

4. Если $G\square H$ регулярен, то регулярны G и H.

5. Если G и H локально линейны, то и $G\square H$ локально линеен.

6. Если G и H дуальны, то и $G\square H$ дуален.

7. Если $G\square H$ локально линеен, то локально линейны G и H.

8. Если $G\square H$ дуален, то дуальны G и H.

Доказательство

1. Данное условие следует непосредственно из Определения 15.

2. Воспользовавшись леммой о рукопожатиях и Теоремой 31, получаем

$$2|E(G\square H)| = \sum_{u\in V(G)} \sum_{v\in V(H)} \deg_{GH}(u,v) = \sum_{u\in V(G)} \sum_{v\in V(H)} (\deg_G u + \deg_H v)$$

$$= \sum_{u\in V(G)} (|V(H)| \deg_G u + 2|E(H)|) = 2|E(H)||V(G)| + 2|E(G)||V(H)|$$

Отсюда $|E(G\square H)| = |E(H)||V(G)| + |E(G)||V(H)|$.

3. Если G и H соответственно k и l регулярны, то в соответствии с Теоремой 31 степень произвольной вершины в $G\Box H$ равна $k+l$.

4. Предположив, что условие не выполнено, без потери общности рассмотрим в G вершины u и u' разной степени. Пусть $v \in V(H)$, тогда по Теореме 31 имеем

$$\deg_{G\Box H}(u,v) = \deg_G u + \deg_H v \neq \deg_G u' + \deg_H v = \deg_{G\Box H}(u',v)$$

5. Пусть x и y – смежные вершины графа $G\Box H$. Без потери общности положим

$$x = (u,v)$$

$$y = (u',v)$$

$$\{u,u'\} \in E(G)$$

Пусть (p,q) – общий сосед x и y. Если $q \neq v$, то из Определения 15 получаем противоречие $u = p = u'$. Таким образом, должно выполняться условие $q = v$, из которого заключаем, что p – общий сосед u и u'. Но, являясь смежными, данные вершины имеют в точности одного общего соседа в локально линейном графе G, откуда имеется в точности одна возможность выбора (p,q).

6. Пусть x и y – различные несмежные вершины графа $G\Box H$. Рассмотрим сперва случай, когда данные вершины совпадают хотя бы (и, следовательно, в точности) по одной координате. При этом другая координата представлена различными несмежными вершинами. Без потери общности положим

$$x = (u,v)$$

$$y = (u',v)$$

$$u \neq u'$$

$$\{u,u'\} \notin E(G)$$

Пусть (p,q) – общий сосед x и y. Если $q \neq v$, то из Определения 15 вновь получаем противоречие $u = p = u'$. Таким образом, должно выполняться условие $q = v$, из которого заключаем, что p – общий сосед u и u'. Но, являясь несмежными, данные вершины имеют не более двух общих соседей в дуальном графе G, откуда имеется не более двух способов выбора (p, q).

Остаётся рассмотреть случай, когда x и y различаются по обеим координатам:

$$x = (u, v)$$

$$y = (u', v')$$

$$u \neq u'$$

$$v \neq v'$$

Пусть (p, q) – общий сосед x и y. При $p = u$ получаем $p \neq u'$, откуда $q = v'$. Это даёт единственную возможность для (p, q). Аналогичным образом при $p \neq u$ и, следовательно, $q = v$ получаем $q \neq v'$ и $p = u'$, что вновь означает единственную возможность для (p, q). Отсюда и в данном случае x и y имеют не более двух общих соседей.

7. Пусть условие нарушено, и, скажем, u и u' – смежные вершины G, имеющие двух общих соседей a и b. Пусть $v \in V(H)$, тогда (u, v) и (u', v) – смежные вершины $G \square H$, имеющие двух общих соседей (a, v) и (b, v).

8. Пусть условие нарушено, и, скажем, u и u' – различные несмежные вершины G, имеющие трёх общих соседей a, b и c. Пусть $v \in V(H)$, тогда (u, v) и (u', v) – различные несмежные вершины $G \square H$, имеющие трёх общих соседей (a, v), (b, v) и (c, v) ■

Замечание 6. В соответствии с Теоремой 32 декартово произведение почти графов Конвея является почти графом Конвея, что предлагает рекурсивный метод построения почти графов Конвея. В связи с этим можно задаться вопросом о существовании последовательности почти графов Конвея $G_1, \dots, G_k$, такой что естественно определяемый граф $G_1 \square \dots \square G_k$ является графом Конвея на 99 вершинах. В соответствии с Теоремами 3, 29 и 32 при таком построении необходимо и достаточно, чтобы для числа вершин рассматриваемых графов было выполнено условие $n_1 \cdot \dots \cdot n_k = 99$, и, кроме того, данные графы были бы регулярными графами степеней $d_1, \dots, d_k$, удовлетворяющих условию $d_1 + \dots + d_k = 14$. Следующие результаты демонстрируют метод опровержения более слабого утверждения о представимости почти графов Конвея в виде декартова произведения произвольных графов.

Теорема 33. Пусть v – вершина локально линейного графа, и $d = \deg v > 0$. Тогда d – чётное число, и существует изоморфизм f из $\langle O_v \rangle$ в $\Phi_{\frac{d}{2}}$, такой что $f(v) = d + 1$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2 ■

Определение 17. Пусть d – положительное целое число. Графом $\mathcal{G}_d$ будем называть граф со множеством вершин $[3] \cup [3] \times [d] \times [2]$ и множеством рёбер E, определяемым соотношениями:

$$\forall(u, v \in [3])[\{u, v\} \in E \leftrightarrow u \neq v]$$

$$\forall(u \in [3])\forall(v \in [3] \times [d] \times [2])[\{u, v\} \in E \leftrightarrow u = v_1]$$

$$\forall(u, v \in [3] \times [d] \times [2])[\{u, v\} \in E \leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 \neq v_3]$$

Теорема 34. Пусть G – $d > 2$ регулярный локально линейный граф. Тогда $k = \frac{d-2}{2}$ – положительное целое число, в G найдутся попарно смежные вершины u, v и w, и для любой такой тройки граф $\langle O_u \cup O_v \cup O_w \rangle$ содержит остовный подграф H, такой что найдётся изоморфизм f H и $\mathcal{G}_k$, при котором $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$. Если при этом G – почти граф Конвея (т. е. дуален), то для любых различных $i, j \in [3]$ каждая из вершин $f^{-1}(\{i\} \times [k] \times [2])$ смежна не более чем с одной вершиной $f^{-1}(\{j\} \times [k] \times [2])$.

Доказательство. Утверждение о том, что k – положительное целое число, следует из Теоремы 33. Для получения тройки попарно смежных вершин выберем смежные вершины u и v и их (единственного) общего соседа w. Доказательство оставшейся части аналогично доказательству Теоремы 4 (заметим, что $\Gamma(1) \simeq \mathcal{G}_6$) ■

Теорема 35. Для d регулярного почти графа Конвея, содержащего n вершин, выполнено условие $d \leq \frac{n+7}{4}$.

Доказательство. При $d \leq 2$ в соответствии с Теоремой 33 имеем $d \in \{0,2\}$. Условие $d \leq \frac{n+7}{4}$ очевидным образом выполнено при $d = 0$. При $d = 2$ имеем $n \geq 3$, что вновь даёт выполнения условия. В случае $d > 2$ обратимся к Теореме 34 и без потери общности положим, что рассматриваемый граф G содержит подграф $\mathcal{G}_k$, где $k = \frac{d-2}{2}$. Рассмотрим вершину $u = (1,1,1)$, смежную с 1 и $v = (1,1,2)$. Данная вершина не может быть смежной с вершинами 2 или 3, что даст противоречие с условием локальной линейности (скажем, в первом случае смежные вершины 2 и 1, помимо общего соседа 3, будут иметь общего соседа u). Аналогично невозможен случай смежности с u с какой-либо отличной от v вершиной $\{1\} \times [k] \times [2]$. Отсюда, если u смежна в G с отличными от 1 и v вершинами $\mathcal{G}_k$, то они принадлежат $\{2,3\} \times [k] \times [2]$, что по Теореме 34 означает не более двух указанных вершин. Отсюда u смежна не более чем с 4 вершинами $[3] \cup [3] \times [d] \times [2]$ и по крайней мере с $d-4$ вершинами $V \backslash ([3] \cup [3] \times [k] \times [2])$. Отсюда

$$d - 4 \leq n - 6k - 3 = n - 3d + 3$$

$$d \leq \frac{n+7}{4}$$

■

Теорема 36. Граф Конвея 99 непредставим в виде декартова произведения нетривиальных графов (отличных от изолированной вершины).

Доказательство. Предположим противное, полагая, что G – граф Конвея 99, и для графов H_1 и H_2 с числом вершин соответственно $n_1, n_2 \geq 2$ выполнено условие $G = H_1 \square H_2$. В соответствии с Теоремами 32 и 3 имеем:

H_1, H_2 – почти графы Конвея

H_1, H_2 – регулярные графы степеней соответственно d_1 и d_2, таких что $d_1 + d_2 = 14$

$n_1 n_2 = 99$

Обращаясь к последнему условию, ввиду $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, без потери общности полагаем, что имеет место один из случаев $n_1 = 3$, $n_2 = 33$ и $n_1 = 11$, $n_2 = 9$. Воспользовавшись Теоремой 35, имеем

$$14 = d_1 + d_2 \leq \frac{n_1 + 7}{4} + \frac{n_2 + 7}{4} = \frac{n_1 + n_2 + 14}{4}$$

При этом в первом случае значение $\frac{n_1+n_2+14}{4}$ составляет $\frac{50}{4} < 14$, а во втором – $\frac{34}{4} < 14$. Данные противоречия завершают доказательство ■

Замечание 7. В соответствии с Теоремой 27 мы можем полагать, что граф Конвея 99 G содержит $\Gamma(2)$ в качестве своего остовного подграфа. Пусть $u \in [84]$. Данная вершина принадлежит в точности двум из определяемых в Примере 3 множеств $S_{i,j}$, где $i \in [7]$, $j \in [2]$. Пусть речь идёт о множествах $S_{i,j}$ и $S_{k,l}$ $(i \neq k)$. Нетрудно видеть, что в данных множествах вершин, смежных соответственно с $x = (i,j)$ и $y = (k,l)$, пересекающихся в точности по u, найдутся соответственно единственные вершины v_u и w_u, такие что xuv_u и yuw_u – треугольники в G. Отсюда можно заключить, что удаление из подграфа $\langle [84] \rangle$ рёбер $\{u, v_u\}$ и $\{u, w_u\}$ для каждой вершины $u \in [84]$ даёт 84 вершинный 10 регулярный почти граф Конвея. Далее мы покажем невозможность декартова разложения и данного графа, для чего придётся воспользоваться более сильной оценкой, чем в Теореме 35.

Теорема 37. Для d регулярного почти графа Конвея, содержащего n вершин, выполнено условие $d \leq \sqrt{2n-2}$.

Доказательство. Условие $d \leq \sqrt{2n-2}$ очевидным образом выполнено при $d = 0$. При положительном d воспользуемся Теоремой 33 и рассмотрим целое число k, такое что $d = 2k$. Без потери общности положим, что рассматриваемый граф G содержит изоморфный Φ_k порождённый подграф со множеством вершин $\{1\} \cup [k] \times \{0,1\}$ и множеством рёбер $\mathcal{E}$, определяемым следующими соотношениями:

$$\forall (u \in [k] \times \{0,1\})[\{1, u\} \in \mathcal{E}]$$

$$\forall (u, v \in [k] \times \{0,1\})[\{u, v\} \in \mathcal{E} \leftrightarrow u_1 = v_1 \land u_2 \neq v_2]$$

Произвольная вершина $u \in [k] \times \{0,1\}$, помимо вершин 1 и $v = (u_1, (u_1 + 1) \, mod \, 2)$, смежна с ещё $d - 2$ вершинами $\mathcal{N}_u$, причём $\mathcal{N}_u \subseteq V(G) \backslash \{1\} \cup [k] \times \{0,1\}$ и $\mathcal{N}_u \cap \mathcal{N}_v = \emptyset$. Отсюда $\left|\mathcal{N}_{(1,0)} \cup \mathcal{N}_{(1,1)}\right| = 2(d-2)$. Заметим, что для различных $i, j \in [k]$ и произвольных $x, y \in \{0,1\}$ $\left|\mathcal{N}_{(i,x)} \cap \mathcal{N}_{(j,y)}\right| \leq 1$. В самом деле, в противном случае вершины (i,x) и (j,y), помимо общего соседа 1, имели бы двух общих соседей в $\mathcal{N}_{(i,x)} \cap \mathcal{N}_{(j,y)}$, что противоречит тому, что G – почти граф Конвея. Отсюда последовательно получаем:

$$\left|\mathcal{N}_{(1,0)} \cup \mathcal{N}_{(1,1)}\right| \geq 2(d-2)$$

$$\left|\mathcal{N}_{(1,0)} \cup \mathcal{N}_{(1,1)} \cup \mathcal{N}_{(1,0)} \cup \mathcal{N}_{(1,1)}\right| \geq 2(d-2) + 2(d-4)$$

$$\dots$$

$$\left|\bigcup_{u\in[k]\times\{0,1\}} \mathcal{N}_u\right| \geq 2\sum_{i=1}^{k}(d-2i) = \frac{d^2}{2} - d$$

Отсюда $n \geq |\{1\} \cup [k] \times \{0,1\}| + \frac{d^2}{2} - d = \frac{d^2}{2} + 1$ и $d \leq \sqrt{2n-2}$ ■

Теорема 38. Любой 84 вершинный 10 регулярный почти граф Конвея непредставим в виде декартова произведения нетривиальных графов.

Доказательство. Предположим противное, полагая, что для рассматриваемого графа G и для графов H_1 и H_2 с числом вершин соответственно $n_1, n_2 \geq 2$ выполнено условие $G = H_1 \square H_2$. В соответствии с Теоремой 32 имеем:

H_1, H_2 – почти графы Конвея

H_1, H_2 – регулярные графы степеней соответственно d_1 и d_2, таких что $d_1 + d_2 = 10$

$n_1 n_2 = 84$

Из последнего условия, поскольку $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, заключаем, что имеется пять принципиально различных случаев:

$n_1 = 2, n_2 = 42$

$n_1 = 3, n_2 = 28$

$n_1 = 4, n_2 = 21$

$n_1 = 6, n_2 = 14$

$n_1 = 7, n_2 = 12$

Рассмотрим данные случаи по-отдельности, применив к первому Теорему 37 и ограничившись в остальных случаях Теоремой 35.

Случай 1. Воспользовавшись Теоремой 33, заключаем, что $d_1 = 0$, откуда $d_2 = 10$, но $10 > \sqrt{2 \cdot 42 - 2}$, что даёт противоречие с Теоремой 37.

Случай 2. Воспользовавшись Теоремой 33, видим, что $d_1 \in \{0,2\}$. В первой из этих ситуаций $d_2 = 10$, что даёт противоречие с Теоремой 35, по которой $d_2 \leq \frac{n_2+7}{4} = \frac{35}{4}$. При $d_1 = 2$ имеем $d_2 = 8$, но тогда по лемме о рукопожатиях H_2 содержит $\frac{28\cdot 8}{2} = 112$ рёбер. Нетрудно убедиться, что локально линейный граф содержит кратное 3 число рёбер (каждое ребро принадлежит в точности одному треугольнику), поэтому данный случай исключается.

Случай 3 и 4. Воспользовавшись Теоремой 33 и условием локальной линейности (в случае 4), нетрудно убедиться, что в рассматриваемых случаях $d_1 \in \{0,2\}$. Отсюда $d_2 \geq 8$, тогда как по Теореме 25 в случае 3 имеем $d_2 \leq 7$, а в случае 4 – $d_2 \leq \frac{21}{4}$.

Случай 5. Воспользовавшись Теоремой 33, видим, что $d_1 \in \{0,2,4,6\}$, при этом условие $d_1 = 6$, соответствующее тому, что H_1 – полный граф на 7 вершинах, исключается ввиду противоречия с локальной линейностью H_1. При $d_1 \in \{2,4\}$ мы, как в случае 2, получаем граф с не кратным 3 числом рёбер. Отсюда $d_1 = 0$ и $d_2 = 10$, что противоречит следующему из Теоремы 35 условию $d_2 \leq \frac{n_2+7}{4} = \frac{19}{4}$.

Замечание 8. Теорема 38 утверждает, что некоторый являющийся регулярным почти графом Конвея подграф графа Конвея 99 является декартово неразложимым. Напротив, Теорема 28 утверждает, что декартово разложимый регулярный почти граф Конвея $\mathrm{Z}(4) \simeq \mathrm{Z}(1)\square\,\mathrm{Z}(3)$ не является подграфом графа Конвея 99. Это позволяет предположить, что всякий являющийся регулярным почти графом Конвея подграф графа Конвея 99 является декартово неразложимым. Если данное предположение истинно, то граф Конвея 99 не содержит $\mathrm{Z}(2) = \mathrm{Z}(1)\square\,\mathrm{Z}(1)$.

Часть 11. Невозможность применения группового обобщения конструкции Берлекэмпа

Ниже мы поговорим об одном теоретико-групповом способе задания регулярных графов, в т. ч. локально линейных. Соответствующая конструкция позволяет задать граф Конвея на 243 вершинах, но не способна дать графа Конвея 99.

Замечание 9. В 4 на стр. 29 E. R. Berlekamp приводит следующую конструкцию графа Конвея на 243 вершинах (см. также программу «23.02.25. Berlekamp 243»). Вершинами рассматриваемого графа являются элементы группы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5 = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, смежные в том и только том случае, если разность вершин является одним из следующих элементов:

$$(0,0,1,0,1)$$
$$(0,0,1,1,1)$$
$$(0,1,0,0,1)$$
$$(0,1,0,1,0)$$
$$(0,1,1,1,0)$$
$$(1,0,0,1,0)$$
$$(1,0,0,1,1)$$
$$(1,0,1,0,0)$$
$$(1,1,0,0,1)$$
$$(1,1,1,0,0)$$
$$(1,1,1,1,1)$$
$$(0,0,2,0,2)$$
$$(0,0,2,2,2)$$
$$(0,2,0,0,2)$$
$$(0,2,0,2,0)$$
$$(0,2,2,2,0)$$
$$(2,0,0,2,0)$$
$$(2,0,0,2,2)$$
$$(2,0,2,0,0)$$
$$(2,2,0,0,2)$$
$$(2,2,2,0,0)$$
$$(2,2,2,2,2)$$

Обозначим соответствующее множество и 22 его элемента как $A = \{a_1, \dots, a_{22}\}$. Заметим, что наше определение графа корректо, поскольку A не содержит нейтрального элемента $\mathbb{0} = (0,0,0,0,0)$ (что исключает смежность вершины с собой и даёт антирефлексивное отношение), а вместе с каждым элементом x в A содержится обратный ему элемент $-x$

(это делает отношение симметричным). Далее мы видим, что произвольная вершина $x \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ смежна с каждым из элементов $\mathcal{N}_x = \{a_1 + x, \dots, a_{22} + x\}$, причём возможность сокращения справа делает данные элементы попарно различными, т. е. $|\mathcal{N}_x| = 22$. С другой стороны, если x смежна с y, то $y - x \in A$, и для некоторого $i \in [22]$ выполнено условие $a_i = y - x$, откуда $y = a_i + x \in \mathcal{N}_x$.

Данные наблюдения позволяют сопоставить любой конечной группе X и замкнутому относительно взятия обратного элемента и не содержащему нейтрального элемента n элементному подмножеству $A \subseteq X$ – n регулярный граф $G_{X,A}$. В рассмотренном примере соответствующий граф оказывается 243 вершинным графом Конвея, для чего, разумеется, в качестве X была выбрана 243 элементная группа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Возникает естественный вопрос о возможности аналогичного задания графа Конвея 99. К счастью (обращаясь к 1-й и 2-й теоремам Силова, 2-й теореме об изоморфизме, классовой формуле и основной теореме конечных абелевых групп), мы убеждаемся, что имеется лишь две группы порядка 99 – $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ и $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Однако обе эти группы абелевы, а мы собираемся показать, что необходимое в нашем построении условие локальной линейности в случае абелевых групп достигается лишь тогда, когда порядок каждого из элементов A равен 3. Таким образом, поскольку граф Конвея 99 является 14 регулярным, нам нужно выбрать в $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ и $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 14 элементов порядка 3. Но данные группы, как легко убедиться, содержат соответственно лишь 2 и 8 элементов порядка 3, что исключает возможность построения графа Конвея 99 описанным способом.

Перейдём к доказательству того, что граф $G_{X,A}$ в случае абелевой группы X локально линеен лишь тогда, когда элементы A имеют порядок 3. В соответствии с Теоремой 33 подграф $\langle O_v \rangle$ локально линейного графа, порождённый окрестностью вершины v степени $d > 0$, изоморфен графу $\Phi_{\frac{d}{2}}$, причём соответствующий изоморфизм переводит v в «центральную» вершину $d + 1$. Пусть $G_{X,A}$ – локально линейный граф, и $|A| = d > 0$. Обратимся для удобства к соседям нейтрального элемента X в $G_{X,A}$, которые в соответствии со сказанным выше попросту образуют множество A:

$$\mathcal{N}_{\mathbb{O}} = \{a_1 + \mathbb{O}, \dots, a_d + \mathbb{O}\} = A$$

Пусть $\frac{d}{2} = k$ (отметим, что по Теореме 33 d является чётным). В соответствии с замечанием об изоморфизме, в частности, изоморфизме $\langle O_{\mathbb{O}} \rangle = \langle \{\mathbb{O}\} \cup \mathcal{N}_{\mathbb{O}} \rangle = \langle \{\mathbb{O}\} \cup A \rangle$ и Φ_k, множество A можно разбить на k двухэлементных подмножества, таких что различные вершины одного двухэлементного подмножества смежны, а вершины разных подмножеств нет. Таким образом, наряду со следующими условиями 1 и 2, описывающими выбор множества A для построения того или иного d регулярного графа $G_{X,A}$, мы укажем и условия 3 и 4, которые необходимо выполняются, если данный граф локально линеен (легко убедиться, что эти условия являются и достаточными для получения локально линейного графа). Обращаясь к нумерации $A = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{k,1}, a_{k,2}\}$, имеем

1. $\mathbb{0} \notin A$
2. $\forall(x \in A): -x \in A$
3. $\forall(i \in [k]): a_{i,1} - a_{i,2} \in A$
4. $\forall(i, j \in [k], r, s \in [2]): i < j \to a_{i,r} - a_{j,s} \notin A$

Покажем теперь, что в случае абелевой группы X выполнение этих условий означает, что элементы A имеют порядок 3. Сразу заметим, что из условий 2 и 3, а также 2 и 4 соответственно следует:

5. $\forall(i \in [k]): a_{i,2} - a_{i,1} \in A$
6. $\forall(i, j \in [k], r, s \in [2]): i < j \to a_{j,s} - a_{i,r} \notin A$

Пусть $i \in [k]$. Для удобства положим $a_{i,1} = x$, $a_{i,2} = y$. Из 3 следует $z = x - y \in A$. Если $z \in A \backslash \{x, y\}$, то по 4 и 6 $x - z \notin A$. Но из коммутативности X следует $x - z = x - (x - y) = y$. Это даёт противоречие $y \notin A$. Отсюда имеем $z = x$ или $z = y$. В первом случае $z = x - y = x$, откуда $-y = \mathbb{0}$ и, следовательно, $y = \mathbb{0}$, что противоречит 1. Таким образом, остаётся одна возможность: $z = y$. Отсюда $x - y = y$ и $x = 2y$. Воспользовавшись 5, аналогичным образом получим $y = 2x$. Отсюда имеем $x = 2y = 4x$ и $3x = \mathbb{0}$. Поскольку $x \neq \mathbb{0}$, x – элемент порядка 3. Аналогичным образом y также является элементом порядка 3. Следовательно, все элементы A имеют порядок 3.

В завершение зададимся вопросом о том, не означает ли невозможность рассмотренного теоретико-группового построения графа Конвея 99 отсутствия последнего. Здесь мы по крайней мере можем сказать, что не все 99 вершинные регулярные локально линейные графы получаются описанным способом. Так, в программе «23.02.16. 99-вершинный 10-регулярный локально линейный граф (алгоритмическая конструкция)» мы строим 99 вершинный 10 регулярный локально линейный граф с остовным подграфом из девяти копий Φ_5. При этом выводы выше указывают, что получаемые описанным здесь способом 99 вершинные регулярные графы обладают степенью не выше 8.

Часть 12. Касалетка

В данной части, задаваясь вопросом о существовании графа Конвея 99, мы естественным образом предположим, что существует граф Конвея 99, содержащий в качестве подграфа граф Конвея 9. Следующие из данного допущения выводы в определённом смысле приближают нас к построению требуемого графа.

Определение 18. Сильно регулярным графом $srg(n, d, k, l)$ будем называть n вершинный d регулярный граф, в котором любая пара смежных вершин имеет в точности k общих соседей, а любая пара различных несмежных вершин – в точности l общих соседей.

Определение 19. Графом Конвея n будем называть n вершинный граф Конвея, используя обозначение $Sei(n)$.

Замечание 10. Стоит заметить, что $Sei(n)$ – лишь свойство графа, заключающееся в наличии в нём n вершин, а также в точности одного общего соседа у любых смежных вершин и в точности двух общих соседей у различных несмежных вершин. Вопрос о том, влечёт ли наличие данного свойства у двух графов их изоморфизм (как, например, в случае с полными графами K_n), является, вероятно, открытым.

Замечание 11. В соответствии с Теоремой 3 любой граф Конвея регулярен. Это делает $Sei(n)$ сильно регулярным графом $srg(n, d, 1,2)$, причём степень d однозначно определена n. В самом деле, рассуждая как при доказательстве Теоремы 3, получаем, что любой граф $Sei(n)$ является регулярным графом степени $\sqrt{2(n-1)}$. Иными словами, любой граф $Sei(n)$ является графом $srg\left(n, \sqrt{2(n-1)}, 1,2\right)$. Данное замечание означает ограничение не только значения степени (которая должна быть чётной, являясь корнем чётного числа), но и, собственно, значения n. В действительности имеет место следующий сильный результат, получаемый методами линейной алгебры, а именно: используя формулы для рассчёта кратностей собственных чисел сильно регулярных графов (которые приведены, например, в 5 на стр. 220), мы, руководствуясь тем, что кратность является целым числом, исключаем те или иные значения n.

Теорема 39 (6, стр. 3). Для графа $Sei(n)$ $(n \geq 1)$ выполнено условие $n \in \{1,3,9,99,243,6273,494019\}$. Каждый из соответствующих графов является при этом регулярным графом степени 0, 2, 4, 14, 22, 112, 994.

Замечание 12. Легко видеть, что существуют и единственны с точностью до изоморфизма графы $Sei(1)$ и $Sei(3)$, изоморфные соответственно K_1 и K_3. Более того, нетрудно убедиться, что существует и единственен с точностью до изоморфизма граф $Sei(9)$, изоморфный $\mathrm{Z}(2) \simeq K_3 \square K_3$. В Замечании 9 мы, кроме того, рассмотрели конструкцию Berlekamp'а графа $Sei(243)$. Существование графов Конвея с другими значениями n из Теоремы 39, т. е. $Sei(99)$, $Sei(6273)$ и $Sei(494019)$, неизвестно. В частности, выдвинута следующая гипотеза (J. J. Seidel, Strongly regular graphs, Progress in combinatorics, 1969, а также 7, стр. 1, https://oeis.org/A248380/a248380.pdf).

Гипотеза 1. Существует граф $Sei(99)$.

Замечание 13. Естественно искать граф, обладающий некоторым свойством P, как подграф большего графа, обладающим свойством P, или посредством расширения меньшего обладающего свойством P графа. Попытка применения первой части данной стратегии к доказательству Гипотезы 1 (подкрепляемая конструкцией Berlekamp'а) приводит к отрицательному результату следующей теоремы.

Теорема 40. Каждый граф $Sei(243)$ не содержит подграфа $Sei(99)$.

Доказательство. Проведём доказательство от противного, предположив, что подграфом графа Конвея 243 G является граф Конвея 99 H. В соответствии с Теоремой 39 данные графы являются соответственно 22 и 14 регулярными. Заметим, что каждая вершина $V(H)$, помимо 14 смежных с ней в H вершин, смежна ещё с $22 - 14 = 8$ вершинами в G. Ни одна из этих 8 вершин не принадлежит $V(H)$, так как, соединяя в H несмежные (и, следовательно, имеющие двух общих соседей) вершины, мы получим смежные вершины с двумя общими соседями, чего не может быть в G. Отсюда в G между $V(H)$ и $V(G) \backslash V(H)$ проходит в точности $8 \cdot 99 = 792$ рёбер. С другой стороны, нетрудно видеть, что от каждой вершины $u \in V(G) \backslash V(H)$ в G может отходить не более одного ребра к $V(H)$. В самом деле, наличие двух таких рёбер, скажем, $\{u, v\}$ и $\{u, w\}$ в случае смежности v и w в H и наличия у них общего соседа $r \in V(H)$ даст смежные вершины v и w с двумя общими соседями, u и r. Если же v и w несмежны в H, то это аналогичным образом приведёт к трём их общим соседям. Отсюда число рёбер между $V(H)$ и $V(G) \backslash V(H)$ не превосходит $|V(G) \backslash V(H)| \cdot 1 = 243 - 99 = 144 < 792$. Полученное противоречие завершает доказательство ■

Замечание 14. Использованный в доказательстве выше аргумент применим и к графам $Sei(6273)$ и $Sei(243)$: $6273 - 243 = 6030 < 21870 = 243 \cdot (112 - 22)$. Однако для пары $Sei(99)$ и $Sei(9)$ противоречия мы не получаем: $99 - 9 = 90 = 9 \cdot (14 - 4)$. Это обстоятельство (если не брать во внимание результат Теоремы 28 об отсутствии в $Sei(99)$

графа Z(4)) позволяет обратиться при доказательстве Гипотезы 1 ко второй части стратегии Замечания 13. Здесь мы сразу же обнаруживаем, что наличие подграфа $Sei(9)$ в графе $Sei(99)$ влечёт наличие в последнем определённого остовного подграфа.

Определение 20. Пусть $\boldsymbol{P} = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$. Для $u = (u_1, u_2) \in \boldsymbol{P}$ пучком R_u будем называть множество $\{u_1\} \times \{u_2\} \times \{0,1,2,3,4\} \times \{0,1\}$. Пучки R_u и R_v будем называть смежными и несмежными, если u и v соответственно смежны и несмежны в Z(2), т. е. $i(u,v) = 1$ и $i(u,v) \neq 1$. Положим

$$\boldsymbol{Q} = \bigcup_{u \in \boldsymbol{P}} R_u$$

Будем называть касалеткой граф $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ со множеством вершин $\mathcal{V} = \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}$ и множеством рёбер $\mathcal{E}$, определяемым следующими соотношениями для произвольного $\{u,v\} \in \mathcal{P}_2(\mathcal{V})$:

$$u, v \in \boldsymbol{P} \to (\{u,v\} \in \mathcal{E} \leftrightarrow i(u,v) = 1)$$

$$u \in \boldsymbol{P} \wedge v \in \boldsymbol{Q} \vee u \in \boldsymbol{Q} \wedge v \in \boldsymbol{P} \to (\{u,v\} \in \mathcal{E} \leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2)$$

$$u, v \in \boldsymbol{Q} \to (\{u,v\} \in \mathcal{E} \leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3)$$

Замечание 15. Касалетка является 99 вершинным почти графом Конвея, содержащим в качестве подграфа Z(2). Отсюда всякий содержащий $\mathcal{K}$ (в качестве остовного подграфа) граф $Sei(99)$ содержит $Sei(9)$. Следующая теорема является обрытным утверждением.

Теорема 41. Любой граф $Sei(99)$, содержащий подграф $Sei(9)$, содержит остовный подграф, изоморфный $\mathcal{K}$.

Доказательство. Без потери общности рассмотрим граф Конвея 99 $G = (V, E)$, содержащий подграф Z(2). Рассмотрим также некоторую вершину $u \in \boldsymbol{P}$, смежную в G в точности с $14 - 4 = 10$ вершинами A_u, с которыми u несмежна в Z(2). Рассуждая как при доказательстве Теоремы 40, заключаем, что $A_u \subseteq V \backslash \boldsymbol{P}$. Без потери общности положим $A_u = R_u$ и заметим далее, что в Z(2) с u смежны вершины

$$v_1 = (u_1, (u_2 + 1) \bmod 3)$$

$$v_2 = (u_1, (u_2 + 2) \; mod \; 3)$$

$$w_1 = \big((u_1 + 1) \; mod \; 3, u_2\big)$$

$$w_2 = \big((u_1 + 1) \; mod \; 3, u_2\big)$$

При этом в Z(2) (и, следовательно, в G) v_1 смежна с v_2, а w_1 с w_2. Отсюда, воспользовавшись Теоремой 2, без потери общности положим, что $\{(u_1, u_2, 0{,}0), (u_1, u_2, 0{,}1)\}, \dots, \{(u_1, u_2, 4{,}0), (u_1, u_2, 4{,}1)\}$ являются рёбрами G. Пусть далее $u' \in \boldsymbol{P} \setminus \{u\}$. Вновь получаем $A_{u'} \subseteq V \setminus \boldsymbol{P}$. Кроме того, имеем $A_{u'} \cap A_u = \emptyset$. В самом деле, пусть $x \in A_{u'} \cap A_u$. Если u и u' смежны в Z(2), то у них есть общий сосед $y \in \boldsymbol{P}$, что даёт двух общих соседей x и y у смежных вершин u и u' в G. Если же u и u' несмежны в Z(2), то у них два общих соседа $y, z \in \boldsymbol{P}$, что даёт трёх общих соседей x, y и z у двух вершин u и u' в G. Из данных противоречий и следует, что $A_{u'} \cap A_u = \emptyset$. Таким образом, рассуждая как ранее, мы без потери общности полагаем $A_{u'} = R_{u'}$, причём $\{(u'_1, u'_2, 0{,}0), (u'_1, u'_2, 0{,}1)\}, \dots, \{(u'_1, u'_2, 4{,}0), (u'_1, u'_2, 4{,}1)\}$ являются рёбрами G. Продолжая данное рассуждение, мы можем считать, что каждая вершина $u \in \boldsymbol{P}$ смежна в G со всеми элементами R_u, причём $\{(u_1, u_2, 0{,}0), (u_1, u_2, 0{,}1)\}, \dots, \{(u_1, u_2, 4{,}0), (u_1, u_2, 4{,}1)\}$ являются рёбрами G. Это даёт содержащийся в G подграф $\mathcal{K}$ ■

Замечание 16. Поскольку $Sei(99)$ 14 регулярен, а в $\mathcal{K}$ каждая из вершин $\boldsymbol{P}$ имеет степень 14, то в графе $Sei(99)$ $G = (V, E)$, содержащем $\mathcal{K}$ в качестве остовного подграфа, любое не встречающееся в $\mathcal{E}$ ребро $\{x, y\}$ принадлежит $\mathcal{P}_2(\boldsymbol{Q})$. С другой стороны, если бы данное ребро было образовано вершинами одного пучка R_u, то смежные вершины $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и u имели бы двух общих соседей – y и $(x_1, x_2, x_3, (x_4 + 1) \; mod \; 2)$. Отсюда для любого ребра $\{x, y\} \in E \setminus \mathcal{E}$ найдутся различные пучки R_u и R_v, такие что $x \in R_u$ и $y \in R_v$. При этом $E \setminus \mathcal{E}$ разбивается на два множества в зависимости от того, сопоставлена ли $\{x, y\} \in E \setminus \mathcal{E}$ пара смежных или пара несмежных пучков. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 42. Пусть $G = (V, E)$ – содержащий $\mathcal{K}$ граф $Sei(99)$, и $\prec$ – (строгий) лексикографический порядок на $\boldsymbol{P}$. Положим

$$A = E \cap \bigcup_{\substack{u \prec v \in \boldsymbol{P} \\ i(u,v) = 1}} \big\{\{x, y\} : x \in R_u, y \in R_v\big\}$$

$$B = E \cap \bigcup_{\substack{u \prec v \in \boldsymbol{P} \\ i(u,v) = 2}} \big\{\{x, y\} : x \in R_u, y \in R_v\big\}$$

Тогда имеет место разбиение $E\backslash\mathcal{E} = A \cup B$. Кроме того, выполнены условия:

1. $\forall(u, v \in \boldsymbol{P})\big[i(u,v) = 1 \to \forall(x \in R_u)\exists_1(y \in R_v)[\{x,y\} \in E]\big]$
2. $\forall(u, v \in \boldsymbol{P})\big[i(u,v) = 2 \to \forall(x \in R_u)\exists_2(y \in R_v)[\{x,y\} \in E]\big]$

Здесь $\exists_n$ означает существование в точности n элементов.

Доказательство. Утверждение о том, что имеет место разбиение $E\backslash\mathcal{E} = A \cup B$ следует непосредственно из Замечания 16. Докажем выполнение условий 1 и 2. Рассмотрим пучок R_u и смежный с ним пучок R_v. Наличие у вершины $x \in R_u$ двух общих соседей $y, z \in R_v$ ведёт к трём общим соседям u, y и z у вершин x и v. Отсюда каждая вершина $x \in R_u$ имеет не более одного соседа в каждом из четырёх смежных с R_u пучков. Если, с другой стороны, R_v – отличный от R_u несмежный с ним пучок, то x не может иметь в R_v трёх соседей, которые будут общими соседями x и v. Отсюда каждая вершина $x \in R_u$ имеет не более двух общих соседей в каждом из четырёх несмежных с R_u пучков. Следовательно, если x смежна менее чем с одной вершиной в каком-либо из смежных с R_u пучков или менее чем с двумя вершинами в каком-либо из отличных от R_u несмежных с ним пучков, то она имеет менее $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 12$ соседей в $\boldsymbol{Q}\backslash R_u$. Но степень 2 у x в касалетке, её степень 14 в G и условие $E\backslash\mathcal{E} = A \cup B$ влекут наличие у данной вершины в точности 12 соседей в $\boldsymbol{Q}\backslash R_u$. Полученное противоречие доказывает одновременное выполнение условий 1 и 2 ■

Определение 21. Бриллиантами типа 1 и 2 будем соответственно называть графы, изоморфные следующим графам:

$$\big([4], \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}\big)$$

$$\big([5], \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}\big)$$

Определение 22. Рассмотрим произвольную пару $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, такую что $i(u,v) = 1$. Сопоставим каждой вершине $x \in R_u$ вершину $\varphi_{u,v}(x) \in R_v$. Рассмотрим множество

$$A = \bigcup_{\substack{u \prec v \in \boldsymbol{P} \\ i(u,v)=1}} \big\{\{x, \varphi_{u,v}(x)\}: x \in R_u\big\}$$

Будем называть A смежным решением, если $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$ не содержит бриллиантов, говоря при этом, что φ определяет смежное решение. Аналогичным образом рассмотрим произвольную пару $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, такую что $i(u,v) = 2$. Сопоставим каждой вершине $x \in R_u$ пару вершин $\psi_{u,v}(x) \in \mathcal{P}_2(R_v)$. Рассмотрим множество

$$B = \bigcup_{\substack{u \prec v \in \boldsymbol{P} \\ i(u,v)=2}} \left\{\{x,y\}: x \in R_u, y \in \psi_{u,v}(x)\right\}$$

Будем называть B несмежным решением, если $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ не содержит бриллиантов, говоря при этом, что ψ определяет несмежное решение. Пусть A и B – соответственно смежное и несмежное решение. Будем говорить, что они совместны, если $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$ не содержит бриллиантов.

Теорема 43. Пусть существует содержащий $\mathcal{K}$ граф $Sei(99)$ $G = (V, E)$, и A, B определены как в Теореме 42. Тогда A – смежное решение, B – несмежное решение, и A совместно с B.

Доказательство. Являясь подграфами G, графы $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$, $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ и $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$ не содержат бриллиантов. Далее для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$ при $i(u,v) = 1$ для каждого $x \in R_u$ выберем в качестве $\varphi_{u,v}(x)$ единственную (согласно Теореме 42) вершину $y \in R_v$, такую что $\{x,y\} \in E$, а для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$ при $i(u,v) = 2$ для каждого $x \in R_u$ выберем в качестве $\psi_{u,v}(x)$ единственную (согласно Теореме 42) пару $\{y,z\} \in \mathcal{P}_2(R_v)$, такую что $\{x,y\}, \{x,z\} \in E$. Нетрудно видеть, что

$$A = \bigcup_{\substack{u \prec v \in P \\ i(u,v)=1}} \left\{\{x, \varphi_{u,v}(x)\}: x \in R_u\right\}$$

$$B = \bigcup_{\substack{u \prec v \in P \\ i(u,v)=2}} \left\{\{x,y\}: x \in R_u, y \in \psi_{u,v}(x)\right\}$$

∎

Замечание 17. Теорема 43 и две следующие теоремы позволяют установить биекцию между парами совместных решений и содержащими $\mathcal{K}$ графами $Sei(99)$.

Теорема 44. Графами $Sei(99)$ являются те и только те 99 вершинные графы, которые 14 регулярны и не содержат бриллиантов.

Доказательство. Необходимая часть следует из Теоремы 3 и Определения 1. Для доказательства достаточной части обратимся к произвольному 99 вершинному 14 регулярнному графу $G = (V, E)$ без бриллиантов. Отсутствие бриллиантов типа 2 в G влечёт его дуальность. Отсюда локальная линейность G будет означать, что G – почти граф Конвея и, следовательно, по Теореме 29 является графом Конвея. Заметим, что граф локально линеен тогда и только тогда, когда множество соседей произвольной его вершины порождаёт 1 регулярный граф. Предположив, что G не является локально линейным, рассмотрим вершину $v \in V$, такую что $\langle N_v \rangle$ не является 1 регулярным. Отсутствие бриллиантов типа 1 влечёт, что степень каждой вершины $\langle N_v \rangle$ не больше 1, откуда в $\langle N_v \rangle$ содержится вершина степени 0. Отсюда следует, что в G от вершин N_v отходит не меньше $(14 - 1) \cdot 1 + (14 - 2) \cdot 13 = 169$ рёбер к 84 вершинам $V \backslash O_v$. Таким образом, в $V \backslash O_v$ имеется вершина u, от которой отходит по крайней мере $\left\lceil \frac{169}{84} \right\rceil = 3$ ребра к N_v, что даёт бриллиант типа 2, образованный u, v и тремя смежными с u вершинами N_v. данное противоречие доказывает, что G локально линеен, откуда по отмеченному выше является графом Конвея ■

Теорема 45. Пусть A – смежное решение, B – несмежное решение, и A совместно с B. Тогда $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$ является графом Конвея.

Доказательство. В соответствии с Определением 22 и Теоремой 44 достаточно доказать, что $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$ – 14 регулярный граф. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для любых $u \in \boldsymbol{P}$, $x \in R_u$, $v \in \boldsymbol{P} \backslash \{u\}$ выполнены условия:

1. x смежна в точности с одной вершиной R_v, если $i(u, v) = 1$
2. x смежна в точности с двумя вершинами R_v, если $i(u, v) = 2$

В силу Определения 22 оба условия выполнены при $u \prec v$. Поэтому предположим, что $v \prec u$.

Предположим, что $i(u, v) = 1$. Пусть x не смежна ни с одной из вершин R_v. По Определению 22 каждая вершина R_v смежна в точности с одной вершиной R_u, откуда в силу $|R_v| = |R_u \backslash \{x\}| + 1$ в $R_u \backslash \{x\}$ найдётся вершина y, смежная с двумя вершинами

$z, t \in R_v$. Отсюда y и v имеют трёх общих соседей z, t и u, что даёт бриллиант типа 2 в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$ (и, следовательно, в G). Наличие, с другой стороны, двух смежных с x вершин $y, z \in R_v$ также даёт в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$ бриллиант типа 2: x и v имеют трёх общих соседей y, z, u. Следовательно, x смежна в точности с одной вершиной R_v.

Предположим, что $i(u, v) = 2$. Пусть x смежна не более чем с одной вершиной R_v. По Определению 22 каждая вершина R_v смежна в точности с двумя вершинами R_u, откуда в силу $|R_v| = |R_u \backslash \{x\}| + 1$ в $R_u \backslash \{x\}$ найдётся вершина y, смежная с $\left\lceil \frac{2|R_v|-1}{|R_v|-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{19}{9} \right\rceil = 3$ вершинами R_v. Это даёт в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ (и, следовательно, в G) бриллиант типа 2, образованный данными тремя вершинами, y и v. При смежности x, с другой стороны, с тремя вершинами R_v бриллиант типа 2 в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ получаем сразу же, выбирая данные три вершины, x и v. Следовательно, x смежна в точности с двумя вершинами R_v ■

Определение 23. Для каждой пары $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, такой что $i(u, v) = 1$, сопоставим каждой вершине $x \in R_u$ вершину $\varphi_{u,v}(x) = (v_1, v_2, x_3, x_4)$. Пусть

$$A = \bigcup_{\substack{u \prec v \in P \\ i(u,v)=1}} \left\{ \{x, \varphi_{u,v}(x)\} : x \in R_u \right\}$$

Будем называть суперкасалеткой граф $\mathcal{K}' = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$, называя при этом множество A решением суперкасалетки.

Теорема 46. Решение суперкасалетки является смежным решением.

Доказательство. Достаточно установить, что $\mathcal{K}'$ не содержит бриллиантов, при этом компьютерная проверка (23.02.08. Суперкасалетка) даёт более сильный результат – $\mathcal{K}'$ является почти графом Конвея ■

Часть 13. Несмежные решения

Далее мы укажем необходимые и достаточные условия для того, чтобы семейство функций определяло несмежное решение, и приведём пример такого семейства.

Замечание 18. Пусть $u \prec v \in \boldsymbol{P}$ и $i(u,v) = 2$. Рассмотрим функцию $\psi_{u,v}: R_u \to R_v$, сопоставленную (наряду с другими функциями между несмежными пучками) несмежному решению B. Рассуждая как при доказательстве Теоремы 45, видим, что следующий граф является 2 регулярным:

$$H_{u,v} = \Big(R_u \cup R_v, \Big\{\{x,y\}: x \in R_u, y \in \psi_{u,v}(x)\Big\}\Big)$$

Таким образом, $H_{u,v}$ является объединением не пересекающихся по вершинам циклов. Обозначим множество данных циклов как $Z_{u,v}$, сопоставив ему упорядоченный по убыванию набор $l_{u,v}$ длин встречающихся в $Z_{u,v}$ циклов с учётом повторения длин. Поскольку $|R_u \cup R_v| = 20$, сумма элементов $l_{u,v}$ равна 20. Заметим при этом, что $Z_{u,v}$ не может содержать 4 циклов. В самом деле, в любом цикле $Z_{u,v}$ вершины R_u и R_v чередуются. Отсюда наличие в $Z_{u,v}$ 4 цикла z означает существование четырёх попарно различных элементов $a, b \in R_u$, $c, d \in R_v$, таких что $z = acbd$. Но тогда в $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$, например, c и d имеют трёх общих соседей a, b и v. Это даёт бриллиант типа 2 в G, что противоречит тому, что B – несмежное решение. Таким образом, получаем

$$l_{u,v} \in \{(20), (14,6), (12,8), (10,10), (8,6,6)\}$$

С учётом чередования вершин R_u и R_v в циклах $Z_{u,v}$ любые вершины x и y, соединённые путём длины 2 в $H_{u,v}$, принадлежат одновременно одному из этих множеств, тогда как соединяющая их в пути длины 2 вершина t принадлежит другому множеству. Пусть, например, $x, y \in R_v$, $t \in R_u$. Можно видеть, что смежность x и y в $\mathcal{K}$ повлечёт наличие бриллианта типа 1 в G, образованного смежными вершинами x и y и двумя их общими соседями t и v. Таким образом, $\{x,y\}$ является ребром дополнения порождённого в $\mathcal{K}$ подграфа $\langle R_v \rangle$. Для формализации соответствующего утверждения определим для $u \in P$ 1 регулярный граф $X_u = \big(R_u, \big\{\{a,b\} \in \mathcal{P}_2(R_u): a_3 = b_3\big\}\big)$ (заметим, что для любого ребра $\{a,b\} \in E(X_u)$ выполнены условия $a_1 = a_2 = u_1$, $a_2 = b_2 = u_2$). Таким образом, сказанное можно записать как $\{x,y\} \in \overline{X_v}$. Сопоставим далее каждому циклу длины $2k$ $z = z_0 z_1 \dots z_{2k-1} \in Z_{u,v}$ два цикла длины k, образованные вершинами с чётными и нечётными номерами:

$$M_z = \Big\{\{z_{2i}: i \in \{0, \dots, k-1\}\}, \Big\{\{z_{2i}, z_{(2i+2) \bmod k}\}: i \in \{0, \dots, k-1\}\Big\}\Big\}$$

$$N_z = \Big\{\{z_{2i+1}: i \in \{0, \dots, k-1\}\}, \Big\{\{z_{2i+1}, z_{(2i+3) \bmod k}\}: i \in \{0, \dots, k-1\}\Big\}\Big\}$$

Пусть без потери общности $z_0 \in R_u$, тогда в соответствии со сказанным M – подграф $\overline{X_u}$, и N – подграф $\overline{X_v}$. Определим, таким образом, множество $\mathcal{Z}_{u,v}$ попароно не пересекающихся по вершинам циклов $\overline{X_u}$ и множество $З_{v,u}$ попарно не пересекающихся по вершинам циклов $\overline{X_v}$:

$$З_{u,v} = \{M_z : z \in Z_{u,v}\}$$

$$З_{v,u} = \{N_z : z \in Z_{u,v}\}$$

Сопоставляя $З_{u,v}$ и $З_{v,u}$ упорядоченные по убыванию наборы $\ell_{u,v}$ и $\ell_{v,u}$ длин встречающихся в них циклов, с учётом сказанного выше получим:

$$\ell_{u,v} = \ell_{v,u} = \left(l_{u,v}(i)/2\right) \in \{(10), (7,3), (6,4), (5,5), (4,3,3)\}$$

Описанным способом сопоставим любой вершине $u \in \boldsymbol{P}$ и каждой из четырех вершин $v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 2$, множество $З_{u,v}$ и набор $\ell_{u,v}$. Заметим при этом, что для различных вершин $v, v' \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 2$, верно что каждый цикл $z \in З_{u,v}$ не имеет общего ребра ни с одноим из циклов $z' \in З_{u,v'}$. В самом деле, для каждого ребра $\{a,b\}$ циклов z и z' найдутся соответственно вершины $c \in R_v$, $c' \in R_{v'}$, смежные одновременно с a и b: если $u \prec v$ ($v \prec u$), то c – единственный общий сосед данных вершин в $H_{u,v}$ ($H_{v,u}$), если $u \prec v'$ ($v' \prec u$), то c' – единственный общий сосед данных вершин в $H_{u,v'}$ ($H_{v',u}$). Таким образом, если $\{a,b\}$ встречается одновременно в z и z', то a и b имеет в G трёх общих соседей u, c, c', что даёт бриллиант типа 2 и противоречит тому, что B – несмежное решение. Заметим, что сумма элементов $\ell_{u,v}$ равна 10, а $\overline{X_u}$ содержит 40 рёбер. Отсюда, обозначая четыре вершины $v \in \boldsymbol{P}$, такие что $i(u,v) = 2$, как v_1, v_2, v_3, v_4, с учётом сказанного получим разбиение $E\left(\overline{X_u}\right)$:

$$\overline{X_u} = \bigcup_{i \in [4]} \bigcup_{z \in З_{u,v_i}} E(z)$$

Наконец рассмотрим графы $C = \bigcup З_{u,v}$ и $D = \bigcup З_{v,u}$, скажем, при $u \prec v$. Записав циклы $H_{u,v}$ в виде последовательностей, для каждой вершины $x \in R_u$ рассмотрим единственный содержащий x цикл z и сопоставим x следующую в z вершину $y \in R_u$. Нетрудно видеть, что полученное таким образом отображение $f: R_u \to R_v$ является изоморфизмом C и D. Наши выводы, являющиеся необходимыми для несмежного решения, в действительности весьма близки к тому, чтобы быть также достаточными для него. Это отражено в следующей теореме.

Теорема 47. Для каждого $u \in \boldsymbol{P}$ положим

$$X_u = \left(R_u, \{\{a,b\} \in \mathcal{P}_2(R_u): a_3 = b_3\}\right)$$

Пусть $\mathcal{N}_u = \{v \in \boldsymbol{P}: i(u,v) = 2\}$. Рассмотрим определённую на $\mathcal{N}_u$ функцию f_u, принимающую свои значения во множестве подграфов дополнения $\overline{X_u}$. Пусть для каждого $v \in \mathcal{N}_u$ значение $f_u(v)$ – 2 регулярный остовный подграф $\overline{X_u}$, причём для различных $v, v' \in \mathcal{N}_u$ выполнено условие $E\big(f_u(v)\big) \cap E\big(f_u(v')\big) = \emptyset$, что равносильно условию

$$E\left(\overline{X_u}\right) = \bigcup_{v \in \mathcal{N}_u} E\big(f_u(v)\big)$$

Пусть далее для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 2$, определён изоморфизм $g_{u,v}$ графов $f_u(v)$ и $f_v(u)$. Пусть также $\ell_{u,v}$ – упорядоченный по убыванию набор длин циклов $f_u(v)$ с учётом повторяющихся длин, $k_{u,v}$ – длина $\ell_{u,v}$, и

$$\mathfrak{Z}_{u,v} = \left(\bigcup_{i \in [k_{u,v}]} \{i\} \times \{0, \dots, \ell_{u,v}(i) - 1\}, \bigcup_{i \in [k_{u,v}]} \left\{\left\{(i,j), \left(i, (j+1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)\right\} : j \in \{0, \dots, \ell_{u,v}(i) - 1\}\right\}\right)$$

Пусть заданы изоморфизмы $h_{u,v}$ графов $\mathfrak{Z}_{u,v}$ и $f_u(v)$. Рассмотрим произвольный элемент $a \in R_u$. Рассмотрим единственные $i \in [k_{u,v}]$, $j \in \{0, \dots, \ell_{u,v}(i) - 1\}$, такие что $h_{u,v}^{-1}(a) = (i,j)$. Положим $a' = h_{u,v}\left(i, (j-1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)$ и сопоставим a пару элементов

$$\psi_{u,v}(a) = \{g_{u,v}(a), g_{u,v}(a')\}$$

Положим, что для каждого ребра $\{a,b\} \in E(X_u)$ и любых $x \in \psi_{u,v}(a)$, $y \in \psi_{u,v}(b)$ выполнено условие $\{x,y\} \notin E(X_v)$. Тогда ψ определяет несмежное решение.

Доказательство. Положим

$$B = \bigcup_{\substack{u \prec v \in P \\ i(u,v)=2}} \left\{\{a,b\}: a \in R_u, b \in \psi_{u,v}(a)\right\}$$

Требуется доказать, что граф $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ не содержит бриллиантов. Докажем по-отдельности, что G не содержит бриллиантов типа 1 и типа 2, рассуждая от противного.

Легко видеть, что граф $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ является локально линейным. Отсюда бриллиант типа 1 D в G необходимо содержит ребро $\{a,b\} \in B$. Пусть $u \prec v \in \boldsymbol{P}$ – такие элементы, что $i(u,v) = 2$, $a \in R_u$, $b \in R_v$. Заметим, что любой общий сосед x вершин a и b в G не являлся таковым в $\mathcal{K}$ (по Определению 20). Стало быть, выполнено условие $\{x,a\} \in B$ или $\{x,b\} \in B$. Рассмотрев соответствующие случаи, докажем, что $x \notin R_u \cup R_v$.

Случай 1, $\{x,a\} \in B$. Предположим, что $x \in R_u \cup R_v$. Заметим, что $x \notin R_u$, так как в противном случае содержащаяся в B пара $\{x,a\}$ образована вершинами одного пучка R_u. Отсюда должно выполняться условие $x \in R_v$. Имеем $\psi_{u,v}(a) = \{b,x\}$, откуда в соответствии с формулировкой теоремы выполнено одно из условий

$$b = g_{u,v}(a), x = g_{u,v}(a')$$

$$b = g_{u,v}(a'), x = g_{u,v}(a)$$

Пусть $h_{u,v}^{-1}(a) = (i,j)$, тогда указанные условия будут записаны как

$$b = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i,j)\right), x = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i, (j-1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)\right)$$

$$b = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i, (j-1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)\right), x = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i,j)\right)$$

Поскольку $g_{u,v} \circ h_{u,v}$ – изоморфизм графов $\mathfrak{Z}_{u,v}$ и $f_v(u)$, а (i,j) и $\left(i, (j-1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)$ смежны в $\mathfrak{Z}_{u,v}$, то в обоих случаях b и x смежны в $f_v(u)$. Но $f_v(u)$ – подграф $\overline{X_v}$, откуда вершины b и x – несмежные вершины R_v в $\mathcal{K}$ и, следовательно, в G. Это даёт противоречие с тем, что x – общий сосед a и b в G. Следовательно, при $\{x, a\} \in B$ условие $x \notin R_u \cup R_v$ выполнено.

Случай 2, $\{x, b\} \in B$. Предположим, что $x \in R_u \cup R_v$. Заметим, что $x \notin R_v$, так как в противном случае содержащаяся в B пара $\{x, b\}$ образована вершинами одного пучка R_v. Отсюда должно выполняться условие $x \in R_u$. Для некоторых $i, j \in \left[k_{u,v}\right]$, $j \in \left\{0, \dots, \ell_{u,v}(i) - 1\right\}$, $j' \in \left\{0, \dots, \ell_{u,v}(i') - 1\right\}$, таких что $(i, j) \neq (i', j')$, имеем $h_{u,v}^{-1}(a) = (i, j)$, $h_{u,v}^{-1}(x) = (i', j')$. Вершины a и x смежны в G и, следовательно, в X_u. Значит, данные вершины несмежны в $\overline{X_u}$ и в $f_u(v)$. Следовательно, вершины (i, j) и (i', j') несмежны в $\mathfrak{Z}_{u,v}$. Далее имеем $b \in \psi_{u,v}(a)$, $b \in \psi_{u,v}(x)$, поэтому выполняется одно из следующих условий:

$$g_{u,v}\left(h_{u,v}(i, j)\right) = b = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i', j')\right)$$

$$g_{u,v}\left(h_{u,v}(i, j)\right) = b = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i', (j' - 1) \bmod \ell_{u,v}(i')\right)\right)$$

$$g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i, (j - 1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)\right) = b = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i', j')\right)$$

$$g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i, (j - 1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)\right) = b = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i', (j' - 1) \bmod \ell_{u,v}(i')\right)\right)$$

Данные условия соответственно влекут

$$(i, j) = (i', j')$$

$$(i, j) = \left(i', (j' - 1) \bmod \ell_{u,v}(i')\right)$$

$$\left(i, (j - 1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right) = (i', j')$$

$$\left(i, (j - 1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right) = \left(i', (j' - 1) \bmod \ell_{u,v}(i')\right)$$

Первое из данных условий непосредственно противоречит $(i, j) \neq (i', j')$. Второе условие исключается, так как вершина (i', j') смежна с $\left(i', (j' - 1) \bmod \ell_{u,v}(i')\right)$, третье – так как вершина (i, j) смежна с $\left(i, (j - 1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)$. Последнее условие влечёт $i = i'$, откуда получаем $j = j'$ и снова $(i, j) = (i', j')$. Следовательно, при $\{x, a\} \in B$ условие $x \notin R_u \cup R_v$ выполнено.

Итак, если x – общий сосед пары $\{a,b\} \in B$, такой что $a \in R_u$, $b \in R_v$ $(u \prec v)$, то выполнено условие $x \notin R_u \cup R_v$. Докажем, что это влечёт $\{x,a\},\{x,b\} \in B$. В самом деле, если $\{x,a\} \notin B$, то $\{x,a\} \in \mathcal{E}$, откуда имеем $x = u$ или $x \in R_u$. Первый из этих случаев исключается, поскольку $\{u,b\} \notin E(G)$, второй – ввиду доказанного условия. Если, же $\{x,b\} \notin B$, то $\{x,b\} \in \mathcal{E}$, откуда имеем $x = v$ или $x \in R_v$. Первый из этих случаев исключается, поскольку $\{v,a\} \notin E(G)$, второй – ввиду доказанного условия. Полученные противоречия доказывают, что $\{x,a\},\{x,b\} \in B$. Это позволяет заключить, что любое ребро бриллианта D принадлежит B, т. е. $E(D) \subseteq B$. В самом деле в силу Определения 21 для двух некоторых отличных от a и b вершин x и y выполнено одно из условий

$$D = \Big\{\{x,y,a,b\},\big\{\{x,a\},\{x,b\},\{a,b\},\{a,y\},\{b,y\}\big\}\Big\}$$

$$D = \Big\{\{x,y,a,b\},\big\{\{a,b\},\{a,x\},\{b,x\},\{b,y\},\{x,y\}\big\}\Big\}$$

$$D = \Big\{\{x,y,a,b\},\big\{\{b,a\},\{b,x\},\{a,x\},\{a,y\},\{x,y\}\big\}\Big\}$$

В первом случае обе вершины x и y являются общими соседями a и b, откуда $\{x,a\},\{x,b\},\{y,a\},\{y,b\} \in B$, что даёт условие $E(D) \subseteq B$ сразу. Во втором случае – x является общим соседом a и b, откуда $\{x,a\},\{x,b\} \in B$. При этом y – общий сосед пары $\{x,b\} \in B$, откуда $\{y,x\},\{y,b\} \in B$, что вновь даёт $E(D) \subseteq B$. В третьем случае – x является общим соседом a и b, откуда $\{x,a\},\{x,b\} \in B$. При этом y – общий сосед пары $\{x,a\} \in B$, откуда $\{y,x\},\{y,a\} \in B$, что вновь даёт $E(D) \subseteq B$.

Заметим далее, что треугольник abc с рёбрами из B таков, что для некоторых $u,v,w \in \boldsymbol{P}$ выполняется условие $a \in R_u$, $b \in R_v$, $c \in R_w$, причём $i(u,v) = 2$, $i(u,w) = 2$, $i(v,w) = 2$. С другой стороны, любые вершины $u,v \in \boldsymbol{P}$, для которых выполнено условие $i(u,v) = 2$, определяют единственную вершину $w \in \boldsymbol{P}$, такую что $i(u,w) = 2$, $i(v,w) = 2$. Из этого следует, что в бриллианте типа 1 с рёбрами из B две несмежные вершины принадлежат одному пучку R_w, а общие соседи данных вершин – отличным от R_w пучкам $R_u \neq R_v$, причём все три пучка попарно несмежны. Отсюда без потери общности будем полагать

$$D = \Big\{\{x,y,a,b\},\big\{\{x,a\},\{x,b\},\{a,b\},\{a,y\},\{b,y\}\big\}\Big\}$$

$$E(D) \subseteq B$$

$$a \in R_u$$

$$b \in R_v$$

$$x,y \in R_w$$

$$u \prec v$$

$$i(u,v) = i(u,w) = i(v,w) = 2$$

Имеет место три случая:

$w \prec u \prec v$. Для некоторых $i, j \in [k_{w,u}]$, $j \in \{0, \dots, \ell_{w,u}(i) - 1\}$, $j' \in \{0, \dots, \ell_{w,u}(i') - 1\}$, таких что $(i,j) \neq (i',j')$, имеем $h_{w,u}^{-1}(x) = (i,j)$, $h_{w,u}^{-1}(y) = (i',j')$. Рассуждая как выше, получаем

$$(i,j) = (i',j')$$

$$(i,j) = \left(i', (j'-1) \bmod \ell_{w,u}(i')\right)$$

$$\left(i, (j-1) \bmod \ell_{w,u}(i)\right) = (i',j')$$

$$\left(i, (j-1) \bmod \ell_{w,u}(i)\right) = \left(i', (j'-1) \bmod \ell_{w,u}(i')\right)$$

Первый и последний случаи исключаются ввиду $(i,j) \neq (i',j')$, а каждый из двух оставшихся случаев влечёт смежность (i,j) и (i',j') в $\mathfrak{Z}_{w,u}$, откуда следует смежность x и y в $f_w(u)$. Аналогичным образом получаем смежность x и y в $f_w(v)$, что влечёт противоречие с условием доказываемой теоремы:

$$\{x,y\} \in E\big(f_w(u)\big) \cap E\big(f_w(v)\big) \neq \emptyset$$

$u \prec w \prec v$. Как в предыдущем случае получаем $\{x,y\} \in E\big(f_w(v)\big)$. Далее $\psi_{u,w}(a) = \{x,y\}$, откуда в соответствии с формулировкой теоремы выполнено одно из условий

$$x = g_{u,w}(a), y = g_{u,w}(a')$$

$$x = g_{u,w}(a'), y = g_{u,w}(a)$$

Пусть $h_{u,w}^{-1}(a) = (i,j)$, тогда данные условия будут записаны как

$$x = g_{u,w}\left(h_{u,w}(i,j)\right),\ y = g_{u,w}\left(h_{u,w}\left(i,(j-1)\ mod\ \ell_{u,w}(i)\right)\right)$$

$$x = g_{u,w}\left(h_{u,w}\left(i,(j-1)\ mod\ \ell_{u,w}(i)\right)\right),\ y = g_{u,w}\left(h_{u,w}(i,j)\right)$$

Поскольку $g_{u,w} \circ h_{u,w}$ – изоморфизм графов $\mathfrak{Z}_{u,w}$ и $f_w(u)$, а (i,j) и $\left(i,(j-1)\ mod\ \ell_{u,w}(i)\right)$ смежны в $\mathfrak{Z}_{u,w}$, то в обоих, случаях x и y смежны в $f_w(u)$. Отсюда вновь получаем противоречие $\{x,y\} \in E\big(f_w(u)\big) \cap E\big(f_w(v)\big)$.

$u \prec w \prec v$. Противоречие $\{x,y\} \in E\big(f_w(u)\big) \cap E\big(f_w(v)\big)$ получаем, рассуждая как выше.

Итак, G не содержит бриллиантов типа 1. Кроме того, из доказанного выше следует, что для попарно различных пучков R_u, R_v и R_w, произвольных вершин $a \in R_u$, $b \in R_v$, двух произвольных вершин $x, y \in R_w$ неверно, что каждая из вершин a и b является общим соседом x и y в G. Обозначим это утверждение как *, оно нам понадобится далее при доказательстве того, что G не содержит бриллианта типа 2. Предположим противное, обращаясь к бриллианту $\mathfrak{D}$ типа 2. В соответствии с Теоремой 46 $\mathfrak{D}$ не является подграфом $\mathcal{K}'$ и, следовательно, $\mathcal{K}$. Отсюда $\mathfrak{D}$ содержит по крайней мере одно ребро $\{a,b\} \in B$. Пусть $u \prec v \in \boldsymbol{P}$ – такие элементы, что $i(u,v) = 2$, $a \in R_u$, $b \in R_v$. Заметим, что вершины, смежные с a в $\mathfrak{D}$, не принадлежат $\boldsymbol{P}\backslash\{u\}$, а вершины, смежные с b в $\mathfrak{D}$, не принадлежат $\boldsymbol{P}\backslash\{v\}$, так как любая вершина $w \in \boldsymbol{P}$ не смежна ни с одной вершиной $x \in \boldsymbol{Q}\backslash R_w$ в G. Заметим также, что для каждого ребра $e \in E(\mathfrak{D})$ степень одной из вершин e равна двум, а другой – трём. Если $\deg a = 2$ в $\mathfrak{D}$, и a смежна с u в $\mathfrak{D}$, то u и b имеют в $\mathfrak{D}$ отличных от a двух общих соседей x и y. Но в G все соседи u являются элементами $(\boldsymbol{P}\backslash\{v\}) \cup R_u$, тогда как b не имеет в $\mathfrak{D}$ соседей из $\boldsymbol{P}\backslash\{v\}$. Следовательно, $x, y \in R_u$. Это даёт противоречие. В самом деле, пусть $h_{u,v}(i,j) = a$, $h_{u,v}(i',j') = x$, $h_{u,v}(i'',j'') = y$, где $i, i', i'' \in [k_{u,v}]$, $j \in \{0, \dots, l_{u,v}(i) - 1\}$, $j' \in \{0, \dots, l_{u,v}(i') - 1\}$, $j'' \in \{0, \dots, l_{u,v}(i'') - 1\}$. Тогда имеет место один из восьми случаев

1. $g_{u,v}\left(h_{u,v}(i,j)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i',j')\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i'',j'')\right) (= b)$
2. $g_{u,v}\left(h_{u,v}(i,j)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i',j')\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i'',(j''-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i'')\right)\right)$
3. $g_{u,v}\left(h_{u,v}(i,j)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i',(j'-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i')\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i'',j'')\right)$
4. $g_{u,v}\left(h_{u,v}(i,j)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i',(j'-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i')\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i'',(j''-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i'')\right)\right)$
5. $g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i,(j-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i)\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i',j')\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i'',j'')\right)$
6. $g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i,(j-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i)\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i',j')\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i'',(j''-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i'')\right)\right)$
7. $g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i,(j-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i)\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i',(j'-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i')\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}(i'',j'')\right)$
8. $g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i,(j-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i)\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i',(j'-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i')\right)\right) = g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i'',(j''-1)\ mod\ \ell_{u,v}(i'')\right)\right)$

Соответственно получаем

1. $(i,j) = (i',j') = (i'',j'')$
2. $(i,j) = (i',j') = \left(i'', (j''-1) \mod \ell_{u,v}(i'')\right)$
3. $(i,j) = \left(i', (j'-1) \mod \ell_{u,v}(i')\right) = (i'',j'')$
4. $(i,j) = \left(i', (j'-1) \mod \ell_{u,v}(i')\right) = \left(i'', (j''-1) \mod \ell_{u,v}(i'')\right)$
5. $\left(i, (j-1) \mod \ell_{u,v}(i)\right) = (i',j') = (i'',j'')$
6. $\left(i, (j-1) \mod \ell_{u,v}(i)\right) = (i',j') = \left(i'', (j''-1) \mod \ell_{u,v}(i'')\right)$
7. $\left(i, (j-1) \mod \ell_{u,v}(i)\right) = \left(i', (j'-1) \mod \ell_{u,v}(i')\right) = (i'',j'')$
8. $\left(i, (j-1) \mod \ell_{u,v}(i)\right) = \left(i', (j'-1) \mod \ell_{u,v}(i')\right) = \left(i'', (j''-1) \mod \ell_{u,v}(i'')\right)$

Каждый из этих случаев ведёт к совпадению каких-либо двух элементов множества $A = \{(i,j),(i',j'),(i'',j'')\}$, что противоречит тому, что $\left|h_{u,v}(A)\right| = |\{a,x,y\}| = 3$. Итак, если $\deg a = 2$ в $\mathfrak{D}$, то a несмежна с u в $\mathfrak{D}$. При этом мы доказали, что для любых $u \prec v$, таких что $i(u,v) = 2$, любая вершина $x \in R_v$ смежна в G не более чем с двумя и, следовательно, в точности с двумя вершинами R_u (поскольку каждая вершина R_u смежна в точности с двумя вершинами R_v). Если теперь $\deg a = 3$ в $\mathfrak{D}$, и a смежна с u в $\mathfrak{D}$, то u и b имеют в $\mathfrak{D}$ отличного от a общего соседа x. Рассуждая как выше, получаем $x \in R_u$. Кроме того, существует вершина y, отличная от u и b, смежная с a и x в $\mathfrak{D}$. Имеем $y \neq u$, $y \notin \boldsymbol{P} \backslash \{u\}$, откуда $y \notin \boldsymbol{P}$. Следовательно, $y \in \boldsymbol{Q}$. Далее $y \notin R_u$, т. к. в G подграфы, порождаемые каждым из пучков 1 регулярные, а y смежна с a и x. Кроме того, из * следует, что $y \notin \boldsymbol{Q} \backslash (R_u \cup R_v)$, откуда единственная возможность – $y \in R_v$. Покажем, что этот случай также невозможен, установив что для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 2$, любые две вершины $p,q \in R_u$ имеют в R_v не более одного общего соседа, равно как любые две вершины $p,q \in R_v$ имеют не более одного общего соседа в R_u**. Докажем от противного первую часть утверждения, положив $h_{u,v}(i,j) = p$, $h_{u,v}(i',j') = q$ для некоторых $i,i' \in [k_{u,v}]$, $j \in \{0,\dots,l_{u,v}(i)-1\}$, $j' \in \{0,\dots,l_{u,v}(i')-1\}$. Имеем $\psi_{u,v}(p) = \psi_{u,v}(q) = \{r,s\}$, где r и s – два общих соседа p и q в R_v. Получаем

$$\left\{g_{u,v}\left(h_{u,v}(i,j)\right), g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i, (j-1) \mod \ell_{u,v}(i)\right)\right)\right\} =$$

$$= \left\{g_{u,v}\left(h_{u,v}(i',j')\right), g_{u,v}\left(h_{u,v}\left(i', (j'-1) \mod \ell_{u,v}(i')\right)\right)\right\}$$

Обращаясь к условию $(i,j) \neq (i',j')$, получаем

$$(i,j) = \left(i', (j'-1) \bmod \ell_{u,v}(i')\right)$$

$$(i',j') = \left(i, (j-1) \bmod \ell_{u,v}(i)\right)$$

Отсюда

$$i = i'$$

$$j = (j'-1) \bmod \ell_{u,v}(i)$$

$$j' = (j-1) \bmod \ell_{u,v}(i)$$

$$j \equiv (j'-1) \left(\bmod \ell_{u,v}(i)\right)$$

$$j' \equiv (j-1) \left(\bmod \ell_{u,v}(i)\right)$$

$$2 \equiv 0 \left(\bmod \ell_{u,v}(i)\right)$$

Последнее соотношение противоречит условию $\ell_{u,v}(i) \geq 3$ ($\ell_{u,v}(i)$ – длина некоторого цикла). Это доказывает первую часть **, тогда как вторая часть следует из первой: если $p, q \in R_v$ имеют общих соседей $r, s \in R_u$, то $r, s \in R_u$ имеют общих соседей $p, q \in R_v$.

Итак, мы исключили возможность смежности a с u, откуда a не смежна ни с одной из вершин $\boldsymbol{P}$. Положим теперь, что b смежна с v в $\mathfrak{D}$ при $\deg b = 2$ в $\mathfrak{D}$. В этом случае существуют две отличные от b вершины x и y, одновременно смежные с a и v. Поскольку a несмежна с вершинами из $\boldsymbol{P}$, $x, y \in R_v$. Это даёт противоречие – три смежные с a вершины, принадлежащие одному пучку. Положим тогда, что $\deg b = 3$ в $\mathfrak{D}$. В этом случае a и v имеют отличного от b общего соседа $x \in R_v$. При этом существует отличная от a и v вершина y, являющаяся общим соседом b и x. Можем видеть, что $y \notin \boldsymbol{P}$, откуда $y \in \boldsymbol{Q}$. При этом, имея двух соседей $b, x \in R_v$, $y \notin R_v$. Таким образом, y принадлежит отличному от R_v пучку R_w, для которого выполнено условие $i(u, w) = 2$. При $u = w$ получаем противоречие с **, при $u \neq w$ – с *. Таким образом мы доказали, что для каждого ребра $\{a, b\} \in B \cap E(\mathfrak{D})$ ни одна из вершин a и b не смежна в $\mathfrak{D}$ с какой-либо из вершин $\boldsymbol{P}$.

Может ли быть так, что $V(\mathfrak{D}) \cap \boldsymbol{P} \neq \emptyset$? Предположим, что $u \in V(\mathfrak{D}) \cap \boldsymbol{P}$. Из доказанного выше следует, что рёбра $\mathfrak{D}$, инцидентные какой-либо из двух, либо трёх смежных с u в $\mathfrak{D}$ вершин, не принадлежат B. Но каждое ребро $\mathfrak{D}$ инцидентно одной из указанных вершин, откуда следует, что $\mathfrak{D}$ не содержит рёбер из B. Это противоречит отмеченному выше, следовательно, $V(\mathfrak{D}) \cap \boldsymbol{P} = \emptyset$.

Зададимся теперь более сильным вопросом – может ли быть так, что $E(\mathfrak{D}) \subseteq B$? Предположим, что данное условие выполнено, положив

$$\mathfrak{D} = \left(\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \left\{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_5\}, \{a_3, a_5\}, \{a_4, a_5\}\right\}\right)$$

Пусть также $a_i \in R_{u_i}$ для $i \in [5]$. Заметим, что $u_1, \dots, u_5$ попарно различны. В самом деле, из условия $E(\mathfrak{D}) \subseteq B$, во-первых, следует, что для любых $i, j \in [5]$, таких что $\{a_i, a_j\} \in E(\mathfrak{D})$, $u_i \neq u_j$. Таким образом, остаются возможности $u_1 = u_5$, $u_2 = u_3$, $u_2 = u_4$ и $u_3 = u_4$. В данных случаях соответственно получаем, что принадлежащие одному пучку вершины a_1 и a_5, a_2 и a_3, a_2 и a_4, a_3 и a_4 имеют хотя бы двух общих соседей из других пучков (в качестве данных соседей в первом случае можно выбрать a_3 и a_4, выбирая в остальных – a_1 и a_5). Это даёт противоречие с * и **. Итак, $u_1, \dots, u_5$ попарно различны. Отметим, кроме того, что для любых $i, j \in [5]$, таких что $\{a_i, a_j\} \in E(\mathfrak{D})$, $i(u_i, u_j) = 2$. Следовательно, в $\mathrm{Z}(2)$ имеется подграф с вершинами $u_1, \dots, u_5$, изоморфный $\mathfrak{D}$. Это, в частности, означает наличие трёх общих соседей у двух различных вершин $\mathrm{Z}(2)$, что противоречит тому, что $\mathrm{Z}(2)$ – граф Конвея. Итак, $E(\mathfrak{D}) \nsubseteq B$.

Зададим теперь $\mathfrak{D}$ как выше, положив без потери общности, что $\{a_1, a_2\} \notin B$. Отсюда в силу $V(\mathfrak{D}) \cap \boldsymbol{P} = \emptyset$ и определения G, a_1, a_2 – различные вершины одного пучка, скажем R_{u_1}. В силу 1 регулярности порождаемого R_{u_1} в G графа, смежные с a_1 вершины a_3, a_4, а также смежная с a_2 вершина a_5 принадлежат $\boldsymbol{Q} \setminus R_{u_1}$. Пусть $a_3 \in R_{u_3}$, $a_4 \in R_{u_4}$, $a_5 \in R_{u_5}$, где $u_3, u_4, u_5 \in \boldsymbol{P} \setminus \{u_1\}$. Может ли быть так, что $u_3 = u_5$? В этом случае вершины a_1 и a_2 из пучка R_{u_1} смежны соответственно с вершинами a_3 и a_5 из пучка R_{u_3}, причём a_1 смежна с a_2, а a_3 – с a_5. Без потери общности положим $u_1 \prec u_3$. Имеем $\{a_1, a_2\} \in E(X_{u_1})$, $\{a_3, a_5\} \in E(X_{u_3})$, что противоречит следующему из условия теоремы условию $\{a_1, a_2\} \notin E(X_{u_1}) \vee \{a_3, a_5\} \notin E(X_{u_3})$ (заметим, что для некоторых $x \in \psi_{u_1, u_3}(a_1)$, $y \in \psi_{u_1, u_3}(a_2)$ $x = a_3$ и $y = a_5$). Итак, $u_3 \neq u_5$. Аналогичным образом получим $u_4 \neq u_5$. Наконец, полагая $u_3 = u_4$, получаем две вершины $a_3, a_4 \in R_{u_3}$, имеющие общего соседа $a_1 \in R_{u_1}$ и общего соседа $a_5 \in R_{u_5}$, что даёт противоречие с *. Отсюда заключаем, что u_1, u_3, u_4, u_5 попарно различны. Далее имеем

$i(u_1, u_3) = 2$, так как $\{a_1, a_3\} \in E(\mathfrak{D})$

$i(u_1, u_4) = 2$, так как $\{a_1, a_4\} \in E(\mathfrak{D})$

$i(u_1, u_5) = 2$, так как $\{a_2, a_5\} \in E(\mathfrak{D})$

$i(u_3, u_5) = 2$, так как $\{a_3, a_5\} \in E(\mathfrak{D})$

$i(u_4, u_5) = 2$, так как $\{a_4, a_5\} \in E(\mathfrak{D})$

Следовательно, в $\mathrm{Z}(2)$ смежные вершины u_1 и u_5 имеют двух общих соседей – u_3 и u_4. Это противоречит тому, что $\mathrm{Z}(2)$ – граф Конвея. Тем самым доказано, что G не содержит бриллианта типа 2 ■

Определение 24. Пусть задана удовлетворяющая условиям Теоремы 47 пара $F = \left(\{f_u : u \in \boldsymbol{P}\}, \{(h_{u,v}, g_{u,v}) : u \prec v \in \boldsymbol{P}, i(u,v) = 2\}\right)$. Определим на множестве всех таких пар функцию $\mathscr{b}$, такую что значение $\mathscr{b}_F$ определяется как множество B при доказательстве обозначенной теоремы. В соответствии с данной теоремой образ $\mathscr{b}$ состоит из несмежных решений, каждое из которых будем называть стандартным.

Пример 4. Приведём пример стандартного несмежного решения B, задав пару F из Определения 24. Используя обозначения Теоремы 47, отметим, что для каждого $u = (u_1, u_2) \in \boldsymbol{P}$ образ $f_u(\mathcal{N}_u)$ должен являться 2 факторизацией $\overline{X_u}$. В нашем примере это всегда будет факторизация четырьмя гамильтоновыми циклами. Если $u \notin \{(0,2), (1,0), (2,1)\}$, элементами $f_u(\mathcal{N}_u)$ будут следующие полученные поиском в глубину (программа «23.03.07. Гамильтоновы циклы дополнения 5K2 с ограничениями») 10 циклы:

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,3,0)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,4,0)(u_1,u_2,3,1)(u_1,u_2,4,1)$$

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,3,1)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,4,1)(u_1,u_2,3,0)(u_1,u_2,4,0)$$

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,3,0)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,4,0)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,4,1)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,3,1)$$

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,4,0)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,4,1)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,3,1)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,3,0)$$

При $u \in \{(0,2), (1,0), (2,1)\}$ рассматриваемыми циклами будут

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,3,0)(u_1,u_2,4,0)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,4,1)(u_1,u_2,3,1)$$

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,3,0)(u_1,u_2,4,1)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,3,1)(u_1,u_2,4,0)$$

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,3,1)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,4,0)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,3,0)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,4,1)$$

$$(u_1,u_2,0,0)(u_1,u_2,2,1)(u_1,u_2,3,1)(u_1,u_2,1,1)(u_1,u_2,2,0)(u_1,u_2,4,0)(u_1,u_2,1,0)(u_1,u_2,4,1)(u_1,u_2,0,1)(u_1,u_2,3,0)$$

В обоих случаях обозначим первый, второй, третий и четвёртый циклы в порядке их перечисления соответственно как $z_{u_1,u_2,0}$, $z_{u_1,u_2,1}$, $z_{u_1,u_2,2}$, $z_{u_1,u_2,3}$. Так, например, $z_{1,1,3}$ и $z_{2,1,1}$ будут соответственно обозначать

$$(1,1,0,0)(1,1,2,1)(1,1,1,0)(1,1,4,0)(1,1,2,0)(1,1,4,1)(1,1,0,1)(1,1,3,1)(1,1,1,1)(1,1,3,0)$$
$$(2,1,0,0)(2,1,1,1)(2,1,0,1)(2,1,2,1)(2,1,1,0)(2,1,3,0)(2,1,4,1)(2,1,2,0)(2,1,3,1)(2,1,4,0)$$

Для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 2$, в нашем случае необходимо выполнены условия

$$k_{u,v} = 1$$

$$\ell_{u,v} = (10)$$

$$\mathfrak{Z}_{u,v} = \big(\{1\} \times \{0,\dots,9\}, \big\{\{(1,j),(1,(j+1)\ mod\ 10)\}: j \in \{0,\dots,9\}\big\}\big)$$

Для удобства положим $\mathfrak{Z}_{u,v} = \big(\{0,\dots,9\}, \big\{\{j,(j+1)\ mod\ 10\}: j \in \{0,\dots,9\}\big\}\big)$. Будем считать, что $h_{u,v}$ переводит $i \in \{0,\dots,9\}$ в ту вершину цикла $f_u(v)$, которая в сопоставленной нами ему выше последовательности указана под номером i (при нумерации элементов последовательности с нуля). Непосредственные значения $f_u(v)$ определяются ниже.

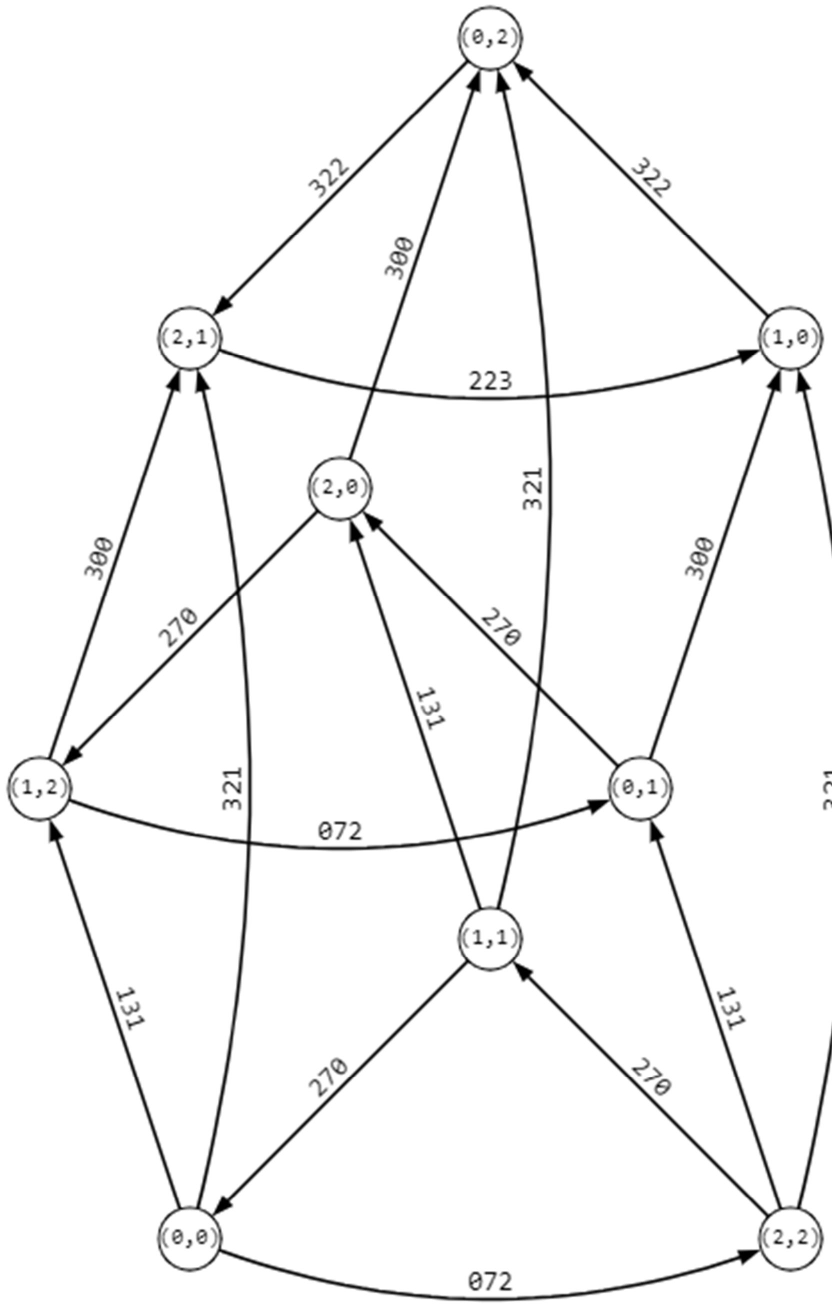
Положим далее

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{u \in \boldsymbol{P}} f_u(\mathcal{N}_u)$$

Для любых циклов $a, b \in \mathcal{Z}$ рассмотрим соответствующие им последовательности s_a и s_b выше, полагая, что элементы данных последовательностей пронумерованы с нуля. Для произвольного $j \in \{0,\dots,9\}$ обозначим как $\mathscr{g}_{a,b,j}$ изоморфизм a и b, такой что для каждого $k \in \{0,\dots,9\}$

$$\mathscr{g}_{a,b,j}\big(s_a(k)\big) = s_b\big((k+j)\ mod\ \ 10\big)$$

Для задания значения $f_u(v)$ и изоморфизма $g_{u,v}$ рассмотрим следующий ориентированный граф на множестве $\boldsymbol{P}$ с надписями на дугах:



Для любых $u, v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u, v) = 2$, в рассматриваемом графе найдётся в точности одна из дуг $e = (u, v)$ или $e = (v, u)$. Пусть x и y – соответственно первая и третья цифра при чтении надписи над e от u к v. Тогда положим

$$f_u(v) = z_{u_1, u_2, x}$$

$$f_v(u) = z_{v_1,v_2,y}$$

Нетрудно убедиться в корректности такого задания семейства функций $\{f_u : u \in \boldsymbol{P}\}$. Кроме того, для каждой вершины $u \in \boldsymbol{P}$ графы $f_u(\mathcal{N}_u)$ факторизуют $\overline{X_u}$. Это следует из построения и того, что при выписывании первых цифр надписей на четырёх инцидентных u дугах или антидугах в направлении от u всегда образуется множество $\{0,1,2,3\}$.

Далее рассмотрим пару $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, такую что $i(u,v) = 2$. Если в указанном графе встречается дуга $e = (u,v)$ со второй цифрой j в надписи, положим

$$g_{u,v} = \mathcal{g}_{f_u(v),f_v(u),j}$$

Если в указанном графе встречается дуга $e = (v,u)$ со второй цифрой j в надписи, положим

$$g_{u,v} = \mathcal{g}_{f_u(v),f_v(u),(1-j)\ mod\ 10}$$

Мы задали пару $F = \left(\{f_u : u \in \boldsymbol{P}\}, \left\{\left(h_{u,v}, g_{u,v}\right) : u \prec v \in \boldsymbol{P}, i(u,v) = 2\right\}\right)$. Чтобы убедиться, что F – пара из Определения 24, остаётся проверить, что для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 2$, при любых $\{a,b\} \in E(X_u)$, $x \in \psi_{u,v}(a)$, $y \in \psi_{u,v}(a)$ выполнено условие $\{x,y\} \notin E(X_v)$. Данная проверка (и поиск графа выше) осуществлена с помощью программы «23.03.06. Проверка наличия 4-цикла при добавлении рёбер несмежного решения к двум копиям 5K2, порождённым несмежными пучками касалетки», а также программы «23.03.16. Проверка и генерация стандартного несмежного решения». Стандартное решение $\mathcal{b}_F$ генерируется программой «23.03.08. Стандартное несмежное решение», а также программой «23.03.16. Проверка и генерация стандартного несмежного решения».

Часть 14. Необходимые условия совместности

Далее будут рассмотрены необходимые условия, выполненные для пары совместных смежного и несмежного решений. Будет показано, что не каждое стандартное несмежное решение обладает совместным с ним смежным решением.

Определение 25. Пусть A – смежное, либо несмежное решение. Будем говорить, что A порождает x треугольников, если для графа $G = (\cup A, A)$ выполнено условие $z_3(G) = x$.

Теорема 48. Пусть A и B – соответственно смежное и несмежное решения, являющиеся совместными и порождающие x и y треугольников. Тогда $y \geq 2x$.

Доказательство. Используя обозначения Определения 6, положим

$$G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$$

$$X = \{H \in \mathcal{Z}_3(G) : E(H) \subseteq A\}$$

$$Y = \{H \in \mathcal{Z}_3(G) : E(H) \subseteq B\}$$

$$Z = \{H \in \mathcal{Z}_3(G) : E(H) \cap A \neq \emptyset \wedge E(H) \cap B \neq \emptyset\}$$

Заметим, что $|X| = x$, $|Y| = y$. Положим также $|Z| = z$. В соответствии с Определением 22 $\mathcal{E}$, A и B попарно не пересекаются, откуда попарно не пересекаются X, Y и Z. Следовательно, $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| = x + y + z$. Далее в соответствии с Теоремой 45 G – почти граф Конвея и, в частности, локально линейный граф. Отсюда различные треугольники G не имеют общего ребра. Положим

$$D = \bigcup_{H \in X \cup Y \cup Z} E(H)$$

Из сказанного получаем $|D| = 3(x + y + z)$. Докажем, что $D = A \cup B$. Пусть $e = \{a, b\} \in A \cup B$. Поскольку G локально линеен, существует единственный треугольник $H \in \mathcal{Z}_3(G)$, такой что $e \in E(H)$. Пусть $\varepsilon \in E(H) \backslash \{e\}$. Заметим, что H – единственный треугольник G с ребром ε. Пусть $\varepsilon \notin A \cup B$, тогда $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Непосредственно убеждаясь в локальной линейности касалетки $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, заключаем, что существует единственный треугольник $\mathcal{H} \in \mathcal{Z}_3(\mathcal{K})$, такой что $\varepsilon \in E(\mathcal{H})$. Разумеется, $\mathcal{H} \in \mathcal{Z}_3(G)$, откуда $\mathcal{H} = H$ (поскольку H – единственный треугольник G с ребром ε). Далее $e \in E(H) = E(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{E}$, откуда $e \in \mathcal{E} \cap (A \cup B)$, что противоречит тому, что $\mathcal{E}$, A и B попарно не пересекаются. Отсюда заключаем, что для любого ребра $e \in A \cup B$ существует в точности один треугольник $H \in \mathcal{Z}_3(G)$, такой что $e \in E(H)$, причём $E(H) \subseteq A \cup B$. Из полученного результата следует

$$\bigcup_{H \in Z} E(H) \subseteq A \cup B$$

Отсюда $D \subseteq A \cup B$. С другой стороны, рассматривая произвольное ребро $e \in A \cup B$ и единственный треугольник $H \in \mathcal{Z}_3(G)$, такой что $e \in E(H)$, заключаем, что $H \in X \cup Y \cup Z$. Отсюда $A \cup B \subseteq D$ и $A \cup B = D$. Далее с учётом Определения 22

$$3(x + y + z) = |D| = |A \cup B| = |A| + |B| = 180 + 360 = 540$$

$$x + y + z = 180$$

Пусть

$$B' = B \backslash \bigcup_{H \in Y} E(H)$$

Имеем

$$\bigcup_{H \in Y} E(H) \subseteq B$$

$$|B'| = |B| - \left| \bigcup_{H \in Y} E(H) \right| = 360 - 3y$$

Из доказанного следует

$$B' \subseteq B \cap \bigcup_{H \in Z} E(H)$$

Замечая, что среди рёбер каждого треугольника в Z не более двух рёбер из B, получаем

$$|B'| \leq \left| B \cap \bigcup_{H \in Z} E(H) \right| = \left| \bigcup_{H \in Z} \big(B \cap E(H)\big) \right| \leq \sum_{H \in Z} |B \cap E(H)| \leq 2|Z|$$

Отсюда $360 - 3y \leq 2z$. Обращаясь к условию $x + y + z = 180$, получаем

$$2z = 360 - 2x - 2y$$

$$360 - 3y \leq 360 - 2x - 2y$$

$$2x \leq y$$

■

Теорема 49. Пусть A и B – соответственно смежное и несмежное решения, являющиеся совместными. Положим

$$G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$$

$$X = \{H \in \mathcal{Z}_3(G) : E(H) \subseteq A\}$$

$$Y = \{H \in \mathcal{Z}_3(G) : E(H) \subseteq B\}$$

$$x = |X|$$

$$y = |Y|$$

Пусть n_1 и n_2 – число треугольников G, имеющих соответственно в точности одно и два ребра из A. Тогда

$$n_1 = 180 + x - 2y$$

$$n_2 = y - 2x$$

Доказательство. Пусть $Z = \{H \in \mathcal{Z}_3(G) : E(H) \cap A \neq \emptyset \wedge E(H) \cap B \neq \emptyset\}$, $z = |Z|$. Воспользовавшись результатами, полученными при доказательстве Теоремы 48, видим, что

$$x + y + z = 180$$

$$n_1 + n_2 = z$$

$$2n_1 + n_2 = 360 - 3y$$

Пусть, кроме того

$$A' = A \backslash \bigcup_{H \in X} E(H)$$

Имеем

$$\bigcup_{H \in X} E(H) \subseteq A$$

$$|A'| = |A| - \left| \bigcup_{H \in X} E(H) \right| = 180 - 3x$$

Отсюда $n_1 + 2n_2 = 180 - 3x$, и далее

$$z = 180 - x - y$$

$$n_1 + n_2 = 180 - x - y$$

$$n_1 - n_2 = 180 + 3x - 3y$$

$$2n_1 = 360 + 2x - 4y$$

$$n_1 = 180 + x - 2y$$

$$n_2 = y - 2x$$

■

Теорема 50. Пусть B – несмежное решение из Примера 4. Положим, что A – совместное с B смежное решение, $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$, а n_1 и n_2 – число треугольников G, имеющих соответственно в точности одно и два ребра из A. Тогда $n_1 = 78$, $n_2 = 51$.

Доказательство. Пусть x и y определены как в Теореме 49. Воспользовавшись программой «23.03.23. Анализ Примера 4 (часть 1)», получаем $y = 51$ и убеждаемся, что добавление к графу $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ любого треугольника, рёбра которого соединяют смежные пучки, приводит к образованию бриллиантов. Отсюда $x = 0$. Далее применяем Теорему 49 ■

Теорема 51. Несмежное решение из Примера 4 не имеет совместного с ним смежного решения.

Доказательство. Пусть B – несмежное решение из Примера 4, A – совместное с ним смежное решение, $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$, и Z' – множество всех треугольников G, имеющих в точности одно ребро из A. В соответствии с Теоремой 50 имеем $|Z'| = 78$. Пусть множество B' определено как при доказательстве Теоремы 48. Тогда в каждом треугольнике множества Z' отличные от единственного ребра из A рёбра являются смежными рёбрами из B', различные вершины которых принадлежат смежным пучкам. При этом различные треугольники Z' определяют различные пары рёбер B'. Отсюда имеется по крайней мере 78 2 элементных подмножеств B', состоящих из смежных рёбер, различные вершины которых принадлежат смежным пучкам и при соединении в графе $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ не дают бриллиантов. Непосредственная же проверка программой «23.03.24. Анализ Примера 4 (часть 2)» показывает, что мощность соответствующего семейства двухэлементных подмножеств равна 18. Это даёт противоречие и завершает доказательство ■

Часть 15. Предчастичный граф

Мы переходим к поиску несмежного решения, совместного с решением суперкасалетки. С этой целью будут определены частичное совместное решение и предчастичный граф.

Замечание 19. Пусть A – решение суперкасалетки. Видим, что граф $(\cup A, A)$ образован десятью попарно не пересекающимися по вершинам копиями $\mathrm{Z}(2)$, откуда каждое ребро данного графа является ребром в точности одного его треугольника. Пусть B – совместное с A несмежное решение, и $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$. Рассуждая как при доказательстве Теоремы 48, заключаем, что каждый элемент B является ребром в точности одного треугольника G, и каждое ребро данного треугольника принадлежит B. Отсюда B порождает $\frac{360}{3} = 120$ треугольников, причём вершины каждого из этих треугольников принадлежат попарно несмежным пучкам, что позволяет сопоставить треугольнику 3 элементное множество, образованное попарно несмежными пучками. Имеется 6 3 элементных множеств, образованных попарно несмежными пучками, причём в соответствии с Определением 22 каждое из них будет сопоставлено не более 20 рассматриваемым треугольникам и, следовательно, в точности $20 = \frac{120}{6}$ из них. Отсюда для любых попарно несмежных пучков R_u, R_v, R_w рёбра порождённого в $(\cup B, B)$ графа $\langle R_u \cup R_v \cup R_w \rangle$ разбиваются на 20 треугольников.

Определение 26. Пусть $u, v, w \in \boldsymbol{P}$, $i(u,v) = i(u,w) = i(v,w) = 2$, и A – решение суперкасалетки. Частичным совместным решением (u, v, w) будем называть множество B, для которого выполнены следующие условия:

1. $B \subseteq \{\{x, y\}: x \in R_u \wedge y \in R_v \vee x \in R_u \wedge y \in R_w \vee x \in R_v \wedge y \in R_w\}$.

2. $\forall(a \in \{u, v, w\})\forall(b \in \{u, v, w\} \backslash a)\forall(x \in R_a): \left|\{\{x, y\} \in B: y \in R_b\}\right| = 2$.

3. Каждый элемент $e \in B$ является ребром в точности одного треугольника в $(\cup B, B)$.

4. Граф $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$ не содержит бриллиантов.

При этом графом B будем называть $(\cup B, B) = (R_u \cup R_v \cup R_w, B)$.

Замечание 20. В соответствии с предыдущим замечанием, Определением 22 и выводами при доказательстве Теоремы 45 для любых $u, v, w \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = i(u,w) = i(v,w) = 2$, каждое совместное с решением суперкасалетки несмежное решение B порождает частичное совместное решение (u, v, w), представленное рёбрами порождённого в $(\cup B, B)$ графа $\langle R_u \cup R_v \cup R_w \rangle$. Укажем ряд необходимых условий, выполненных для графов частичных совместных решений.

Долей и номером вершины $(x, y, z, t) \in R_{(x,y)}$ будем соответственно называть z и t. Пусть B – частичное решение (u, v, w), и $G = (V, E) = (\cup B, B)$. Сопоставим G первичную раскраску $c_1: V \to \{u, v, w\}$, такую что $v \in R_{c_1(v)}$. Сопоставим G вторичную раскраску $c_2: V \to \{0,1,2,3,4\}$, такую что $c_2(v)$ – доля вершины v. Легко убедиться в правильности обеих раскрасок, т. е. в том, что смежные вершины при них имеют различные цвета. В самом деле, правильность c_1 следует непосредственно из Определения 26. Для доказательства правильности c_2 предположим противное, т. е. то, что в G есть смежные вершины x и y с одинаковыми долями m. Без потери общности положим $x \in R_u$, $y = R_v$.

Пусть $x = (u_1, u_2, m, n_1)$, $y = (v_1, v_2, m, n_2)$. Рассмотрим граф $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B)$, где A – решение суперкасалетки. Положим

$$(u_1, v_2, m, n_1) = z$$

$$(v_1, u_2, m, n_1) = r$$

$$(v_1, v_2, m, (n_2 + 1) \ mod \ 2) = s$$

Тогда в случаях $n_1 = n_2$ и $n_1 \neq n_2$ граф H содержит соответственно следующие бриллианты типа 1 и типа 2, дающие противоречие с Определением 26:

$$\big(\{x, y, z, r\}, \big\{\{x, y\}, \{x, z\}, \{z, y\}, \{x, r\}, \{r, y\}\big\}\big)$$

$$\big(\{x, y, z, r, s\}, \big\{\{x, y\}, \{x, z\}, \{x, r\}, \{y, s\}, \{z, s\}, \{r, s\}\big\}\big)$$

Обратимся далее к первичной раскраске. Из Определения 26 следует, что G содержит по 10 вершин каждого из цветов u, v, w. Кроме того, G 4 регулярный, и для каждой вершины $v \in V$ и каждого цвета $c \in \{u, v, w\} \backslash c_1(v)$, в N_v в точности две вершины цвета c. Два последних предложения выводимы из следующего из утверждения, обусловленного Определением 26 – для любых различных цветов $c, c' \in \{u, v, w\}$ порождённый в G подграф $\langle R_c \cup R_{c'} \rangle$ 2 регулярный. Заметим наконец, что различные вершины x и y одного цвета c не могут иметь двух общих соседей z и r, так как в рассмотренном выше графе H это даст бриллиант типа 2

$$\big(\{x, y, c, z, r\}, \big\{\{x, c\}, \{x, z\}, \{x, r\}, \{c, y\}, \{z, y\}, \{r, y\}\big\}\big)$$

Отсюда следует более сильное условие о том, что различные вершины $x, y \in V$ имеют не более одного общего соседа. В самом деле, данное условие выполнено, если цвета x и y одинаковы. В противном случае x и y – вершины разных пучков $R_c \neq R_{c'}$, а любой общий сосед x и y принадлежит третьему пучку $R_{c''}$, $c'' \in \{u, v, w\} \backslash \{c, c''\}$. Таким образом, общие соседи x и y имеют одинаковый цвет. Следовательно, наличие двух общих соседей z и r у x и y будет означать наличие двух вершин одного цвета (z и r), имеющих двух общих соседей (x и y), что противоречит предыдущему условию.

Обращаясь далее, ко вторичной раскраске заметим, что для любых $c \in \{u, v, w\}$, $c' \in \{0,1,2,3,4\}$ среди вершин $c_1^{-1}(c) = R_c$ имеется в точности 2 вершины вторичного цвета c'. Кроме того, нетрудно видеть, что различные вершины $x, y \in V$, имеющие одинаковый первичный и вторичный цвет, т. е. удовлетворяющие условиям $c_1(x) = c_1(y) = c$, $c_2(x) = c_2(y)$, не могут иметь общего соседа z. В самом деле, указанные условия означают, что x и y – смежные вершины пучка R_c. Отсюда в рассмотренном выше графе H получаем недопустимый бриллиант типа 1

$$\big(\{x, y, z, c\}, \big\{\{x, y\}, \{z, x\}, \{z, y\}, \{c, x\}, \{c, y\}\big\}\big)$$

Определение 27. Будем называть предчастичным 30 вершинный локально линейный граф $G = (V, E)$, для которого существуют правильные раскраски $f: V \to C$, $g: V \to D$, такие что выполнены условия

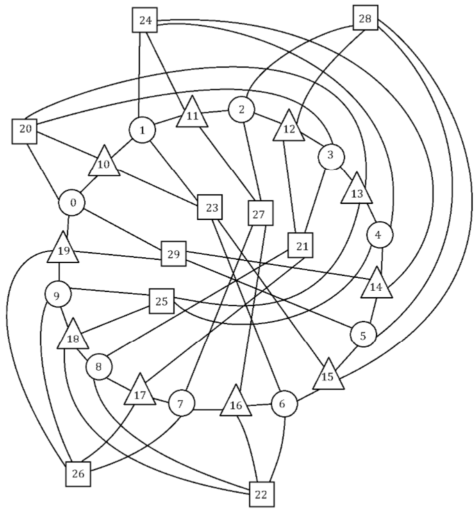
1. $|C| = 3$
2. $|D| = 5$.
3. Для любых различных цветов $c, c' \in C$ подграф $\langle f^{-1}(c) \cup f^{-1}(c') \rangle$ 2 регулярный.
4. $\forall (x, y \in V) \colon x \neq y \wedge f(x) = f(y) \to |N_x \cap N_y| \leq 1$.
5. $\forall (c \in C) \forall (d \in D) \colon |f^{-1}(c) \cap g^{-1}(d)| = 2$.
6. $\forall (x, y \in V) \colon x \neq y \wedge f(x) = f(y) \wedge g(x) = g(y) \to |N_x \cap N_y| = 0$.

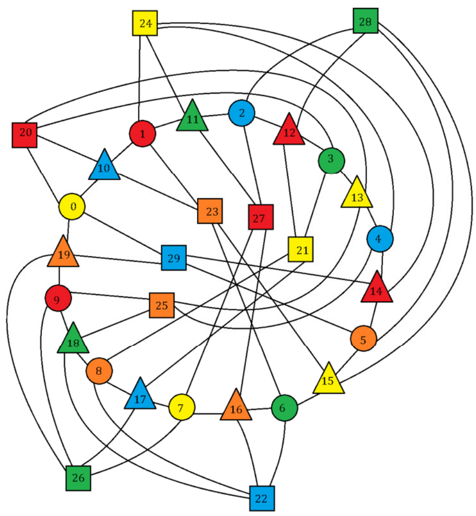
Раскраски f и g будем называть соответственно первичной и вторичной.

Теорема 52. Пусть $u, v, w \in \boldsymbol{P}$, $i(u, v) = i(u, w) = i(v, w) = 2$. Граф частичного решения (u, v, w) является предчастичным.

Доказательство. Следует из Замечания 20 ■

Пример 5. Форма вершин следующего 30 вершинного графа G соответствует элементам множества C из Определения 27. Таким образом, $|C| = 3$, и, как можно непосредственно убедиться, соответствующая раскраска f правильная. Также непосредственно убеждаемся, что в G каждое ребро является ребром некоторого треугольника. Кроме того, компьютерного проверка (программа «23.03.31. Анализ предчастичного графа») показывает, что G не содержит 4 циклов. Отсюда каждое ребро является ребром в точности одного треугольника, т. е. G локально линейный. Отсутствие 4 циклов также влечёт выполнение условия 4 Определения 27. Непосредственно убеждаемся, что вершины любых двух из трёх возможных форм порождают 20 цикл, откуда выполнено и условие 3. Наконец, далее указана найденная с помощью программы «23.03.31. Анализ предчастичного графа» правильная раскраска g, удовлетворяющая условиям 2, 5, 6. Таким обоазом, G – предчастичный граф.





Часть 16. Частичное совместное решение

Далее будут приведены примеры частичных совместных решений и выделен представляющийся весьма распространённым тип последних.

Замечание 21. Наряду с первичной и вторичной раскрасками вершин графа $G = (V, E)$ из Замечания 20 рассмотрим третичную раскраску $c_3: V \to \{0,1\}$, сопоставляющую вершине $x \in V$ её номер: $c_3(x) = x_4$. Видим, что для любых $c \in \{u, v, w\}$, $c' \in \{0,1,2,3,4\}$ имеется в точности одна вершина $x \in V$, такая что $c_1(x) = c$, $c_2(x) = c'$, $c_3(x) = 0$, и в точности одна вершина $x \in V$, такая что $c_1(x) = c$, $c_2(x) = c'$, $c_3(x) = 1$. Также заметим, что любые вершины $x, y \in V$, такие что $c_1(x) \neq c_1(y)$, $c_2(x) = c_2(y) = m$, $c_3(x) = c_3(y) = n$, не могут иметь общего соседа z. В самом деле, без потери общности положим $c_1(x) = u$, $c_1(y) = v$, $i(u, v) = 2$. Заметим, что в суперкаксалетке x и y имеют двух общих соседей $p = (u_1, v_2, m, n)$ и $q = (v_1, u_2, m, n)$. Отсюда вершина z была бы третьим общим соседом x и y в графе H из Замечания 20, что привело бы к бриллианту типа 2, образованного x, y, z, p, q.

Определение 28. Пусть $G = (V, E)$ – предчастичный граф с первичной и вторичными раскрасками f и g. Типом ребра $e = \{x, y\} \in E$ будем называть множество $t(e) = \{(f(x), g(x)), (f(y), g(y))\}$. Вариативность G (относительно f и g) определим как $\mathcal{v}_G = |\{t(e) : e \in E\}|$.

Замечание 22. Заметим, что правильность первичной и вторичной раскрасок влечёт $|t(e)| = 2$ в Определении 28. Далее в соответствии с Определением 27 правильность первичной раскраски f и 2 регулярность подграфа $\langle f^{-1}(c) \cup f^{-1}(c') \rangle$, порождённого вершинами произвольных двух из трёх первичных цветов, влекут 4 регулярность G. Отсюда G содержит $\frac{4 \cdot 30}{2} = 60$ рёбер, и $\mathcal{v}_G \leq 60$.

Определение 29. Пусть $G = (V, E)$ – предчастичный граф с первичной и вторичной раскрасками $f: V \to C$ и $g: V \to D$, а также третичной раскраской $h: V \to I$, удовлетворяющей условиям:

1. $|I| = 2$
2. $\forall (c \in C) \forall (c' \in D) \forall (c'' \in I): |f^{-1}(c) \cap g^{-1}(c') \cap h^{-1}(c'')| = 1$
3. $\forall (x, y \in V): x \neq y \wedge g(x) = g(y) \wedge h(x) = h(y) \to |N_x \cap N_y| = 0$

Будем называть G стандартным, если $\mathcal{v}_G = 60$.

Покажем, что граф частичного решения, порождённого стандартным несмежным решением, является стандартным предчастичным графом.

Теорема 53. Пусть $u, v, w \in \boldsymbol{P}$, $i(u,v) = i(u,w) = i(v,w) = 2$, B – совместное с решением суперкасалетки стандартное несмежное решение. Тогда граф является стандартным предчастичным графом:

$$G = (R_u \cup R_v \cup R_w, \mathcal{P}_2(R_u \cup R_v \cup R_w) \cap B)$$

Доказательство. В качестве функций f, g, h из Определений 27 и 29 выберем функции $f: V \to \{u, v, w\}$, $g: V \to \{0,1,2,3,4\}$, $h: V \to \{0,1\}$, такие что для произвольной вершины $x \in V$ $\;f(x) = (x_1, x_2)$, $g(x) = x_3$, $h(x) = x_4$. Воспользовавшись Замечанием 20 и Теоремой 52, убеждаемся, что G – предчастичный граф относительно f и g. Далее Замечание 21 позволяет установить условия 1-3 Определения 29. Таким образом, остаётся убедиться в выполнении условия $\mathcal{v}_G = 60$. Предположим противное: $\mathcal{v}_G \neq 60$. В соответствии с Замечанием 22 G содержит 60 рёбер, в $E(G)$ имеется два различных ребра одинакового типа. Обозначим данные рёбра как $e = \{x, y\}$, $e' = \{x', y'\}$, тогда выполнено условие

$$\{(f(x), g(x)), (f(y), g(y))\} = \{(f(x'), g(x')), (f(y'), g(y'))\}$$

Пусть без потери общности выполнены условия

$$(f(x), g(x)) = (f(x'), g(x'))$$
$$(f(y), g(y)) = (f(y'), g(y'))$$

Отсюда $f(x) = f(x')$, $g(x) = g(x')$, $f(y) = f(y')$, $g(y) = g(y')$. Воспользовавшись тем, что f и g – правильные раскраски, без потери общности положим

$$f(x) = f(x') = u$$
$$f(y) = f(y') = v$$
$$g(x) = g(x') = 0$$
$$g(y) = g(y') = 1$$

Отсюда

$$x = (u_1, u_2, 0, h(x)), x' = (u_1, u_2, 0, h(x'))$$

$$y = (v_1, v_2, 1, h(y)), y' = (v_1, v_2, 1, h(y'))$$

Поскольку $e \neq e'$, хотя бы одно из двух условий $h(x) = h(x')$, $h(y) = h(y')$ не выполнено. С другой стороны, ситуации $h(x) = h(x')$, $h(y) \neq h(y')$ и $h(x) \neq h(x')$, $h(y) = h(y')$ приводят соответственно к следующим бриллиантам типа 1 в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$, что противоречит тому, что B – несмежное решение:

$$(\{x, y, y', v\}, \{e, e', \{y, y'\}, \{y, v\}, \{y', v\}\})$$

$$(\{y, x, x', u\}, \{e, e', \{x, x'\}, \{x, u\}, \{x', u\}\})$$

Отсюда $h(x) \neq h(x')$, $h(y) \neq h(y')$. Пусть

$$X_u = (R_u, \{\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(R_u): a_3 = b_3\})$$

$$X_v = (R_v, \{\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(R_v): a_3 = b_3\})$$

Тогда $\{x, x'\} \in E(X_u)$, $\{y, y'\} \in E(X_v)$. Пусть без потери общности $u \prec v$. Обращаясь к Определению 24 (стандартного несмежного решения), определим функцию $\psi_{u,v}: R_u \to \mathcal{P}_2(R_v)$ как в Теореме 47. Имеем $y \in \psi_{u,v}(x)$, $y' \in \psi_{u,v}(x')$, но при этом для любого ребра $\{a, a'\} \in E(X_u)$ и любых $b \in \psi_{u,v}(a)$, $b' \in \psi_{u,v}(a)$ должно выполняться условие $\{b, b'\} \notin E(X_v)$. Полученное противоречие приводит к условию $\mathcal{v}_G = 60$ и завершает доказательство ■

Определение 30. Пусть $u, v, w \in \boldsymbol{P}$, $i(u, v) = i(u, w) = i(v, w) = 2$, и B – частичное совместное решение (u, v, w). Будем называть B стандартным, если существует стандартный предчастичный граф (V, E) с первичной, вторичной и третичной раскрасками $f: V \to \{u, v, w\}$, $g: V \to \{0,1,2,3,4\}$ и $h: V \to \{0,1\}$, такими что

$$B = \{\{(f(a)_1, f(a)_2, g(a), h(a)), (f(b)_1, f(b)_2, g(b), h(b))\}: \{a, b\} \in E\}$$

Определение 31. Пусть $u, v, w \in \boldsymbol{P}$, $i(u, v) = i(u, w) = i(v, w) = 2$, и B – частичное совместное решение (u, v, w). Вариативностью B будем называть

$$\mathcal{v}_B = \left|\left\{\{(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\} : \{x, y\} \in B\right\}\right|$$

Замечание 23. Рассматривая $(\cup B, B)$, нетрудно убедиться, что частичное совместное решение B является стандартным тогда и только тогда, когда $\mathcal{v}_B = 60$.

Пример 6. Ниже указаны элементы стандартного частичного совместного решения $\big((0,0), (1,1), (2,2)\big)$, обнаруженного с помощью программы «23.04.17. Поиск стандартного частичного совместного решения методом целочисленного программирования (pulp)»:

$$\{(0,0,0,0), (1,1,4,1)\}$$
$$\{(0,0,2,0), (2,2,4,1)\}$$
$$\{(0,0,3,0), (2,2,4,1)\}$$
$$\{(0,0,4,0), (1,1,0,1)\}$$
$$\{(0,0,3,0), (2,2,2,0)\}$$
$$\{(1,1,0,0), (2,2,2,0)\}$$
$$\{(0,0,0,1), (1,1,1,0)\}$$
$$\{(0,0,0,0), (2,2,1,1)\}$$
$$\{(0,0,4,1), (2,2,3,0)\}$$
$$\{(0,0,0,1), (2,2,4,0)\}$$
$$\{(1,1,1,1), (2,2,0,0)\}$$
$$\{(0,0,4,1), (2,2,0,0)\}$$
$$\{(1,1,2,1), (2,2,0,0)\}$$
$$\{(1,1,3,0), (2,2,4,0)\}$$
$$\{(0,0,1,0), (1,1,0,0)\}$$
$$\{(0,0,2,1), (1,1,0,0)\}$$
$$\{(0,0,1,1), (2,2,3,1)\}$$
$$\{(0,0,4,0), (2,2,2,1)\}$$
$$\{(1,1,2,1), (2,2,3,1)\}$$
$$\{(0,0,1,1), (1,1,4,0)\}$$
$$\{(0,0,3,1), (1,1,1,1)\}$$
$$\{(0,0,1,0), (1,1,3,0)\}$$
$$\{(0,0,0,1), (2,2,2,1)\}$$
$$\{(0,0,2,1), (2,2,3,0)\}$$
$$\{(1,1,3,0), (2,2,1,1)\}$$
$$\{(0,0,2,0), (1,1,1,1)\}$$
$$\{(0,0,2,1), (1,1,4,1)\}$$
$$\{(0,0,3,0), (1,1,0,1)\}$$

$$\{(0,0,0,1),(1,1,2,0)\}$$
$$\{(1,1,3,1),(2,2,0,1)\}$$
$$\{(1,1,1,1),(2,2,4,1)\}$$
$$\{(1,1,0,1),(2,2,4,1)\}$$
$$\{(1,1,1,0),(2,2,2,1)\}$$
$$\{(0,0,1,0),(2,2,4,0)\}$$
$$\{(0,0,1,1),(2,2,0,1)\}$$
$$\{(0,0,3,1),(2,2,0,0)\}$$
$$\{(0,0,2,1),(2,2,1,0)\}$$
$$\{(1,1,4,0),(2,2,0,1)\}$$
$$\{(1,1,2,0),(2,2,4,0)\}$$
$$\{(1,1,0,1),(2,2,1,1)\}$$
$$\{(0,0,2,0),(1,1,3,1)\}$$
$$\{(0,0,4,1),(1,1,1,0)\}$$
$$\{(0,0,0,0),(1,1,3,0)\}$$
$$\{(0,0,3,0),(1,1,4,0)\}$$
$$\{(1,1,1,0),(2,2,3,0)\}$$
$$\{(0,0,4,0),(2,2,1,1)\}$$
$$\{(0,0,1,1),(1,1,2,1)\}$$
$$\{(0,0,3,1),(1,1,2,0)\}$$
$$\{(0,0,4,1),(1,1,2,1)\}$$
$$\{(1,1,4,1),(2,2,1,0)\}$$
$$\{(1,1,2,0),(2,2,1,0)\}$$
$$\{(0,0,2,0),(2,2,0,1)\}$$
$$\{(1,1,4,0),(2,2,2,0)\}$$
$$\{(1,1,3,1),(2,2,2,1)\}$$
$$\{(0,0,3,1),(2,2,1,0)\}$$
$$\{(0,0,4,0),(1,1,3,1)\}$$
$$\{(1,1,4,1),(2,2,3,1)\}$$
$$\{(0,0,1,0),(2,2,2,0)\}$$
$$\{(0,0,0,0),(2,2,3,1)\}$$
$$\{(1,1,0,0),(2,2,3,0)\}$$

Приведём также пример нестандартного частичного совместного решения с вариативностью 51 (получено с помощью программы «23.04.22. Поиск сочетающихся частичных совместных решений»):

$$\{(0,0,0,0),(1,1,2,0)\}$$
$$\{(0,0,0,0),(1,1,4,1)\}$$
$$\{(0,0,0,1),(1,1,1,1)\}$$
$$\{(0,0,0,1),(1,1,2,1)\}$$
$$\{(0,0,1,0),(1,1,2,0)\}$$

$\{(0,0,1,0),(1,1,3,1)\}$
$\{(0,0,1,1),(1,1,3,0)\}$
$\{(0,0,1,1),(1,1,4,0)\}$
$\{(0,0,2,0),(1,1,0,0)\}$
$\{(0,0,2,0),(1,1,4,0)\}$
$\{(0,0,2,1),(1,1,0,1)\}$
$\{(0,0,2,1),(1,1,3,1)\}$
$\{(0,0,3,0),(1,1,0,1)\}$
$\{(0,0,3,0),(1,1,1,1)\}$
$\{(0,0,3,1),(1,1,1,0)\}$
$\{(0,0,3,1),(1,1,4,1)\}$
$\{(0,0,4,0),(1,1,2,1)\}$
$\{(0,0,4,0),(1,1,3,0)\}$
$\{(0,0,4,1),(1,1,0,0)\}$
$\{(0,0,4,1),(1,1,1,0)\}$
$\{(0,0,0,0),(2,2,2,1)\}$
$\{(0,0,0,0),(2,2,3,1)\}$
$\{(0,0,0,1),(2,2,3,0)\}$
$\{(0,0,0,1),(2,2,4,0)\}$
$\{(0,0,1,0),(2,2,0,0)\}$
$\{(0,0,1,0),(2,2,4,1)\}$
$\{(0,0,1,1),(2,2,2,0)\}$
$\{(0,0,1,1),(2,2,3,1)\}$
$\{(0,0,2,0),(2,2,0,1)\}$
$\{(0,0,2,0),(2,2,1,0)\}$
$\{(0,0,2,1),(2,2,1,1)\}$
$\{(0,0,2,1),(2,2,4,0)\}$
$\{(0,0,3,0),(2,2,2,1)\}$
$\{(0,0,3,0),(2,2,4,1)\}$
$\{(0,0,3,1),(2,2,0,1)\}$
$\{(0,0,3,1),(2,2,1,1)\}$
$\{(0,0,4,0),(2,2,0,0)\}$
$\{(0,0,4,0),(2,2,1,0)\}$
$\{(0,0,4,1),(2,2,2,0)\}$
$\{(0,0,4,1),(2,2,3,0)\}$
$\{(1,1,0,0),(2,2,1,0)\}$
$\{(1,1,0,0),(2,2,3,0)\}$
$\{(1,1,0,1),(2,2,1,1)\}$
$\{(1,1,0,1),(2,2,4,1)\}$
$\{(1,1,1,0),(2,2,0,1)\}$
$\{(1,1,1,0),(2,2,2,0)\}$
$\{(1,1,1,1),(2,2,2,1)\}$
$\{(1,1,1,1),(2,2,4,0)\}$
$\{(1,1,2,0),(2,2,3,1)\}$
$\{(1,1,2,0),(2,2,4,1)\}$

$$\{(1,1,2,1),(2,2,0,0)\}$$
$$\{(1,1,2,1),(2,2,3,0)\}$$
$$\{(1,1,3,0),(2,2,1,0)\}$$
$$\{(1,1,3,0),(2,2,2,0)\}$$
$$\{(1,1,3,1),(2,2,0,0)\}$$
$$\{(1,1,3,1),(2,2,4,0)\}$$
$$\{(1,1,4,0),(2,2,0,1)\}$$
$$\{(1,1,4,0),(2,2,3,1)\}$$
$$\{(1,1,4,1),(2,2,1,1)\}$$
$$\{(1,1,4,1),(2,2,2,1)\}$$

Гипотеза 2. Пусть $u,v,w \in \boldsymbol{P}$, $i(u,v)=i(u,w)=i(v,w)=2$, и (V,E) – стандартный предчастичный граф с первичной, вторичной и третичной раскрасками $f\colon V \to \{u,v,w\}$, $g\colon V \to \{0,1,2,3,4\}$ и $h\colon V \to \{0,1\}$. Тогда следующее множество является частичным совместным решением (u,v,w):

$$\left\{\left\{\left(f(a)_1, f(a)_2, g(a), h(a)\right), \left(f(b)_1, f(b)_2, g(b), h(b)\right)\right\}\colon \{a,b\} \in E\right\}$$

Часть 17. Несовместность решения суперкасалетки

Далее мы покажем, что решение суперкасалетки не имеет совместного с ним несмежного решения.

Определение 32. Пусть n – положительное целое, и для каждого $k \in [n]$ $u_k, v_k, w_k \in \boldsymbol{P}$, $i(u_k,v_k)=i(u_k,w_k)=i(v_k,w_k)=2$, B_k – частичное совместное решение (u_k,v_k,w_k), и A – решение суперкасалетки. Будем говорить, что $B_1,\dots,B_n$ сочетаются, если граф $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n)$ не содержит бриллиантов.

Замечание 24. Заметим, что шесть порождаемых произвольным совместным с решением суперкасалетки несмежным решением частичных совместных решений (см. Замечание 20) сочетаются.

Определение 33. Пусть $u,v,w,u',v',w' \in \boldsymbol{P}$, $i(u,v)=i(u,w)=i(v,w)=2$, $i(u',v')=i(u',w')=i(v',w')=2$, B – частичное совместное решение (u,v,w), B' – частичное совместное решение (u',v',w'). Будем говорить, что B и B' не пересекаются и пересекаются, если $\{u, v, w\}$ и $\{u', v', w'\}$ соответственно не пересекаются и пересекаются в точности по одному элементу.

Теорема 54. Пусть $u, v, w, u', v', w' \in \boldsymbol{P}$, $i(u,v) = i(u,w) = i(v,w) = 2$, $i(u',v') = i(u',w') = i(v',w') = 2$, B – частичное совместное решение (u, v, w), B' – частичное совместное решение (u', v', w'). Истинны следующие утверждения:

1. Если B и B' не пересекаются, то B и B' сочетаются.
2. Если B и B' пересекаются, то B и B' не сочетаются.
3. Суперкасалетка не имеет совместного с ней несмежного решения.

Доказательство. Начнём с первого утверждения, положив, что A – решение суперкасалетки. Предположим, что B и B' не пересекаются и не сочетаются, т. е. граф $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A \cup B \cup B')$ содержит бриллиант D (типа 1 или типа 2). Поскольку B и B' – частичные совместные решения, $E(D)$ не является подмножеством ни $\mathcal{E} \cup A \cup B$, ни $\mathcal{E} \cup A \cup B'$. Отсюда существуют такие $e, e' \in E(D)$, что $e \in B$, $e' \in B'$. Далее, поскольку B и B' не пересекаются, $e \cap e' = \emptyset$. Положим, что D – бриллиант типа 1. С учётом сказанного, без потери общности положим

$$D = \big(\{x, y, z, t\}, \big\{\{x, y\}, \{x, z\}, \{x, t\}, \{y, z\}, \{z, t\}\big\}\big)$$

$$e = \{x, y\}$$

$$e' = \{z, t\}$$

Убеждаемся, что $\{x, z\}, \{y, z\} \in A$, откуда $x_3 = z_3 = y_3$. Рассуждая как в Замечании 20, видим, что в силу $\{x, y\} \in B$ условие $x_3 = y_3$ выполняться не может. Это противоречие доказывает, что D не является бриллиантом типа 1. Пусть тогда D – бриллиант типа 2. Положим $D = \big(\{x, y, z, t, q\}, \big\{\{x, y\}, \{x, z\}, \{x, t\}, \{y, q\}, \{z, q\}, \{t, q\}\big\}\big)$. Без потери общности положим, что $e = \{x, y\}$, $e' = \{t, q\}$. Видим, что z – общий сосед x и q, откуда, поскольку B и B' не пересекаются, $z \notin \boldsymbol{P}$. Отсюда заключаем, что $\{x, z\}, \{y, q\}, \{z, q\} \in A$. Следовательно, $x_3 = z_3 = q_3 = y_3$, что даёт противоречие $x_3 = y_3$. Итак, D не является также бриллиантом типа 2. Следовательно, B и B' сочетаются.

Для доказательства второго и третьего утверждений (соответственно в силу симметрии и Определения 22) достаточно установить, что добавление двух рёбер от каждой вершины пучка $R_{(0,0)}$ к каждому из пучков $R_{(1,1)}$, $R_{(1,2)}$, $R_{(2,1)}$, $R_{(2,2)}$ в суперкасалетке ведёт к образованию бриллиантов. Данный результат был установлен с помощью программы

«23.04.27. Опровержение наличия совместного с решением суперкасалетки несмежного решения» (соответствующее добавление рёбер методом целочисленного программирования ведёт к неразрешимой проблеме со статусом -1) ■

Часть 18. Предельные r-графы

В соответствии с Теоремой 44 рассматриваемыми в Гипотезе 1 графами $Sei(99)$ являются те и только те 99 вершинные графы, которые 14 регулярны и не содержат бриллиантов. В свою очередь 14 регулярные графы без бриллиантов интересны по двум причинам. Во-первых, как будет показано далее, для n вершинного r регулярного графа без бриллиантов выполнено условие

$$r \leq \mathscr{r}_n = \begin{cases} \left\lfloor\sqrt{2(n-1)}\right\rfloor, n \bmod 2 = 0 \vee \left\lfloor\sqrt{2(n-1)}\right\rfloor \bmod 2 = 0 \\ \left\lfloor\sqrt{2(n-1)}\right\rfloor - 1, n \bmod 2 = 1 \wedge \left\lfloor\sqrt{2(n-1)}\right\rfloor \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

При этом имеем $\mathscr{r}_{99} = 14$, откуда 14 – максимально возможная степень регулярного 99 вершинного графа без бриллиантов. Во-вторых, для пары $(n,r) = (99{,}14)$ выполнено следующее условие:

$$2s(r-2) + k(r-1) = 2(n-r-1), \text{ где } k = r \bmod 2, r = 2s + k \quad (1)$$

При $5 \leq r \leq 14$ другими парами (n,r), для которых данное условие выполнено, являются $(14{,}5)$, $(19{,}6)$, $(26{,}7)$, $(33{,}8)$, $(42{,}9)$, $(51{,}10)$, $(62{,}11)$, $(73{,}12)$, $(86{,}13)$. При этом каждый раз мы получаем $r = \mathscr{r}_n$, а соответствующие n вершинные r регулярные графы без бриллиантов, если таковые существуют, необходимо должны содержать в качестве остовных подграфов определяемые далее r *сети*. Обращаясь к r сетям и методу целочисленного программирования, удаётся установить, что для первых четырёх из указанных пар (n,r) n вершинных r регулярных графов без бриллиантов не существует (изучение оставшихся пар было невозможно в связи с ограничением вычислительной мощности компьютера). С другой стороны, не удалось получить опровержения существования для рассмотренных при $1 \leq n \leq 30$ пар $(n, \mathscr{r}_n)$, не удовлетворяющих условию 1 в случае $\mathscr{r}_n \geq 5$. Более того, в двадцати из этих случаев была указана непосредственная конструкция графа. Данные обстоятельства позволяют предположить об отрицательном разрешении Гипотезы 1.

Теорема 55. Для n вершинного r регулярного графа без бриллиантов выполнено условие

$$r \leq \sqrt{2(n-1)}$$

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – n вершинный r регулярный граф без бриллиантов. При при $r = 0,1,2$ истинность рассматриваемого утверждения следует соответственно из условий $n \geq 1,2,3$. Таким образом, положим $r \geq 3$. Пусть $v \in V$, $N_v = \{u_1, \dots, u_r\}$. Каждая вершина в N_v имеет в N_v не более одного соседа. В самом деле, в противном случае без потери общности положим $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\} \in E$. Тогда G содержит недопустимый бриллиант типа 1:

$$\big(\{v, u_1, u_2, u_3\}, \big\{\{v, u_1\}, \{v, u_2\}, \{v, u_3\}, \{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}\big\}\big)$$

Обозначая для каждого $i \in [r]$ через U_i множество соседей u_i в $V \backslash O_v$, таким образом, приходим к условию $|U_i| \geq r - 2$. Далее замечаем, что каждая вершина $a \in V \backslash O_v$ смежна не более чем с двумя вершинами в N_v. В самом деле, в противном случае без потери общности положим, что a смежна с u_1, u_2, u_3, что даёт недопустимый бриллиант типа 2:

$$\big(\{v, u_1, u_2, u_3, a\}, \big\{\{v, u_1\}, \{v, u_2\}, \{v, u_3\}, \{u_1, a\}, \{u_2, a\}, \{u_3, a\}\big\}\big)$$

Таким образом, в соответствии с принципом Дирихле получаем

$$\frac{r(r-2)}{n-r-1} \leq \frac{\sum_{i \in [r]} |U_i|}{|V \backslash O_v|} \leq 2$$

Заметим здесь, что для n вершинного r регулярного графа без бриллиантов при $r \geq 3$ выполняется условие $n > r + 1$ (иначе рассматриваемый граф является полным графом не менее чем с четырьмя вершинами, следовательно, содержит бриллианты). Таким образом, $n - r - 1 \geq 1$, и записанное нами соотношение корректно. Наконец

$$r(r-2) = r^2 - 2r \leq 2(n - r - 1) = 2(n-1) - 2r$$

$$r \leq \sqrt{2(n-1)}$$

Замечание 25. В Теореме 55 мы, разумеется, можем положить

$$r \leq \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor$$

Более того, при нечётном n и нечётном $\left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor$ в силу леммы о рукопожатиях будет выполнено неравенство $r \leq \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor - 1$.

Определение 34. Для положительного целого n определим коэффициент критичности:

$$\mathcal{r}_n = \begin{cases} \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor, n \bmod 2 = 0 \vee \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor \bmod 2 = 0 \\ \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor - 1, n \bmod 2 = 1 \wedge \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

Будем называть n вершинный r регулярный граф без бриллиантов критическим, если выполнено условие $r = \mathcal{r}_n$.

Теорема 56. Для n вершинного r регулярного графа без бриллиантов выполнено условие $r \leq \mathcal{r}_n$.

Доказательство. Следует из Теоремы 55 и Замечания 25 ■

Пример 7. В следующей таблице отражены результаты поиска критических графов с числом вершин $n \leq 30$ (т. е. n вершинных $\mathcal{r}_n$ регулярных графов без бриллиантов). Данный поиск был осуществлён с помощью программы «23.05.06. Поиск n-вершинных r-регулярных графов без бриллиантов», использующей метод целочисленного программирования. Обнаруженные графы приведены в документе «23.05.06. Критические или близкие к критическим регулярные графы без бриллиантов». В рассматриваемой же таблице для каждого значения n указан коэффициент критичности $\mathcal{r}_n$ и максимальное значение r, такое что удалось обнаружить n вершинный r регулярный граф без бриллиантов. Жёлтое и красное выделение обозначают соответственно условие $r < \mathcal{r}_n$ некритичности обнаруженного графа и отсутствие для заданного n критического графа. Таким образом, видим, что при $n = 14,19,26$ найденные графы хоть не являются критическими, но обладают максимально возможной степенью среди регулярных графов без бриллиантов с рассматриваемым числом вершин. Для указанных значений n, а также для $n = 33$ далее мы покажем, как было установлено отсутствие критического графа, в соответствующем подходе будет важно, что пары $(14, r_{14})$, $(19, r_{19})$, $(26, r_{26})$, $(33, r_{33})$ удовлетворяют условию 1. Заметим также, что помимо обнаруженных критических графов известен критический 243 вершинный граф, а именно – граф $Sei(243)$ из Замечания 9 (существование критического графа с большим числом вершин свидетельствует о точности оценки Теоремы 56). Пара $(243, r_{243})$, кроме того, удовлетворяет условию 1, что опровергает возможное предположение о том, что соответствующих таким парам графов не существует.

n	r_n	r
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	2	2
5	2	2
6	3	3
7	2	2
8	3	3
9	4	4
10	4	4
11	4	4
12	4	4
13	4	4
14	5	4
15	4	4
16	5	5
17	4	4
18	5	5
19	6	4
20	6	6
21	6	4
22	6	4
23	6	4
24	6	6
25	6	6
26	7	6
27	6	6
28	7	6
29	6	6
30	7	6

Определение 35. Для $r \geq 3$ предельным r графом будем называть r регулярный граф без бриллиантов с числом вершин n, определяемым соотношением

$$2s(r-2) + k(r-1) = 2(n-r-1), \text{ где } k = r \bmod 2, r = 2s + k$$

Определение 36. Пусть $r \geq 3$, $k = r \, mod \, 2$, $r = 2s + k$. Рассматривая числа $[r]$ в качестве вершин графа, соединим каждое из них ребром с 0. Далее рассмотрим семейство F, состоящее из множеств $\{1,2\}, \dots, \{2s-1, 2s\}$ и одноэлементного множества $\{2s+1\} = \{r\}$ в случае $k = 1$. Для каждого двухэлементного множества $\{a, b\} \in F$ соединим ребром a и b. Далее рассмотрим все пары вида (a, b), такие что $a < b$, и a, b принадлежат различным множествам F. Упорядочив данные пары лексикографически, соединим рёбрами элементы первой пары с вершиной $r + 1$, элементы второй пары с вершиной $r + 2$, … Любой граф, изоморфный полученному таким образом, будем называть r сетью.

Замечание 26. Заметим, что число пар (a, b) в Определении 36 (следовательно, число отличных от $0, \dots, r$ вершин полученного графа) при чётном r составляет

$$4C_s^2 = 2s(s-1) = \frac{r(r-2)}{2}$$

При нечётном r для образования пары мы можем выбрать два из s двухэлементных множеств в F, выбрав затем из каждого двухэлементного множества элементы пары, либо одно из s двухэлементных множеств в F, образовав далее для некоторого элемента a выбранного двухэлементного множества пару (a, r). Отсюда число пар в рассматриваемом случае составит

$$4C_s^2 + 2C_s^1 = 2s(s-1) + 2s = 2s^2 = \frac{(r-1)^2}{2}$$

Теорема 57. Любая r сеть не содержит бриллиантов.

Доказательство. Без потери общности рассмотрим в качестве r сети граф G из Определения 36. Из построения видим, что два различных треугольника в G имеют в точности одну общую вершину (0), т. е. не имеют общего ребра, откуда G не содержит бриллиантов типа 1. Далее пусть $U = V(G) \setminus ([r] \cup \{0\})$. Видим, что вершины 0 и $u \in [r]$ имеют не более одного общего соседа, вершины 0 и $u \in U$ имеют в точности двух общих соседей, вершины $u \in [r]$, $v \in U$ не имеют общих соседей, различные вершины $u, v \in [r]$ имеют не более двух общих соседей, а различные вершины $u, v \in U$ – не более одного общего соседа. Т. е. для любых различных вершин $u, v \in V(G)$ нельзя указать трёх их общих соседей, что говорит об отсутствии в G бриллиантов типа 2 ■

Теорема 58. Любой предельный r граф является критическим и содержит r сеть в качестве остовного подграфа.

Доказательство. Рассмотрим n вершинный предельный r граф $G = (V, E)$, без потери общности положив $V = [n]$. Также без потери общности положим $N_n = [r]$. Пусть $k = r \bmod 2$, $r = 2s + k$. Рассуждая как при доказательстве Теоремы 55, приходим к выводу, что каждая вершина $i \in [r]$ смежна не более чем с одной другой вершиной $[r]$, убеждаясь при этом, что число имеющих соседей в $[r]$ вершин $[r]$ не превосходит $2s$. Отсюда не более чем $2s$ вершин в $[r]$ смежны в точности с $r-2$ вершинами в $V \backslash O_n$ (каждая), тогда как остальные вершины $[r]$ смежны в точности с $r-1$ вершиной $V \backslash O_n$. Отсюда из $[r]$ в $V \backslash O_n$ исходит по крайней мере $2s(r-2) + k(r-1)$ рёбер. Далее, так же как при доказательстве Теоремы 55, получаем, что от каждой вершины $V \backslash O_n$, в свою очередь, исходит не более чем два ребра в $[r]$. Это приводит нас к неравенству

$$2s(r-2) + k(r-1) \leq 2|V \backslash O_n| = 2(n-r-1)$$

Данное неравенство обращается в равенство в том и только том случае, когда, во-первых, в точности $2s$ вершин в $[r]$ имеет одного соседа в $[r]$, и, во-вторых, каждая вершина $V \backslash O_n$ смежна с двумя вершинами $[r]$. Равенство же имеет место быть, являясь характеризующим предельный r граф условием из Определения 35. Для доказательства интересующих нас утверждений рассмотрим два случая.

$k = 0$. Имеем $2s(r-2) + k(r-1) = 2s(r-2) = r(r-2) = 2(n-r-1)$, откуда

$$n - r - 1 = |V \backslash O_n| = \frac{r(r-2)}{2} \ (2)$$

Кроме того, $2s = r$ вершин множества $[r]$ смежны в точности с одной вершиной $[r]$, что попросту означает, что порождённый подграф $\langle [r] \rangle$ 1 регулярный. Без потери общности положим, что рёбрами этого подграфа являются $\{1,2\}, \dots, \{2s-1, 2s\}$. В виду отсутствия в G бриллиантов типа 1 две вершины $a, b \in [r]$, смежные с произвольной вершиной $u \in V \backslash O_n$, не могут быть элементами одного и того же из указанных рёбер, стало быть, инцидентны двум различным рёбрам. Общее число способов выбора двух таких вершин, как и в Замечании 26, составляет $\frac{r(r-2)}{2}$. С другой стороны, ввиду отсутствия в G бриллиантов типа 2, две различные вершины $u, v \in V \backslash O_n$ имеют не более одного общего соседа в $[r]$. Отсюда в силу условия 2 любые две вершины $a, b \in [r]$, выбираемые из различных множеств $\{1,2\}, \dots, \{2s-1, 2s\}$, являются соседями некоторой (единственной) вершины $u \in V \setminus O_n$, причём каждая вершина $u \in V \setminus O_n$ является общим соседом одной из выбранных пар. Отсюда без потери общности можем считать, что граф из Определения 36 является остовным подграфом G, т. е. G содержит r сеть в качестве остовного подграфа. Докажем теперь, что граф G критический. Из условия 2 получаем $2(n-1) = r^2$, откуда $r = \sqrt{2(n-1)} = \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor = r_n$ (последнее равенство обусловлено чётностью r).

$k = 1$. Имеем $2s(r-2) + r - 1 = (r-1)(r-2) + r - 1 = (r-1)^2 = 2(n-r-1)$, откуда

$$n - r - 1 = |V \setminus O_n| = \frac{(r-1)^2}{2} \quad (3)$$

Далее убеждаемся, что $\langle [r] \rangle$ – состоит из s не пересекающихся по вершинам копий K_2 и изолированной вершины. Без потери общности полагаем, что рёбрами $\langle [r] \rangle$ являются $\{1,2\}, \dots, \{2s-1, 2s\}$, и рассматриваем семейство $\{1,2\}, \dots, \{2s-1, 2s\}, \{r\}$. Рассуждая как в предыдущем случае и обращаясь к Замечанию 26, приходим к выводу о том, что выбрать в $[r]$ две смежные с произвольной вершиной $u \in V \setminus O_n$ вершины можно $\frac{(r-1)^2}{2}$ способами. Вновь заключаем, что две вершины $a, b \in [r]$, выбираемые в этот раз из различных множеств $\{1,2\}, \dots, \{2s-1, 2s\}, \{r\}$, являются соседями некоторой (единственной) вершины $u \in V \setminus O_n$, причём каждая вершина $u \in V \setminus O_n$ является общим соседом одной из выбранных пар. Отсюда без потери общности можем считать, что граф из Определения 36 является остовным подграфом G, т. е. G содержит r сеть в качестве остовного подграфа. Переходя к доказательству критичности, замечаем, что в силу леммы о рукопожатиях n чётное. Таким образом, требуется доказать, что $r = \left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor$. Из условия 3 получаем

$$r = \sqrt{2(n-1) - 1}$$

Поскольку r является целым и $\sqrt{2(n-1)} > \sqrt{2(n-1) - 1}$, имеем

$$\left\lfloor \sqrt{2(n-1)} \right\rfloor \geq \sqrt{2(n-1) - 1}$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\sqrt{2(n-1) - 1} + 1 > \sqrt{2(n-1)}$, в чём легко убедиться возведением обеих частей неравенства в квадрат ■

Замечание 27. Являясь критическими, предельные r графы с (определяемым r) числом вершин n, таковы, что не существует регулярных графов без бриллиантов с числом вершин n степени $> r$. Однако наши графы максимальны и в обратном смысле: не существует регулярных графов без бриллиантов степени r с числом вершин $< n$. Чтобы убедиться в утверждении, положим

$$k = r\, mod\, 2$$

$$r = 2s + k$$

$$2s(r-2) + k(r-1) = 2(n-r-1)$$

При $k = 0$ получаем $n = \frac{r^2+2}{2}$. Пусть $m < n$, т. е. $m \leq n - 1 = \frac{r^2}{2}$. Обращаясь к Теореме 55, видим, что степень m вершинного регулярного графа не превосходит

$$\sqrt{2\left(\frac{r^2}{2} - 1\right)} = \sqrt{r^2 - 2} < r$$

При $k = 1$ получаем $n = \frac{r^2+3}{2}$. Далее из $m < n$ следует $m \leq n - 1 = \frac{r^2+1}{2}$. Обращаясь к Теореме 55, видим, что степень m вершинного регулярного графа не превосходит

$$\sqrt{2\left(\frac{r^2+1}{2} - 1\right)} = \sqrt{r^2 - 1} < r$$

Сделанная ремарка позволяет предположить, что при некоторых значениях r предельных r графов может не существовать. Попытку убедиться в данном предположении облегчает то, что уже известно, что остовными подграфами рассматриваемых графов являются r сети. Так, применяя метод целочисленного программирования в программе «23.05.08. Поиск предельных графов», удалось установить, что при $r = 5,6,7,8$ предельных r графов действительно не существует. Этот результат, разумеется, не означает, что предельных r графов вовсе нет. Так, $K_2 \square K_3$, $K_3 \square K_3$ и граф $Sei(243)$ из Замечания 9 являются предельными r графами соответственно при $r = 3,4,22$. Заметим наконец, что утверждение о существовании предельного 14 графа эквивалентно Гипотезе 1, и граф $\Gamma(2)$ из Определения 13 является 14 сетью.

Часть 19. Характеризация смежных решений. Стандартные смежные решения

Далее мы охарактеризуем смежные решения, выделив среди них обширный класс, элементы которого генерируются программой «23.05.18. Генерация стандартных смежных решений».

Замечание 28. Пусть функция φ и множество A определены как в Определении 22. Положим, что значениями φ являются инъективные функции. Тогда граф $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$ не содержит бриллиантов типа 1, и, если G содержит бриллиант типа 2 D, то выполнено условие *: для некоторых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 1$, некоторых $x, y \in \{0,1,2,3,4\}$ верно, что $\{\varphi_{u,v}(p), \varphi_{u,v}(q)\} = \{r,s\}$, $\{p,q\}, \{r,s\}, \{p, \varphi_{u,v}(p)\}, \{q, \varphi_{u,v}(q)\} \in E(D)$, где

$$p = (u_1, u_2, x, 0)$$

$$q = (u_1, u_2, x, 1)$$

$$r = (v_1, v_2, y, 0)$$

$$s = (v_1, v_2, y, 1)$$

Предположим, что G содержит бриллиант типа 1 C. Ввиду отсутствия бриллиантов типа 1 в $(\mathcal{V}, \mathcal{E}) = \mathcal{K}$ (см. Замечание 15 и Определение 7) C содержит ребро из A. C является объединением двух треугольников с общим ребром, скажем, abc и bcd, откуда, например, первый из этих треугольников содержит ребро из A. В силу определения $\mathcal{K}$ и инъективности функций, являющихся значениями φ, заключаем, что каждое ребро треугольника abc принадлежит A, откуда далее заключаем, что рёбра $\{b,d\}$ и $\{c,d\}$ также принадлежат A, т. е. $E(C) \subseteq A$. Это даёт противоречие. В самом деле, ввиду условия $E(C) \subseteq A$ для некоторых попарно различных $x, y, z, t \in \boldsymbol{P}$ имеем $a \in R_x$, $b \in R_y$, $c \in R_z$, $d \in R_t$, причём бриллиант типа 1 $\big(\{x,y,z,t\}, \big\{\{x,y\},\{y,z\},\{z,x\},\{y,t\},\{z,t\}\big\}\big)$ оказывается подграфом $\mathcal{K}$. Следовательно, G не содержит бриллиантов типа 1.

Далее заметим, что * выполняется в том и только том случае, когда в G имеется 4 цикл z, содержащий две смежные в z вершины одного пучка и две смежные в z вершины другого пучка, причём z – подграф бриллианта 2 D. Далее, как и выше, убеждаемся, что D содержит хотя бы одно ребро из A, причём не может состоять исключительно из рёбер A. Это приводит нас к двум смежным рёбрам $\{a,b\}, \{b,c\} \in E(D)$, таким что первое принадлежит A, а второе принадлежит $\mathcal{E}$. Убеждаемся, что b и c – вершины одного пучка, отличного от пучка, которому принадлежит a. Положив $a' = (a_1, a_2, a_3, (a_4 + 1)\ mod\ 2)$, далее заключаем, что $\{c, a'\}, \{a, a'\} \in E(D)$. Это даёт отмеченное выше условие, эквивалентное $*$.

Теорема 59. Пусть функция φ и множество A определены как в Определении 22. A является смежным решением тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. Для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 1$, $\varphi_{u,v}$ – инъективная функция.
2. Для любых попарно смежных пучков R_u, R_v, R_w, в графе $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$ в любом 4 цикле $abcd$, таком что $a, b \in R_u$, $c, d \in R_v$, вершины a и c не имеют общих соседей в R_w.

Доказательство. Необходимость очевидна, достаточная часть следует из Замечания 28 ■

Теорема 60. Пусть функция φ и множество A определены как в Определении 22, для любых $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, таких что $i(u,v) = 1$, $\varphi_{u,v}$ – инъективная функция, и для любых смежных пучков R_u, R_v, граф $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup A)$ не содержит 4 цикла $abcd$, такого что $a, b \in R_u$, $c, d \in R_v$. Тогда A – смежное решение.

Доказательство. Следует из Теоремы 59 ■

Определение 37. Смежное решение из Теоремы 60 будем называть стандартным.

Часть 20. Характеризация несмежных решений

Приведём характеризацию несмежных и стандартных несмежных решений, а также опишем новые классы несмежных решений.

Теорема 61. Множество B из Определении 22 является несмежным решением тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. Для любой пары $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, такой что $i(u,v) = 2$, любая вершина $y \in R_v$ имеет в точности двух соседей из R_u в $(\bigcup B, B)$.

2. Для любой пары $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, такой что $i(u,v) = 2$, любой вершины из R_u (R_v) и любых двух её соседей $y, y' \in R_v$ ($y, y' \in R_u$) в $(\bigcup B, B)$, выполнено условие $y_3 \neq y'_3$.
3. Для любого $u \in \boldsymbol{P}$ любые две вершины $x, x' \in R_u$ имеют не более одного общего соседа в $(\bigcup B, B)$.
4. Для любых попарно различных и несмежных пучков R_u, R_v, R_w, в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ в любом 4 цикле $abcd$, таком что $a, b \in R_u$, $c, d \in R_v$, вершины a и c не имеют общих соседей из R_w.

Доказательство. Необходимость устанавливается просто (и частично доказана в Замечании 18):

Условие 1. Пусть $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, $i(u,v) = 2$. Каждая вершина $y \in R_v$ имеет не более двух соседей из R_u в $(\bigcup B, B)$. В самом деле, наличие трёх соседей $x, x', x'' \in R_u$ приведёт в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ к бриллианту типа 2 со множеством вершин $\{u, x, x', x'', v\}$, что даст противоречие с тем, что B – несмежное решение. Далее, если $y \in R_v$ смежна менее чем с двумя вершинами из R_u в $(\bigcup B, B)$, то по определению ψ и B от остальных девяти вершин R_v в $(\bigcup B, B)$ отходит не менее 19 вершин в R_u, следовательно по принципу Дирихле найдётся исключённая нами вершина $y \in R_v$, имеющая в $(\bigcup B, B)$ по крайней мере трёх общих соседей из R_u.

Условие 2. Пусть $u \prec v \in \boldsymbol{P}$, $i(u,v) = 2$, $x \in R_u$ (R_v), и $y, y' \in R_v$ (R_u) – два соседа x в $(\bigcup B, B)$. Условие $y_3 = y'_3$ равносильно смежности y и y' в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$, откуда его выполнение влечёт наличие в данном графе бриллианта типа 1 со множеством вершин $\{x, y, y', v\}$ ($\{x, y, y', u\}$), что противоречит тому, что B – несмежное решение.

Условие 3. Пусть $u \in \boldsymbol{P}$, $x, x' \in R_u$, и y, y' – два общих соседа x и x' в $(\bigcup B, B)$. Тогда в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ имеется бриллиант типа 2 со множеством вершин $\{u, x, x', y, y'\}$, что противоречит тому, что B – несмежное решение.

Условие 4. Пусть R_u, R_v, R_w – попарно различные и несмежные пучки, и $abcd$ – 4 цикл графа $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$, такой что $a, b \in R_u$, $c, d \in R_v$. Пусть a и c имеют в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ общего соседа $x \in R_w$. Тогда $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ содержит бриллиант типа 2 со множеством вершин $\{a, b, c, d, x\}$, что противоречит тому, что B – несмежное решение.

Перейдём к достаточной части. Предположим, что условия 1-4 выполнены. Необходимо и достаточно доказать, что граф $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ не содержит бриллиантов типа 1 и 2.

Отсутствие в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ бриллиантов типа 1. Предположим, что $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ содержит бриллиант типа 1 C, образованный объединением треугольников abc и bcd. Ввиду отсутствие бриллиантов в касалетке C содержит ребро $e = \{x, y\} \in B$, являющееся без потери общности ребром abc. Пусть $z = \{a, b, c\} \setminus \{x, y\}$, тогда $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ содержит рёбра $\{z, x\}$ и $\{z, y\}$, откуда ввиду того, что x и y – вершины различных пучков, заключаем, что $\{z, x\}$ или $\{z, y\}$ принадлежат B (вершины различных пучков не имеют общих соседей в касалетке). Без потери общности положим $\{z, x\} \in B$. Для некоторых $u, v, w \in \boldsymbol{P}$ имеем $x \in R_u$, $y \in R_v$, $z \in R_w$, причём $i(u, v) = 2$. Если $\{z, y\}$ – ребро касалетки, то, поскольку, z, y – вершины пучков, z, y принадлежат одному пучку, R_v, причём $z_3 = y_3$, и z, y являются соседями вершины x из несмежного пучка R_u. Это даёт противоречие с условием 2, откуда заключаем, что $\{z, y\} \in B$, т. е. все рёбра треугольника abc принадлежат B. Отсюда, в частноти, $\{b, c\} \in B$, что аналогично только что выполненным рассуждениям приводит к тому, что и все рёбра треугольника bcd принадлежат B (т. е. все рёбра C принадлежат B). Далее найдутся такие попарно различные и несмежные пучки R_u, R_v, R_w (воспользуемся для удобства прежними обозначениями), что $a \in R_u$, $b \in R_v$, $c \in R_w$. Кроме того, для некоторого пучка R_t верно, что $d \in R_t$, причём R_v, R_w, R_t попарно различны и несмежны. Если $R_u = R_t$, то вершины одного пучка a и d имеют в $(\bigcup B, B)$ двух общих соседей b и c, что противоречит условию 3. Таким образом, пучки R_u, R_v, R_w, R_t попарно различны, что равносильно тому, что попарно различны u, v, w, t. Кроме того, выполнено условие $i(u, v) = i(u, w) = i(v, w) = i(v, t) = i(w, t) = 2$ (*). Далее порождённый касалеткой подграф $\langle \boldsymbol{P} \rangle$ является графом Конвея $\mathrm{Z}(2)$, чьё дополнение изоморфно $\mathrm{Z}(2)$ и, следовательно, не содержит бриллиантов. Напротив, условие * означает наличие в $\overline{\langle \boldsymbol{P} \rangle}$ бриллианта 1 со множеством вершин $\{u, v, w, t\}$. Полученное противоречие означает, что в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ бриллианты типа 1 отсутствуют.

Отсутствие в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ бриллиантов типа 2. Вновь предположим противное – наличие в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ бриллианта D типа 2:

$$\big(\{a, b, c, d, e\}, \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\big\}\big)$$

Ввиду отсутствия бриллиантов в касалетке заключаем, что одно из рёбер D принадлежит B. Покажем, с другой стороны, что D не может состоять исключительно из рёбер B. Предположим противное, положив $a \in R_u$, $b \in R_v$, $c \in R_w$, $d \in R_p$, $e \in R_q$. Каждое из условий $v = w$, $v = p$, $w = p$, $u = q$ даёт противоречие с условием 3, откуда заключаем, что u, v, w, p, q попарно различны, причём выполнено условие

$$(u, v) = i(u, w) = i(u, p) = i(v, q) = i(w, q) = i(p, q) = 2$$

Следовательно, дополнение порождённого касалеткой подграфа $\langle \boldsymbol{P} \rangle$ содержит дающий противоречие бриллиант 2 со множеством вершин $\{u, v, w, p, q\}$.

Итак, D содержит по крайней мере одно ребро из B и по крайней мере одно ребро из $\mathcal{E}$, откуда далее заключаем, что в D имеются смежные рёбра $\{x, y\} \in B$, $\{y, z\} \in \mathcal{E}$. Положим (используя для удобства прежние обозначения) $x \in R_u$, $y \in R_v$, причём $i(u, v) = 2$. Рассмотрим в D 4 цикл $xyzt$. Имеет место один из следующих двух случаев:

1. $z = v$. Имеет место один из следующих двух случаев:
   1.1. $t \in \boldsymbol{P}$, причём $i(t, v) = 1$. Имеем $t \neq u$, откуда ребра $\{t, x\}$ в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ быть не может.
   1.2. $t \in R_v$. Имеет место один из следующих двух случаев:
      1.2.1. В D x и $z = v$ имеют отличного от y и t общего соседа n. Имеем $n \notin R_v$, иначе у вершины x будет три общих соседа в R_v, что противоречит условию 1. Следовательно, $n \in \boldsymbol{P}$, $i(n, v) = 1$, $n \neq u$, откуда нами исключается ребро $\{n, x\}$.
      1.2.2. В D y и t имеют отличного от x и $z = v$ общего соседа n. В данном случае $\{n, y\}, \{n, t\}, \{x, y\}, \{x, t\} \in B$, что даёт противоречие с условием 3.
2. $z \in R_v$. Имеет место один из следующих двух случаев:
   2.1. $\{t, x\} \notin \mathcal{E}$ ($\{t, x\} \in B$). Положим $t \in R_w$. Заключаем: R_u, R_v, R_w попарно различны и несмежны. Имеет место один из следующих двух случаев:
      2.1.1. В D x и z имеют отличного от y и t общего соседа n. Имеет место один из следующих двух случаев:
         2.1.1.1. $\{n, x\} \notin \mathcal{E}$, т. е. $\{n, x\} \in B$, откуда $n \in R_p$ для некоторого $p \in \boldsymbol{P}$, такого что $i(u, p) = 2$. Убеждаемся, что $p \neq v$, откуда заключаем, что $\{n, z\} \in B$, откуда R_u, R_v, R_p попарно различны и несмежны. Отсюда заключаем $R_p = R_w$. Но тогда t и n – вершины одного пучка, имеющие в $(\bigcup B, B)$ двух общих соседей x и z, что противоречит условию 3.
         2.1.1.2. $\{n, x\} \in \mathcal{E}$. Заключаем, что $n \in R_u$. Рассматривая 4 цикл $xnzy$ и вершину t, являющуюся общим соседом x и z, получаем противоречие с условием 4.
      2.1.2. В D y и t имеют отличного от x и z общего соседа n. Имеет место один из следующих двух случаев:
         2.1.2.1. $\{n, t\} \notin \mathcal{E}$, т. е. $\{n, t\} \in B$, откуда $n \in R_p$ для некоторого $p \in \boldsymbol{P}$, такого что $i(w, p) = 2$. Убеждаемся, что $p \neq v$, откуда заключаем, что $\{n, y\} \in B$, откуда R_w, R_v, R_p попарно различны и несмежны. Отсюда заключаем $R_p = R_u$. Но тогда x и n – вершины одного пучка, имеющие в $(\bigcup B, B)$ двух общих соседей y и t, что противоречит условию 3.
         2.1.2.2. $\{n, t\} \in \mathcal{E}$. Заключаем, что $n \in R_w$. Рассматривая 4 цикл $tnyz$ и вершину x, являющуюся общим соседом y и t, получаем противоречие с условием 4.

2.2. $\{t, x\} \in \mathcal{E}$. Заключаем, что $t \in R_u$. Далее рассмотрим n, отличного от y и t общего соседа x и z или отличного от x и z общего соседа y и t. Приходим к выводу, что для некоторого $w \in \boldsymbol{P}$ $t \in R_w$, причём R_u, R_v, R_w попарно различны и несмежны. Рассматривая 4 цикл $txyz$, получаем противоречие с условием 4.

■

Замечание 29. Воспользовавшись Замечанием 18, видим, что замена в Теореме 61 условия 4 более сильным условием (4′) отсутствия в $(\mathcal{V}, \mathcal{E} \cup B)$ 4 цикла $abcd$, такого что $a, b \in R_u$, $c, d \in R_v$ для различных несмежных пучков R_u, R_v, даёт характеризацию стандартных несмежных решений. Полезно заметить и то, что более сильным, чем условие 3, является отсутствие в $(\bigcup B, B)$ 4 циклов (3′), а ещё более сильным – не меньшее 5 значение обхвата $(\bigcup B, B)$ (3″). В классе $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ множеств, заданных как B в Определении 22, мы, таким образом, можем выделить следующие подклассы несмежных решений:

$\mathcal{B}_{1234} = \{B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}: B \text{ удовлетворяет } 1, 2, 3, 4\}$ (все несмежные решения)

$\mathcal{B}_{1234'} = \{B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}: B \text{ удовлетворяет } 1, 2, 3, 4'\}$ (стандартные несмежные решения)

$\mathcal{B}_{123'4} = \{B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}: B \text{ удовлетворяет } 1, 2, 3', 4\}$

$\mathcal{B}_{123'4'} = \{B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}: B \text{ удовлетворяет } 1, 2, 3', 4'\}$

$\mathcal{B}_{123''4} = \{B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}: B \text{ удовлетворяет } 1, 2, 3'', 4\}$

$\mathcal{B}_{123''4'} = \{B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}: B \text{ удовлетворяет } 1, 2, 3'', 4'\}$

Приведём диаграмму Хассе отношения включения на данных классах: