

Title: Análisis del experimento gravity probe b con relatividad especial de campos

Abstract

Se analiza el experimento gravity probe b y se comentan varias interpretaciones. Se propone su explicación mediante la modificación de las ecuaciones de gravedad análogas a las leyes de maxwell.

Autor: Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Málaga, 15 de Mayo de 2023

Table of Contents

Introducción.....	1
Trayectorias elípticas.....	3
Ecuación para el eje giroscópico.....	4
Precesiones.....	5
Precesión geodética.....	5
Precesión frame-dragging.....	7
Precesión de Thomas.....	8
Resultados obtenidos.....	8
Cambios en las ecuaciones de campo gravitomagnético.....	8
Ecuación de ondas.....	9
Comentario final.....	10
Anexo I: Movimiento giroscópico.....	11
Ejemplo.....	11
Ecuación del eje giroscópico.....	12
Ecuación de precesión del eje.....	13
Anexo II: Momento dipolar gravitomagnético.....	14
Anexo III: Campo gravitomagnético creado por un dipolo.....	15
Anexo IV: Campos electromagnéticos en las transformaciones de Lorentz.....	15
Precesión geodética.....	16
Precesión frame-dragging.....	16
Anexo V: Rotación de Wigner y precesión de Thomas.....	17
Transformaciones colineales.....	17
Transformaciones ortogonales no colineales.....	18
Referencias.....	20

Introducción

Usaremos una relatividad especial modificada, que denominamos relatividad especial de campos; cuyo nombre hace referencia a que cada campo, tanto el gravitatorio como el electromagnético,

tienen su propia versión de la relatividad especial, particularizada para la velocidad de su partícula mensajera (gravitón y fotón, respectivamente) Siendo la velocidad del gravitón,

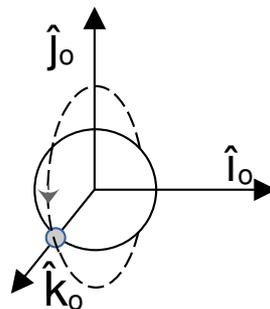
$$c_m = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Siendo 'c' la velocidad de los fotones.

El 'gravity probe b' o 'gbp' es un test que prueba la influencia del campo gravitomagnético terrestre en dos efectos denominados 'geodetic precesion' y 'frame dragging precesion'. La primera se refiere al efecto del campo gravitatorio de la tierra sobre un objeto que orbita entorno a ella, es un efecto puramente relativista (de relatividad especial); y, el segundo, se refiere al efecto del campo gravitomagnético de la tierra sobre un objeto (no necesariamente en movimiento). El objeto de prueba es un giróscopo y el efecto que se produce sobre el mismo es la precesión del eje de giro.

Los detalles del experimento se encuentran en las referencias [1], [2] y [3]. La última detalla los valores necesarios para reproducir el experimento.

Para ello, necesitamos modelar matemáticamente la órbita del giróscopo que orbita la tierra, seguiremos los apuntes de la referencia [4]. El giróscopo (esfera pequeña en la figura) lo vamos a suponer realizando una órbita elíptica (línea a trazos) entorno a la tierra; como se indica en la figura, con su vector de posición inicial alineado con el eje k_o .



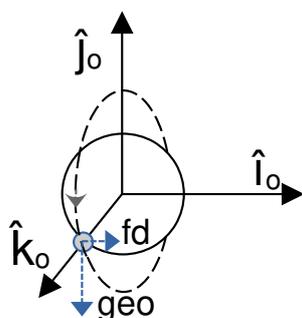
El eje de rotación de la tierra se encuentra alineado con el eje j_o , y el eje de rotación del giróscopo se encuentra alineado con el eje k_o en todo momento. En realidad no es así y hay un pequeño ángulo con ambos ejes que vamos a despreciar.

Tal como se ha descrito, el giróscopo tiene una trayectoria que pasa por los dos polos consecutivamente.

Vamos a suponer que la trayectoria es tal que el perigeo (punto en que la distancia es la menor al objeto orbitado) y el apogeo (punto en que la distancia es la mayor al objeto orbitado) se producen en el plano ecuatorial, con el apogeo en la posición inicial que hemos fijado.

Tenemos, pues, dos sistemas de referencia que se mantienen paralelos; el sistema 0 (indicado en la figura) y el sistema 'g' (del giróscopo; no indicado) que acompaña al giróscopo en su giro entorno a la tierra, pero manteniendo sus ejes coordenados paralelos en todo momento a los del sistema 0.

La precesión geodética provoca el giro del eje de rotación del giróscopo según el eje i_o , y la precesión frame-dragging provoca el giro según el eje j_o . Ver la figura siguiente.



El efecto del campo gravitomagnético sobre el giroscopio lo vamos a modelar mediante el momento dipolar (gravito)magnético^[5] y la ecuación de precesión de Larmor^[6]. La ecuación de precesión de Larmor introduce un coeficiente ‘extra’ en las ecuaciones que ‘estropea’ el resultado, y muchos textos evitan su introducción^{[7],[8]}. Pero, sin su inclusión, la explicación del efecto queda incompleta (cuando menos).

La idoneidad de la relación que se establece en [5] no se ha verificado numéricamente, esto es, está sin comprobar, pero aparece ampliamente en la literatura.

También se va a analizar influencia de la precesión de Thomas en el cálculo^[9]. Que es un efecto que aparece cuando se componen transformaciones de Lorentz no colineales (esto es, que se desarrollan en distintos ejes).

El efecto que se va a medir se acumula durante la duración de un año,

$$t_f = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31536 \text{ e } 3.$$

Y su ángulo se mide en mili-arcosegundos (marcseg), que necesita el factor de conversión,

$$\frac{648 \text{ e } 6}{\pi}.$$

Terminaremos con la exposición de las ecuaciones de maxwell para el campo gravitatorio (maxwellian gravity) que es el objeto de esta serie de tests de relatividad general que empezamos en [10].

Este es el primer test cuyo cálculo puede completarse a mano con una precisión aceptable.

Trayectorias elípticas

Partiendo de los datos del fact sheet^[3],

$$H_a = 659.1 \text{ e } 3,$$

$$H_b = 639.5 \text{ e } 3.$$

Donde H_a y H_b representan las altitudes, en metros, del apogeo y perigeo de la trayectoria del satélite. Las ecuaciones que precisamos son,

$$\begin{aligned}
r_a &= H_a + R_T, \\
r_b &= H_b + R_T, \\
e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}, \\
a &= \frac{r_a + r_p}{2}, \\
w_s &= \sqrt{\frac{GM_t}{a^3}}.
\end{aligned}$$

Donde r_a y r_p es la distancia geocéntrica al apogeo y perigeo respectivamente. R_T el radio de la tierra, 'e' la excentricidad. 'a' el eje semieje mayor de la elipse. GM_t es el producto de la constante gravitatoria por la masa de la tierra; y w_s la velocidad de rotación del satélite entorno a la tierra en radianes por segundo.

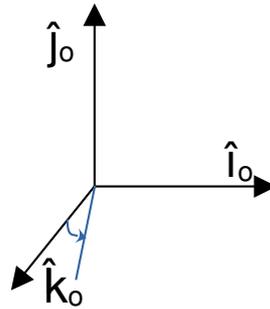
Al ser la trayectoria elíptica, obtenemos la ley para el movimiento,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta'}.$$

Nótese que θ' es $\theta' = \theta + 180^\circ$, por lo que el coseno del ángulo desplazado de cuadrante queda,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}. \quad (1)$$

Con el ángulo θ definido por el sentido del eje i_o , medido desde la posición del eje k_o . Como indica la figura,



El plano del movimiento sería el plano j_o, k_o .

El vector de posición del giróscopo queda,

$$\vec{r}_g = -r \operatorname{sen}(w_s t) \hat{j}_o + r \cos(w_s t) \hat{k}_o. \quad (2)$$

Y el de velocidad (derivando el anterior),

$$\vec{v}_g = (-\dot{r} \operatorname{sen}(w_s t) - r w_s \cos(w_s t)) \hat{j}_o + (\dot{r} \cos(w_s t) - r w_s \operatorname{sen}(w_s t)) \hat{k}_o. \quad (3)$$

Ecuación para el eje giroscópico

Hemos identificado la dirección del versor ' k_o ' con la dirección del eje giroscópico; la ecuación para dicho eje queda (ver Anexo I: Movimiento giroscópico, fórmula (14)),

$$\frac{\vec{M}}{L_g} = \vec{w} \times k_o. \quad (4)$$

Siendo el vector 'M' el par aplicado en el eje; el vector 'L_g', el momento angular del giróscopo y el vector 'w' la velocidad de precesión, Esta ecuación asume que estamos evaluándolo todo en el centro de masas del giróscopo (de lo contrario en la ecuación aparecería otro término).

Nótese que estamos usando los versores del sistema fijo en lugar de expresarlo en el sistema móvil, esto es correcto para este caso porque sabemos que el versor 'k_o' aproxima al 'k' móvil, para giros pequeños. Esto presupone que el giro es pequeño y se calcula durante un tiempo suficientemente corto para que siga siendo pequeño (como pasa en este caso si calculamos sólo un año).

El valor del momento angular se supone constante y es igual al producto del momento de inercia por la velocidad angular,

$$L_g = I_g w_g. \quad (5)$$

Necesitaremos el momento de inercia del giróscopo respecto al versor 'k_o', como el giróscopo es una esfera, está dado por,

$$I_g = \frac{2}{5} m_g R_g^2. \quad (6)$$

Siendo m_g la masa del giróscopo y R_g el radio de la esfera.

Precesiones

Precesión geodética

La expresión del campo gravitomagnético que induce la precesión geodética se obtiene cuando calculamos el campo gravitomagnético que vería el giróscopo. En general, hay un campo gravitomagnético cuando se mueven relativamente fuente (tierra) y campo (giróscopo) con velocidad v.

$$\vec{B}_{t \rightarrow g} = \frac{GM_t}{c_m^2} \frac{\vec{v} \wedge \hat{R}}{R^2}.$$

Este campo lo calculamos desde el sistema de referencia del giróscopo, por lo que,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -\vec{v}_g, \\ \vec{R} &= -\vec{r}_g. \end{aligned}$$

Al considerar la tierra en reposo. Dando,

$$\vec{B}_{t \rightarrow g} = \frac{GM_t}{c_m^2} \frac{\vec{v}_g \wedge \hat{r}_g}{r_g^2}.$$

Con la velocidad del giróscopo dada en (3) y su vector de posición en (2).

$$\vec{B}_{t \rightarrow g} = \frac{-GM_t w_s}{c_m^2 r} \hat{i}_o. \quad (7)$$

Para ver una deducción análoga transportando los cuadvectores mediante una transformación de Lorentz, ver Anexo IV: Campos electromagnéticos en las transformaciones de Lorentz.

El par resultante en el giróscopo viene dado por la expresión de Larmor,

$$\vec{M} = \vec{b} \wedge \vec{B}. \quad (8)$$

Siendo el vector 'b' el momento dipolar gravitomagnético del giróscopo (ver Anexo II: Momento dipolar gravitomagnético) cuyo valor es,

$$\vec{b} = \frac{1}{5} m_g w_g R_g^2 \hat{k}_o.$$

Siendo las constantes la masa, velocidad angular y radio del giróscopo (denotadas con 'g'). Nótese que en la expresión anterior, podemos sustituir el valor del momento de inercia dado en (6),

$$\vec{b} = \frac{I_g w_g}{2} \hat{k}_o.$$

Y nuevamente reemplazar el valor con el momento angular dado en (5),

$$\vec{b} = \frac{L_g}{2} \hat{k}_o. \quad (9)$$

Sustituyendo (7) y (9) en (8),

$$\vec{M} = \frac{-GM_t w_s}{c_m^2 r} \frac{L_g}{2} \hat{j}_o$$

Para calcular la velocidad de precesión, sustituimos la anterior en la (4),

$$\frac{-GM_t w_s}{2 c_m^2 r} \hat{j}_o = \vec{w}_{geo} \wedge \hat{k}_o.$$

De donde deducimos el valor de la velocidad de precesión,

$$\vec{w}_{geo} = \frac{GM_t w_s}{2 c_m^2 r} \hat{i}_o.$$

Podemos calcular el ángulo que se desplaza el eje giroscópico con,

$$\frac{d \varphi_{geo}}{dt} = \frac{GM_t w_s}{2 c_m^2 r}.$$

Sustituyendo (1), y poniendo el ángulo en función del tiempo,

$$\varphi_{geo} = \frac{GM_t w_s}{2 c_m^2 a (1-e^2)} \int_0^{t_f} (1 - e \cos(w_s t)) dt,$$

que podemos integrar para dar,

$$\varphi_{geo} = \frac{GM_t w_s}{2 c_m^2 a (1-e^2)} \left(t_f - \frac{e}{w_s} \sin(w_s t_f) \right).$$

Dominando el resultado el valor de t_f ,

$$\varphi_{geo} = \frac{GM_t w_s t_f}{2 c_m^2 a (1-e^2)}.$$

Que arroja el resultado final,

$$\varphi_{geo} = 4399.74 \text{ marcseg.}$$

Precesión frame-dragging

Esta precesión es directamente la que se obtiene al considerar el efecto del campo gravitomagnético de la tierra en rotación sobre el momento dipolar gravitomagnético del giróscopo.

El campo gravitomagnético de la tierra viene dado por, (ver Anexo III: Campo gravitomagnético creado por un dipolo)

$$\vec{B} = \frac{G}{c_m^2} \left(\frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{m}_t) - \vec{m}_t}{r^3} \right).$$

Con, (ver Anexo II: Momento dipolar gravitomagnético)

$$\vec{m}_t = \frac{1}{5} M_t w_t R_t^2 \hat{j}_o,$$

que sustituido en la anterior,

$$\vec{B} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{5 c_m^2 r^3} (3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \hat{j}_o) - \hat{j}_o).$$

Con el valor del vector de posición del giróscopo (2),

$$\vec{B} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{5 c_m^2 r^3} ((3 \sin^2(\theta) - 1) \hat{j}_o - 3 \sin(\theta) \cos(\theta) \hat{k}_o).$$

Calculamos el par sustituyendo esta última junto con (9), en la expresión de Larmor (8),

$$\vec{M} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{5 c_m^2 r^3} \frac{L_g}{2} (3 \sin^2(\theta) - 1) \hat{i}_o.$$

Para calcular la velocidad de precesión, sustituimos la anterior en la (4),

$$\frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 r^3} (3 \sin^2(\theta) - 1) \hat{i}_o = \vec{w}_{fd} \wedge \hat{k}_o.$$

De donde deducimos el valor de la velocidad de precesión,

$$\vec{w}_{fd} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 r^3} (3 \sin^2(\theta) - 1) \hat{j}_o.$$

Podemos calcular el ángulo que se desplaza el eje giroscópico con,

$$\frac{d \varphi_{fd}}{dt} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 r^3} (3 \sin^2(\theta) - 1).$$

Sustituyendo (1), y poniendo el ángulo en función del tiempo,

$$\varphi_{fd} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 a^3 (1 - e^2)^3} \int_0^{t_f} (1 - e \cos(w_s t))^3 (3 \sin^2(w_s t) - 1) dt,$$

desarrollando el cubo y despreciando términos de 'e' al cuadrado y superiores,

$$\varphi_{fd} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 a^3 (1 - e^2)^3} \int_0^{t_f} (1 - 3e \cos(w_s t)) (3 \sin^2(w_s t) - 1) dt,$$

o,

$$\varphi_{fd} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 a^3 (1-e^2)^3} \int_0^{t_f} (-1 + 3e \cos(w_s t) + 3 \sin^2(w_s t) - 9e \sin^2(w_s t) \cos(w_s t)) dt,$$

resolviendo las integrales,

$$\varphi_{fd} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 a^3 (1-e^2)^3} \left(-t_f + \frac{3e}{w_s} \sin(w_s t_f) + 3 \left(\frac{t_f}{2} - \frac{\sin(2w_s t)}{4w_s} \right) - \frac{3e}{w_s} \sin^3(w_s t) \right),$$

agrupando,

$$\varphi_{fd} = \frac{GM_t w_t R_t^2}{10 c_m^2 a^3 (1-e^2)^3} \left(\frac{t_f}{2} + \frac{3e}{w_s} \sin(w_s t_f) - \frac{3}{4w_s} \sin(2w_s t) - \frac{3e}{w_s} \sin^3(w_s t) \right).$$

Despreciando los términos cíclicos frente a t_f ,

$$\varphi_{fd} = \frac{GM_t w_t R_t^2 t_f}{20 c_m^2 a^3 (1-e^2)^3}.$$

Nos resulta una tasa anual de,

$$\varphi_{fd} = 24,59 \text{ marcseg.}$$

Precesión de Thomas

Como se indica en el Anexo V: Rotación de Wigner y precesión de Thomas, el sistema de referencia del giróscopo lo hemos obtenido con una única transformación de Lorentz, la que hace girar el giróscopo entorno a la tierra. Nótese que hemos asumido que el movimiento relativo de la tierra entorno al giróscopo se describe con una única rotación, no la composición de dos rotaciones (la que hace el giróscopo entorno a la tierra, mas la que hace entorno al eje de giro que pasa por su centro de masa).

Resultados obtenidos

Los resultados se listan en la tabla,

Precesión	Medido (mas/año)	Obtenido	ratio
geodética	6601.8 ± 18.3	4399.74	1.50032
frame-dragging	37.2 ± 7.2	24.59	1.51281

Hemos obtenido correctamente el signo de la precesión pero en ambos casos la predicción ha sido defectiva por un factor de 3/2 aproximadamente. Con esto en mente, se propone una modificación de las ecuaciones del gravitomagnetismo.

Cambios en las ecuaciones de campo gravitomagnético

Las ecuaciones de Maxwell son,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\
\nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\
\vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A}, \\
\vec{E} &= -\nabla V.
\end{aligned}$$

y las del campo másico quedan,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E}_g &= -4\pi G \rho_g, \\
\nabla \cdot \vec{B}_g &= 0, \\
\nabla \wedge \vec{E}_g &= -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\
\nabla \wedge \vec{B}_g &= \frac{4\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}, \\
\vec{B}_g &= \nabla \wedge \vec{A}_g, \\
\vec{E}_g &= -\nabla V_g.
\end{aligned}$$

Se propone el cambio,

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge \vec{E}_g &= -\frac{2}{3} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\
\nabla \wedge \vec{B}_g &= \frac{6\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}.
\end{aligned}$$

El primer cambio para mantener el resultado establecido en [12], y el segundo para que cuadren los resultados de este experimento.

Ecuación de ondas

Las ecuaciones en el vacío quedan,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E}_g &= 0, \\
\nabla \cdot \vec{B}_g &= 0,
\end{aligned}$$

por lo que la divergencia de ambos campos es nula. Y los rotacionales,

$$\nabla \wedge \vec{E}_g = -\frac{2}{3} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \tag{10}$$

Y,

$$\nabla \wedge \vec{B}_g = \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}. \tag{11}$$

Usaremos la identidad,

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{x}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{x}) - \nabla^2 \vec{x}. \tag{12}$$

Tomando el producto vectorial de nabra con el rotacional de cada campo, podemos deducir las ecuaciones de onda.

Para el campo gravitatorio,

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}_g) = \frac{-2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{B}_g,$$

que, sustituyendo la (11) en el lado derecho y usando la igualdad (12) para el lado izquierdo,

$$-\nabla^2 \vec{E}_g = \frac{-2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t},$$

que se simplifica a,

$$\nabla^2 \vec{E}_g = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_g}{\partial t^2}.$$

Por ser la divergencia del campo nula.

Para el campo gravimagnético, análogamente,

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{B}_g) = \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{E}_g.$$

que, sustituyendo la (10) en el lado derecho y usando la igualdad (12) para el lado izquierdo,

$$-\nabla^2 \vec{B}_g = \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{-2}{3} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t},$$

que se simplifica a,

$$\nabla^2 \vec{B}_g = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_g}{\partial t^2}.$$

Por ser la divergencia del campo nula.

Comentario final

Aunque modificando las ecuaciones gravimagnéticas nos lleva a un resultado congruente con todos los experimentos analizados, es un resultado poco satisfactorio.

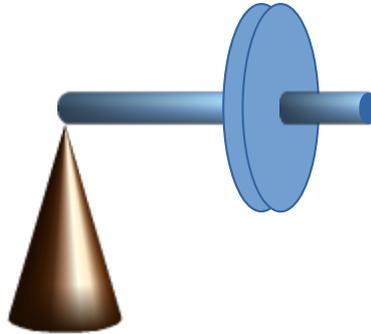
Como, igualmente poco satisfactorio, es que las variaciones en la lectura que se producen durante la medida, no quedan explicadas con los términos cíclicos que hemos obtenido en el modelo. Mirando la FIG.3 de [2], vemos que las variaciones son de 6 órdenes de magnitud para geodetic y 3 órdenes de magnitud para frame-dragging (aproximadamente, sólo nos interesa mostrar la diferencia del término cíclico),

Precesión	Medido	Obtenido
geodética	6600 ± 100	$6600 \pm 3e-4$
frame-dragging	40 ± 10	$37 \pm 8e-2$

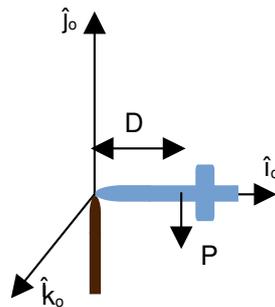
Anexo I: Movimiento giroscópico

Ejemplo

Vamos a resolver el problema del giróscopo que aparece en la referencia [13], y cuyo esquema aparece en la figura.



Se trata de calcular la precesión que experimenta el giróscopo (azul) apoyado por su extremo cuando está girando, y sólo sometido a su peso (y a la reacción correspondiente en el soporte), que actúa sobre el centro de masas, que se encuentra a una distancia D del origen.



El giróscopo se apoya sobre su extremo izquierdo en el soporte (marrón), coincidiendo ese punto con el origen del sistema de referencia. En el instante inicial, el eje de rotación del giróscopo apunta al eje ' i_0 '. Y el peso del giróscopo sobre la dirección contraria a ' j_0 '. La masa del giróscopo es m . Existe un sistema de referencia adicional $\langle 'i', 'j', 'k' \rangle$, que no hemos dibujado, que rota solidariamente con el giróscopo durante la precesión e inicialmente coincide con el sistema $\langle 'i_0', 'j_0', 'k_0' \rangle$; ambos comparten en todo momento el origen de coordenadas. Nótese que ' j_0 ' es siempre coincidente con el versor ' j '.

Expresamos todas las cantidades en este sistema móvil, por simplicidad, ya que el momento de las fuerzas y el momento angular del giróscopo no cambian de dirección en este sistema durante la precesión.

Los problemas de giróscopos se resuelven siguiendo siempre los mismos pasos.

1. calculamos el momento de las fuerzas. Si lo calculamos en O (origen de ambos sistemas de referencia), evitamos la fuerza de reacción que compensa el peso del giróscopo.

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = -m g D \hat{k}.$$

2. Calculamos la derivada del momento angular. Para ello seleccionamos un punto fijo, el centro del sistema coordenado 'O' (esto simplifica la ecuación resultante) Se asume que la velocidad de rotación sobre sí mismo y el momento de inercia del giróscopo no cambian ($L_o=I_o$ $w_o=$ constante), por lo que la variación temporal es sólo una variación en la dirección del vector momento angular, $\vec{L}_o=L_o\hat{e}$. En este caso, hemos seleccionado, $\hat{e}=\hat{i}$.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt}=L_o\frac{d\hat{i}}{dt}=\vec{M}_o.$$

entonces,

$$L_o\frac{d\hat{i}}{dt}=-mgD\hat{k}.$$

O,

$$\frac{d\hat{i}}{dt}=\frac{-mgD}{L_o}\hat{k}.$$

3. Usamos la ecuación de derivación en ejes móviles para predecir la velocidad de precesión. La ecuación en ejes móviles asume que existe un sistema de referencia adicional, el que no hemos dibujado, que se mueve solidariamente con el giróscopo durante la precesión, siempre es la misma ecuación,

$$\frac{d\hat{i}}{dt}=\vec{w}\times\hat{i}.$$

4. Eliminamos la variación temporal con la anterior,

$$\frac{-mgD}{L_o}\hat{k}=\vec{w}\times\hat{i}.$$

Eliminamos la parte vectorial de la ecuación imponiendo que el vector 'w' sólo puede ser,

$$\vec{w}=w\hat{j}.$$

De donde calculamos el valor de w,

$$\frac{mgD}{L_o}=w.$$

Que es la velocidad de precesión (no confundir con la velocidad de giro sobre sí mismo del giróscopo w_o).

Ecuación del eje giroscópico

Resumiendo, para el versor del eje giroscópico, se cumple la relación,

$$\frac{d\hat{e}}{dt}=\vec{w}\times\hat{e}. \quad (13)$$

que es la ecuación de derivación en ejes móviles del versor 'e'. Y el vector 'w' la velocidad de precesión del eje 'e'.

El par que crean las fuerzas es,

$$\vec{M}_o=\vec{r}\times\vec{F}.$$

La derivada del momento angular sería,

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o.$$

Donde los subíndices 'o' nos recuerdan que estamos calculando todo en un punto fijo o en el centro de masas. Por lo que la anterior queda,

$$L_o \frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{M}_o.$$

Pasando al principio del segundo miembro todo lo que es escalar e identificando con la (13),

$$\frac{\vec{M}_o}{L_o} = \vec{w} \times \hat{e}. \quad (14)$$

Podemos calcular la velocidad angular 'w' de precesión del eje.

Ecuación de precesión del eje

Esta ecuación no puede resolverse directamente; sin entrar en muchos detalles, hace falta la introducción de cuaternios para resolverla (gracias Hamilton!)

La ecuación en forma de cuaternios es,

$$\frac{d\tilde{e}}{dt} = \tilde{w} \otimes \tilde{e}.$$

Donde el gorro curvado indica que el vector es cuaternio y, el producto encerrado en el círculo, el producto de cuaternios. Que puede resumirse,

$$\tilde{w} \otimes \tilde{e} = (w_o e_o - \vec{w} \cdot \hat{e}) + w_o \hat{e} + e_o \vec{w} + \vec{w} \times \hat{e}.$$

siendo las componentes con subíndice cero la parte real del cuaternio, y las partes con vectores las imaginarias.

En nuestro caso, $w_o=0$ y, en el instante inicial, $e_o=0$.

En resumen, esto introduce la ecuación en 4 dimensiones,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_o \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(w_x e_1 + w_y e_2 + w_z e_3) \\ w_x e_o + w_y e_3 - w_z e_2 \\ w_y e_o + w_z e_1 - w_x e_3 \\ w_z e_o + w_x e_2 - w_y e_1 \end{bmatrix}.$$

y del cuaternio del versor, sacamos el versor como,

$$\hat{e} = \frac{1}{\sin(\arccos(e_o))} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

Cuando $e_o \neq 0$, porque en ese caso, el versor 'e' se define como el cuaternio unidad,

$$\tilde{e} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{e} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

No obstante, esta ecuación tiene un coste computacional elevado, y para este ejemplo nos conformamos con el cálculo del ángulo en cada componente de forma independiente.

Anexo II: Momento dipolar gravitomagnético

Cuando un objeto con masa gira sobre sí mismo, posee un momento dipolar gravitomagnético dado por,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \wedge \vec{J} dV.$$

Para una esfera en rotación, y analizando el problema en coordenadas esféricas, quedan los vectores,

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho \vec{v}, \\ \vec{v} &= \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \\ \vec{r} = r \hat{r} &= r (\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i}_o + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j}_o + \cos(\theta) \hat{k}_o), \\ \vec{\omega} &= \omega \hat{k}_o. \end{aligned}$$

Donde se ha seleccionado el eje k_o para la dirección del vector de rotación.

Queda la integral volumétrica,

$$\vec{m} = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R_g} \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi.$$

Introducido ya el determinante del Jacobiano para coordenadas esféricas.

Y vamos a usar la relación,

$$\hat{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\hat{r} (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) + \vec{\omega} (\vec{r} \cdot \hat{r}) = -\hat{r} (r \omega \cos(\theta)) + \omega r^2 \hat{k}_o.$$

Para dar,

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{-\rho \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R_g} (\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i}_o + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j}_o + \cos(\theta) \hat{k}_o) r^4 \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta d\phi \\ &\quad + \rho \pi \omega \hat{k}_o \int_0^\pi \int_0^{R_g} r^4 \sin(\theta) dr d\theta, \end{aligned}$$

donde ya hemos resuelto una de las integrales iteradas.

Nótese que las integrales que tienen al seno/coseno de ϕ se anulan en el intervalo $[0-2\pi]$,

$$\vec{m} = -\rho \pi \omega \hat{k}_o \int_0^\pi \int_0^{R_g} r^4 \sin(\theta) \cos^2(\theta) dr d\theta + \rho \pi \omega \hat{k}_o \int_0^\pi \int_0^{R_g} r^4 \sin(\theta) dr d\theta,$$

Resolvemos las de la coordenada radial,

$$\vec{m} = \frac{-\rho \pi \omega R_g^5 \hat{k}_o}{5} \int_0^\pi \sin(\theta) \cos^2(\theta) d\theta + \frac{\rho \pi \omega R_g^5 \hat{k}_o}{5} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta,$$

Y, finalmente,

$$\vec{m} = \frac{-\rho \pi \omega R_g^5 \hat{k}_o}{5} \frac{2}{3} + \frac{\rho \pi \omega R_g^5 \hat{k}_o}{5} 2 = \frac{4}{15} \rho \pi \omega R_g^5 \hat{k}_o,$$

Introduciendo en la anterior,

$$\rho = \frac{m_g}{4/3 \pi R_g^3},$$

Resulta,

$$\vec{m} = \frac{1}{5} m_g w R_g^2 \hat{k}_o,$$

que es el valor que vamos a usar para calcular precesiones.

Como nota interesante, el momento dipolar magnético se define para partículas como el electrón, y su relación con el momento angular 'L' (momento de la cantidad de movimiento) lleva a definir un factor de conversión entre ambos vectores denominado relación giromagnética o g-factor (γ ; nada que ver con el factor de Lorentz) que últimamente está dando mucho que hablar ya que apunta a la existencia de nueva física.

$$\vec{m} = \gamma \vec{L}.$$

Además, es una de las constantes medidas con mayor precisión hasta la fecha.

Anexo III: Campo gravitomagnético creado por un dipolo

Se detalla en la referencia [5]. Lo resumimos aquí,

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{m}_t) - \vec{m}_t}{r^3} \right).$$

adaptado al gravitomagnetismo,

$$\vec{B} = \frac{G}{c_m^2} \left(\frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{m}_t) - \vec{m}_t}{r^3} \right).$$

Siendo el vector 'm_t' el momento dipolar gravitomagnético de la tierra.

Anexo IV: Campos electromagnéticos en las transformaciones de Lorentz

Las ecuaciones que encontramos en la referencia [11] nos permiten transformar los vectores de campo electromagnético desde un sistema de referencia a otro; estando ambos relacionados por una transformación de Lorentz. Las expresiones son,

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \wedge \vec{B}}{c} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{E})}{c^2},$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{B})}{c^2}.$$

Siendo los campos prima los valores en el nuevo sistema de referencia.

Para el campo gravitomagnético, tendríamos,

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \wedge \vec{B}}{c_m} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{E})}{c_m^2},$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c_m^2} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{B})}{c_m^2}.$$

Aunque sólo podremos probar en este ejemplo,

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c_m^2} \right).$$

Precesión geodética

La expresión del campo en el sistema del giróscopo se obtiene mediante,

$$\vec{B}' = -\gamma \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c_m^2}$$

Para este caso, el factor de Lorentz vale la unidad, y el campo se obtiene,

$$\vec{E}_{t \rightarrow g} = \frac{-GM_t \hat{R}}{R^2}.$$

obtenemos el campo en el sistema móvil,

$$\vec{B}_{t \rightarrow g} = \frac{GM_t}{c_m^2} \frac{\vec{v} \wedge \hat{R}}{R^2}.$$

Con,

$$\vec{v} = \vec{v}_g,$$

$$\vec{R} = \vec{r}_g.$$

Al considerar la tierra en reposo. Dando,

$$\vec{B}_{t \rightarrow g} = \frac{GM_t}{c_m^2} \frac{\vec{v}_g \wedge \hat{R}}{R^2}.$$

Con la velocidad del giróscopo dada en (3) y su vector de posición en (2). Cuyo resultado es idéntico a (7).

Precesión frame-dragging

La expresión del campo en el sistema del giróscopo se obtiene mediante,

$$\vec{B}' = \gamma \vec{B}.$$

Para este caso, el factor de Lorentz vale la unidad, y el valor del campo se calcula como en el sistema en reposo.

Anexo V: Rotación de Wigner y precesión de Thomas

Transformaciones colineales

Vamos a aplicar dos transformaciones de Lorentz ('boost') sucesivas sobre el eje y (genérico) y vamos a comprobar que ambas transformaciones son equivalentes a una única transformación de Lorentz (pura), de velocidad, la velocidad compuesta de ambas (según las reglas de la relatividad especial).

La primera transformación se describe mediante la matriz,

$$\begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Siendo γ el factor de Lorentz y,

$$\beta = v/c.$$

Para realizar una segunda transformación, volvemos a multiplicar matricialmente de nuevo,

$$\begin{bmatrix} ct_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & -\beta_2 \gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo el producto,

$$\begin{bmatrix} ct_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) & 0 & -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & 0 & \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

La velocidad compuesta de las dos transformaciones, según las reglas de la relatividad especial es,

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \quad (15)$$

El factor de Lorentz para esa velocidad sería,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}\right)^2}} = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 + \beta_1^2 \beta_2^2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2)}}.$$

Mientras que, multiplicando los dos factores de Lorentz de cada transformación,

$$\gamma_1 \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_1^2 \beta_2^2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2)}}.$$

Sustituyendo en la anterior,

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2).$$

Y multiplicando (15) por esta última,

$$\beta \gamma = \gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2).$$

Lo que permite expresar la matriz compuesta, de nuevo, como,

$$\begin{bmatrix} ct_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Que es la expresión de una transformación de Lorentz.

Transformaciones ortogonales no colineales

Cuando dos transformaciones sucesivas no son colineales, la matriz de Lorentz pura (L) es el producto de una matriz de rotación (R) seguida una transformación de Lorentz (B). La matriz de rotación representa la rotación de Wigner^[9].

$$L = R \cdot B.$$

Es igualmente válido suponer que la rotación (R') se aplica tras el boost,

$$L = B \cdot R'.$$

Pero vamos a usar aquí la primera forma.

Si obtenemos la derivada temporal del ángulo de rotación, obtenemos la velocidad de precesión, denominada precesión de Thomas.

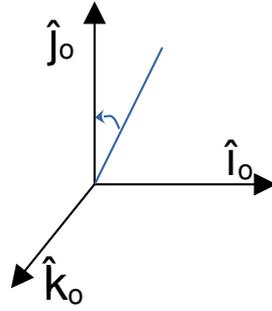
Nótese que para que exista precesión de Thomas hacen falta dos condiciones:

1. El sistema de referencia en que hacemos los cálculos se obtiene como composición de dos transformaciones de Lorentz no colineales.
2. La derivada del ángulo de la matriz de rotación respecto al tiempo debe ser no nula.

Aunque no existen (o no las he encontrado aún) referencias que traten las transformaciones de Lorentz en sistemas de referencia no cartesianos, vamos a suponer que la transformación de Lorentz que describe el movimiento del giróscopo en esféricas tiene la forma,

$$\begin{bmatrix} ct_1 \\ r_1 \\ r_1 \theta_1 \\ r_1 \sin(\theta_1) \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_0 \\ r_0 \\ r_0 \theta_0 \\ r_0 \sin(\theta_0) \phi_0 \end{bmatrix}.$$

Donde el sistema 1 es el que se obtiene de hacer un boost sobre el eje $\hat{\theta}_0, \vec{\beta}_1 = \frac{v_\theta}{c}$. Y hacemos un nuevo boost sobre el eje $\hat{\phi}_1, \vec{\beta}_2 = \frac{v_\phi}{c}$ para definir el sistema 2, que se mueve solidariamente con el giróscopo en su giro. Esto es, el primer boost describe la rotación entorno a la tierra, y el segundo la rotación del giróscopo sobre sí mismo. Ver figura para la definición el ángulo ϕ_1 .



Nótese que los dos boost son ortogonales.

$$\begin{bmatrix} ct_2 \\ r_2 \\ r_2 \theta_2 \\ r_2 \text{sen}(\theta_2) \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_1 \\ r_1 \\ r_1 \theta_1 \\ r_1 \text{sen}(\theta_1) \phi_1 \end{bmatrix}.$$

La composición resulta en la matriz,

$$\begin{bmatrix} ct_2 \\ r_2 \\ r_2 \theta_2 \\ r_2 \text{sen}(\theta_2) \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_0 \\ r_0 \\ r_0 \theta_0 \\ r_0 \text{sen}(\theta_0) \phi_0 \end{bmatrix}.$$

O,

$$\begin{bmatrix} ct_2 \\ r_2 \\ r_2 \theta_2 \\ r_2 \text{sen}(\theta_2) \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \gamma_2 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 \gamma_2 & -\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_1 \gamma_2 & 0 & \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_0 \\ r_0 \\ r_0 \theta_0 \\ r_0 \text{sen}(\theta_0) \phi_0 \end{bmatrix}.$$

Ésta es nuestra matriz de transformación B. La matriz R se define como una rotación sobre el eje que ha quedado sin modificar, en este caso,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

el producto queda,

$$L = R \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \gamma_2 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 \gamma_2 & -\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_1 \gamma_2 & 0 & \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Que resulta,

$$L = \begin{bmatrix} \gamma_1 \gamma_2 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 \gamma_2 & -\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 \cos \varphi + \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \sin \varphi & 0 & \gamma_1 \cos \varphi - \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \sin \varphi & -\gamma_2 \sin \varphi \\ -\beta_1 \gamma_1 \sin \varphi - \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \varphi & 0 & \gamma_1 \sin \varphi + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \varphi & \gamma_2 \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Ahora imponemos que la matriz L es una transformación de Lorentz pura, esto es, que es simétrica. Esto permite obtener una serie de ecuaciones todas análogas. Por lo que usamos la mas simple para definir el ángulo,

$$-\gamma_2 \sin \varphi = \gamma_1 \sin \varphi + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \varphi,$$

dividiendo por el coseno y despejando para la tangente,

$$\tan \varphi = \frac{-\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1}.$$

Puesto que el ángulo es pequeño, aplicamos el infinitésimo de la tangente por el ángulo,

$$\varphi = \frac{-\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1}.$$

Asumiendo que los factores de Lorentz son de orden unidad; y derivando respecto al tiempo, supuesta la velocidad 2 constante (rotación constante),

$$\dot{\varphi} = \frac{-a_1 v_2}{2 c^2}.$$

Y esta es la expresión de la precesión de Thomas en esta transformación.

Referencias

- [1] Gravity probe b en wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/Gravity_Probe_B
- [2] Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity. arXiv:1105.3456 [gr-qc]. <https://arxiv.org/abs/1105.3456>
- [3] Gravity Probe B. NASA Facts. https://einstein.stanford.edu/content/fact_sheet/GPB_FactSheet-0405.pdf
- [4] Apuntes UPV. Análisis y ejemplos de órbitas elípticas. <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/132654/Mora%C3%B1o%20-%20An%C3%A1lisis%20y%20ejemplos%20de%20%C3%B3rbitas%20el%C3%ADpticas.pdf?sequence=1>
- [5] Rotating Charged Sphere. Marvin Zanke. https://physics-and-stuff.com/media/H7_1.pdf
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Larmor_precession
- [7] Explanation of Gravity Probe B Experimental Results using Heaviside-Maxwellian (Vector) Gravity in Flat Space-time. arXiv:2002.12124 [physics.gen-ph]. <https://arxiv.org/abs/2002.12124>
- [8] Gravitomagnetism, Jets in Quasars, and the Stanford Gyroscope Experiment. https://einstein.stanford.edu/content/sci_papers/papers/nz-Thorne_101.pdf
- [9] Generic composition of boosts: an elementary derivation of the Wigner rotation. arXiv:physics/0211022 [physics.ed-ph]. <https://arxiv.org/abs/physics/0211022>

- [10] Mass wave model and speed propagation estimation. <https://vixra.org/abs/2211.0020>
- [11] Classical Electrodynamics 3° ed. Jackson, JD. Wiley.
- [12] Mercury perihelion precession with special relativity of fields.
<https://vixra.org/abs/2305.0030>
- [13] Fisica. Tomo I. Paul A. Tipler. Ed Reverté.