Title: Identificación de sistemas lineales

Abstract
Repaso a los métodos existentes y propuesta de alguno nuevo.

Autor: Enrique Domínguez Pinos.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Málaga, 1 de Febrero de 2023

Table of Contents

Introducción

Para identificar el modelo podemos recurrir a dos procedimientos:
1) proponer la ecuación de respuesta de la planta ante una entrada dada; por lo que sólo tenemos que ajustar algunos parámetros (método 1)
2) proponer el modelo de la planta con todos los parámetros libres (método 2)
Todo empieza por la selección del orden de la planta; esto es, numero de polos y ceros de la misma. Aunque existen métodos para identificar el orden también[1].
Suponemos que tenemos la respuesta de la planta (completa o incompleta) ante una entrada conocida.

Método 1

Vamos a suponer que queremos identificar un modelo dado por,

$$x(t)=\frac{k}{a}\left(1-e^{-at}\right).$$

con transformada de Laplace,

$$X(s)=\frac{k}{s(s+a)}.$$

Y transformada Z,

$$X(z)=\frac{k}{a}\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{1-(1+e^{-aT})z^{-1}+e^{-aT}z^{-2}}.$$

A partir de la transformada de laplace,

$$(s+a)X(s)=\frac{k}{s},$$

podemos construir su ecuación diferencial,

$$\frac{dx}{dt}=k-ax. \tag{1}$$

Identificación mediante derivación de la salida

Reescribamos su ecuación de forma más compacta,

$$\dot{x}=k-ax.$$

Dada su ecuación diferencial, si tenemos puntos de la curva de respuesta suficientes para hacer una diferenciación numérica, podemos despejar los parámetros en función a estas derivadas.

$$\ddot{x}=-a\dot{x},$$
$$\frac{-\ddot{x}}{\dot{x}}=a.$$

Que nos da la aproximación para cada parámetro,

$$a=\frac{-\ddot{x}}{\dot{x}},$$
$$k=\dot{x}+ax.$$

Con la estimación de a, calculamos k, en la segunda ecuación.

Identificación mediante discretización de sistema continuo

Para usar este método aproximamos las derivadas por expresiones en diferencias finitas para $O(T^2)$,

$$\frac{dx}{dt}\simeq\frac{x(k+1)-x(k-1)}{2T},$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}\simeq\frac{x(k+1)-2x(k)+x(k-1)}{T^2}.$$

Del mismo modo que aproximamos con diferencias finitas podríamos usar una expresión de runge kutta, adams o similar, que nos proporcione un error de aproximación inferior.

Ejemplo orden 1

Partiendo de la ecuación diferencial del sistema (1), discretizamos las derivadas de la función y obtenemos una ecuación en diferencias,

$$\frac{x(k+1)-x(k-1)}{2T}=k-ax(k),$$

Despejando x(k+1),

$$x(k+1)=x(k-1)+2T[1,-x(k)]\begin{bmatrix}k\\a\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

Si tenemos N muestras de la salida, k estará en el rango [2, N-1].

Llamando M a la matrix no cuadrada, en general. y $\bar{\theta}$ al vector de parámetros,

$$\bar{\bar{M}}=2T[1,-x(k)],$$
$$\bar{\theta}=\begin{bmatrix}k\\a\end{bmatrix}.$$

Nos queda la ecuación en diferencias (2),

$$x(k+1)=x(k-1)+\bar{\bar{M}}\,\bar{\theta}.$$

Donde x(k+1) es el valor que estamos prediciendo, en base a los valores anteriores de k, por lo que escribiremos $\tilde{x}(k+1)$,

$$\tilde{x}(k+1)=x(k-1)+\bar{\bar{M}}\,\bar{\theta}. \qquad (3)$$

Si escribimos el vector de error, comparando el valor predicho con el que tenemos de las medidas,

$$e(k+1)=x(k+1)-\tilde{x}(k+1).$$

Sustituyendo la aproximación (3),

$$e(k+1)=x(k+1)-x(k-1)-\bar{\bar{M}}\,\bar{\theta},$$

Llamando,

$$\bar{v}=x(k+1)-x(k-1),$$

queda la ecuación final,

$$e(k+1)=\bar{v}-\bar{\bar{M}}\,\bar{\theta}, \qquad (4)$$

Cuya solución tomaremos,

$$\bar{\theta}=\left(\bar{\bar{M}}^T\bar{\bar{M}}\right)^{-1}\bar{\bar{M}}^T\,\bar{v}.$$

Que es la pseudoinversa en el sentido de minimizar el error cuadrático.

La ecuación vectorizada en formato octave (los vectores empiezan en el índice 1), quedaría

$$M=2T[\mathrm{ones}(N-2,1),-x(2:N-1)];$$
$$v=x(3:N)-x(1:N-2);$$

Con x un vector fila Nx1, y M una matriz N-2x2.

Método 2

Ahora no proponemos una ecuación de salida de la planta, tan solo su número de polos y ceros,

Identificación mediante discretización de sistema continuo

Ejemplo orden 3

El método de discretización se puede aplicar a cualquier orden usando las dos fórmulas de discretización y aplicando variables intermedias cuando sea requerido.

$$X(s)=\frac{b_o}{s^4+a_2 s^3+a_1 s^2+a_0 s}.$$

Obteniendo su ecuación diferencial y definiendo,

$$\frac{d x_0}{dt}=x_1,$$

podemos obtener la ecuación en derivadas segundas,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2}=-a_2\frac{d^2 x_0}{dt^2}-a_1\frac{d x_0}{dt}-a_0 x_0+b_0.$$

Siendo x_0 la salida del sistema.
Discretizando ambas,

$$x_1(k)=\frac{x_0(k+1)-x_0(k-1)}{2T},$$

$$\frac{x_1(k+1)-2x_1(k)+x_1(k-1)}{T^2}=-a_2\frac{x_0(k+1)-2x_0(k)+x_0(k-1)}{T^2}-a_1 x_1(k)-a_0 x_0(k)+b_{0.}$$

En la primera calculamos $x_1(k)$; y despejando $x_1(k+1)$ para la segunda, quedan las matrices,

$$\bar{\bar{M}}=T^2\left[-\frac{x_0(k+1)-2x_0(k)+x_0(k-1)}{T^2},-x_1(k),-x_0(k),1\right],$$

$$\bar{\theta}=\begin{bmatrix}a_2\\a_1\\a_0\\b_0\end{bmatrix},$$

$$\bar{v}=-2x_1(k)+x_1(k-1).$$

Con $k\in[2,N-1]$.
Primero calculamos x_1 y, después la matriz M.
La ecuación indexada para octave queda,

$$x_1(2:N-1)=\frac{x_0(3:N)-x_0(1:N-2)}{2T}.$$

Y podemos usar los valores extremos para fijar condiciones de contorno,

$$x_1(1)=\frac{d x_0(1)}{dt},$$

$$x_1(N)=\frac{d x_0(N)}{dt}.$$

O emplear una formula en diferencias apta para los extremos del intervalo que aproxime la derivada.

Identificación mediante sistema discreto

Discretizar mediante un modelo de referencia (método 1) no lleva a resultados correctos. Partiendo de un sistema discreto, se tienen mejores resultados simplemente dejando todos los parámetros libres e imponiendo sólo número de polos y ceros.

Ejemplo orden 2

Dado el sistema,

$$X(z)=\frac{b_0}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}.$$

Obtenemos su ecuación en diferencias; y despejamos x(k),

$$\tilde{x}(k)=-a_1 x(k-1)-a_2 x(k-2)+b_0.$$

Y sus matrices de parámetros,

$$\bar{\bar{M}}=[-x(k-1),-x(k-2),1],$$
$$\bar{\theta}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\b_0\end{bmatrix},$$
$$\bar{v}=x(k).$$

Con $k\in[3,N]$.

Ejemplo orden 3

Dado el sistema,

$$X(z)=\frac{b_0}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+a_3 z^{-3}}.$$

Y sus matrices de parámetros,

$$\bar{\bar{M}}=[-x(k-1),-x(k-2),-x(k-3),1],$$
$$\bar{\theta}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\b_0\end{bmatrix},$$
$$\bar{v}=x(k).$$

Con $k\in[4,N]$.

La ecuación vectorizada en formato octave, quedaría

$$M=[-x(3:N-1),-x(2:N-2),-x(1:N-3),\mathrm{ones}(N-3,1)];$$
$$v=x(4:N);$$

Filtrado de la señal

Si estamos interesados en predecir el valor de la salida, podría ser útil prefiltrar la salida antes de la identificación.

Referencias

[1] Documentación de octave forge del paquete ‘control’.

[2] Control de procesos industriales (pag.58)