# On the mathematical model of economic dynamics
# О математической модели экономической динамики.

Liberzon R. E.
Либерзон Р. Е.

**Abstract**

Under the most general assumptions, a resolving system of ordinary differential-difference equations of arbitrary order is obtained. Its characteristic determinant, assuming equality of coefficients characterizing interaction between different subjects of mathematical model, is reduced to the tridiagonal Jacobi determinant. The latter is equal to the linear homogeneous difference equation of the $2^{nd}$ order, whose solution is obtained by the Daniel Bernoulli (Jacques Binet) approach, and the recurrence relation method.

It is shown that for an arbitrary set of non-zero coefficients of interaction all characteristic numbers are complex numbers with positive real parts, wherefrom it follows that all solutions of the original system of differential equations are a linear combination of diverging harmonic oscillations, the maximum period of which (crisis period) is equal $T_{max} = 2\pi \,/\sqrt{bc}$ , where $b$ and $c$ – are the investment coefficients.

It is shown that crises can be avoided in anarchic economy and authoritarian economy.

A method for studying phase transitions in the processes of economic dynamics has been identified.

***Keywords***— Mathematical model, economic dynamics, differential–difference equation, characteristic complex numbers, divergent harmonic oscillations, phase transition.

**Реферат**

При самых общих предположениях получена разрешающая система обыкновенных дифференциально-разностных уравнений произвольного порядка. Её характеристический определитель при условии равенства коэффициентов взаимодействия между отдельными субъектами математической модели после нормировки неизвестных сведен к 3-х диагональному определителю Якоби, который сведен к линейному однородному разностному уравненению 2-го порядка, решение которого получено методом Даниила Бернулли (Жака Бине) и методом полученных рекуррентных соотношений.

Показано, что при любых не равных нулю коэффициентах взаимодействия все характеристические числа являются комплексными числами с положительными действительными частями, из чего следует, что все решения исходно1 системы дифференциальных уравнений есть линейная комбинация расходящихся гармонических колебаний, максимальный период (т.е. период кризисов) которых равен $T_{max} = 2\pi/\sqrt{bc}$, где $b$ и $c$ – коэффициенты инвестиций.

Показано, что избежать кризисов можно при анархической экономике и при авторитарной экономике.

Намечен способ исследования фазовых переходов в процессах экономической динамики.

***Ключевые слова*** — Математическая модель, экономическая динамика, дифференциально–разностное уравнение, характеристические комплексные числа, расходящиеся гармонические колебания, фазовый переход.

Рассматривается цепочка множеств, имеющая числовую характеристику $N_k$, являющуюся некой интегральной оценкой. Эта модель хорошо описывает взаимодействие цепочки фирм, работающих на выпуск определенной продукции. Характерный пример – холдинг, выпускающий определенный класс механизмов. Он включает в себя геологическую разведку, горнодобывающие структуры, горнообогатительный комбинат, мартеновское производство, прокатные станы, металлообрабатывающие заводы, закупочные структуры (входящие комплектующие), сборочные заводы, торговые организации, банки. Будем считать, что за время $\Delta t$ приращение $\Delta N_k$ будет равно:

$$\Delta N_k = (aN_k + bN_{k-1} - cN_{k+1})\Delta t$$

Здесь $a$ — декремент возрастания;

$b$ — отчисления от множества $N_{k-1}$;

$c$ — инвестиции в множество $N_{k+1}$

Разделив обе части на $\Delta t$ и, переходя к пределу, по определению производной получим:

$$N_k^{'} = aN_k + bN_{k-1} - cN_{k+1} \tag{1}$$

Равенство (1) это система однородных линейных дифференциальных уравнений ($k = 1, 2, 3, ...K$).

Составим характеристический определитель системы и приравняем его к нулю.

$$J_k = \begin{vmatrix} \lambda - a & c & 0 & 0 & 0 & ... \\ -b & \lambda - a & c & 0 & 0 & ... \\ 0 & -b & \lambda - a & c & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} \tag{2}$$

Здесь $\lambda$ — характеристическое число системы (1).

Для раскрытия определителя $J_k$ воспользуемся следующим приемом. Раскрывая определитель по элементам 1-го столбца, получим:

$$J_k = (\lambda - a)J_{k-1} + bcJ_{k-2} \tag{3}$$

Уравнение (3) — линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка.

Введем обозначения

$$I_k = J_k(bc)^{-\frac{k}{2}}; \qquad \xi = (\lambda - a)(bc)^{-\frac{1}{2}}$$

Теперь уравнение (3) можно переписать в виде

$$I_k = \xi I_{k-1} + I_{k-2} \tag{4}$$

Воспользуемся методом Даниила Бернулли. Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$I_k = A\mu^k \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), найдем

$$A\mu^k - \xi A\mu^{k-1} - A\mu^{k-2} = 0$$

Если $A \neq 0$, $\mu \neq 0$, то получим характеристическое уравнение разностного уравнения.

$$\mu^2 - \xi\mu - 1 = 0 \tag{6}$$

Отсюда

$$\mu_{1,2} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 4}}{2} \tag{7}$$

Теперь общее решение уравнения (3) можно записать в виде:

$$I_k = A\mu_1^k + B\mu_2^k \tag{8}$$

Произвольные константы $A$ и $B$ найдем из (2).

$$I_1 = \frac{J_1}{\sqrt{bc}} = \frac{\lambda - a}{\sqrt{bc}} = \xi$$
$$I_2 = \frac{J_2}{bc} = \frac{(\lambda - a)^2 + bc}{bc} = \xi^2 + 1$$

Подставляя в эти равенства общее решение (8), получим систему уравнений относительно констант

$$\begin{cases} A\mu_1 + B\mu_2 = \xi \\ A\mu_1^2 + B\mu_2^2 = \xi^2 + 1 \end{cases}$$

Отсюда

$$A = \frac{\xi^2 - \xi\mu_2 + 1}{\mu_1^2 + 1}$$

$$B = \frac{\xi^2 - \xi\mu_1 + 1}{\mu_2^2 + 1}$$

Итак, общее решение разностного уравнения (7) может быть представлено в виде

$$I_k = \frac{\xi^2 - \xi\mu_2 + 1}{\mu_1^2 + 1}\mu_1^k + \frac{\xi^2 - \xi\mu_1 + 1}{\mu_2^2 + 1}\mu_2^k$$

Приравнивая полученное $I_k$ к нулю, получим характеристическое уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений (1).
В приложениях для конкретных $k$ удобно пользоваться рекуррентным уравнением (4). Приведем первые несколько решений.

$$I_1 = \xi$$
$$I_2 = \xi^2 + 1$$
$$I_3 = \xi I_2 + I_1 = \xi^3 + 2\xi$$
$$I_4 = \xi I_3 + I_2 = \xi^4 + 3\xi^2 + 1$$
$$I_5 = \xi I_4 + I_3 = \xi^5 + 4\xi^3 + 3\xi$$
$$I_6 = \xi I_5 + I_4 = \xi^6 + 5\xi^4 + 6\xi^2 + 1$$
$$I_7 = \xi I_6 + I_5 = \xi^7 + 6\xi^5 + 10\xi^3 + 4\xi$$
..................................................

Интересно отметить, что суммы коэффициентов выписанных полиномов представляют собой последовательные числа ряда Фибоначчи

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

а сумма 10-ти первых чисел ряда Фибоначчи равна 7-му, умноженному на 11 (здесь $11 \cdot 21 = 231$).

Для иллюстрации предложенного подхода и выявления закономерностей приведем результаты для различного количества связанных множеств.

1. Изолированное множество
   Характеристическое уравнение

   $$I_1 = \xi = 0$$

   Отсюда

   $$\lambda = a$$

   Общее решение дифференциального уравнения будет

   $$N = Ce^{at}$$

2. Два связанных множества

   $$I_{_{II}} = \xi^2 + 1 = 0$$

   $$\xi_{1,2} = \pm i$$

   Отсюда

   $$\lambda = a \pm i\sqrt{bc}$$

   В этом случае решение для системы дифференциальных уравнений можно записать в виде

   $$N_k = e^{at}(C_1 sin\sqrt{bc}t + C_2 cos\sqrt{bc}t)$$

3. Три связанных множества

   $$I_{_{III}} = \xi^3 + 2\xi = 0$$
   $$\xi_1 = 0; \quad \xi_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$$

   В этом случае характеристические числа будут равны

   $$\lambda_1 = a; \quad \lambda_{2,3} = a \pm i\sqrt{2bc}$$

   и решение для системы дифференциальных уравнений можно записать в виде

   $$N_k = e^{at}(C_1 + C_2 sin\sqrt{2bc}t + C_3 cos\sqrt{2bc}t))$$

4. Пять связанных множеств

   $$I_{_V} = \xi^5 + 4\xi^3 + 3\xi = 0$$
   $$\xi_1 = 0; \quad \xi_{2,3} = \pm i; \quad \xi_{4,5} = \pm i\sqrt{3}$$

   и решение системы дифференциальных уравнений можно записать в виде

   $$N_k = e^{at}(C_1 + C_2 sin\sqrt{bc}t + C_3 cos\sqrt{bc}t + C_4 sin\sqrt{3bc}t + C_5 cos\sqrt{3bc}t)$$

Из полученных решений можно сделать следующий качественный анализ.

1. Все характеристические числа — комплексные с положительной действительной частью.

2. Все решения исходной системы дифференциальных уравнений — это расходящиеся гармоничечские колебания.

3. Максимальный период этих колебаний будет равен

   $$T_{max} = \frac{2\pi}{\sqrt{bc}} \quad \text{(лет)}$$

   где $b$ и $c$ — коэффициенты инвестиций $(\frac{1}{\text{год}})$
   Если $b = c = 0.12$, то с perидом $T = 52$ года повторяются кризисы (когда обобщенные характеристики $N = 0$)

4. Избежать расходящихся колебаний невозможно, меняя $b$ и $c$.

5. Избежать расходящихся колебаний возможно, только если $b = c = 0$, то есть все множества должны быть независимые. Это возможно при анархической экономике.

6. Избежать расходящихся колебаний и кризисов также возможно, если последнее множество будет проводить инвестиции в самое слабое множество. Это возможно при авторитарной экономике.

7. Т.к. исходная система дифференциальных уравнений есть конечно-разностный аналог дифференциального уравнения теплопроводности с обратным отсчетом времени, то возможен фазовый переход, что и наблюдается в последние десятилетия в экономических публикациях. Данная математическая модель позволяет получать количественные оценки параметров фазового перехода.