Решение диофантово уравнения Брокара

Курмет Султан

Абстракт: Показано, что диофантово уравнения Брокара может иметь решение только в случае представления факториала в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, или в виде произведение четырех последовательных натуральных чисел. После этого доказано Теорема утверждающая, что произведение m последовательных натуральных чисел невозможно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, если $m \neq 4$. Затем доказано невозможность представление факториала больше 7! в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел и двух натуральных чисел, различающихся на 2, отсюда следует, что уравнение Брокара не имеет решений, за исключением известных трех факториалов.
Ключевые слова: факториал, диофантово уравнение, Брокар, Рамануджан, решение.

1 Введение

Диофантово уравнение Брокара – это математическая задача, в которой требуется найти целые значения n и m, для которых $n! + 1 = m^2$. Эту математическую задачу сформулировал Анри Брокард в двух статьях 1876 и 1885 годах [1, 2]. Позже в 1913 году эта задача повторно была представлена Шринивасой Рамануджом [3, 4], так как он не знал о статьях Анри Брокарда, поэтому в некоторых источниках эта задача называется диофантово уравнение Брокара-Рамануджана. На сегодняшний день известны только три решения уравнения Брокара: $4! + 1 = 5^2$, $5! + 1 = 11^2$ и $7! + 1 = 71^2$.

2 Представления факториала

2.1 Представление факториала в виде произведения двух натуральных чисел различающихся на 2

Поскольку диофантово уравнение Брокара связано с квадратом натурального числа, сначала покажем представление квадрата натурального числа.

Лемма 2.1. *Квадрат любого натурального числа больше 1 выражается в виде произведения двух натуральных чисел различающихся на 2 по формуле*

(2.1) $$a^2 = (a-1)(a+1) + 1.$$

Из Леммы 1 следует, что решение задачи Брокара существует только в случае, когда

(2.2) $$n! = (a-1)(a+1).$$

Далее если примем обозначение $a - 1 = b$, то уравнение (2.2) будет иметь вид

(2.3) $n! = b(b + 2)$.

Примечание: если $n! = b(b + 2)$, *то* $(b + 1)^2 - 1 = n!$

На основе уравнения (2.3) можем утверждать, что для получения равенства Брокара $n! + 1 = m^2$ факториал должен быть равен произведению двух натуральных чисел, различающихся на 2.

Основываясь Лемме 1 и тождество (2.3), сформулируем следующую Лемму.

Лемма 2.2. *Если найдется натуральное число* b *такое, что* $n! = b(b + 2)$, *то непременно получиться равенство* $n! + 1 = (b + 1)^2$.

Отметим, что только вышеприведенные три факториала, которые являются решениями диофантово уравнения Брокара, имеют представление в виде равенства (2.3):

I) $4! = 4 \cdot (4 + 2)$; II) $5! = 10 \cdot (10 + 2)$; III) $7! = 70 \cdot (70 + 2)$.

2.2 Представление факториала в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел

Все три факториала 4!, 5!, 7!, которые являются решениями задачи Брокара, имеют представление в виде четырех последовательных натуральных сомножителей

$4! = (4 - 3) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 1) \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;

$5! = (5 - 3) \cdot (5 - 2) \cdot (5 - 1) \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

$7! = 7 \cdot (7 + 1) \cdot (7 + 2) \cdot (7 + 3) = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$.

Для 4!, 5!, представление в виде четырех последовательных натуральных сомножителей образуется естественным образом, а для 7! такое представление создается перегруппированием простых сомножителей числа 5040.

3. Основные теоремы

На основе результатов исследования закономерностей произведение последовательных натуральных чисел автором сформулирована следующая теорема.

Теорема 3.1. Произведение m последовательных натуральных чисел невозможно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, если $m \neq 4$, за исключением редких случаев, когда произведение m последовательных натуральных чисел имеет представление в виде произведение четырех последовательных натуральных чисел.

Прежде чем доказать Теорему 3.1, сначала докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. Произведение любых четырех последовательных натуральных чисел имеет представление в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2.

Для доказательства Теоремы 3.2, рассмотрим натуральное число представленного в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел, затем первый сомножитель натурального числа группируем с его четвертым сомножителем, а средние сомножители группируем между собой, после этого раскроем скобки, тогда получим

(3.1) $a(a+1)(a+2)(a+3) = (a^2+3a)(a^2+2a+a+2) = (a^2+3a)(a^2+3a+2)$.

Далее приняв обозначение $a^2+3a = b,$ уравнение (3.1) представим в виде

(3.2) $a(a+1)(a+2)(a+3) = b(b+2)$.

Как видно из уравнений (3.1) и (3.2) мы получили натуральное число, представленное в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, значит Теорема 3.2 верна, и она доказана.

Для доказательства Теоремы 3.1 будем основываться на следующее очевидное уравнения

(3.3) $b(b+2) = (b+1)^2 - 1$ или

(3.4) $a(a+1)(a+2)(a+3) = (b+1)^2 - 1$.

Далее, учитывая, что произведение последовательных натуральных чисел, количество которых больше 4, можно представить в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел и натурального числа, представимого в виде произведения одного и более натуральных чисел, являющейся продолжением четырех последовательных натуральных чисел, напишем следующее тождество

(3.5) $a(a+1)(a+2)(a+3)[(a+4)\cdot \ldots] = ((b+1)^2-1)s;\ s = (a+4)\cdot \ldots$.

Далее преобразуем правую сторону уравнения (3.5) и напишем

(3.6) $((b+1)^2-1)s=(b+1)^2s-s$, где $s=a+4>1$.

Не сложно понять, что уравнения (3.6) соответствует следующему неравенству

(3.7) $(b+1)^2s-s\neq(c+1)^2-1$, где $b,s,c\ \in\mathbb{N}$.

Из неравенства (3.7) следует, что произведение m последовательных натуральных чисел невозможно представить в виде $(c+1)^2-1$, значит его невозможно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, если $m>4$.

Далее рассмотрим натуральное число, представленного в виде произведения трех последовательных чисел. Для натурального числа, представимого в виде произведения трех последовательных натуральных чисел, если это число также имеет представление в виде $a(a+1)(a+2)=b(b+2)$, можем написать,

(3.8) $\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{(a+3)}=\frac{b(b+2)}{(a+3)}$.

Учитывая (3.3), напишем

(3.9) $\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{(a+3)}=\frac{(b+1)^2-1}{(a+3)}$.

На основе (3.9) получим следующее неравенство

(3.10) $\frac{(b+1)^2-1}{(a+3)}\neq(a+1)^2-1$.

Из неравенство (3.10) следует, что произведение трех последовательных натуральных чисел невозможно представить в виде $(a+1)^2-1$, значит его невозможно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2.

Таким образом, можем утверждать, что произведение m последовательных натуральных чисел невозможно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, если $m\neq4$, за исключением редких случаев, когда произведение m последовательных натуральных чисел имеет представление в виде произведение четырех последовательных натуральных чисел, т.е. Теорема 1 верна и она доказана.

Из Теоремы 3.1 следует, что для доказательства отсутствия решений уравнении Брокара, за исключением известных трех решений, достаточно доказать, что факториал больше 7! невозможно представить в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел.

4 Решение уравнения Брокара

В главе 2 было сказано, что все три факториала 4!, 5! и 7!, являющийся известными решениями уравнения Брокара, имеют представление в виде произведение четырех последовательных натуральных чисел. При этом несложно установить, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, первый из которых равен аргументу факториала, будет меньше $n!$ для $n > 7$.

Например, $8 \cdot (8+1) \cdot (8+2) \cdot (8+3) = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 7920 < 8! = 40320$.

Из вышесказанного следует, что любой факториал больше 7! не имеет представление в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел, первый из которых равен аргументу факториала. Это означает, что факториал больше 7! может выражаться только произведением четырех последовательных натуральных чисел, первый из которых больше аргумента факториала.

Далее покажем невозможность представления факториала в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел, начинающихся с числа большего аргумента факториала.

Теорема 4.1. Не существует факториала, соответствующего условию $n! > 7!$ и представимого в виде произведения четырех возрастающих последовательных натуральных чисел, первый из которых больше аргумента факториала.

Согласно Теореме 4.1 для факториала, соответствующего условию $n! > 7!$, нижеследующее уравнение не имеет натурального решения

(4.1) $n! = (n+s+1) \cdot (n+s+2) \cdot (n+s+3) \cdot (n+s+4)$,

где $n, m, s \in \mathbb{N}, s \geq 1$.

Доказательство Теорема 4.1.

Пусть следующее уравнение имеет натуральное решение

(4.2) $n! = (n+s+1) \cdot (n+s+2) \cdot (n+s+3) \cdot (n+s+4)$.

Теперь рассмотрим факториал $(n+s+4)!$, который содержит сомножители обеих сторон тождества (4.2)

(4.3) $n! \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+s+1) \cdot (n+s+2) \cdot (n+s+3) \cdot (n+s+4) = (n+s+4)!$

Далее, учитывая (4.2) и (4.3) можем написать

$(n+s+4)! = [(n+s+1) \cdot (n+s+2) \cdot (n+s+3) \cdot (n+s+4)] \cdot$

$[(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+s+1) \cdot (n+s+2) \cdot (n+s+3) \cdot (n+s+4)].$

(4.4) $(n+s+4)! = (n+1) \cdot \ldots \cdot [(n+s+1) \cdot (n+s+2) \cdot (n+s+3) \cdot (n+s+4)]^2$.

Поскольку мы ищем факториал больше 7! представимый в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел, примем $n = 7$, а для s примем его минимальное значение $s = 1$, тогда на основе (4.4) имеем

$(7+5)! = (7+1) \cdot [(7+2) \cdot (7+3) \cdot (7+4) \cdot (7+5)]^2$.

$12! = 479\,001\,600;\; 8 \cdot 141\,134\,400 = 1129\,075\,200;$

$479\,001\,600 < 1129\,075\,200.$

Как видно из примера, уравнение (4.4) для $n = 7$ и $s = 1$ не имеет натурального решения. Не сложно понять, что для $n = 7$ и $s > 1$ правая сторона (4.4) будет еще больше, так как правая его сторона, растет намного быстрее, чем его левая сторона.

Отсюда следует, что Теорема 4.1 верна и она доказана.

Из Теоремы 4.1 следует, что не существует факториала больше 7! представимого в виде произведения четырех возрастающих последовательных натуральных чисел, первый из которых больше аргумента факториала, а также в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2. Это означает, что диофантово уравнение Брокара решена, оно не имеет решения кроме известных трех решений.

Заключение

Доказано, что диофантово уравнение $n! + 1 = m^2$ может иметь решение только в случае, если факториал можно представить в виде произведения пары натуральных чисел, разность которых составляет 2. Далее показано, что известные три факториала 4!, 5! и 7!, которые являются решениями диофантово уравнения Брокара, имеют представление в виде произведения пары натуральных чисел, разность которых составляет 2, а также имеет представление в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел.

После этого доказано Теорема утверждающая, что произведение m последовательных натуральных чисел невозможно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, если $m \neq 4$, за исключением единичных случаев, когда произведение m последовательных натуральных чисел имеет представление в виде произведение четырех последовательных натуральных чисел.

Затем доказано, что ни один факториал больше 7! не имеет представление в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел. Это означает, что диофантово уравнение Брокара решена, или можно сказать, что гипотеза Брокара верна и она доказана.

Благодарности

Автор благодарен своему давнему другу кандидату физико-математических наук, доценту Марсу Габбасову, а также доктору физико-математических наук, профессору Аскару Джумадильдаеву и профессору Kenneth G. Monks за ценные замечания, которые позволили автору улучшит решение диофантово уравнения Брокара.

ССЫЛКИ

[1] H. Brocard, *Question 166*, Nouv. Corres. Math. **2** (1876), 287.

[2] H. Brocard. *Question 1532*, Nouv. Ann. Math. **4** (1885), 391.

[3] S. Ramanujan, *Question 469,* J. Indian Math. Soc. **5** (1913), 59.

[4] S. Ramanujan, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Ed. G. H. Hardy, P. V. S. Aiyar, and B. M. Wilson). Providence, RI: Amer. Math. Soc., p. 327, 2000.