# Золото-комплексное сечение.

**С.Я. Котковский**

Для широко известной пары чисел золотого сечения и обратной к нему величины $\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ обнаружен их комплекснозначный аналог – пара чисел $\frac{\sqrt{5}\pm \mathrm{i}}{2}$. На основе изучения комплекснозначных бисимметричных матриц второго порядка показана неразрывная связь вещественного и комплексного золотых сечений.

## Биматрицы. Расщеплённое представление.

Бисимметричная матрица это матрица симметричная относительно своих обеих главных диагоналей. Пусть $M$ комплекснозначная бисимметричная матрица второго порядка. Назовём такую матрицу *биматрицей*:

$$M=\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} \end{pmatrix},\ \ \mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathbb{C} \tag{1}$$

Поскольку каждая биматрица определяется двумя комплексными параметрами, введём для них следующее обозначение, использующее квадратные скобки:

$$M=[\mathrm{a},\mathrm{b}],\ \ \mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathbb{C} \tag{2}$$

Сложение и умножение биматриц определяются следующими правилами:

$$\begin{aligned}&[\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_1]+[\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_2]=[\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2]\\&[\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_1][\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_2]=[\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2+\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2,\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2+\mathrm{a}_2\mathrm{b}_1]\end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, что сумма и произведение двух биматриц есть снова биматрица.

Введём для биматриц преобразование отражения относительно вертикальной либо горизонтальной оси и будем называть две биматрицы $M_1$ и $M_2$, связанные этим преобразованием, *зеркальными:*

$$\begin{aligned}&M_1\sim M_2\ \Leftrightarrow\ M_1=\widetilde{M}_2\ \Leftrightarrow\ M_2=\widetilde{M}_1\\&[\mathrm{a},\mathrm{b}]\sim[\mathrm{b},\mathrm{a}]\end{aligned} \tag{4}$$

*Расщепленное представление* биматрицы $M$ (1) имеет вид :

$$M=\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases} \qquad x,y\in\mathbb{C} \tag{5}$$

Представим (5) в терминах квадратных скобок (2):

$$M = [x+y, x-y] = x[1,1]+y[1,-1] = 2x\,I+2y\,J, \quad x,y\in\mathbb{C} \tag{6}$$

(6) задаёт разложение биматрицы по базису двух взаимно ортогональных биматриц *I* и *J*:

$$\begin{cases} I=\dfrac{1}{2}[1,1] = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ J=\dfrac{1}{2}[1,-1]= \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7}$$

Базисные биматрицы *I* и *J* обладают следующими свойствами «ортонормированности»:

$$\begin{cases} I^2=I \\ J^2=J \\ I\,J=J\,I=0 \end{cases} \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует замечательное свойство биматриц: при произведении двух биматриц расщепленный вид сохраняется:

$$\begin{gathered} M_1=[x_1+y_1, x_1-y_1], \;\; M_2=[x_2+y_2, x_2-y_2] \\ M_1 M_2=4x_1 x_2 I+4y_1 y_2 J=2[x_1 x_2+y_1 y_2, x_1 x_2-y_1 y_2] \end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда в частности следует, что при возведении в любую степень, включая дробные, биматрицы сохраняют свой расщеплённый вид. Так, натуральная степень n биматрицы имеет вид:

$$M=2x\,I+2y\,J \;\Rightarrow\; M^n=(2x)^n I+(2y)^n J, \;\; n\in\mathbb{N} \tag{10}$$

Формула (10) легко проверяется для $n=2$ и затем доказывается по индукции для $n>2$ . Аналогичная формула справедлива и для корней k-й степени:

$$M^{1/k}=(2x)^{1/k} I+(2y)^{1/k} J, \;\; k\in\mathbb{N} \tag{11}$$

Здесь $x^{1/k}$ это любой из корней k-й степени комплексного числа x. Последняя формула легко проверяется путём возведения выражения справа в степень k согласно предыдущей формуле (10). Наконец, покажем, что для произвольной рациональной степени $q=n/k$ также выполняется тождество:

$$\forall q \in \mathbb{Q} : M^q = (2x)^q I + (2y)^q J \tag{12}$$

Для этого достаточно последовательно применить к $M$ операции возведения в степень $1/k$ и в степень $n$ : $M^{n/k} = (M^{1/k})^n = (x^{1/k} I + y^{1/k} J)^n = x^{n/k} I + y^{n/k} J$ . Для наглядности перепишем (12) в стандартных матричных обозначениях:

$$\boxed{M^q = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix}^q = 2^{q-1} \begin{pmatrix} x^q + y^q & x^q - y^q \\ x^q - y^q & x^q + y^q \end{pmatrix}} \tag{13}$$

Зеркальные биматрицы получаются друг из друга простой заменой $y \leftrightarrow -y$ :

$$\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{pmatrix} \tag{14}$$

Между квадратными корнями этих матриц имеет место тесная связь, которую мы рассмотрим ниже. Выпишем отдельно выражение (13) для квадратных корней биматрицы:

$$M^{1/2} = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix}^{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{x} \pm \sqrt{y} & \sqrt{x} \mp \sqrt{y} \\ \sqrt{x} \mp \sqrt{y} & \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \end{pmatrix} \tag{15}$$

В наших обозначениях $\sqrt{x}$ это один конкретный квадратный корень комплексного числа x, так что $x^{1/2} = \pm\sqrt{x}$ .

Каждая двухкомпонентная биматрица (у которой в представлении (5) $x, y \neq 0$ ) имеет 4 квадратных корня, которые разбиваются на две пары зеркальных биматриц. Выпишем одну из таких зеркальных пар корней (каждый из этих корней взят с общим знаком плюс):

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{x} - \sqrt{y} & \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} & \sqrt{x} - \sqrt{y} \end{pmatrix} \qquad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{x} + \sqrt{y} & \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} & \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} P_1^2 = P_2^2 = M \\ P_1 \sim P_2 \end{matrix} \tag{16}$$

Примечательно, что произведение этих биматриц даёт матрицу зеркальную *M*:

$$P_1 P_2 = \frac{1}{2} [\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{x} + \sqrt{y}][\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{x} - \sqrt{y}] = [x-y, x+y] = \begin{pmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{pmatrix}$$
$$P_1 P_2 = \widetilde{M} \tag{17}$$

Произведение типа (17) мы назовём *перекрёстным произведением* квадратных корней биматрицы. Как мы видим, любые две двухкомпонентные зеркальные биматрицы тесно связаны друг с другом посредством перекрестных произведений своих корней.

В следующем разделе мы применим формулы (13) и (15) к матрицам, связанных с золотым сечением.

**Золото-комплексное сечение.**

Исходные биматрицы $A$ и $B$ определяются согласно формулам:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5+1}{2} & \frac{5-1}{2}\\ \frac{5-1}{2} & \frac{5+1}{2}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5-1}{2} & \frac{5+1}{2}\\ \frac{5+1}{2} & \frac{5-1}{2}\end{pmatrix} \tag{18}$$

Эти биматрицы зеркальны: $A\sim B$ .

С.В.Петуховым было обнаружено, что квадратный корень от матрицы $A$ , связанной с представлением водородных связей в гене, является матрицей составленной из величины золотого сечения и обратной ему величины [1] (матрицы $F_{1,2}$ в формуле (19) ниже).

Четыре квадратных корня от биматриц $A$ и $B$ получаются соответствующим применением формулы (15):

$$\begin{cases} F_1=(\sqrt{A})_1=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{f}_1 & \mathrm{f}_2\\ \mathrm{f}_2 & \mathrm{f}_1\end{pmatrix}\\ F_2=(\sqrt{A})_2=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{f}_2 & \mathrm{f}_1\\ \mathrm{f}_1 & \mathrm{f}_2\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \begin{cases} E_1=(\sqrt{B})_1=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2\\ \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_1\end{pmatrix}\\ E_2=(\sqrt{B})_2=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_1\\ \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2\end{pmatrix}\end{cases} \tag{19}$$

В (19) $\mathrm{f}_{1,2}$ - обратное и прямое золотые сечения (вещественные числа), а $\mathrm{e}_{1,2}$ комплекснозначный аналог этой пары:

$$\begin{cases} \mathrm{f}_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1/\phi\\ \mathrm{f}_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\phi\end{cases} \quad \mathrm{f}_2=\mathrm{f}_1^{-1} \qquad \begin{cases} \mathrm{e}_1=\frac{\sqrt{5}-\mathrm{i}}{2}\\ \mathrm{e}_2=\frac{\sqrt{5}+\mathrm{i}}{2}\end{cases} \quad \mathrm{e}_2=\mathrm{e}_1^{*} \tag{20}$$

Мы назовём комплексные числа $\mathrm{e}_{1,2}$ *золото-комплексным сечением**. Сами четыре матрицы $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$ мы назовём *золотыми матрицами* – вещественными и комплексными соответственно. Между числами внутри каждой из пар $\mathrm{f}_{1,2}$ и $\mathrm{e}_{1,2}$ имеют место соотношения:

* Термины «золото-вещественное» и «золото-комплексное» сечения предложены С.В. Петуховым.

$$\begin{cases} f_1 f_2 = 1 \\ f_1 + f_2 = \sqrt{5} \\ f_2 - f_1 = 1 \\ f_1^2 + f_2^2 = 3 \\ f_2^2 - f_1^2 = \sqrt{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 e_2 = 3/2 \\ e_1 + e_2 = \sqrt{5} \\ e_2 - e_1 = i \\ e_1^2 + e_2^2 = 2 \\ e_2^2 - e_1^2 = i\sqrt{5} \end{cases} \tag{21}$$

Существует определённое подобие между самими парами $f_{1,2}$ и $e_{1,2}$ : при переходе от величин $f_{1,2}$ к величинам $e_{1,2}$ происходят замена единицы на мнимую единицу $i$ и взаимная замена 2 и 3. Выпишем отдельно два из приведённых выше тождеств, указывающих на связь вещественного и комплексного сечений с числами 3 и 2 соответственно:

$$\begin{cases} f_1^2 + f_2^2 = 3 \\ e_1^2 + e_2^2 = 2 \end{cases} \tag{22}$$

Каждая из пар корней (19) , выбранная с одинаковым знаком плюс или минус, зеркально симметрична: $F_1 \sim F_2$ , $E_1 \sim E_2$ . Непосредственно убеждаемся в выполнении общего правила перекрестных произведений (17) для конкретного случая корней биматриц *A* и *B*:

$$F_1 F_2 = B \qquad E_1 E_2 = A \tag{23}$$

Перекрестная связь биматриц *A* и *B*, отображаемая тождествами (23), указывает на коренную связь вещественного и комплексного золотых сечений $f_{1,2}$ и $e_{1,2}$ .

**Соотношения между вещественным и комплексным золотыми сечениями.**

Между вещественным и комплексным золотыми сечениями имеют место следующие кососимметричные соотношения:

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1(1+i) + f_2(1-i)}{2} \\ e_2 = \dfrac{f_1(1-i) + f_2(1+i)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{e_1(1-i) + e_2(1+i)}{2} \\ f_2 = \dfrac{e_1(1+i) + e_2(1-i)}{2} \end{cases} \tag{24}$$

Эти же соотношения можно записать в матричном виде как:

$$\begin{cases} E_{1,2} = F_{1,2} S \\ F_{1,2} = E_{1,2} \tilde{S} \end{cases} , \tag{25}$$

где $F_{1,2}$ золото-вещественные, а $E_{1,2}$ золото-комплексные матрицы, определённые выше в (19) (взятые с одним и тем же знаком плюс или минус), $S$ – матрица перехода, определяемая как: $S=[\frac{1+\mathrm{i}}{2},\frac{1-\mathrm{i}}{2}]=[\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{2}},\sqrt{-\frac{\mathrm{i}}{2}}]$ . В формуле (25) индексы 1 и 2 слева и справа должны соответствовать друг другу.

**Квадратные корни золотых матриц.**

Корни четвертой степени от биматриц $A$ и $B$ (квадратные корни от $F$ и $E$) имеют следующий вид:

1) Первая группа корней:

$$\begin{cases} P_1=(\sqrt{F_1})_1=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 \end{pmatrix} \\ P_2=(\sqrt{F_1})_2=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_1=(\sqrt{E_1})_1=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_2 \\ \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 \end{pmatrix} \\ H_2=(\sqrt{E_1})_2=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 \\ \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (26)$$

$$\begin{cases} \mathrm{p}_1=\frac{\sqrt[4]{5}-\mathrm{i}}{2} \\ \mathrm{p}_2=\frac{\sqrt[4]{5}+\mathrm{i}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{h}_1=\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{-\mathrm{i}}}{2} \\ \mathrm{h}_2=\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{-\mathrm{i}}}{2} \end{cases} \qquad (27)$$

В формулах выше $\sqrt{-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}-1}{2}$ .

2) Вторая группа корней:

$$\begin{cases} R_1=(\sqrt{F_2})_1=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{r}_1 & \mathrm{r}_2 \\ \mathrm{r}_2 & \mathrm{r}_1 \end{pmatrix} \\ R_2=(\sqrt{F_2})_2=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{r}_2 & \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_1 & \mathrm{r}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} G_1=(\sqrt{E_2})_1=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{g}_1 & \mathrm{g}_2 \\ \mathrm{g}_2 & \mathrm{g}_1 \end{pmatrix} \\ G_2=(\sqrt{E_2})_2=\pm\begin{pmatrix} \mathrm{g}_2 & \mathrm{g}_1 \\ \mathrm{g}_1 & \mathrm{g}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (28)$$

$$\begin{cases} \mathrm{r}_1=\frac{\sqrt[4]{5}-1}{2} \\ \mathrm{r}_2=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{g}_1=\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\mathrm{i}}}{2} \\ \mathrm{g}_2=\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\mathrm{i}}}{2} \end{cases} \qquad (29)$$

3) Третья и четвертая группы корней совпадают с корнями первых двух групп с точностью до множителя $i$ – они соответствуют выбору знака минуса в выражениях для $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$ в (19).

Заметим, что внутри каждой из пар корней, выбранных с одним и тем же знаком, имеет место зеркальная симметрия: $P_1 \sim P_2, R_1 \sim R_2, H_1 \sim H_2, G_1 \sim G_2$. Каждый из квадратных корней золотых матриц (26) и (28) обладает подобием по отношению к самим этим матрицам, являя собою частный пример реализации полученной нами выше формулы вычисления степеней произвольной биматрицы в её расщепленном виде (13).

**Рекуррентная последовательность золото-комплексного сечения.**

Как известно, рекуррентной последовательностью, производимой золотым сечением является ряд чисел Фибоначчи. Определим аналогичную последовательность для золото-комплексных чисел $e_{1,2}$. Характеристическим уравнением, корнями которого являются числа $(-e_1)$ и $e_2$, служит квадратичное уравнение:

$$z^2 - iz - \frac{3}{2} = 0 \tag{30}$$

Коэффициенты этого уравнения $b = i, c = 3/2$ позволяют получить рекуррентное соотношение для искомого ряда чисел $\{u_n\}$ согласно формуле $u_n = c u_{n-2} + b u_{n-1}$ [3]:

$$\boxed{u_n = \frac{3}{2} u_{n-2} + i u_{n-1}} \tag{31}$$

Рекуррентное соотношение (31) можно переписать в виде:

$$u_n = \frac{2 u_{n+1} - 3 u_{n-1}}{i} \tag{32}$$

Последняя формула выражает тип кососимметричного операционализма, определяемого парой чисел 2 и 3. При выборе двух начальных чисел ряда $\{u_n\}$ в виде $u_1 = i, u_2 = 2$, общая формула члена этого ряда запишется как:

$$u_n = (-e_1)^n + e_2^n \tag{33}$$

Характеристическое уравнение (30) также даёт воасможность выразить золото-комплексные сечения $e_{1,2}$ в виде бесконечной цепи вложенных радикалов:

$$\begin{cases} e_1=\sqrt{\frac{3}{2}-i\sqrt{\frac{3}{2}-i\sqrt{\frac{3}{2}-\ldots}}} \\ e_2=\sqrt{\frac{3}{2}+i\sqrt{\frac{3}{2}+i\sqrt{\frac{3}{2}+\ldots}}} \end{cases} \tag{34}$$

**Комплексные ряды сходимости.**

Существуют следующие пределы, связывающие ряд Фибоначчи с комплексно-золотым сечением:

$$\begin{cases} e_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(F_{n-1}+F_{n+1})-i(F_{n+1}-F_{n-1})}{2F_n} \\ e_2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(F_{n-1}+F_{n+1})+i(F_{n+1}-F_{n-1})}{2F_n} \end{cases} \tag{35}$$

где $F_n=1,1,2,3,5,8,\ldots$ – числа Фибоначчи, $n=1,2,3,\ldots$

Для двух вещественных чисел $A,B\in\mathbb{R}$ определим их *среднее комплексное* как:

$$<A,B>=\frac{(A+B)+i(A-B)}{2} \tag{36}$$

Согласно этому определению пределы (35) можно переписать в виде:

$$\boxed{\begin{cases} e_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{<F_{n-1},F_{n+1}>^*}{F_n} \\ e_2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{<F_{n-1},F_{n+1}>}{F_n} \end{cases}} \tag{37}$$

В следующем параграфе мы разовьём тему средних комплексных значений для получения золото-комплексного ряда, начальным элементом которого является золото-комплексное сечение.

**Золото-комплексный ряд.**

В работе [4] были введены и изучены комплексные числа Фибоначчи, одновременно дающие количество обеих спиралей на данном шаге процесса филлотаксиса:

$$P_n = F_{n-1} + i F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{38}$$

По аналогии с числами (38) введём *комплексные числа Фибоначчи k-го порядка* следующим образом:

$$\boxed{P_n^{(k)} = F_{n-k} + i F_{n+k}, \quad k, n \in \mathbb{N}} \tag{39}$$

Исходя из этого определения пара чисел Фибоначчи, входящая в каждое $P_n^{(k)}$, на k индексов вверх и вниз «равноудалена» от данного $F_n$.

Пределы (37) выражаются в числах $P_n^{(1)}$ 1-го порядка (39):

$$\begin{cases} e_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+i}{2} \dfrac{P_n^{(1)*}}{F_n} \\ e_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-i}{2} \dfrac{P_n^{(1)}}{F_n} \end{cases} \tag{40}$$

Посмотрим, какие пределы типа (40) получаются для рядов (39) порядков 2 и выше. В каждом случае мы ограничимся только вторым из двух пределов, тогда как первый получается из него с помощью комплексного сопряжения. Общая формула таких пределов имеет вид:

$$\boxed{e^{(k)} \equiv e_2^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-i}{2} \frac{P_n^{(k)}}{F_n} = \frac{F_k \sqrt{5} + i L_k}{2}} \tag{41}$$

где $L_k = 1,3,4,7,11,18,\ldots$ – числа Люка, $k = 1,2,3,\ldots$. При $k = 1$ формула (41), очевидно, даёт само золото-комплексное сечение $e_2$. Весь ряд (41) мы назовём *золото-комплексным рядом*. Приведём его первые члены:

$$e^{(1)} = \frac{\sqrt{5}+i}{2}, \ e^{(2)} = \frac{\sqrt{5}+3i}{2}, \ e^{(3)} = \frac{2\sqrt{5}+4i}{2}, \ e^{(4)} = \frac{3\sqrt{5}+7i}{2}, \ e^{(5)} = \frac{5\sqrt{5}+11i}{2}, \ldots \tag{42}$$

Предел отношений соседних членов ряда (41) равен золотому сечению:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{(k+1)}}{e^{(k)}} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{43}$$

Ряд (41) интересен тем, что комплексно сочетает в себе числа Фибоначчи и Люка. Как известно, каждый из этих числовых рядов имеет важное значение в различных процессах филлотаксиса.

Также в процессах филлотаксиса ключевую роль играют различные степени золотого сечения, которые определяются согласно известной формуле:

$$\phi^k = \frac{F_k \sqrt{5} + L_k}{2} \tag{44}$$

Подобие формул (41) и (44) раскрывает смысл золото-комплексного ряда (41): каждый член этого ряда является комплексным аналогом соответствующей степени золотого сечения. Самому золотому сечению $\phi$ соответствует $e_2 = e^{(1)}$, $\phi^2$ соответствует $e^{(2)}$ и т. д. Представим это соответствие в следующей таблице, содержащей первые пять членов каждого из рассматриваемых рядов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ | $\phi^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$ | $\phi^3 = \frac{2\sqrt{5}+4}{2}$ | $\phi^4 = \frac{3\sqrt{5}+7}{2}$ | $\phi^5 = \frac{5\sqrt{5}+11}{2}$ |
| $e^{(1)} = \frac{\sqrt{5}+i}{2}$ | $e^{(2)} = \frac{\sqrt{5}+3i}{2}$ | $e^{(3)} = \frac{2\sqrt{5}+4i}{2}$ | $e^{(4)} = \frac{3\sqrt{5}+7i}{2}$ | $e^{(5)} = \frac{5\sqrt{5}+11i}{2}$ |

Таблица 1.

**Бикватернионное представление биматриц.**

Зафиксируем некоторый единичный комплекснозначный трёхмерный вектор $\mathbf{n}$: $\mathbf{n} \in \mathbb{C}, \mathbf{n} = \text{const}, \mathbf{n}^2 = 1$. В изоморфизме, связанном с этим вектором, биматрице $M$ ставится во взаимно-однозначное соответствие бикватернион* $B$ согласно правилу:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad B = (a, b\mathbf{n}) \tag{45}$$

Правило соответствия (45) и полученные нами выше формулы для степени биматрицы (13) позволяют легко вычислить произвольную рациональную степень бикватерниона $B = (a, \mathbf{u})$ при условии, что $\mathbf{u}^2 \neq 0$. Действительно, подобный бикватернион можно представить в виде $B = (a, b\mathbf{n})$, где единичный комплексный вектор $\mathbf{n}$ вычисляется согласно: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^2}}$, а

* Мы используем комплексное скалярно-векторное представление бикватернионов, при котором каждый бикватернион представляет собой связку комплексного числа и комплексного трёхмерного вектора [2].

комплексное число b согласно: $\mathrm{b}=\sqrt{\mathbf{u}^2}$ . Далее, по a и b вычисляются x и y, так что $B=((\mathrm{x}+\mathrm{y}),(\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathbf{n})$ , а по (13) и правилу соответствия (45) находится искомая степень бикватерниона:

$$B^q=((\mathrm{x}+\mathrm{y}),(\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathbf{n})^{\mathrm{q}}=2^{\mathrm{q}-1}((\mathrm{x}^{\mathrm{q}}+\mathrm{y}^{\mathrm{q}}),(\mathrm{x}^{\mathrm{q}}-\mathrm{y}^{\mathrm{q}})\mathbf{n}) \tag{46}$$

Приведём выражения биматриц *A* и *B* и их квадратных корней (золотых биматриц $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$ ) в бикватернионном виде:

$$A=(3,2\,\mathbf{n}) \qquad\qquad B=(2,3\,\mathbf{n}) \tag{47}$$

$$\begin{cases} F_1=(\sqrt{A})_1=\pm(\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2\,\mathbf{n}) \\ F_2=(\sqrt{A})_2=\pm(\mathrm{f}_2,\mathrm{f}_1\,\mathbf{n}) \end{cases} \qquad \begin{cases} E_1=(\sqrt{B})_1=\pm(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2\,\mathbf{n}) \\ E_2=(\sqrt{B})_2=\pm(\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_1\,\mathbf{n}) \end{cases}$$

Очевидно, что бикватернионное представление биматриц идентично представлению квадратных скобок (2). Однако при этом бикватернионное представление имеет потенциал дальнейшего расширения путём рассмотрения изоморфизмов, определяемых различными единичными векторами **n**.

## Заключение

В настоящей работе, на основании полученной формулы для степени бисимметричной матрицы второго порядка в «расщеплённом» представлении показано, что пара вещественных чисел золотого сечения $\mathrm{f}_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ связана с парой комплексных чисел $\mathrm{e}_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm \mathrm{i}}{2}$ . Первые и последние мы назвали золото-вещественным и золото-комплексным сечениями соответственно. Каждая из этих пар чисел составляет бисимметричные матрицы второго порядка $F_{1,2}$ и $E_{1,2}$ – «золотые матрицы». Оказывается, что эти матрицы являются квадратными корнями зеркальных по отношению друг к другу исходных матриц $A=[3,2]$ и $B=[2,3]$ соответственно (19) . При этом перекрестное произведение золотых матриц одного типа (вещественного или комплексного) даёт исходную матрицу противоположного типа (23) . Эти соотношение устанавливает кососимметричную связь между двумя типами золотого сечения. Помимо связи через золотые матрицы, имеют место и прямые соотношения кососимметричного вида между вещественным и комплексным золотыми сечениями (24)

Автор выражает глубокую благодарность Сергею Валентиновичу Петухову за предоставленные сведения об открытой им матрице водородных связей и её золото-вещественных корнях, при изучения которых автором и было обнаружено золото-комплексное сечение, и за содержательное обсуждение многих других вопросов математической биологии и науки в целом.

**Ссылки**

[1] Sergey Petoukhov. «Hyperbolic Numbers in Modeling Genetic Phenomena». 2020. https://www.preprints.org/manuscript/201908.0284/v4. P.22-23,31.
[2] С.Я. Котковский. «Бивекторная алгебра». 2021. https://vixra.org/abs/2108.0015. С.1-2.
[3] А. И. Маркушевич. «Возвратные последовательности». — Гос. Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1950. Т. 1.
[4] Petoukhov S.V., Petukhova E.S., Svirin V.I. Complex and hyperbolic Fibonacci numbers and phyllotaxis. – Symmetry: Culture and Science, v. 33, No. 3, p. 209-220 (2022).

3 мая 2023 г.
s_kotkovsky@mail.ru