New classifications of labeled rooted growing trees and their application to simplifying of the tree representation of functions

G.I. Kalmykov

English version

Abstract

The article deals with labeled rooted growing trees. Research in this area, carried out by the author of this article over the past 35 years, has led to the creation of the concept of tree classification of labeled graphs. This concept is the mathematical basis of the tree sum method aimed at simplifying the representations of the coefficients of power series in classical statistical mechanics. This method was used to obtain tree representations of Mayer coefficients of expansions of pressure and density in terms of activity degrees. which are free from asymptotic catastrophe. The same method was used to obtain tree representations of the coefficients of the expansion of the ratio of activity to density in terms of activity degrees. All these representations for $n \geq 7$ are much simpler than the comparable representations Ree-Hoover according to the complexity criteria defined on these representations. Tree representations of the expansion coefficients of the m-particle distribution function into a series in terms of activity degrees were also obtained. All the above representations of the coefficients of power series obtained by the trees sum method are free from the asymptotic catastrophe.

In order to provide a mathematical basis for constructing new, even less complex representations of the coefficients of these power series, further development of the concept of tree classification of labeled graphs was required.

As part of solving the problem of further development of this concept, the article proposes new classifications of labeled rooted growing trees. And on their basis, a theorem was formulated and proved, which is the basis for simplifying the tree representations of functions, that is, its representations by the sum of products of functions labeled by trees.

1. In this article we consider labeled rooted growing trees. Research in this area by the author of this article over the past 35 years have led to the creation of the concept of tree classification of labeled graphs [2–9, 12, 19–22]. The concept is the mathematical basis of the **tree sum method**, aimed at simplifying the representations of coefficients of power series of classical statistical mechanics.

This method was used to obtain [3, 4, 6–9, 12, 19–22] free from an asymptotical catastrophe [1, 9–12, 18, 23, 24] representations of Mayer's coefficients of the pressure and density expansion in a series in terms of activity degrees [14, 15, 28, 29]. The same method was used to obtain [7, 9, 12, 21] and representation of the expansion coefficients of the ratio of activity to density in a series in terms of activity degrees. All these representations for $n \geq 7$ are much simpler than comparable Ree-Hoover representations [30–32] according to the complexity criteria defined on these representations [25–27]. The representations of the coefficients of the expansion of an m-particle distribution function in a series in terms of activity degrees were also obtained [8, 22].

In order to provide a mathematical basis for constructing new, even less complex representations of the coefficients of these power series, it has been necessary to further develop the concept of tree classification of labeled graphs.

As part of solving the problem of further development of this concept the article proposes new classifications of labeled rooted growing trees and based on them a theorem was formulated and proved. This theorem is a basis for simplifying tree representations of functions, that is, their representations by the sum of products of functions labeled by trees.

Let us introduce the notation:

$T_n = T(V_n, 1) = \{t\}$ — the set of labeled rooted growing trees with a vertices set $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ and the root 1;

(i, j) — an arc outgoing from a vertex i and incoming to a vertex j;

$X(t)$ — the set of arcs of a labeled rooted growing tree t;

$H(t)$ — height of the tree t;

$V(t)$ — the set of vertices of a labeled rooted growing tree t;

$V(t, h)$ — the layer of vertices that belongs to the rooted growing tree t and are at height h;

$m(t, h) = |V(t, h)|$ — cardinality of the layer of vertices belonging to the tree t and located at height h;

$\sigma(t, h)$ — the number of the t tree vertices whose height does not exceed a number h;

$\mathbf{m}(t) = (m(t, 1), m(t, 2), \ldots, m(t, H(t)))$ — a vector whose components are the cardinalities of the layers of the vertices of the tree t;

$\mathfrak{M}(H) = \{\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_H)\}$ — the set of all H-dimensional vectors with components that are natural numbers;

$||\mathbf{m}|| = \sum\limits_{h=1}^{H} m_h$ — norm of a vector $\mathbf{m}$;

$\mathfrak{M}'(n, H) = \{\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_H)\}$ — the set of all H-dimensional vectors with natural components, satisfying the condition

$$n = 1 + \sum_{h=1}^{H} m_h = 1 + ||\mathbf{m}||; \tag{1}$$

$T_{n,H} = \{t\}$ — set of labeled rooted growing trees of height H (where $1 \leq H < n$) belonging to the set T_n;

Let the vector $\mathbf{m}$ with natural components belong to a set $\mathfrak{M}'(n, H)$. Then by $T(\mathbf{m}) = \{t\}$ denote the set of all trees t that belong to the set T_n and satisfy the condition $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}$.

It is obvious that the sets T_n and $T_{n,H}$ of labeled rooted growing trees expande into disjoint subsets:

$$T_n = \bigcup_{H=1}^{n-1} T_{n,H}; \quad T_{n,H} = \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n,H)} T(\mathbf{m}). \tag{2}$$

From these expansions follows the expansion

$$T_n = \bigcup_{H=1}^{n-1} \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n,H)} T(\mathbf{m}). \tag{3}$$

Denote the vertices of a layer $V(t,h)$ of a labeled rooted growing tree t by $v(t,h,1)$, $v(t,h,2),\dots,v(t,h,m(t,h))$. We can assume without loss of generality that the inequality $v(t,h,i) < v(t,h,j)$ holds for all $h = \overline{1, H(t)}$ if only $1 \le i < j \le m(t,h)$.

Let's define the transformation ω_t on the set $V(t)$ by the formulas:

$$\omega_t(1) = 1; \quad \omega_t(v(t,h,i)) = 1 + \sum_{j=1}^{h-1} m(t,j) + i, \quad h = 1,2,\dots,H(t). \tag{4}$$

Let $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n,H)$ and $t \in T(\mathbf{m})$. Then $V(t) = V_n$, and the ω_t transformation establishes a one-to-one mapping of the set V_n onto itself. It induces a mapping Ω_t of the set $X(t) = \{x = (u,v)\}$ of arcs of the tree t onto the set of arcs

$$\Omega_t(X(t)) = X'(t) = \big\{\big(\omega_t(u), \omega_t(v)\big), \quad (u,v) \in X(t)\big\}. \tag{5}$$

As is known (see [12], Chapter 1, Lemma 4), the graph $(V_n, X'(t))$ is a tree from the trees set T_n.

For each vector $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n,H)$ let us define a mapping $A_{\mathbf{m}}$ of the trees set $T(\mathbf{m})$ into itself by setting

$$A_{\mathbf{m}} t = (V_n, X'(t)), \tag{6}$$

where the set $X'(t)$ is defined by formula (5) for all $t \in T(\mathbf{m})$. From the definition of the mapping $A_{\mathbf{m}}$ by formulas (4)–6) imply that the image of any tree $t \in T(\mathbf{m})$ under the mapping $A_{\mathbf{m}}$ is the tree $A_{\mathbf{m}} t \in T(\mathbf{m})$.

The image of the set $T(\mathbf{m})$ under the mapping $A_{\mathbf{m}}$ is denoted by $TRc(\mathbf{m}) \subset T(\mathbf{m})$.

Remark 1. *If a vector* $\mathbf{m}$ *delongs to the set* $\mathfrak{M}'(n,H)$, *then from the definition of the mapping* $A_{\mathbf{m}}$ *and the definition of the set* $TRc(\mathbf{m})$ *it follows that the set of vertices of any tree* $t \in TRc(\mathbf{m})$ *is the set* V_n, *where* n *is defined by the vector* $\mathbf{m}$ *according to formula* (1).

Definition 1. Two trees $t_1 \in T(\mathbf{m})$ and $t_2 \in T(\mathbf{m})$ are *perfectly isomorphic* if they satisfy the condition $A_{\mathbf{m}} t_1 = A_{\mathbf{m}} t_2$. ■

Obviously, the established relation of perfect isomorphism of two trees is reflexive, symmetric and transitive, that is, an equivalence relation. Therefore, it allows us to partition the trees set $T_{\mathbf{m}}$ into classes of perfectly isomorphic trees.

Remark 2. *From Definition* 1 *it follows that any class of perfectly isomorphic trees included in the set* $T_{\mathbf{m}}$ *has the following property: under mapping* $A_{\mathbf{m}}$ *the image of all trees belonging to this class is one and the same tree belonging to the set* $TRc(\mathbf{m})$. *This means that this tree can be taken as a label of this class and this class can be considered labeled by this tree.*

Moreover, any tree from the set $TRc(\mathbf{m})$ *turns out to be a label of the class of perfectly isomorphic trees, which is included in the set* $T(\mathbf{m})$ *and is uniquely determined by this tree. To be short the tree that is a label of the tree class will be called tree-label of the class.*

From the definition of the mapping $A_{\mathbf{m}}$ by formulas (4) – (6) it follows that for any tree $t \in TRc(\mathbf{m})$

$$A_{\mathbf{m}} t = t. \tag{7}$$

By Remark 2, this equality implies that the tree t belongs to the same class of perfectly isomorphic trees of which it is a label.

Definition 2. The set $V(t)$ of vertices of the tree t will be called *layer-ordered* if the layers of the vertices of the tree t satisfy the condition

(C) if $v' \in V(t,h')$, $v'' \in V(t,h'')$, where $1 \le h' < h'' \le H(t)$, then $v' < v''$.

Otherwise, we say that the set $V(t)$ *is not layer-ordered.* ■

Remark 3. *From Definition 2, the definition of the mapping* $A_{\mathbf{m}}$ *by formulas* (4)–(6), *and the definition of the set* $TRc(\mathbf{m})$ *it follows that this set is the set of all trees* $t \in T(\mathbf{m})$ *whose vertices set* $V(t)$ *is layer-ordered. Hence, the set* $TRc(\mathbf{m})$ *does not contain any tree* t *whose vertices set* $V(t)$ *is not layer-ordered.*

Example 1. Consider the case when the vector $\mathbf{m}$ is one-dimensional, that is, a scalar. In this case the set $T(\mathbf{m})$ contains only one tree, the star, whose center is the tree root $v = 1$, and the set $TRc(\mathbf{m})$ coincides with the set $T(\mathbf{m})$. ■

In the case when the vector $\mathbf{m}$ has dimension $H \geq 2$, the cardinality of the set $TRc(\mathbf{m})$ is defined by formula

$$|TRc(\mathbf{m})| = \prod_{i=2}^{H} [m(i-1)]^{m(i)}. \tag{8}$$

The proof of formula (8) is left to the reader.

The class of perfectly isomorphic trees labeled with a tree-label $t \in TRc(\mathbf{m})$, denote $TI\,(t)$. Then the trees set $T(\mathbf{m})$ can be represented as the union of all classes, labeled by trees from the set $TRc(\mathbf{m})$:

$$T(\mathbf{m}) = \bigcup_{t \in TRc(\mathbf{m})} TI\,(t). \tag{9}$$

The cardinality of the set $TI\,(t)$ is determined by formula

$$|TI\,(t)| = ||\mathbf{m}(t)||! \prod_{h=1}^{H(t)} \big(m(t,h)!\big)^{-1} \tag{10}$$

2. We now introduce a classification of the trees set $TRc(\mathbf{m})$. To this aim, we introduce the notation:

$\mathfrak{M}(H,k)$ — the set consisting of all vectors $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_H)$ of the set $\mathfrak{M}(H)$, satisfying the condition $m_H = k$, where k is a natural number;

$s(t)$ is a subgraph of the tree $t \in TRc(\mathbf{m})$ resulted in removing from the tree t its vertex $w = ||\mathbf{m}|| + 1$.

It is clear from the definition of the subgraph $s(t)$ of the tree t that $s(t)$ is an oriented [12, 16, 17] graph. We will assume that the vertex $v = 1$, which is the root of the tree t, is also the root of the orgraph $s(t)$.

Lemma 1. *The subgraph* $s(t)$ *of the tree* $t \in TRc(\mathbf{m})$ *is a rooted growing tree that is a subtree of the tree* t.

Proof. Since the set $V(t)$ of vertices of the tree t is layer-ordered, its vertex $w = ||\mathbf{m}|| + 1$ belongs to the vertices layer $V(t, H(t))$ and, therefore, is a terminal vertex of the tree t. It follows that this vertex has zero outdegree. Therefore, any, different from the vertex w, vertex of the tree t is inaccessible in this tree from vertex w. This implies (see [12], Ch. 1, Lemma 3) that any two vertices of this tree other than the vertex w are connected in this tree by a half-path that does not contain the vertex w. Hence, in the subgraph $s(t)$ of the tree t any two vertices are connected by a half-path. This implies [16][17] that $s(t)$ is a (weakly) connected orgraph. Since the tree t has no contours by definition, its subgraph $s(t)$ also has no contours. Moreover, only one vertex $v = 1$ has zero in-degree [16][17], and all other vertices of the orgraph $s(t)$ have unit in-degree. In this way, the vertex $v = 1$ is the only source [16][17] of the (weakly) connected orgraph $s(t)$ that has no contours and satisfies the condition: all vertices of the orgraph $s(t)$, except for the source $v = 1$, have unit in-degree.

Such a graph is called [12, 16, 17] an outgoing (growing) tree. Since the vertex $v = 1$ is the rooted of the tree $s(t)$, the tree $s(t)$ is (see [12, 16, 17]) a rooted growing tree. And since the tree $s(t)$ is a subgraph of the tree t, then the tree $s(t)$ is a subtree of the tree t. Lemma 1 is completely proved. ▶

Remark 4. *Note that the subtree $s(t)$ does not contain an arc (u, w) of the tree t outgoing from the vertex u of this tree, and incoming to the vertex w defined above. Also note that the set $V(s(t))$ of vertices of this subtree, like the set $V(t)$ of the vertices of the tree t, is layer-ordered.*

Remark 5. *If the component $m(t, H(t))$ of the vector $\mathbf{m}(t)$ satisfies the equality $m(t, H(t)) = 1$, then the tree t satisfies the conditions: the vector $\mathbf{m}(t)$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H(t), 1)$; the layer $V(t, H(t))$ of the tree t contains only one vertex $w = ||\mathbf{m}|| + 1$; and its subtree $s(t)$ belongs to the set $T(\mathbf{m}')$, where $\mathbf{m}'$ is a $(H(t)-1)$-dimensional vector, which belongs to the set $\mathfrak{M}(H(t)-1)$ and all components of which coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}$.*

Otherwise, the tree t satisfies the following conditions: the vector $\mathbf{m}(t)$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H(t), k)$, where $k > 1$; the set $V(t, H(t))$ of the tree t contains more than one vertex; its subtree $s(t)$ belongs to the set $T(\mathbf{m}')$, where $\mathbf{m}'$ – $H(t)$-dimensional vector, satisfying the conditions: $m'_{H(t)} = m_{H(t)} - 1$, and all other components of the vector $\mathbf{m}'$ coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}$.

Since the set $V(s(t))$ of vertices of the tree $s(t)$ is, by Remark 4, layer-ordered, this tree belongs, by Remark 3, to the set $TRc(\mathbf{m}')$.

Lemma 2. *Let a rooted growing tree s belong to the set $TRc(\mathbf{m}')$, where $\mathbf{m}'$ is a vector belonging to the set $\mathfrak{M}(H)$ for some natural number H. Let u be a vertex belonging to the vertices set $V(s)$. And let t be the oriented supergraph of the tree s, having as its root the vertex $v = 1$ and obtained by adding the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc (u, W) to the tree s. Then, first, the orgraph t is a rooted growing tree; secondly, the height of the vertex w in the tree t is one greater than the height of the vertex u in the tree s.*

Proof. Let us first prove that the orgraph t is weakly connected, that is, any pair of its vertices is connected by a half-path. Obviously, any pair of its vertices belonging to the set $V(s)$ is connected by a half-path. By the conditions of Lemma 2, the vertices u and w in the orgraph t are connected by the half-path consisting of one arc (u, w). If the vertex u' belongs to the set $V(s)$ and is different from the vertex u, then in the orgraph t it is connected with the vertex w by a half-path that is a union of the arc (u, w) and a half-path connecting the vertices u and u'. Thus, any pair of vertices of the orgraph t is connected by a half-path. Therefore, the orgraph t is weakly connected.

Let us now prove that the orgraph t has no contours. Since the tree s has no contours, the orgraph t has no contours in which all arcs belong to the tree s. Therefore, if the orgraph t has a contour, then this contour contains the arc (u, w), and therefore also contains the vertex w. But in the orgraph t, only one arc (u, w) comes in the vertex w and no arc goes out of it. Therefore, the vertex w cannot belong to any contour. This implies that the orgraph t has no contours.

Further, in the orgraph t, only one vertex $v = 1$ has in-degree zero [16][17], and all other vertices of t have in-degree 1. Thus, the vertex $v = 1$ is the only source [16][17] of a (weakly) connected orgraph t that has no contours and satisfies the condition: all vertices of the orgraph t, except for the source $v = 1$, have unit in-degree.

Such a graph is called [12, 16, 17] an outgoing (growing) tree. By the conditions of Lemma 2, t is a rooted orgraph with the vertex $v = 1$ as its root. Therefore, the tree t is (see [12, 16, 17]) a rooted growing tree. The first assertion of Lemma 2 is proved.

Let us now prove the second assertion of Lemma 2. By the conditions of Lemma 2, in the tree t the only arc incident to the vertex w is the arc (u, w). Therefore, in the tree t, any half-path connecting the vertex w with the root of the tree t is the union of the arc (u, w) and the half-path connecting the vertex u with the root $v = 1$. This leads us to two conclusions.

First, from here and from the definition of a half-path [16][17] it follows that the vertex w cannot belong to any half-path that in the tree t connects the vertex u with the root $v = 1$. Hence, by the definition of the tree t, it follows that all half-paths connecting the vertex u with the root $v = 1$ in the tree t have the following property: all vertices of any such half-path belong to the set $V(s)$. Therefore, any half-path, which connects the vertex u with the root $v = 1$ in the tree t, belongs to the tree s. This means that the shortest half-path that in the tree t connects the vertex u with the root $v = 1$ belongs to the tree s. Moreover, this half-path is the shortest half-path connecting the vertex u with the root $v = 1$ in the tree s.

Second, the shortest half-path, which in the tree t connects the vertex w with the root $v = 1$ is the union of the arc (u, w) and the shortest half-path connecting the vertex u with the root $v = 1$ in the tree t. Consequently, in the tree t, the length of the shortest half-path connecting the vertex w with the root $v = 1$ is one greater than the length of the shortest half-path that in the tree t connects the vertex u with the root $v = 1$.

These two conclusions imply the following corollary: in the tree t, the length of the shortest half-path, which in the tree t connects the vertex w with the root $v = 1$, one more than the length of the shortest half-path, which in the tree s connects the vertex u with the root $v = 1$.

Recall that in a rooted oriented tree, the length of the shortest half-path that connects a vertex of this tree with the root is called the height of this vertex. Therefore, from the above corollary the second assertion of Lemma 2 follows. Lemma 2 is completely proved. ▶

Lemma 3. *Let a rooted growing tree s belong to the set $TRc(\mathbf{m}')$, where $\mathbf{m}'$ is a vector belonging to the set $\mathfrak{M}(H)$ for some natural number H. Let u be a vertex belonging to the vertices set $V(s)$. And let t be a rooted growing tree, having as its root the vertex $v = 1$ and obtained by adding the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc (u, w) to the tree s.*

If, in addition, the vertex u belongs to the vertices layer $V(s, H)$, then the tree t belongs to the set $TRc(\mathbf{m})$, where the vector $\mathbf{m}$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H + 1, 1)$ and is the $(H + 1)$-dimensional vector satisfying the conditions: $m_{H+1} = 1$, and all other components of the vector $\mathbf{m}$ coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}'$.

If the vertex u belongs to the vertices layer $V(s, H - 1)$, then the tree t belongs to the set $TRc(\mathbf{m})$, where the vector $\mathbf{m}$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H, m'_H + 1)$ and is the H-dimensional vector satisfying the conditions: $m_H = m'_H + 1$, and all other components of the vector $\mathbf{m}$ coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}'$.

Proof. It follows from the conditions of Lemma 3 that the vector $\mathbf{m}'$ belongs to the set $\mathfrak{M}'(n, H)$, where $n = ||\mathbf{m}'|| + 1$. From this and from the conditions of Lemma 3, according to Remark 1, it follows that the set V_n, where $n = ||\mathbf{m}'|| + 1$, is the set $V(s)$ of vertices of the tree s. It follows from the conditions of Lemma 3 that the set $V(t)$ of vertices of the tree t is the union of the set $V(s)$ of vertices of the tree s with the set consisting of one vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2 = n + 1$. This means that the set $V(t)$ is the set V_{n+1}, where $n = ||\mathbf{m}'|| + 1$, while the tree t belongs to the set T_{n+1}. This implies that the vertex w is the highest vertex in the set $V(t)$ and, therefore, the inequality $v < w$ is satisfied for all vertices v belonging to the set $V(t)$ and satisfying the condition: $v \neq w$.

From the conditions of Lemma 3 by Remark 3 it follows that the set $V(s)$ of vertices of the tree s is layer-ordered.

Consider the case where the vertex u belongs to to the vertices layer $V(s, H)$. We introduce into consideration $(H+1)$-dimensional vector $\mathbf{m}$ whose component m_{H+1} is defined by the equality $m_{H+1} = 1$, and all its other components coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}'$. The vector $\mathbf{m}$ thus defined belongs to the set $\mathfrak{M}'(n, H+1)$, where $n = ||\mathbf{m}|| + 1 = ||\mathbf{m}'|| + 2$.

Let us prove that the set $V(t)$ of the vertices of the tree t is layer-ordered. From the conditions of Lemma 3 and Definition 2 it follows that the layers of the vertices of the tree t satisfies the condition:

(C^1) if $v' \in V(t, h')$, $v'' \in V(t, h'')$, where $1 \leq h' < h'' \leq H$, then $v' < v''$.

As already proved above, the inequality $v < w$ is satisfied for all vertices v, belonging to the set $V(t)$ and satisfying the condition: $v \neq w$. And since the layer $V(t, H+1)$ of vertices of the tree t contains only one vertex w, no other verteces layer of tree t contains vertex w and any vertex v' of the tree t other than the vertex w does not belong to the layer $V(t, H+1)$. Hence, the vertex v' belongs to some other layer $V(t, h')$ of vertices of the tree t. Obviously, here the height h' satisfies the inequality $h' \neq H+1$. And since the height of the tree t is equal to $H+1$, the height h' also satisfies the inequality $h' < H+1$. Moreover, none of the verteces layers of the tree t, except for the verteces layer $V(t, H+1)$, contains the vertex w.

Therefore, the vertices layers of the tree t satisfy the condition: if $v' \in V(t, h')$, where $1 \leq h' < H+1$, then $v' < w$. Since the the vertices layers of the tree t also satisfy the condition (C^1), these layers satisfy the condition (C). Hence, by Definition 2 it follows that the set $V(t)$ of the vertices of the tree t is layer-ordered. Since the tree t belongs to the set $T(\mathbf{m})$, then by Remark 3 it belongs to the set $TRc(\mathbf{m})$. Recall that the vector $\mathbf{m}$, by its construction, is a $(H+1)$-dimensional vector that satisfies the conditions: 1) $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H+1, 1)$ by the definition of the set $\mathfrak{M}(H+1, 1)$; 2) $m_{H+1} = 1$, and all other components of the vector $\mathbf{m}$ coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}'$.

Thus, all assertions of Lemma 3 formulated for the case when $u \in V(s, H)$ are proved.

Let us now consider the case when the vertex u belongs to the layer $V(s, H-1)$ of the vertices of the tree s. Let us introduce into consideration the H-dimensional vector $\mathbf{m}$ whose component m_H is defined by the equality $m_H = m'_H + 1$, and all its other components coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}'$. The vector $\mathbf{m}$ thus defined belongs to the set $\mathfrak{M}'(n, H)$, where $n = ||\mathbf{m}|| + 1 = ||\mathbf{m}'|| + 2$.

In this case, the height of the vertex u in the tree s is equal to $H-1$. From this, by Lemma 2, it follows that the height of the vertex w in the tree t is equal to H, the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ belongs to the vertices layer $V(t, H)$ of the tree t, where the vertices layer $V(t, H)$ is the union of the set of the vertices belonging to the vertices layer $V(s, H)$ of the tree s with the set consisting of one vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2 = n + 1$. This and the conditions of Lemma 3 imply that the vertices layer $V(t, H)$ contains $m'_H + 1$ vertices, and all other vertices layers of the tree t coincide with the corresponding vertices layers of the tree s. Obviously, the vector $\mathbf{m}(t)$ coincides with the vector $\mathbf{m}$, and the tree t belongs to the set $T(\mathbf{m})$.

Let us prove that the set $V(t)$ of vertices of the tree t is layer-ordered.

Since the set $V(s)$ of vertices of the tree s is layer-ordered, by Definition 2 the vertices layers of the tree s satisfy condition (C). It follows that these layers of the tree s satisfy the conditions:

(C^2) if $v' \in V(s,h')$, $v'' \in V(s,h'')$, where $1 \le h' < h'' \le H-1$, then $v' < v''$;
and
(C^3) if $v' \in V(s,h')$, $v'' \in V(s,H)$, where $1 \le h' < H$, then $v' < v''$.

Since by the conditions of Lemma 3 $V(t,h') = V(s,h')$ for $1 \le h' < H$, and the set $V(s)$ is represented by the equality $V(s,H) = V(t,H) \setminus \{w\}$, then conditions ($C^2$) and ($C^3$) imply that the vertices layers of the tree t satisfy the conditions:
(C^4) if $v' \in V(t,h')$, $v'' \in V(t,h'')$, where $1 \le h' < h'' \le H-1$, then $v' < v''$;
and
(C^5) если $v' \in V(t,h')$, $v'' \in [V(t,H) \setminus \{w\}]$, where $1 \le h' < H$, then $v' < v''$.

As already proved above, the inequality $v < w$ is satisfied for all vertices v belonging to the set $V(t)$ and satisfying the condition: $v \ne w$. In particular, this inequality is satisfied for all vertices v belonging to the vertices layers $V(t,1), V(t,2), \dots, V(t,H-1)$ of the tree t. Since in this case the vertices layers of the tree t satisfy the condition (C^5), and the vertices layer $V(t,H)$ of the tree t is the union of the set of vertices belonging to the layer $V(s,H)$ with the set consisting of one vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2 = n+1$, then the vertices layers of the tree t satisfy the condition:
(C^6) if $v' \in V(t,h')$, $v'' \in V(t,H)$, where $1 \le h' < H$, then $v' < v''$.

Since the vertices layers of the tree t also satisfy the condition (C^4), then these layers satisfy the condition (C). From this, by Definition 2, it follows that the vertices set $V(t)$ of the tree t is layer-ordered. Since the tree t belongs to the set $T(\mathbf{m})$, then, by Remark 3, it belongs to the set $TRc(\mathbf{m})$, where the vector $\mathbf{m}$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H, m'_H + 1)$ and is the H-dimensional vector satisfying the conditions: $m_H = m'_H + 1$, and all other components of the vector $\mathbf{m}$ coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}'$. Thus, the assertion of Lemma 3 in the case when $u \in V(s, H-1)$ is proved. Lemma 3 is completely proved. ►

Let a tree s belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$ and let u be a vertex belonging to the vertices set $V(s)$. Let us introduce the notation:

$T^1(s)$ is the set of labeled rooted growing trees t obtained by adding the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc (u,w) to the tree s, where $u \in V(s, H(s))$;

$T^2(s)$ is the set of labeled rooted growing trees t obtained by adding the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc (u,w) to the tree s, where $u \in V(s, H(s)-1)$.

Denote by B_s the mapping of the set of vertices $V(s, H(s))$ onto the set $T^1(s)$ of labeled rooted growing trees, setting that the image of a vertex $u \in V(s, H(s))$ is the tree $t \in T^1(s)$ that is obtained by adding the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc (u,w) to the tree s.

Lemma 2 and the definition of the set $T^1(s)$ imply the following

Corollary 1. *Let a tree s belong to the set $TRc(\mathbf{m}')$. Then the mapping B_s of the vertices set $V(s, H(s))$ to the set $T^1(s)$ of labeled rooted growing trees is a bijection* [13].

Symbolically, the bijection B_s can be represented as follows:

$$t = B_s u = \left(V(s) \bigcup \{||\mathbf{m}'|| + 2\},\ X(s) \bigcup \{(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\} \right),\ u \in V\left(s, H(s)\right). \tag{11}$$

Here and below $\{||\mathbf{m}'|| + 2\}$ denotes the one-element set containing the vertex
$||\mathbf{m}'|| + 2$; $\{(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\}$ denotes the one-element set containing the arc
$(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)$.

Then the set $T^1(s)$ of labeled rooted growing trees, where the tree s belongs to the set

$TRc(\mathbf{m}')$, symbolically can be represented as follows:

$$T^1(s) = B_s V\left(s, H(s)\right) = \\ \Big\{ \Big(V(s) \bigcup \{||\mathbf{m}'|| + 2\},\ X(s) \bigcup \{(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\} \Big) : \quad u \in V\big(s, H(s)\big) \Big\}. \quad (12)$$

By $B_s^{-1}(t)$ denote the inverse image of a tree $t \in T^1(s)$ under the mapping B_s. Then it follows from formula (11) that the set $X(t)$ of arcs of the tree $t \in T^1(s)$ can be represented as follows:

$$X(t) = X(s) \bigcup \{ \big(B_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2\big) \} \quad (13)$$

Here and below, $\{(B_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\}$ denotes one-element set that contains the arc $(B_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2)$.

By $\widetilde{B}_s$ denote the mapping of the vertices set $V(s, H(s) - 1)$ onto the set $T^2(s)$ of labeled rooted growing trees, setting that the image of the vertex u, which belongs to the set $V(s, H(s) - 1)$, is the tree $t \in T^2(s)$ obtained by adding the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc (u, w) to the tree s.

Lemma 2 and the definition of the set $T^2(s)$ imply the following

Corollary 2. *Let the tree s belong to the set $TRc(\mathbf{m}')$. Then the mapping $\widetilde{B}_s$ of the vertices set $V(s, H(s) - 1)$ onto the set $T^2(s)$ of labeled rooted growing trees is a bijection* [13].

Symbolically, the bijection $\widetilde{B}_s$ can be represented as follows:

$$t = \widetilde{B}_s u = \Big(V(s) \bigcup \{||\mathbf{m}'|| + 2\},\ X(s) \bigcup \{ \big(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2\big) \} \Big), \quad u \in V(s, H(s) - 1). \quad (14)$$

Then the set $T^2(s)$ of labeled rooted growing trees, where the tree s belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$, symbolically can be represented as follows:

$$T^2(s) = \widetilde{B}_s V\left(s, H(s) - 1\right) = \\ \Big\{ \Big(V(s) \bigcup \{||\mathbf{m}'|| + 2\},\ X(s) \bigcup \{ \big(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2\big) \} \Big) : \quad u \in V\left(s, H(s) - 1\right) \Big\}. \quad (15)$$

By $\widetilde{B}_s^{-1}(t)$ denote the inverse image of a tree $t \in T^1(s)$ under the mapping $\widetilde{B}_s$. Then it follows from formula (14) that the set $X(t)$ of arcs of the tree $t \in T^2(s)$ can be represented as follows:

$$X(t) = X(s) \bigcup \{ \big(\widetilde{B}_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2\big) \}. \quad (16)$$

Here and below, $\big\{ \big(\widetilde{B}_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2\big) \big\}$ denotes one-element set that contains the arc $(\widetilde{B}_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2)$.

Lemma 4. *If the labeled rooted growing trees s and s' belong to the same set $TRc(\mathbf{m}')$ and are not equal to each other, then the sets $T^1(s)$ and $T^1(s')$ labeled by these trees do not intersect.*

Proof. Assume that the sets $T^1(s)$ and $T^1(s')$ intersect. Then there is a labeled rooted growing tree t that belongs to both $T^1(s)$ and $T^1(s')$. Then it follows from the definition of the sets $T^1(s)$ and $T^1(s')$ that the tree t can be obtained in two ways: (1) by the addition to the tree s of the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc, which belongs to the tree t and comes in the vertex w; (2) by the addition the same vertex and the same arc to the tree s'.

But since the trees s and s' are not equal to each other, the tree constructed by method (1) differs from the tree constructed by method (2). This result contradicts our assumption. Therefore, this assumption is false and the sets $T^1(s)$ and $T^1(s')$ do not intersect. Lemma 4 is proved. ▶

Theorem 1. *Let the vectors* $\mathbf{m}$ *and* $\mathbf{m}'$ *belong to the sets* $\mathfrak{M}(H,1)$ *and* $\mathfrak{M}(H-1)$, *respectively, where* H *is a natural number satisfying the inequality* $H \geq 2$. *If, in addition, all components of the vector* $\mathbf{m}'$ *coincide with the corresponding components of the vector* $\mathbf{m}$, *then the set* $TRc(\mathbf{m})$ *expandes into pairwise disjoint subsets of type* $T^1(s)$ *labeled by trees from the set* $TRc(\mathbf{m}')$:

$$TRc(\mathbf{m}) = \bigcup_{s \in TRc(\mathbf{m}')} T^1(s). \tag{17}$$

Proof. Let $\mathbf{m}$ and $\mathbf{m}'$ be vectors, satisfying the conditions of Theorem 1. If, in addition, the tree s belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$, then by Lemma 3 from the definition of the set $T^1(s)$ of labeled rooted growing trees it follows that the set $T^1(s)$ is a subset of the set $TRc(\mathbf{m})$.

From the conditions of Theorem 1 by Remark 5 it also follows that the subtree $s(t)$ of any tree t from the set $TRc(\mathbf{m})$ belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$. And from the definition of the subtree $s(t)$ of the tree t it follows that the tree t is obtained by adding to the tree $s(t)$ of the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and of the arc which comes in the vertex w and outgoes from some vertex $u \in V(s, H(s))$ of the tree $s(t)$. This implies that the tree t belongs to the set $T^1(s(t))$ by the definition of this set.

From the established relations between the set $TRc(\mathbf{m})$ and its subsets of type $T^1(s)$, where $s \in TRc(\mathbf{m}')$, and from Lemma 4 the assertion of Theorem 1 follows. ▶

Lemma 5. *If labeled rooted growing trees* s *and* s' *belong to the same set* $TRc(\mathbf{m}')$ *and are not equal to each other, then the sets* $T^2(s)$ *and* $T^2(s')$ *labeled by these trees do not intersect.*

Proof. Assume that the sets $T^2(s)$ and $T^2(s')$ intersect. Then there exists a labeled rooted growing tree t that belongs to both $T^2(s)$ and $T^2(s')$. Then from the definition of the sets $T^2(s)$ and $T^2(s')$ implies that the tree t can be obtained in two ways: (1) by the addition to the tree s of the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and the arc, which belongs to the tree t and comes in the vertex w; (2) by the addition the same vertex and the same arc to the tree s'.

But since the trees s and s' are not equal to each other, the tree constructed by method (1) differs from the tree constructed by method (2). This result contradicts our assumption. Therefore, this assumption is false and the sets $T^2(s)$ and $T^2(s')$ do not intersect. Lemma 5 is proved. ▶

Theorem 2. *Let the vectors* $\mathbf{m}$ *and* $\mathbf{m}'$ *belong to the sets respectively* $\mathfrak{M}(H,k)$ *and* $\mathfrak{M}(H,k-1)$, *where* H *and* k *are natural numbers satisfying the inequalities* $H \geq 2$ *and* $k \geq 2$. *If all components of the vector* $\mathbf{m}'$, *except for the component* $m'_H = k-1 = m_H - 1$, *coincide with the corresponding components of the vector* $\mathbf{m}$, *then the set* $TRc(\mathbf{m})$ *is expanded into pairwise disjoint subsets of type* $T^2(s)$ *labeled by trees from the set* $TRc(\mathbf{m}')$:

$$TRc(\mathbf{m}) = \bigcup_{s \in TRc(\mathbf{m}')} T^2(s). \tag{18}$$

Proof. Let $\mathbf{m}$ and $\mathbf{m}'$ be vectors, satisfying the conditions of Theorem 2. If, in addition, the tree s belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$, then by Lemma 3 from the definition of the set $T^2(s)$ of labeled rooted growing trees it follows that the set $T^2(s)$ is a subset of the set $TRc(\mathbf{m})$.

From the conditions of Theorem 2 by Remark 5 it also follows that the subtree $s(t)$ of any tree t from the set $TRc(\mathbf{m})$ belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$. And from the definition of the subtree $s(t)$ of the tree t it follows that the tree t is obtained by adding to the tree $s(t)$ of the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ and of the arc which comes in the vertex w and outgoes from some vertex $u \in V(s, H(s) - 1)$ of the tree $s(t)$. This implies that the tree t belongs to the set $T^2(s(t))$ by the definition of this set.

From the established relations between the set $TRc(\mathbf{m})$ and its subsets of type $T^2(s)$, where $s \in TRc(\mathbf{m}')$, and from Lemma 5 the assertion of Theorem 2 follows. ▶

3. The rest of the article outlines one way to apply these classifications to simplify the tree representation [12] of a function. As a function whose tree representation is to be simplified, we choose the following real function $\varphi(\mathbf{r})_n$ of n variables $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{t \in TRc(\mathbf{m})} \prod_{(u,v) \in X(t)} g_{(u,v)}. \tag{19}$$

Here and below, $\mathbf{m}$ denotes an H-dimensional vector with natural components, n denotes the number defined by formula (1), $g_{(u,v)}$ denotes a labeled by arc (u, v) real function of n variables $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ that take on values in the ν-dimensional real Euclidean space $\mathbf{R}^\nu$.

The representation of the function $\varphi(\mathbf{r})_n$ by formula (19) is called the tree representation of the function. It is this kind of tree representations of functions can be integrands in integrals representing Mayer coefficients and coefficients of other power series of classical statistical mechanics.

Further in the article, a much simpler representation of the $\varphi(\mathbf{r})_n$ function will be proposed. To this aim, we introduce the following notation:

$$m_0 = 1; \quad \sigma_{\mathbf{m}}(h) = \sum_{i=0}^{h} m_i, \quad h = \overline{0, H}, \tag{20}$$

where $m_1, m_2, \ldots, m_H$ are components of the vector $\mathbf{m}$;

$$V_{\mathbf{m}}(0) = \{1\}; \quad V_{\mathbf{m}}(h) = \{v : \quad [\sigma_{\mathbf{m}}(h-1) + 1] \leq v \leq \sigma_{\mathbf{m}}(h)\}, \quad 1 \leq h \leq H. \tag{21}$$

$$S_{\mathbf{m}}(h, v) = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}}(h-1)} g_{(u,v)}, \quad \text{где} \quad v \in V_{\mathbf{m}}(h); \tag{22}$$

$$P_{\mathbf{m}}(h) = \prod_{v \in V_{\mathbf{m}}(h)} S_{\mathbf{m}}(h, v). \tag{23}$$

In formulas (21), (22) and (23) the value h takes the values defined by the inequalities $1 \leq h \leq H$.

Remark 6. *Formulas* (20) *imply the equality* $\sigma_{\mathbf{m}}(H) = ||\mathbf{m}|| + 1$. *From here and from formulas* (21) *it follows that the vertex* $w = ||\mathbf{m}|| + 1$ *belongs to the set* $V_{\mathbf{m}}(H)$.

Lemma 6. *Let* H *and* H' *be two natural numbers, satisfying the inequality* $H' \leq H$, *while* $\mathbf{m}$ *and* $\mathbf{m}'$ *be two vectors with natural components of dimension* H *and* H', *respectively.*

Assume that for any i *satisfying the inequalities* $0 < i \leq min\{H', H-1\}$, *the component* m'_i *of the vector* $\mathbf{m}'$ *coincides with the component* m_i *of the vector* $\mathbf{m}$. *Then the following statements are true:*

1. For all natural numbers h *satisfying the inequalities*

$$0 < h \leq min\{H', H-1\}, \tag{24}$$

the equalities

$$\sigma_{\mathbf{m}'}(h) = \sigma_{\mathbf{m}}(h), \tag{25}$$

$$V_{\mathbf{m}'}(h) = V_{\mathbf{m}}(h), \tag{26}$$

$$S_{\mathbf{m}'}(h, v) = S_{\mathbf{m}}(h, v), \tag{27}$$

$$P_{\mathbf{m}'}(h) = P_{\mathbf{m}}(h) \tag{28}$$

hold.

2. If the satisfying the conditions of Lemma 6 *vectors* $\mathbf{m}$ *and* $\mathbf{m}'$ *have the same dimension* H*, then for all vertices* v *belonging to the set* $V_{\mathbf{m}'}(H) \cap V_{\mathbf{m}}(H)$*, the equality*

$$S_{\mathbf{m}'}(H, v) = S_{\mathbf{m}}(H, v). \tag{29}$$

holds.

Proof. It follows from the formulas (20) and the conditions of Lemma 6 that for all natural numbers h satisfying inequalities (24), equality (25) holds. From here and from formulas (21) it follows that for all natural numbers h satisfying inequalities (24), equality (26) holds. From here and from formulas (22) it follows that for all natural numbers h satisfying inequalities (24), equality (27) holds. Finally, it follows from equality (27) and formulas (23) that for all natural numbers h satisfying inequalities (24), equality (28) holds. Eualities (25), (26), (27), and (28) are proved.

Let us now prove the second assertion of Lemma 6. Since the vectors $\mathbf{m}$ and $\mathbf{m}'$ have the same dimension H, by assertion 1 of Lemma 6 the equality

$$V_{\mathbf{m}'}(H-1) = V_{\mathbf{m}}(H-1). \tag{30}$$

takes place. Equality (30) for all v vertices implies the equality

$$\sum_{u \in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,v)} = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}}(H-1)} g_{(u,v)}, \tag{31}$$

The formula (22) implies the equalities

$$S_{\mathbf{m}'}(H, v) = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,v)}, \quad \text{where} \quad v \in V_{\mathbf{m}'}(H);$$

$$S_{\mathbf{m}}(H, v) = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}}(H-1)} g_{(u,v)}, \quad \text{where} \quad v \in V_{\mathbf{m}}(H). \tag{32}$$

The formulas (31) and (32) imply assertion 2 of Lemma 6. Lemma 6 is completely proved. ▶

By $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}} = \{V_{\mathbf{m}}(h) : \quad 0 \leq h \leq H\}$ denote the population of sets defined by formulas (21). **Remark 7.** *From the definition of the population* $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$ *it follows that the sets included in it do not intersect, and their union is the set* V_n*, where the number* n *is defined by formula* (1)*.*

It follows from formulas (20) *and* (21) *that the sets belonging to the population* $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$ *satisfy the condition*

(C) *if* $v' \in V_{\mathbf{m}}(h')$, $v'' \in V_{\mathbf{m}}(h'')$*, where* $0 \leq h' < h'' \leq H$*, then* $v' < v''$*.*

Finally, these formulas imply that the cardinality of any set $V_{\mathbf{m}}(h)$ *from* $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$ *is equal to component* m_h *of vector* $\mathbf{m}$*.*

Remark 8. *From the definition of the sets* $V_{\mathbf{m}}(h)$ *by formulas* (21) *(where* $h = \overline{0, H}$*), from the definition of the numbers* $\sigma_{\mathbf{m}}(h)$ *by formulas* (20) *and from the definition of the number* n *by formula* (1) *follows*

$$\bigcup_{h=0}^{H} V_{\mathbf{m}}(h) = V_n. \tag{33}$$

Lemma 7. *Let the tree* t *belong to the set* $TRc(\mathbf{m})$*, where the vector* $\mathbf{m}$ *has dimension* $H \geq 1$*. Then the equality*

$$V(t, H(t)) = V_{\mathbf{m}}(H), \tag{34}$$

holds. Here the vertices set $V_{\mathbf{m}}(H)$ *is defined by formulas* (21).

If the vector $\mathbf{m}$ *has dimension* $H \geq 2$*, then also the equality*

$$V(t, H(t) - 1) = V_{\mathbf{m}}(H - 1), \tag{35}$$

holds. Here the vertices set $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ *is defined by formulas* (21).

Proof. In the case $H = 1$, the vector $\mathbf{m}$ has dimension $H = 1$ and contains only one component m_1. In this case, the following equalities hold:

$$H(t) = H = 1; \quad m(t, 0) = 1; \quad m(t, 1) = m_1;$$
$$\sigma(t, 0) = 1; \quad \sigma(t, 1) = 1 + m_1; \quad V(t, 1) = \{v : \quad 2 \leq v \leq 1 + m_1\}. \tag{36}$$

By formulas (20) and (21) we obtain: $\sigma_{\mathbf{m}}(0) = 1$, $\sigma_{\mathbf{m}}(1) = 1 + m_1$, and finally

$$V_{\mathbf{m}}(1) = \{v : \quad 2 \leq v \leq 1 + m_1\}. \tag{37}$$

Formulas (36) and (37) imply the equality $V(t, 1) = V_{\mathbf{m}}(1)$. By this equality Lemma 7 in the case $H = 1$ is proved.

Let us now prove Lemma 7 in the case $H > 1$. The conditions of Lemma 7 imply the equalities

$$H(t) = H; \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}; \quad V(t, H(t)) = V(t, H). \tag{38}$$

Formulas (38) and Remark 7 imply that for any $h = \overline{0, H}$ the cardinalities of the sets $V(t, h)$ and $V_{\mathbf{m}}(h)$ are equal. In particular, the cardinalities of the sets $V(t, H(t))$ and $V_{\mathbf{m}}(H)$ are equal, and the cardinalities of the sets $V(t, H(t) - 1)$ and $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ are also equal.

Formulas (38) and Remarks 1 and 8 imply that the set $V(t)$ of the vertices of the tree t and the union of all sets, belonging to the population $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$, coincides with the set V_n, where the number n is defined by formula (1).

Let us prove the equality (34) by contradiction. Let's assume that this equality is wrong. Then, taking into consideration the equality cardinalities of the sets $V(t, H(t))$ and $V_{\mathbf{m}}(H)$, we arrive at to the following conclusions:

(a) At least one vertex of the set $V(t, H(t))$ does not belong to the set $V_{\mathbf{m}}(H)$, and hence belongs to some set $V_{\mathbf{m}}(h)$, where $h < H$. Let's denote this vertex by v.

(b) At least one vertex of the set $V_{\mathbf{m}}(H)$ does not belong to the set $V(t, H(t))$, and hence belongs to some set $V(t, h')$, where $h' < H(t)$. Let's denote this vertex by v'.

Thus, the vertices v' and v belong to the sets, respectively, $V_{\mathbf{m}}(H)$ and $V_{\mathbf{m}}(h)$, where H and h satisfy the inequality $H > h$. By Remark 7, this implies the inequality $v < v'$. Moreover, the vertices v and v' belong to the sets $V(t, H(t))$ and $V(t, h')$, respectively, where

$H(t)$ and h' satisfy the inequality $H(t) > h'$. From this inequality and the inequality $v < v'$ by Definition 2, it follows that the set $V(t)$ of vertices of the tree t is not layer-ordered. By the conditions of Lemma 7, the tree t belongs to the set $TRc(\mathbf{m})$. Therefore, the conclusion drawn is in contradiction with Remark 3, asserting that the set $TRc(\mathbf{m})$ does not contain any tree t whose vertices set $V(t)$ is not layer-ordered. Consequently, our assumption is wrong, but the equality (34) is true.

We now prove by contradiction that in the case $H > 1$ under the conditions of Lemma 7 equality (35) is also true. Let's assume that this equality is wrong. Then, the equality of the cardinality of the set $V(t, H(t) - 1)$ to the cardinality of the set $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ implies the following conclusions:

(a') At least one vertex of the set $V(t, H(t) - 1)$ does not belong to the set $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$. From the already proven equality (34) it follows that this vertex cannot also belong to the set $V_{\mathbf{m}}(H)$ and, therefore, belongs to some set $V_{\mathbf{m}}(h'')$, where $h'' < H - 1$. Let's denote this vertex by v''.

(b') At least one vertex of the set $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ does not belong to the set $V(t, H(t) - 1)$. It follows from the already proved equality (34) that this vertex cannot also belong to the set $V(t, H(t))$ and hence belongs to some set $V(t, h'''))$, where $h''' < H(t) - 1$. Let's denote this vertex by v'''.

Thus, the vertices v''' and v'' belong to the sets, respectively, $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ and $V_{\mathbf{m}}(h'')$, where $H - 1$ and h'' satisfy the inequality $H - 1 > h''$. By Remark 7, this implies the inequality $v'' < v'''$. Moreover, the vertices v'' and v''' belong to the sets $V(t, H(t) - 1)$ and $V(t, h''')$, respectively, where $H(t) - 1$ and h''' satisfy the inequality $H(t) - 1 > h'''$. This inequality and the inequality $v'' < v'''$ by Definition 2 imply that the set $V(t)$ of vertices of the tree t is not layer-ordered. By the conditions of Lemma 7, the tree t belongs to the set $TRc(\mathbf{m})$. Therefore, the conclusion drawn is in contradiction with Remark 3, asserting that the set $TRc(\mathbf{m})$ does not contain any tree t whose vertices set $V(t)$ is not layer-ordered. Consequently, our assumption is wrong, but equality (35) is true. Lemma 7 is completely proved. ▶

Theorem 3. *For any H-dimensional vector $\mathbf{m}$ with natural components, any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ that has a tree representation by formula* (19)*, can be represented by the product*

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}}(h), \tag{39}$$

where the number n is defined by formula (1) *and the function $P_{\mathbf{m}}(h)$ is defined by formula* (23).

Before giving the proof of Theorem 3, we give an example in which we consider a particular case of formula (39), and also formulate and prove two auxiliary lemmas and their corollaries.

Example 2. Consider the case when $H = 1$. Then the vector $\mathbf{m}$ contains only one component m_1. As noted in Example 1, in this case the set $TRc(\mathbf{m})$ coincides with the set $T(\mathbf{m})$ and contains only one tree t that is a star, whose center is the root $v = 1$. From formula (20) follows: $\sigma_{\mathbf{m}}(0) = 1$; $\quad \sigma_{\mathbf{m}}(1) = 1 + m_1$. Hence, applying formulas (21), we find the sets of vertices

$$V_{\mathbf{m}}(0) = \{1\} \quad \text{and} \quad V_{\mathbf{m}}(1) = \{v : \quad \sigma_{\mathbf{m}}(0) < v \leq \sigma_{\mathbf{m}}(1)\} \tag{40}$$

The set $X(t)$ of arcs of such a tree is represented by formula

$$X(t) = \{(1, v) : \quad v \in V_{\mathbf{m}}(1)\}. \tag{41}$$

Using these results from formula (22) we obtain

$$S_{\mathbf{m}}(1, v) = g_{(1,v)}, \quad \text{where } v \in V_{\mathbf{m}}(1). \tag{42}$$

In the case under consideration, the representation of the function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ by formula (19) has the form

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \prod_{(1,v)\in X(t)} g_{(1,v)}. \tag{43}$$

From here and from formula (42), as well as from the definitions of the sets $X(t)$ and $V_{\mathbf{m}}(1)$ by formulas (41) and (40), the following representation of the function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ follows:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \prod_{v\in V_{\mathbf{m}}(h)} S(h, v), \tag{44}$$

where $H = h = 1$. Hence, applying the definition of the function $P_{\mathbf{m}}(h)$ by formula (23), we obtain the representation of the function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ in the form:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = P_{\mathbf{m}}(1), \tag{45}$$

which is a particular case of formula (39) for all $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$, where $H = 1$. Thus, for $H = 1$ the assertion of Theorem 3 is proved for all $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$.■

Lemma 8. *Assume that for a given natural number H', satisfying the inequality $H' \geq 1$, and for all vectors $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H')$ any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, which has a tree representation by formula* (19)*, can be represented by formula* (39)*, where $H = H'$, as a product of functions. Then for all vectors $\mathbf{m}$ belonging to the set $\mathfrak{M}(H' + 1, 1)$, any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ that has a tree representation by formula* (19)*, can be represented by formula* (39)*, where $H = H' + 1$, as a product of functions.*

Proof. Let a vector $\mathbf{m}$ belong to the set $\mathfrak{M}(H' + 1, 1)$. In this case, there is the expansion (17) of the set $TRc(\mathbf{m})$ of rooted growing trees into disjoint subsets. Using this expansion, the tree representation of the function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ by formula (19) can be transformed as follows:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \sum_{t\in T^1(s)} \prod_{(u,v)\in X(t)} g_{(u,v)}, \tag{46}$$

where $\mathbf{m}'$ is the H'-dimensional vector which belongs to the set $\mathfrak{M}(H')$ and such that all it's component coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}$.

To simplify the notation, we denote $u(t) = B_s^{-1}(t)$. The representation of the set $X(t)$ of arcs of a tree $t \in T^1(s)$ by formula (13) implies

$$\prod_{(u,v)\in X(t)} g_{(u,v)} = g_{(u(t),w)} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)}, \tag{47}$$

where $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$. Substituting in the right side of the equality (46) instead of the product, which is the left side of the equality (47), the right side of the equality (47), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} \right) \sum_{t\in T^1(s)} g_{(u(t),w)}, \tag{48}$$

Since the trees s belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$, then, first, by Corollary 1, the mapping B_s of the vertices set $V(s, H(s))$ onto the set $T^1(s)$ of labeled rooted growing trees is a bijection. Therefore the mapping B_s^{-1} is one-to-one mapping of the set $T^1(s)$ onto the set $V(s, H(s))$. This implies the equality

$$\sum_{t \in T^1(s)} g_{(u(t),w)} = \sum_{u \in V(s,H(s))} g_{(u,w)}. \tag{49}$$

Second, by Lemma 7 we have the equality

$$V(s, H(s)) = V_{\mathbf{m}'}(H'), \tag{50}$$

where $H(s) = H'$, and the vertices set $V_{\mathbf{m}'}(H')$ is defined by formulas (21).

Formulas (49) and (50) imply the equality

$$\sum_{t \in T^1(s)} g_{(u(t),w)} = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}'}(H')} g_{(u,w)}. \tag{51}$$

Substituting in the right side of the equality (48) instead of expression on the left side of the equality (51), the expression on the right side of the equality (51), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)} \right) \sum_{u \in V_{\mathbf{m}'}(H')} g_{(u,w)}. \tag{52}$$

Note that for $h = H' + 1$ and $v = w$ the equality (22) becomes

$$S_{\mathbf{m}}(H' + 1, w) = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}}(H')} g_{(u,w)}, \quad \text{where} \quad w \in V_{\mathbf{m}}(H' + 1). \tag{53}$$

Since the vectors $\mathbf{m}$ and $\mathbf{m}'$, by definition, satisfy the conditions of Lemma 6, then Lemma 6 implies, in particular, the equality $V_{\mathbf{m}'}(H') = V_{\mathbf{m}}(H')$. Applying this equality, we transform the equality (53) as follows:

$$S_{\mathbf{m}}(H' + 1, w) = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}}(H')} g_{(u,w)} = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}'}(H')} g_{(u,w)}, \quad \text{где} \quad w \in V_{\mathbf{m}}(H' + 1); \tag{54}$$

Replacing on the right side of the equality (52) the expression that is the right side of the equality (54) with the expression on the left side of the equality (54), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)} \right) S_{\mathbf{m}}(H' + 1, w), \tag{55}$$

Recall that in the equality (55) the vector $\mathbf{m}$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H' + 1, 1)$ and therefore satisfies the condition $m_{H'+1} = 1$. From here and from formulas (20) and (21) it follows

$$\sigma_{\mathbf{m}}(H') = ||\mathbf{m}||; \quad \sigma_{\mathbf{m}}(H' + 1) = ||\mathbf{m}|| + 1; \quad V_{\mathbf{m}}(H' + 1) = \{w\}, \tag{56}$$

where $w = ||\mathbf{m}|| + 1$. From formulas (23) and (56) it follows

$$P_{\mathbf{m}}(H' + 1) = S_{\mathbf{m}}(H' + 1, w). \tag{57}$$

Replacing on the right side of the equality (55) the expression that is the right part of the equality (57), by the expression on the left side equality (57), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} \right) P_{\mathbf{m}}(H'+1), \tag{58}$$

The sum on the right side of the equality (58) is the tree representation of the function $\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n-1}$ as it defined by formula (19):

$$\sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} = \varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n-1}, \tag{59}$$

where n is defined by formula (1), $\mathbf{m}' \in \mathfrak{M}(H')$ is H'-dimensional vector, all components of which coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}$. By assumption, the assertion of Theorem 3 is true for the function $\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n-1}$. Therefore, the sum on the left side of the equality (59) can be represented as

$$\sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} = \prod_{h=1}^{H'} P_{\mathbf{m}'}(h), \tag{60}$$

Substituting on the right side of the equation (58) instead of the sum on the left side of the equation (60) the product on the right side of the equation (60), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H'} P_{\mathbf{m}'}(h) \right) P_{\mathbf{m}}(H'+1). \tag{61}$$

Further, from the definition of the vectors $\mathbf{m}'$ and $\mathbf{m}$ it follows that these vectors satisfy the conditions of Lemma 6. By Lemma 6, this implies that the equalities (28) hold for $h \leq H'$. Applying these equalities, from formula (61) we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H'} P_{\mathbf{m}}(h) \right) P_{\mathbf{m}}(H'+1) = \prod_{h=1}^{H'+1} P_{\mathbf{m}}(h) = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}}(h), \tag{62}$$

Where $H = H' + 1$. Thus, Lemma 8 is proved. ►

Lemma 9. *Assume that for a given natural number H satisfying the inequality $H \geq 1$, for a given natural number k and for all vectors $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H,k)$ any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ that has a tree representation by formula* (19) *can be represented by formula* (39) *as a product of functions. Then for all vectors $\mathbf{m}$ belonging to the set $\mathfrak{M}(H,k+1)$, any the function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, which has the tree representation by formula* (19)*, can be represented by formula* (39) *as a product of functions.*

Proof. Let the vector $\mathbf{m}$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H,k+1)$. In this case, there is an expansion (18) of the set $TRc(\mathbf{m})$ of rooted growing trees into disjoint subsets. Using this expansion, the tree representation of the function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ by formula (19) can be transformed as follows:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \sum_{t\in T^2(s)} \prod_{(u,v)\in X(t)} g_{(u,v)}, \tag{63}$$

where $\mathbf{m}' \in \mathfrak{M}(H,k)$ is the H-dimensional vector satisfying the conditions: $m_H = k$, and all other its components coincide with the corresponding components of the vector $\mathbf{m}$.

In order to simplify the designations, we denote $\widetilde{u}(t) = \widetilde{B}_s^{-1}(t)$. From the presentation of the set $X(t)$ of the arcs of a tree $t \in T^2(s)$ by formula (16) it follows

$$\prod_{(u,v)\in X(t)} g_{(u,v)} = g_{(\widetilde{u}(t),w)} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)}, \tag{64}$$

where $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$.

From the definition of the vectors $\mathbf{m}$ and $\mathbf{m}'$ implies the equality $||\mathbf{m}|| = ||\mathbf{m}'|| + 1$. Therefore, the vertex $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ can be represented as follows: $w = ||\mathbf{m}|| + 1$. From this, by Remark 6, it follows that the vertex $w = ||\mathbf{m}|| + 1$ belongs to the set $V_{\mathbf{m}}(H)$:

$$w \in V_{\mathbf{m}}(H). \tag{65}$$

Substituting into the right side of the equality (63) instead of the product that is the left part of equality (64), the right side of the equality (64), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} \right) \sum_{t\in T^2(s)} g_{(u(t),w)}. \tag{66}$$

Since the tree s belongs to the set $TRc(\mathbf{m}')$, two conclusions follow:

First, by Corollary 2, the mapping $\widetilde{B}_s$ of the vertices set $V(s, H(s)-1)$ onto the set $T^2(s)$ of labeled rooted growing trees is a bijection. Therefore, the mapping $\widetilde{B}_s^{-1}$ is a one-to-one mapping of the set $T^2(s)$ onto the set $V(s, H(s)-1)$. This implies the equality

$$\sum_{t\in T^2(s)} g_{(u(t),w)} = \sum_{u\in V(s,H(s)-1)} g_{(u,w)}. \tag{67}$$

Second, by Lemma 7 we have the equality

$$V(s, H(s)-1) = V_{\mathbf{m}'}(H-1), \tag{68}$$

where $H(s) = H$, and the vertices set $V_{\mathbf{m}'}(H-1)$ is defined by formulas (21).

Formulas (67) and (68) imply the equality

$$\sum_{t\in T^2(s)} g_{(u(t),w)} = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,w)}. \tag{69}$$

Replacing on the right side of equality (66) the expression that is the left side of equality (69) with the expression that is the right side of equality (69), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} \right) \sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,w)}. \tag{70}$$

Further, from the definition of the vectors $\mathbf{m}'$ and $\mathbf{m}$ it follows that the dimensions of these vectors are equal to the same number H, while the components of these vectors satisfy the conditions of Lemma 6. Hence, by Lemma 6 it follows that for $h < H$ we have the equalities (26), (27) and (28).

Using equalities (26) and formulas (65) and (22), we obtain

$$\sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,w)} = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}}(H-1)} g_{(u,w)} = S_{\mathbf{m}}(H,w), \quad \text{где} \quad w \in V_{\mathbf{m}}(H); \tag{71}$$

Replacing on the right side of the equality (70) the expression that is the left side of equalities (71) by the expression that is the right side of equality (71), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} \right) S_{\mathbf{m}}(H,w), \tag{72}$$

From the definition of the function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ by formula (19) it follows

$$\sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} = \varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'}, \tag{73}$$

where n' is the number $||\mathbf{m}'|| + 1$. Replacing on the right side of equality (72) the sum that is the left side of equality (73) by the expression that is the right side of equality (73), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'} S_{\mathbf{m}}(H,w), \tag{74}$$

By definition, the vector $\mathbf{m}'$ belongs to the set $\mathfrak{M}(H,k)$. It follows from this that, by the condition of Lemma 9, the function $\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'}$, which has a tree representation by formula (19), can be represented by the product:

$$\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'} = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}'}(h). \tag{75}$$

Here the functions $P_{\mathbf{m}'}(h)$ are defined by formula

$$P_{\mathbf{m}'}(h) = \prod_{v\in V_{\mathbf{m}'}(h)} S_{\mathbf{m}'}(h,v). \tag{76}$$

In particular,

$$P_{\mathbf{m}'}(H) = \prod_{v\in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H,v). \tag{77}$$

From formulas (75), (77) and (28) it follows

$$\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'} = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h) \right) P_{\mathbf{m}'}(H) = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h) \right) \prod_{v\in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H,v). \tag{78}$$

From here and from formula (74) it follows

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h) \right) \left(\prod_{v\in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H,v) \right) S_{\mathbf{m}}(H,w). \tag{79}$$

Further, the definitions of the vectors $\mathbf{m}'$ and $\mathbf{m}$ imply the equalities $m_{_H} = k+1$ and $m'_{_H} = k$. From here and from formulas (20), (21) and (22) it follows that for $h = H$ the equalities

$$\sigma_{\mathbf{m}}(H) = \sigma_{\mathbf{m}'}(H) + 1 = w; \quad V_{\mathbf{m}'}(H) = \{v : \quad \sigma_{\mathbf{m}'}(H-1) + 1 \leq v \leq \sigma_{\mathbf{m}'}(H)\};$$
$$V_{\mathbf{m}}(H) = \{v : \quad \sigma_{\mathbf{m}}(H-1) + 1 \leq v \leq \sigma_{\mathbf{m}}(H)\}. \tag{80}$$

take place. Let us introduce the set $V'_{\mathbf{m}}(H)$ into consideration, setting

$$V'_{\mathbf{m}}(H) = \{v : \quad \sigma_{\mathbf{m}}(H-1) + 1 \leq v \leq \sigma_{\mathbf{m}}(H) - 1\}. \tag{81}$$

The formulas (80) and (81) imply

$$V_{\mathbf{m}}(H) = V'_{\mathbf{m}}(H) \bigcup \{w\}. \tag{82}$$

In addition, (80) implies the equality

$$\sigma_{\mathbf{m}'}(H) = \sigma_{\mathbf{m}}(H) - 1. \tag{83}$$

As proved above, for all natural values of h satisfying inequalities $0 < h < H$, equality (25) holds. In particular, this equality also holds for $h = H - 1$:

$$\sigma_{\mathbf{m}'}(H-1) = \sigma_{\mathbf{m}}(H-1). \tag{84}$$

From the definition of the sets $V_{\mathbf{m}'}(H)$ and $V'_{\mathbf{m}}(H)$ by formulas, respectively, (80) and (81) and from equalities (83) and (84) it follows that the sets $V_{\mathbf{m}'}(H)$ and $V'_{\mathbf{m}}(H)$ coincide. From here and from equality (82) follows the equality

$$V_{\mathbf{m}}(H) = V_{\mathbf{m}'}(H) \bigcup \{w\}. \tag{85}$$

Since the sets $V_{\mathbf{m}'}(H)$ and $V'_{\mathbf{m}}(H)$ coincide, it follows from assertion 2 of Lemma 6 that the sums $S_{\mathbf{m}'}(H, v)$ and $S_{\mathbf{m}}(H, v)$ coincide if the vertex v belongs to the set $V_{\mathbf{m}'}(H)$:

$$S_{\mathbf{m}}(H, v) = S_{\mathbf{m}'}(H, v), \quad \text{where} \quad v \in V_{\mathbf{m}'}(H). \tag{86}$$

Making in formula (79) the substitutions defined by formula (86) and applying equality (85), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right) \left(\prod_{v \in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H, v)\right) S_{\mathbf{m}}(H, w) =$$
$$\left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right) \left(\prod_{v \in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}}(H, v)\right) S_{\mathbf{m}}(H, w) =$$
$$\left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right) \left(\prod_{v \in V_{\mathbf{m}}(H)} S_{\mathbf{m}}(H, v)\right). \tag{87}$$

For $h = H$, the function $P_{\mathbf{m}}(h)$ defined by formula (23) takes the form

$$P_{\mathbf{m}}(H) = \prod_{v \in V_{\mathbf{m}}(H)} S_{\mathbf{m}}(H, v). \tag{88}$$

Replacing on the right side of equalities (87) the expression on the right side of equality (88) with the expression on the left side equality (88), we obtain

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right) P_{\mathbf{m}}(H) = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}}(h). \tag{89}$$

Thus, Lemma 9 is proved. ►

Lemma 9 implies by mathematical induction

Corollary 3. *Let us assume that for any natural number $H > 1$ and for all vectors $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H, 1)$ any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, which has a tree representation by formula* (19)*, can be represented by formula* (39) *as a product of functions. Then for all vectors* $\mathbf{m}$ *belonging to the set $\mathfrak{M}(H)$, any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ having a tree representation by formula* (19) *can be represented by formula* (39) *as a product of functions.*

Corollary 3 and Lemma 8 imply

Corollary 4. *Assume that for a natural number $H \geq 1$ and for all vectors $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$ any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, which has a tree representation by formula* (19)*, can be represented by formula* (39) *as a product of functions. Then, for all vectors* $\mathbf{m}$ *belonging to the set $\mathfrak{M}(H+1)$, any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ that has a tree representation by formula* (19)*, can be represented by formula* (39) *as a product of functions.*

Proof. Assume that for a natural number $H > 1$ and for all vectors $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$ any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, which has a tree representation by formula (19), satisfies the conditions of Corollary 4. Then, by Lemma 8, it follows that for all vectors $\mathbf{m}$ belonging $\mathfrak{M}(H + 1, 1)$, any function $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ having a tree representation by formula ((19)) can be represented by formula (39) as a product of functions. This implies the assertion of Corollary 4 by Corollary 3. ►

Proof of Theorem 3. In Example 2, we prove that for $H = 1$ the assertion of Theorem 3 is true for all $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$. From this result and Corollary 4, the assertion of Theorem 3 follows by the method of mathematical induction. ►

There is no doubt that Theorem 3 will find its applications.

In conclusion, the author expresses his sincere gratitude to Ph.D. V. I. Cebro for helpful advice and A.V. Belyaev for technical support.

References

[1] И.И. Иванчик. Метод ковариантного суммирования диаграмм в классической статистике. Дис. ... д — ра физ. — мат. наук. М., 1987.

[2] Г.И. Калмыков, Полуупорядочение деревьев. – М.: ВИНИТИ, 1988. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.02.88, № 2600–В88.

[3] Г.И. Калмыков. О представлении коэффициентов разложения Майера и вириальных коэффициентов.// Теоретическая и математическая физика, 1990. т. 84, № 2, с. 279–289.

[4] Г.И. Калмыков, Аналитическое продолжение разложений Майера и вириального разложения.// Теоретическая и математическая физика, 1992, т. 92, № 1, с. 139–149.

[5] Г.И. Калмыков, О частичном упорядочении деревьев и классификации связных графов и блоков.// Дискретная математика, 1992, т. 4, вып. 2, с. 66–73.

[6] Г.И. Калмыков, О представлении коэффициентов разложения в степенной ряд плотности распределения одной частицы в большом каноническом ансамбле.// Теоретическая и математическая физика, 1993, т. 97, № 3, с. 452–458.

[7] Г.И. Калмыков, О плотности распределения одной частицы в большом каноническом ансамбле.// Теоретическая и математическая физика. – 1994. – т. 100, № 1. – с. 45–58.

[8] Г.И. Калмыков, Разложение по степеням активности корреляционных функций большого канонического ансамбля.// Теоретическая и математическая физика, 1994, т. 101, № 1, с. 94–109.

[9] Г.И. Калмыков, Метод древесных сумм и его приложение к решению математических проблем классической статистической механики. Дис. . . . д — ра физ. — мат. наук. М., 1998, 175 с.

[10] Г.И. Калмыков, О явлении асимптотической катастрофы майеровских рядов в классической статистической механики. // Теоретическая и математическая физика. 1999, т. 119, № 3, с. 475–497.

[11] Г.И. Калмыков, Представление вириальных коэффициентов, позволяющее избежать асимптотической катастрофы.// Теоретическая и математическая физика. – 2002. – т. 130, № 3. – с. 508–528.

[12] Г.И. Калмыков, Древесная классификация помеченных графов. М.: Физматлит, 2003, 188 с.

[13] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

[14] Дж. Майер, М. Гепперт-Майер, Статистическая механика. М.: Мир, 1980.

[15] Д. Рюэль, Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971.

[16] Ф.Харари, Теория графов. М.: Мир, 1973.

[17] Frank Harary, Graph Theory. Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusets Menio Park, California, london, 1969.

[18] I.I. Ivanchik, Generalized Mayer Series in Classical Statistical Mechanics.N.Y., US, Nova Science Publishers, Inc.,1993.

[19] G.I. Kalmykov, Analytic continuation of Mayer and virial expansions.// — 1993. Translated from Teoreticheskya i Matematicheskya Fizika, Vol. 92, № 1, pp. 139–149. Plenum Publishing Corporation 0040-5779/92/9201-0791. pp. 791–798.

[20] G.I. Kalmykov, Representation of the power-series coefficients for one-point correlation funtion in grand canonical ensemble.// — 1994. Translated from Teoreticheskya i Matematicheskya Fizika, V. 97, № 3, pp. 452–458. Plenum Publishing Corporation 0040-5779/93/9703-1405. pp. 1405-1408.

[21] G.I. Kalmykov, One-particle distribution density in the grand canonical ensemble.// Theoretical and Mathematical Physics. 1994. Vol. 100, № 1. pp. 834–845.

[22] G.I. Kalmykov, Expansion of the correlation functions of the grand canonical ensemble in powers of the activity.// Theoretical and Mathematical Physics. 1994, Vol. 101, № 1, pp. 1224–1234.

[23] G.I. Kalmykov, Mayer-series asymptotic catastrophe in classical statistical mechanics.// Theoretical and Mathematical Physics. — 1999. Vol. 119, № 3. pp. 778–795.

[24] G.I. Kalmykov, A representation of virial coeffcients that avoid the asymptotical catastrophe.// Theoretical and Mathematical Physics. 2002, Vol. 130, № 3, pp. 432–457.

[25] G.I. Kalmykov, Representations of coefficients of power series in classical statistical mechanics. Their classification and complexity criteria. // http://arxiv.org/abs/2007.02146 (in russian)

[26] G.I. Kalmykov, Complexity of representations of coefficients of power series in classical statistical mechanics. Their classification and complexity criteria. v1 // http://viXra.org: 2110.0044 submitted on 2021-10-10 21:11:18 (english and russian versions)

[27] G.I. Kalmykov, Complexity of representations of coefficients of power series in classical statistical mechanics. Their classification and complexity criteria. // http://arxiv.org/abs/2207.07583 (in english)

[28] J.E. Mayer and M. Geppert-Mayer, Statistical Mechanics, second edition. Wiley-Interscience Publishing, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney,Toronto, 1977.

[29] David Ruelle, Statistical Mechanics, Rigorous Results. W.A. Beniamin, inc. New York, Amsterdam, 1969.

[30] Francis R. Ree and Wiliam G. Hoover. Fifth and Sixth Virial coefficients for Hard Spheres and Hard Disks.// Journal of Chemical Physics, 40:4, February 15, 1964, pp. 939–950.

[31] Francis R. Ree and Wiliam G. Hoover. Seventh Virial coefficients for Hard Spheres and Hard Disks.// Journal of Chemical Physics, 46:11, June 01, 1967, pp. 4181–4197.

[32] Francis R. Ree and Wiliam G. Hoover. Reformulation of the Virial Series for Classical Fluids.// Journal of Chemical Physics, 41:6, September 15, 1964, pp. 1635–1645.

Новые классификации помеченных корневых растущих деревьев и их приложение к упрощению древесного представления функций

Г.И. Калмыков

Russian version

Аннотация

В статье рассматриваются помеченные корневые растущие деревья. Исследования в этой области, проведенные автором этой статьи за последние 35 лет, привели к созданию концепции древесной классификации помеченных графов. Эта концепция является математической основой метода древесных сумм, направленного на упрощение представлений коэффициентов степенных рядов классической статистической механики. Этим методом были получены свободные от асимптотической катастрофы древесные представления майеровских коэффициентов разложений давления и плотности по степеням активности. Этим же методом были получены и древесные представления коэффициентов разложения отношения активности к плотности в ряд по степеням активности. Все эти представления при $n \geq 7$ значительно проще сравнимых с ними представлений Ри-Гувера по определенным на этих представлениях критериям сложности. Также были получены древесные представления коэффициентов разложения m-частичной функции распределения в ряд по степеням активности.

С целью обеспечения математической основы для построения новых, еще менее сложных представлений коэффициентов этих степенных рядов потребовалось дальнейшее развитие концепции древесной классификации помеченных графов.

В рамках решения проблемы дальнейшего развития этой концепции в статье предлагаются новые классификации помеченных корневых растущих деревьев и на их основе сформулирована и доказана теорема, являющаяся основой для упрощения древесных представлений функций, то есть их представлений суммой помеченных деревьями произведений функций.

1. В статье рассматриваются помеченные корневые растущие деревья. Исследования в этой области, проведенные автором этой статьи за последние 35 лет, привели к созданию концепции древесной классификации помеченных графов [2–9, 12, 19–22]. Эта концепция является математической основой **метода древесных сумм**, направленного на упрощение представлений коэффициентов степенных рядов классической статистической механики. Этим методом были получены [3, 4, 6–9, 12, 19–22] свободные от асимптотической катастрофы [1, 9–12, 18, 23, 24] представления майеровских коэффициентов разложений давления и плотности по степеням активности [14, 15, 28, 29]. Этим же методом были получены [7, 9, 12, 21] и представления коэффициентов разложения отношения активности к плотности в ряд по степеням активности. Все эти представления при $n \geq 7$ значительно проще сравнимых с ними представлений Ри-Гувера [30–32] по определенным на этих представлениях критериям сложности [25–27]. Также были получены [8, 22] представления коэффициентов разложения m-частичной функции распределения в ряд по степеням активности.

С целью обеспечения математической основы для построения новых, еще менее сложных представлений коэффициентов этих степенных рядов потребовалось дальнейшее развитие концепции древесной классификации помеченных графов.

В рамках решения проблемы дальнейшего развития этой концепции в статье предлагаются новые классификации помеченных корневых растущих деревьев и на их основе сформулирована и доказана теорема, являющаяся основой для упрощения древесного представления функции, то есть ее представления суммой помеченных деревьями произведений функций.

Введем обозначения:

$T_n = T(V_n, 1) = \{t\}$ — множество помеченных корневых растущих деревьев с множеством вершин $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и корнем 1;

(i, j) — дуга, исходящая из вершины i и заходящая в вершину j;

$X(t)$ — множество дуг помеченного корневого растущего дерева t;

$H(t)$ — высота дерева t;

$V(t)$ — множество вершин корневого растущего дерева t;

$V(t, h)$ — слой вершин корневого растущего дерева t, находящихся на высоте h;

$m(t, h) = |V(t, h)|$ — мощность слоя вершин дерева t, находящихся на высоте h;

$\sigma(t, h)$ — число вершин дерева t, высота которых не превышает числа h;

$\mathbf{m}(t) = (m(t, 1), m(t, 2), \ldots, m\,(t, H(t)))$ — вектор, компонентами которого являются мощности слоев вершин дерева t;

$\mathfrak{M}(H) = \{\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_H)\}$ — множество всех H-мерных векторов с натуральными компонентами;

$||\mathbf{m}|| = \sum\limits_{h=1}^{H} m_h$ — норма вектора $\mathbf{m}$;

$\mathfrak{M}'(n, H) = \{\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_H)\}$ — множество всех H-мерных векторов с натуральными компонентами, удовлетворяющих условию

$$n = 1 + \sum_{h=1}^{H} m_h = 1 + ||\mathbf{m}||; \tag{1}$$

$T_{n,H} = \{t\}$ — множество помеченных корневых растущих деревьев высоты H (где $1 \leq H < n$), принадлежащих множеству T_n.

Пусть вектор $\mathbf{m}$ с натуральными компонентами принадлежит некоемому множеству $\mathfrak{M}'(n, H)$. Тогда через $T(\mathbf{m}) = \{t\}$ обозначим множество всех деревьев t, принадлежащих множеству T_n и удовлетворяющих условию $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}$.

Очевидно, что множества T_n и $T_{n,H}$ помеченных корневых растущих деревьев разлагаются на непересекающиеся подмножества:

$$T_n = \bigcup_{H=1}^{n-1} T_{n,H}; \quad T_{n,H} = \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n,H)} T(\mathbf{m}). \tag{2}$$

Из этих разложений следует разложение

$$T_n = \bigcup_{H=1}^{n-1} \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n,H)} T(\mathbf{m}). \tag{3}$$

Вершины слоя $V(t, h)$ помеченного корневого растущего дерева t обозначим $v(t, h, 1)$, $v(t, h, 2), \ldots, v(t, h, m(t, h))$. Без ограничения общности можно считать, что при всех $h = \overline{1, H(t)}$ имеет место неравенство $v(t, h, i) < v(t, h, j)$, если только $1 \leq i < j \leq m(t, h)$.

Определим преобразование ω_t на множестве $V(t)$ формулами:

$$\omega_t(1) = 1; \quad \omega_t(v(t, h, i)) = 1 + \sum_{j=1}^{h-1} m(t, j) + i, \quad h = 1, 2, \ldots, H(t). \tag{4}$$

Пусть $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n, H)$ и $t \in T(\mathbf{m})$. Тогда $V(t) = V_n$, а преобразование ω_t устанавливает взаимно однозначное отображение множества V_n на себя. Оно индуцирует отображение Ω_t множества $X(t) = \{x = (u, v)\}$ дуг дерева t на множество дуг

$$\Omega_t(X(t)) = X'(t) = \{(\omega_t(u), \omega_t(v)), \quad (u, v) \in X(t)\}. \tag{5}$$

Как известно (см. [12], глава 1, лемма 4), граф $(V_n, X'(t))$ является деревом из множества деревьев T_n.

Для каждого вектора $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}'(n, H)$ определим отображение $A_{\mathbf{m}}$ множества деревьев $T(\mathbf{m})$ в себя, полагая

$$A_{\mathbf{m}} t = (V_n, X'(t)), \tag{6}$$

где множество $X'(t)$ определяется формулой (5) при всех $t \in T(\mathbf{m})$. Из определения отображения $A_{\mathbf{m}}$ формулами (4)–(6) следует, что образом любого дерева $t \in T(\mathbf{m})$ при отображении $A_{\mathbf{m}}$ является дерево $A_{\mathbf{m}} t \in T(\mathbf{m})$.

Образ множества $T(\mathbf{m})$ при отображении $A_{\mathbf{m}}$ обозначим $TRc(\mathbf{m}) \subset T(\mathbf{m})$.

Замечание 1. *Если вектор $\mathbf{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}'(n, H)$, то из определения отображения $A_{\mathbf{m}}$ и определения множества $TRc(\mathbf{m})$ следует, что множеством вершин любого дерева $t \in TRc(\mathbf{m})$ является множество V_n, где n определяется вектором $\mathbf{m}$ по формуле* (1).

Определение 1. Два дерева $t_1 \in T(\mathbf{m})$ и $t_2 \in T(\mathbf{m})$ являются *совершенно изоморфными*, если они удовлетворяют условию $A_{\mathbf{m}} t_1 = A_{\mathbf{m}} t_2$. ■

Очевидно, что установленное отношение совершенного изоморфизма двух деревьев является рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть отношением эквивалентности. Поэтому оно позволяет разбить множество деревьев $T_{\mathbf{m}}$ на классы совершенно изоморфных деревьев.

Замечание 2. *Из определения* 1 *следует, что всякий класс совершенно изоморфных деревьев, который входит во множество $T(\mathbf{m})$, обладает следующим свойством: при отображении $A_{\mathbf{m}}$ образом всех деревьев, принадлежащих этому классу, является одно и то же дерево, принадлежащее множеству $TRc(\mathbf{m})$. Значит, это дерево можно принять за дерево-метку этого класса и считать этот класс помеченным этим деревом-меткой.*

При этом всякое дерево из множества $TRc(\mathbf{m})$ окажется меткой класса совершенно изоморфных деревьев, который входит во множество $T(\mathbf{m})$ и однозначно определяется этим деревом.

Из определения отображения $A_{\mathbf{m}}$ формулами (4)–(6) следует, что для всякого дерева $t \in TRc(\mathbf{m})$ имеет место равенство

$$A_{\mathbf{m}} t = t. \tag{7}$$

Из этого равенства по замечанию 2 следует, что дерево t принадлежит тому же классу совершенно изоморфных деревьев, меткой которого оно является.

Определение 2. Множество $V(t)$ вершин дерева t будем называть *послойно упорядоченным*, если слои вершин дерева t удовлетворяют условию

(C) если $v' \in V(t, h')$, $v'' \in V(t, h'')$, где $1 \le h' < h'' \le H(t)$, то $v' < v''$.

В противном случае будем говорить, что множество $V(t)$ *не является послойно упорядоченным.* ■

Замечание 3. *Из определения* 2, *определения отображения $A_{\mathbf{m}}$ формулами* (4)–(6), *и определения множества $TRc(\mathbf{m})$ следует, что это множество есть совокупность всех деревьев $t \in T(\mathbf{m})$, у которых множество $V(t)$ вершин является послойно упорядоченным. Значит, множество $TRc(\mathbf{m})$ не содержит ни одного дерева t, множество $V(t)$ вершин которого не является послойно упорядоченным.*

Пример 1. Рассмотрим случай, когда вектор $\mathbf{m}$ является одномерным, то есть скаляром. В этом случае множество $T(\mathbf{m})$ содержит только одно дерево — звезду, центром которой является корень дерева $v = 1$, а множество $TRc(\mathbf{m})$ совпадает с множеством $T(\mathbf{m})$. ■

В том случае, когда вектор $\mathbf{m}$ имеет размерность $H \geq 2$, мощность множества $TRc(\mathbf{m})$ определяется формулой

$$|TRc(\mathbf{m})| = \prod_{i=2}^{H} [m(i-1)]^{m(i)}. \tag{8}$$

Доказательство формулы (8) предоставляется читателю.

Класс совершенно изоморфных деревьев, помеченный деревом-меткой $t \in TRc(\mathbf{m})$, обозначим $TI\,(t)$. Тогда множество деревьев $T(\mathbf{m})$ можно представить в виде объединения всех классов, помеченных деревьями из множества $TRc(\mathbf{m})$:

$$T(\mathbf{m}) = \bigcup_{t \in TRc(\mathbf{m})} TI\,(t). \tag{9}$$

Мощность множества $TI\,(t)$ определяется формулой

$$|TI\,(t)| = ||\mathbf{m}(t)||! \prod_{h=1}^{H(t)} \big(m(t,h)!\big)^{-1} \tag{10}$$

2. Введем теперь классификацию множества деревьев $TRc(\mathbf{m})$. С этой целью введем обозначения:

$\mathfrak{M}(H,k)$ — множество, состоящее из всех векторов $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_H)$ множества $\mathfrak{M}(H)$, удовлетворяюших условию $m_H = k$, где k — натуральное число;

$s(t)$ — подграф дерева $t \in TRc(\mathbf{m})$, получающийся удалением из дерева t его вершины $w = ||\mathbf{m}|| + 1$.

Из определения подграфа $s(t)$ дерева t очевидно, что $s(t)$ является ориентированным [12, 16, 17] графом. Будем считать, что вершина $v = 1$, являющаяся корнем дерева t, является и корнем орграфа $s(t)$.

Лемма 1. *Подграф $s(t)$ дерева $t \in TRc(\mathbf{m})$ есть помеченное корневое растущее дерево, являющееся поддеревом дерева t.*

Доказательство. Из условий леммы 1 следует, что дерево t есть помеченное корневое растущее дерево с корнем 1. Следовательно, все вершины его подграфа $s(t)$ являются помеченными.

Из условий леммы 1 следует, что множество $V(t)$ вершин дерева t является послойно упорядоченным. Поэтому его вершина $w = ||\mathbf{m}|| + 1$ принадлежит слою вершин $V(t, H(t))$ и, следовательно, является концевой вершиной дерева t. Отсюда следует, что эта вершина имеет нулевую полустепень исхода. Стало быть, любая, отличная от вершины w, вершина дерева t недостижима в этом дереве из вершины w. Отсюда вытекает (см. [12], гл. 1, лемма 3), что любые две вершины этого дерева, отличные от вершины w, связаны в этом дереве полупутем [16][17], не содержащим вершину w. Значит, в подграфе $s(t)$ дерева t любые две вершины связаны полупутем. Отсюда следует [16][17], что граф $s(t)$ — (слабо) связный орграф. Так как дерево t не имеет, по определению, контуров [16][17], то и его подграф $s(t)$ также не имеет контуров. При этом только одна вершина $v = 1$ имеет нулевую полустепень захода [16][17], а все остальные вершины орграфа $s(t)$ имеют единичную полустепень захода. Таким образом, вершина $v = 1$ является единственным источником [16][17] (слабо) связного орграфа $s(t)$, не имеющего контуров и удовлетворяющего условию: все вершины орграфа $s(t)$, кроме источника $v = 1$, имеют единичную полустепень захода. Такой граф называется [12, 16, 17] исходящим (растущим) деревом. Так как вершина $v = 1$ является корнем дерева $s(t)$, то дерево $s(t)$ является (см. [12, 16, 17]) корневым растущим деревом. А так как дерево $s(t)$ является подграфом дерева t, то дерево $s(t)$ является поддеревом дерева t. Лемма 1 полностью доказана. ►

Замечание 4. *Заметим, что подграф $s(t)$ не содержит дуги (u,w) дерева t, исходящей из вершины u этого дерева и заходящей в вершину w, определенную выше.*

Заметим также, что множество $V(s(t))$ вершин этого поддерева является, как и множество $V(t)$ вершин дерева t, послойно упорядоченным.

Замечание 5. *Если компонента $m(t, H(t))$ вектора $\mathbf{m}(t)$ удовлетворяет условию $m(t, H(t)) = 1$, то вектор $\mathbf{m}(t)$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(H(t), 1)$, множество $V(t, H(t))$ дерева t содержит только одну вершину $w = ||\mathbf{m}|| + 1$, а его поддерево $s(t)$ принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, где $\mathbf{m}'$ — принадлежащий множеству $\mathfrak{M}(H(t) - 1)$ $(H(t) - 1)$-мерный вектор, все компоненты которого совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}$.*

В противном случае вектор $\mathbf{m}(t)$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(H(t), k)$, где $k > 1$, множество $V(t, H(t))$ дерева t содержит более чем одну вершину, а его поддерево $s(t)$ принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, где $\mathbf{m}'$ — $H(t)$-мерный вектор, принадлежащий множеству $\mathfrak{M}(H(t), k - 1)$ и удовлетворяющий условиям: $m'_{H(t)} = m_{H(t)} - 1$, а все остальные компоненты вектора $\mathbf{m}'$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}$.

Так как множество $V(s(t))$ вершин дерева $s(t)$ является, по замечанию 4, послойно упорядоченным, то, по замечанию 3, это дерево принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$.

Лемма 2. *Пусть помеченное корневое растущее дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, где $\mathbf{m}'$ — вектор, принадлежащий множеству $\mathfrak{M}(H)$ при некотором натуральном числе H. И пусть t — корневой ориентированный надграф дерева s, имеющий своим корнем вершину $v = 1$ и получающийся добавлением к дереву s вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из некоей вершины u дерева s. Тогда, во-первых, орграф t есть помеченное корневое растущее дерево; во-вторых, высота вершины w в дереве t на единицу больше высоты вершины u в дереве s.*

Доказательство. Докажем сначала, что орграф t слабо связный, то есть любая пара его вершин соединена полупутем. Очевидно,что любая пара его вершин, принадлежащих множеству $V(s)$, соединена полупутем. Вершины u и w в орграфе t, по условиям леммы 2, соединены полупутем, состоящим из одной дуги (u, w). Если же вершина u' принадлежит множеству $V(s)$ и отлична от вершины u, то в орграфе t она соединена с вершиной w полупутем, являющимся объединением дуги (u, w) и полупути, соединяюшего вершины u и u'. Таким образом, любая пара вершин орграфа t соединена полупутем. Следовательно, орграф t слабо связный.

Докажем теперь, что орграф t не имеет контуров. Так как дерево s не имеет контуров, то орграф t не имеет контуров, в которых все дуги принадлежат дереву s. Следовательно, если орграф t имеет контур, то этот контур содержит дугу (u, w), а стало быть, содержит и вершину w. Но в орграфе t в вершину w заходит только одна дуга (u, w) и из нее не исходит ни одной дуги. Поэтому вершина w не может принадлежать никакому контуру. Отсюда следует, что орграф t не имеет контуров.

Далее, в орграфе t только одна вершина $v = 1$ имеет нулевую полустепень захода [16][17], а все остальные вершины орграфа t имеют единичную полустепень захода. Таким образом, вершина $v = 1$ является единственным источником [16][17] (слабо) связного орграфа t, не имеющего контуров и удовлетворяющего условию: все вершины орграфа t, кроме источника $v = 1$, имеют единичную полустепень захода.

Такой орграф называется [12, 16, 17] исходящим (растущим) деревом. По условиям леммы 2 t — корневой орграф, имеющий своим корнем вершину $v = 1$. Поэтому дерево t является (см. [12, 16, 17]) корневым растущим деревом. Первое утверждение леммы 2 доказано.

Докажем теперь второе утверждение леммы 2. По условиям леммы 2 в дереве t единственной дугой, инцидентной вершине w, является дуга (u, w). Поэтому в дереве t всякий полупуть, соединяющий вершину w с корнем дерева t, является объединением дуги (u, w) и полупути, соединяюшего вершину u с корнем $v = 1$. Это приводит нас к двум выводам.

Во-первых, отсюда и из определения полупути [16][17] следует, что вершина w не может принадлежать никакому полупути в дереве t, соединяюшему вершину u с корнем $v = 1$. Отсюда по определению дерева t следует, что все вершины любого полупути, соединяюшего в дереве t вершину u с корнем $v = 1$, принадлежат и дереву s. Следовательно, любой полупуть, соединяюший в дереве t вершину u с корнем $v = 1$, принадлежит дереву s. Значит, и кратчайший полупуть, соединяюший в дереве t вершину u с корнем $v = 1$, принадлежит дереву s. Более того, этот полупуть является кратчайшим полупутем, соединяюшим в дереве s вершину u с корнем $v = 1$

Во-вторых, кратчайшим полупутем в дереве t, соединяющим вершину w с корнем, является объединение дуги (u, w) и кратчайшего полупути, соединяюшего вершину u с корнем $v = 1$. Следовательно, в дереве t длина кратчайшего полупути, соединяющего вершину w с корнем $v = 1$, на единицу больше длины кратчайшего полупути в дереве t, соединяюшего вершину u с корнем $v = 1$.

Из этих двух выводов вытекает следующее следствие: в дереве t длина кратчайшего полупути, соединяющего вершину w с корнем $v = 1$, на единицу больше длины кратчайшего полупути в дереве s, соединяюшего вершину u с корнем $v = 1$.

Напомним, что в корневом ориентированном дереве длина кратчайшего полупути, соединяющего вершину этого дерева с корнем, называется высотой этой вершины. Поэтому из сформулированного выше следствия вытекает второе утверждение леммы 2. Лемма 2 полностью доказана. ►

Лемма 3. *Пусть помеченное корневое растущее дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, где $\mathbf{m}'$ — вектор, принадлежащий множеству $\mathfrak{M}(H)$ при некотором натуральном числе H. И пусть t — помеченное корневое растущее дерево, имеющее своим корнем вершину $v = 1$ и получающееся добавлением к дереву s вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из некоей вершины u дерева s.*

Если при этом вершина u принадлежит множеству вершин $V(s, H)$, то дерево t принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m})$, где вектор $\mathbf{m}$ является $(H+1)$-мерным вектором, удовлетворяющим условиям: 1) $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H+1, 1)$; 2) $m_{H+1} = 1$, *а все остальные компоненты вектора $\mathbf{m}$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}'$.*

Если же вершина u принадлежит множеству вершин вершин $V(s, H-1)$, то дерево t принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m})$, где вектор $\mathbf{m}$ является H-мерным вектором, удовлетворяющим условиям: 1) $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H, m'_H + 1)$; 2) $m_H = m'_H + 1$, *а все остальные компоненты вектора $\mathbf{m}$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}'$.*

Доказательство. Из условий леммы 3 следует, что вектор $\mathbf{m}'$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}'(n, H)$, где $n = ||\mathbf{m}'|| + 1$. Отсюда и из условий леммы 3 по замечанию 1 следует, что множество V_n, где $n = ||\mathbf{m}'|| + 1$, является множеством $V(s)$ вершин дерева s. Из условий леммы 3 следует, что множество $V(t)$ вершин дерева t является объединением множества $V(s)$ вершин дерева s с множеством, состоящим из одной вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2 = n + 1$. Это значит, что множество $V(t)$ является множеством V_{n+1}, где $n = ||\mathbf{m}'|| + 1$, а дерево t принадлежит множеству T_{n+1}. Отсюда следует, что вершина w является старшей вершиной во множестве $V(t)$ и, значит, неравенство $v < w$ удовлетворяется при всех вершинах v, принадлежащих множеству $V(t)$ и удовлетворяюших условию: $v \neq w$.

Из условий леммы 3 по замечанию 3 следует, что множество $V(s)$ вершин дерева s является послойно упорядоченным.

Рассмотрим случай, когда вершина u принадлежит множеству вершин $V(s, H)$. Введем в рассмотрение $(H+1)$-мерный вектор $\mathbf{m}$, компонента m_{H+1} которого определяется равенством $m_{H+1} = 1$, а все его остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}'$. Так определенный вектор $\mathbf{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}'(n, H+1)$, где $n = ||\mathbf{m}|| + 1 = ||\mathbf{m}'|| + 2$

По условиям леммы 3, в рассматриваемом случае высота вершины u в дереве s равна H. Отсюда по лемме 2 следует, что высота вершины w в дереве t равна $H + 1$, сама вершина w принадлежит слою вершин $V(t, H+1)$ дерева t, слой вершин $V(t, H+1)$ содержит только одну вершину $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$, а все остальные слои вершин дерева t совпадают с соответствующими слоями вершин дерева s. Очевидно, что вектор $\mathbf{m}(t)$ совпадает с вектором $\mathbf{m}$, а дерево t принадлежит множеству $T(\mathbf{m})$.

Докажем, что множество $V(t)$ вершин дерева t является послойно упорядоченным. Из условий леммы 3 и определения 2 вытекает, что слои вершин дерева t удовлетворяет условию:

(C^1) если $v' \in V(t,h')$, $v'' \in V(t,h'')$, где $1 \le h' < h'' \le H$, то $v' < v''$.

Как уже было доказано выше, неравенство $v < w$ удовлетворяется при всех вершинах v, принадлежащих множеству $V(t)$ и удовлетворяюших условию: $v \ne w$. А так как слой $V(t, H+1)$ вершин дерева t содержит только одну вершину w, то любая вершина v дерева t, удовлетворяюшая условию $v \ne w$, принадлежит одному из слоев $V(t,h')$ вершин дерева t, отличному от слоя $V(t,H+1)$. Очевидно, что здесь высота h' удовлетворяет неравенству $h' \ne H+1$. А так как высота дерева t равна $H+1$, то высота h' удовлетворяет также неравенству $h' < H+1$. При этом ни один слой вершин дерева t, кроме слоя вершин $V(t,H+1)$, не содержит вершины w.

Стало быть, слои вершин дерева t удовлетворяют условию: если $v' \in V(t,h')$, где $1 \le h' < H+1$, то $v' < w$. Поскольку при этом слои вершин дерева t удовлетворяют еще и условию (C^1), то эти слои удовлетворяют условию (C). Отсюда по определению 2 следует, что множество $V(t)$ вершин дерева t является послойно упорядоченным. Так как при этом дерево t принадлежит множеству $T(\mathbf{m})$, то по замечанию 3 оно принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m})$. Напомним, что вектор $\mathbf{m}$, по его построению, является $(H+1)$-мерным вектором, удовлетворяющим условиям: 1) $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H+1,1)$ по определению множества $\mathfrak{M}(H+1,1)$; 2) $m_{H+1} = 1$, а все остальные компоненты вектора $\mathbf{m}$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}'$.

Итак, все утверждения леммы 3, сформулированные для случая, когда $u \in V(s,H)$, доказаны.

Рассмотрим теперь случай, когда вершина u принадлежит множеству $V(s,H-1)$ вершин дерева s. Введем в рассмотрение H-мерный вектор $\mathbf{m}$, компонента m_H которого определяется равенством $m_H = m'_H + 1$, а все его остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}'$. Так определенный вектор $\mathbf{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}'(n,H)$, где $n = ||\mathbf{m}|| + 1 = ||\mathbf{m}'|| + 2$

В этом случае высота вершины u в дереве s равна $H-1$. Отсюда по лемме 2 следует, что высота вершины w в дереве t равна H, сама вершина $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ принадлежит слою вершин $V(t,H)$ дерева t, который является объединением множества вершин, принадлежащих слою $V(s,H)$ вершин дерева s с множеством, состоящим из одной вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2 = n+1$. Отсюда и из условий леммы 3 следует, что слой вершин $V(t,H)$ содержит $m'_H + 1$ вершин, а все остальные слои вершин дерева t совпадают с соответствующими слоями вершин дерева s. Очевидно, что вектор $\mathbf{m}(t)$ совпадает с вектором $\mathbf{m}$, а дерево t принадлежит множеству $T(\mathbf{m})$.

Докажем, что множество $V(t)$ вершин дерева t является послойно упорядоченным.

Так как множество $V(s)$ вершин дерева s является послойно упорядоченным, то по определению 2 слои вершин дерева s удовлетворяют условию (C). Отсюда следует, что эти слои дерева s удовлетворяют условиям:

(C^2) если $v' \in V(s,h')$, $v'' \in V(s,h'')$, где $1 \le h' < h'' \le H-1$, то $v' < v''$;

и

(C^3) если $v' \in V(s,h')$, $v'' \in V(s,H)$, где $1 \le h' < H$, то $v' < v''$.

Так как по условиям леммы 3 $V(t,h') = V(s,h')$ при $1 \le h' < H$, а множество $V(s)$ представляется равенством $V(s,H) = V(t,H) \setminus \{w\}$, то из условий (C^2) и (C^3) следует, что слои вершин дерева t удовлетворяют условиям:

(C^4) если $v' \in V(t,h')$, $v'' \in V(t,h'')$, где $1 \le h' < h'' \le H-1$, то $v' < v''$;

и

(C^5) если $v' \in V(t,h')$, $v'' \in [V(t,H) \setminus \{w\}]$, где $1 \le h' < H$, то $v' < v''$.

Как уже было доказано выше, неравенство $v < w$ удовлетворяется при всех вершинах v, принадлежащих множеству $V(t)$ и удовлетворяюших условию: $v \ne w$. В частности, это неравенство удовлетворяется при всех вершинах v, принадлежащих слоям $V(t,1), V(t,2), \ldots, V(t,H-1)$ вершин дерева t. Так как при этом слои вершин дерева t удовлетворяют условию (C^5), а слой вершин $V(t,H)$ дерева t является объединением множества вершин, принадлежащих слою $V(s,H)$, с множеством, состоящим из одной вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2 = n+1$, то слои вершин дерева t удовлетворяют условию:

(C^6) если $v' \in V(t,h')$, $v'' \in V(t,H)$, где $1 \le h' < H$, то $v' < v''$.

Поскольку при этом слои вершин дерева t удовлетворяют еще и условию (C^4), то эти слои удовлетворяют условию (C). Отсюда по определению 2 следует, что множество $V(t)$ вершин дерева t является послойно упорядоченным. Так как при этом дерево t принадлежит множеству $T(\mathbf{m})$, то по замечанию 3 оно принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m})$, где вектор $\mathbf{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(H, m'_H + 1)$ и является H-мерным вектором, удовлетворяющим условиям: $m_H = m'_H + 1$, а все остальные компоненты вектора $\mathbf{m}$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}'$. Итак, утверждение леммы 3 в случае, когда $u \in V(s, H-1)$, доказано. Лемма 3 полностью доказана. ▶

Пусть дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$. Введем обозначения:

$T^1(s)$ — множество помеченных корневых растущих деревьев t, получающихся добавлением к дереву s вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из некоей вершины $u \in V(s, H(s))$ дерева s;

$T^2(s)$ — множество помеченных корневых растущих деревьев t, получающихся добавлением к дереву s вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из некоей вершины $u \in V(s, H(s) - 1)$ дерева s.

Обозначим B_s отображение множества вершин $V(s, H(s))$ на множество $T^1(s)$ помеченных корневых растущих деревьев, полагая, что образом вершины $u \in V(s, H(s))$ является дерево $t \in T^1(s)$, получающееся добавлением к дереву s вершины $w = ||\mathbf{m}'||+2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из вершины $u \in V(s, H(s))$ дерева s.

Из леммы 2 и определения множества $T^1(s)$ вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$. Тогда отображение B_s множества вершин $V(s, H(s))$ на множество $T^1(s)$ помеченных корневых растущих деревьев является биекцией* [13].

Символически биекцию B_s можно представить следующим образом:

$$t = B_s u = \left(V(s) \bigcup \{||\mathbf{m}'|| + 2\},\ X(s) \bigcup \{(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\}\right),\ u \in V\left(s, H(s)\right). \qquad (11)$$

Здесь и далее $\{||\mathbf{m}'|| + 2\}$ обозначает одноэлементное множество, содержащее вершину $||\mathbf{m}'|| + 2$; $\{(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\}$ обозначает одноэлементное множество, содержащее дугу $(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)$.

Тогда множество помеченных корневых растущих деревьев $T^1(s)$, где дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, символически можно представить следующим образом:

$$T^1(s) = B_s V\left(s, H(s)\right) = \left\{\left(V(s) \bigcup \{||\mathbf{m}'|| + 2\},\ X(s) \bigcup \{(u,\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\}\right) : \quad u \in V\big(s, H(s)\big)\right\}. \qquad (12)$$

Прообраз дерева $t \in T^1(s)$ при отображении B_s обозначим $B_s^{-1}(t)$. Тогда из формулы (11) следует, что множество $X(t)$ дуг дерева $t \in T^1(s)$ можно представить следующим образом:

$$X(t) = X(s) \bigcup \left\{\left(B_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2\right)\right\}. \qquad (13)$$

Здесь и далее $\{(B_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2)\}$ обозначает одноэлементное множество, содержащее дугу $(B_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'|| + 2)$.

Обозначим $\widetilde{B}_s$ отображение множества вершин $V(s, H(s) - 1)$ на множество $T^2(s)$ помеченных корневых растущих деревьев, полагая, что образом вершины u, принадлежащей множеству $V(s, H(s) - 1)$, является дерево $t \in T^2(s)$, получающееся добавлением к дереву s вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из вершины $u \in V(s, H(s) - 1)$ дерева s.

Из леммы 2 и определения множества $T^2(s)$ вытекает следующее

Следствие 2. *Пусть дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$. Тогда отображение $\widetilde{B}_s$ множества вершин $V(s,H(s)-1)$ на множество $T^2(s)$ помеченных корневых растущих деревьев является биекцией* [13].

Символически биекцию $\widetilde{B}_s$ можно представить следующим образом:

$$t=\widetilde{B}_s u=\Big(V(s)\bigcup\big\{||\mathbf{m}'||+2\big\},\ X(s)\bigcup\big\{\big(u,\ ||\mathbf{m}'||+2\big)\big\}\Big),\quad u\in V(s,H(s)-1). \tag{14}$$

Тогда множество помеченных корневых растущих деревьев $T^2(s)$, где дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, символически можно представить следующим образом:

$$T^2(s)=\widetilde{B}_s V\left(s,H(s)-1\right)=\\ \Big\{\Big(V(s)\bigcup\big\{||\mathbf{m}'||+2\big\},\ X(s)\bigcup\big\{\big(u,\ ||\mathbf{m}'||+2\big)\big\}\Big):\quad u\in V\left(s,H(s)-1\right)\Big\}. \tag{15}$$

Прообраз дерева $t\in T^2(s)$ при отображении $\widetilde{B}_s$ обозначим $\widetilde{B}_s^{-1}(t)$. Тогда из формулы (14) следует, что множество $X(t)$ дуг дерева $t\in T^2(s)$ можно представить следующим образом:

$$X(t)=X(s)\bigcup\big\{\big(\widetilde{B}_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'||+2\big)\big\}. \tag{16}$$

Здесь и далее $\big\{\big(\widetilde{B}_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'||+2\big)\big\}$ обозначает одноэлементное множество, содержащее дугу $\big(\widetilde{B}_s^{-1}(t),\ ||\mathbf{m}'||+2\big)$.

Лемма 4. *Если помеченные корневые растущие деревья s и s' принадлежат одному и тому же множеству $TRc(\mathbf{m}')$ и не равны друг другу, то помеченные этими деревьями множества $T^1(s)$ и $T^1(s')$ не пересекаются.*

Доказательство. Предположим, что множества $T^1(s)$ и $T^1(s')$ пересекаются. Тогда существует такое помеченное корневое растущее дерево t, которое принадлежит как множеству $T^1(s)$, так и множеству $T^1(s')$. Тогда из определения множеств $T^1(s)$ и $T^1(s')$ следует, что дерево t можно получить двумя способами: (1) добавлением к дереву s вершины $w=||\mathbf{m}'||+2$ и заходящей в нее дуги, принадлежащей дереву t; (2) добавлением той же самой вершины и той же самой дуги к дереву s'.

Но так как деревья s и s' не равны друг другу, то и дерево, построенное способом (1), отлично от дерева, построенного способом (2). Этот результат находится в противоречии со сделанным нами предположением. Следовательно, это предположение неверное и множества $T^1(s)$ и $T^1(s')$ не пересекаются. Лемма 4 доказана. ►

Теорема 1. *Пусть векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ принадлежат множествам соответственно $\mathfrak{M}(H,1)$ и $\mathfrak{M}(H-1)$, Если при этом все компоненты вектора $\mathbf{m}'$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}$, то множество $TRc(\mathbf{m})$ разлагается на непересекающиеся подмножества типа $T^1(s)$, помеченные деревьями из множества $TRc(\mathbf{m}')$:*

$$TRc(\mathbf{m})=\bigcup_{s\in TRc(\mathbf{m}')}T^1(s). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ — векторы, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Если при этом дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, то из определения множества $T^1(s)$ помеченных корневых растущих деревьев по лемме 3 следует, что оно является подмножеством множества $TRc(\mathbf{m})$.

Из условий теоремы 1 по замечанию 5 также следует, что поддерево $s(t)$ всякого дерева t из множества $TRc(\mathbf{m})$ принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$. А из определения поддерева $s(t)$ дерева t следует, что дерево t получается добавлением к дереву $s(t)$ вершины $w=||\mathbf{m}'||+2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из некоей вершины $u\in V(s(t),H(s(t)))$ дерева $s(t)$. Отсюда следует, что дерево t принадлежит множеству $T^1(s(t))$ по определению этого множества.

Из установленных соотношений между множеством $TRc(\mathbf{m})$ и его подмножествами типа $T^1(s)$, где $s \in TRc(\mathbf{m}')$, и из леммы 4 следует утверждение теоремы 1. ▶

Лемма 5. *Если помеченные корневые растущие деревья s и s' принадлежат одному и тому же множеству $TRc(\mathbf{m}')$ и не равны друг другу, то помеченные этими деревьями множества $T^2(s)$ и $T^2(s')$ не пересекаются.*

Доказательство. Предположим, что множества $T^2(s)$ и $T^2(s')$ пересекаются. Тогда существует такое помеченное корневое растущее дерево t, которое принадлежит как множеству $T^2(s)$, так и множеству $T^2(s')$. Тогда из определения множеств $T^2(s)$ и $T^2(s')$ следует, что дерево t можно получить двумя способами: (1) добавлением к дереву s вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ и заходящей в нее дуги, принадлежащей дереву t; (2) добавлением той же самой вершины и той же самой дуги к дереву s'.

Но так как деревья s и s' не равны друг другу, то и дерево, построенное способом (1), отлично от дерева, построенного способом (2). Этот результат находится в противоречии со сделанным нами предположением. Следовательно, это предположение неверное и множества $T^2(s)$ и $T^2(s')$ не пересекаются. Лемма 5 доказана. ▶

Теорема 2. *Пусть векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ принадлежат множествам соответственно $\mathfrak{M}(H,k)$ и $\mathfrak{M}(H,k-1)$, где H и k — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $H \geq 2$ и $k \geq 2$. Если при этом все компоненты вектора $\mathbf{m}'$, за исключением компоненты $m'_H = k-1 = m_H - 1$, совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}$, то множество $TRc(\mathbf{m})$ разлагается на непересекающиеся подмножества типа $T^2(s)$, помеченные деревьями из множества $TRc(\mathbf{m}')$:*

$$TRc(\mathbf{m}) = \bigcup_{s \in TRc(\mathbf{m}')} T^2(s). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ — векторы, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Если при этом дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, то из определения множества $T^2(s)$ помеченных корневых растущих деревьев по лемме 3 следует, что оно является подмножеством множества $TRc(\mathbf{m})$.

Из условий теоремы 2 по замечанию 5 также следует, что поддерево $s(t)$ всякого дерева t из множества $TRc(\mathbf{m})$ принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$. А из определения поддерева $s(t)$ дерева t следует, что дерево t получается добавлением к дереву $s(t)$ вершины $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ и заходящей в нее дуги, которая исходит из некоей вершины $u \in V(s(t), H(s(t)) - 1)$ дерева $s(t)$. Отсюда следует, что дерево t принадлежит множеству $T^2(s(t))$ по определению этого множества.

Из установленных соотношений между множеством $TRc(\mathbf{m})$ и его подмножествами типа $T^2(s)$, где $s \in TRc(\mathbf{m}')$, и из леммы 5 следует утверждение теоремы 2. ▶

3. Далее в статье излагается один способ применения этих классификаций для упрощения древесного представления [12] функции. В качестве функции, древесное представление которой надлежит упростить, изберем такую действительную функцию $\varphi(\mathbf{r})_n$ n переменных $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, которая имеет древесное представление

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{t \in TRc(\mathbf{m})} \prod_{(u,v) \in X(t)} g_{(u,v)}. \tag{19}$$

Здесь и далее $\mathbf{m}$ обозначает H-мерный вектор с натуральными компонентами, n — число, определенное формулой (1), $g_{(u,v)}$ — помеченная дугой (u,v) действительная функция n переменных $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, принимающих значения в ν-мерном действительном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^\nu$. Именно такого вида древесные представления функций могут являться подынтегральными функциями в интегралах, представляющих майеровские коэффициенты и коэффициенты других степенных рядов классической статистической механики.

Далее в статье будет предложено значительно более простое представление функции $\varphi(\mathbf{r})_n$. С этой целью введем следующие обозначения:

$$m_0 = 1; \quad \sigma_{\mathbf{m}}(h) = \sum_{i=0}^{h} m_i, \quad h = \overline{0, H}, \tag{20}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_H$ — компоненты вектора $\mathbf{m}$;

$$V_{\mathbf{m}}(0) = \{1\}; \quad V_{\mathbf{m}}(h) = \{v : \quad [\sigma_{\mathbf{m}}(h-1)+1] \le v \le \sigma_{\mathbf{m}}(h)\}, \quad 1 \le h \le H. \tag{21}$$

$$S_{\mathbf{m}}(h, v) = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}}(h-1)} g_{(u,v)}, \quad \text{где} \quad v \in V_{\mathbf{m}}(h); \tag{22}$$

$$P_{\mathbf{m}}(h) = \prod_{v \in V_{\mathbf{m}}(h)} S_{\mathbf{m}}(h, v). \tag{23}$$

В формулах (21), (22) и (23) величина h принимает значения, определенные неравенствами $1 \le h \le H$.

Замечание 6. *Из формул* (20) *вытекает равенство* $\sigma_{\mathbf{m}}(H) = ||\mathbf{m}|| + 1$. *Отсюда и из формул* (21) *следует, что вершина* $w = ||\mathbf{m}|| + 1$ *принадлежит множеству* $V_{\mathbf{m}}(H)$.

Лемма 6. *Пусть* H *и* H' *— два натуральных числа, удовлетворяющих неравенству* $H' \le H$, *а* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{m}'$ *— два вектора с натуральными компонентами размерности* H *и* H' *соответственно. Предположим, что при любом* i, *удовлетворяющем неравенствам* $0 < i \le min\{H', H-1\}$, *компонента* m'_i *вектора* $\mathbf{m}'$ *совпадает с компонентой* m_i *вектора* $\mathbf{m}$. *Тогда верны следующие утверждения:*

1. *При всех натуральных числах* h, *удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < h \le min\{H', H-1\}, \tag{24}$$

имеют место равенства

$$\sigma_{\mathbf{m}'}(h) = \sigma_{\mathbf{m}}(h) \tag{25}$$

$$V_{\mathbf{m}'}(h) = V_{\mathbf{m}}(h); \tag{26}$$

$$S_{\mathbf{m}'}(h, v) = S_{\mathbf{m}}(h, v); \tag{27}$$

$$P_{\mathbf{m}'}(h) = P_{\mathbf{m}}(h). \tag{28}$$

2. *Если удовлетворяющие условиям леммы* 6 *векторы* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{m}'$ *имеют одну и ту же размерность* H, *то при всех вершинах* v, *принадлежащих множеству* $V_{\mathbf{m}'}(H) \cap V_{\mathbf{m}}(H)$, *имеет место равенство*

$$S_{\mathbf{m}'}(H, v) = S_{\mathbf{m}}(H, v). \tag{29}$$

Доказательство. Из формул (20) и условий леммы 6 следует, что при всех натуральных числах h, удовлетворяющем неравенствам (24), имеет место равенство (25). Отсюда и из формул (21) следует, что при всех натуральных числах h, удовлетворяющих неравенствам (24), имеет место равенство (26). Отсюда и из формул (22) следует, что при всех натуральных числах h, удовлетворяющих неравенствам (24), имеет место равенство (27). Наконец, из равенства (27) и из формул (23) следует, что при всех натуральных числах h, удовлетворяющих неравенствам (24), имеет место равенство (28). Равенства (25), (26), (27) и (28) доказаны.

Докажем теперь второе утверждение леммы 6. Так как векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ имеют одну и ту же размерность H, то по утверждению 1 леммы 6 имеет место равенство

$$V_{\mathbf{m}'}(H-1) = V_{\mathbf{m}}(H-1). \tag{30}$$

Равенство (30) при всех вершинах v влечет равенство

$$\sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,v)} = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}}(H-1)} g_{(u,v)}, \tag{31}$$

Из формулы (22) следуют равенства

$$S_{\mathbf{m}'}(H,v) = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,v)}, \quad \text{где} \quad v\in V_{\mathbf{m}'}(H);$$
$$S_{\mathbf{m}}(H,v) = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}}(H-1)} g_{(u,v)}, \quad \text{где} \quad v\in V_{\mathbf{m}}(H). \tag{32}$$

Из формул (31) и (32) следует утверждение 2 леммы 6. Лемма 6 полностью доказана. ►

Обозначим $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}} = \{V_{\mathbf{m}}(h): \quad 0\le h\le H\}$ совокупность множеств, определенных формулами (21).

Замечание 7. *Из определения совокупности $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$ следует, что входящие в нее множества не пересекаются, а их объединением является множество V_n, где число n определяется формулой* (1).

Из формул (20) *и* (21) *следует, что принадлежащие совокупности $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$ множества удовлетворяют условию*

(*C*) *если $v'\in V_{\mathbf{m}}(h')$, $v''\in V_{\mathbf{m}}(h'')$, где $0\le h'<h''\le H$, то $v'<v''$.*

Наконец, из этих формул следует, что мощность любого множества $V_{\mathbf{m}}(h)$ из совокупности $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$ равна компоненте m_h вектора $\mathbf{m}$.

Замечание 8. *Из определения множеств $V_{\mathbf{m}}(h)$ формулами* (21) *(где $h=\overline{0,H}$), определения величин $\sigma_{\mathbf{m}}(h)$ формулами* (20) *и определения величины n формулой* (1) *следует*

$$\bigcup_{h=0}^{H} V_{\mathbf{m}}(h) = V_n. \tag{33}$$

Лемма 7. *Пусть дерево t принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m})$, где вектор $\mathbf{m}$ имеет размерность $H\ge 1$. Тогда имеет место равенство*

$$V(t,H(t)) = V_{\mathbf{m}}(H), \tag{34}$$

где множество вершин $V_{\mathbf{m}}(H)$ определяется формулами (21).

Если же вектор $\mathbf{m}$ имеет размерность $H\ge 2$, то тогда имеет место также и равенство

$$V(t,H(t)-1) = V_{\mathbf{m}}(H-1), \tag{35}$$

где множество вершин $V_{\mathbf{m}}(H-1)$ определяется формулами (21).

Доказательство. В случае $H=1$ вектор $\mathbf{m}$ имеет размерность $H=1$ и содержит только одну компоненту m_1. В этом случае имеют место следующие равенства:

$$H(t)=H=1; \quad m(t,0)=1; \quad m(t,1)=m_1;$$
$$\sigma(t,0)=1; \quad \sigma(t,1)=1+m_1; \quad V(t,1)=\{v: \quad 2\le v\le 1+m_1\}. \tag{36}$$

По формулам (20) и (21) получаем: $\sigma_{\mathbf{m}}(0)=1$, $\sigma_{\mathbf{m}}(1)=1+m_1$ и, наконец,

$$V_{\mathbf{m}}(1) = \{v: \quad 2\le v\le 1+m_1\}. \tag{37}$$

Из формул (36) и (37) следует равенство $V(t,1)=V_{\mathbf{m}}(1)$. Этим равенством лемма 7 в случае $H=1$ доказана.

Докажем теперь лемму 7 в случае $H > 1$. Из условий этой леммы вытекают равенства
$$H(t) = H; \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}; \quad V(t, H(t)) = V(t, H). \tag{38}$$

Из замечания 7 и формул (38) следует, что при любом $h = \overline{0, H}$ мощности множеств $V(t, h)$ и $V_{\mathbf{m}}(h)$ равны. В частности, равны мощности множеств $V(t, H(t))$ и $V_{\mathbf{m}}(H)$ и равны мощности множеств $V(t, H(t) - 1)$ и $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$.

Из формул (38) и замечаний 1 и 8 следует, что множество вершин $V(t)$ дерева t и объединение всех множеств, принадлежащих совокупности $\mathfrak{V}_{\mathbf{m}}$, совпадают с множеством V_n, где число n определяется формулой (1).

Равенство (34) докажем от противного. Допустим, что это равенство неверно. Тогда, принимая во внимание равенство мощностей множеств $V(t, H(t))$ и $V_{\mathbf{m}}(H)$, мы приходим к выводам:

(a) Хотя бы одна вершина множества $V(t, H(t))$ не принадлежит множеству $V_{\mathbf{m}}(H)$, и, следовательно, принадлежит некоему множеству $V_{\mathbf{m}}(h)$, где $h < H$. Обозначим эту вершину через v.

(b) Хотя бы одна вершина множества $V_{\mathbf{m}}(H)$ не принадлежит множеству $V(t, H(t))$, и, следовательно, принадлежит некоему множеству $V(t, h'))$, где $h' < H(t)$. Обозначим эту вершину через v'.

Итак, вершины v' и v принадлежат множествам, соответственно, $V_{\mathbf{m}}(H)$ и $V_{\mathbf{m}}(h)$, где величины H и h удовлетворяют неравенству $H > h$. Отсюда по замечанию 7 следует неравенство $v < v'$. При этом вершины v и v' принадлежат множествам, соответственно, $V(t, H(t))$ и $V(t, h')$, где величины $H(t)$ и h' удовлетворяют неравенству $H(t) > h'$. Из этого неравенства и неравенства $v < v'$ по определению 2 следует, что множество $V(t)$ вершин дерева t не является послойно упорядоченным. По условиям леммы 7 дерево t принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m})$. Поэтому сделанный вывод находится в противоречии с замечанием 3, утверждающим, что множество $TRc(\mathbf{m})$ не содержит ни одного дерева t, множество $V(t)$ вершин которого не является послойно упорядоченным. Следовательно, сделанное нами предположение неверно, а верно равенство (34).

Методом от противного докажем теперь, что в случае $H > 1$ при условиях леммы 7 равенство (35) также истинно. Допустим, что это равенство неверно. Тогда из равенства мощности множества $V(t, H(t) - 1)$ и мощности множества $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ следуют выводы:

(a') Хотя бы одна вершина множества $V(t, H - 1)$ не принадлежит множеству $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$. Из уже доказанного равенства (34) следует, что эта вершина не может принадлежать и множеству $V_{\mathbf{m}}(H)$ и, следовательно, принадлежит некоему множеству $V_{\mathbf{m}}(h")$, где $H - 1 > h"$. Обозначим эту вершину через $v"$.

(b') Хотя бы одна вершина множества $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ не принадлежит множеству $V(t, H(t) - 1)$. Из уже доказанного равенства (34) следует, что эта вершина не может принадлежать и множеству $V(t, H(t))$ и, следовательно, принадлежит некоему множеству $V(t, h'''))$, где $h''' < H(t) - 1$. Обозначим эту вершину через v'''.

Итак, вершины v''' и $v"$ принадлежат множествам, соответственно, $V_{\mathbf{m}}(H - 1)$ и $V_{\mathbf{m}}(h")$, где величины $H - 1$ и $h"$ удовлетворяют неравенству $H - 1 > h"$. Отсюда по замечанию 7 следует неравенство $v'' < v'''$. При этом вершины $v"$ и v''' принадлежат множествам, соответственно, $V(t, H(t) - 1)$ и $V(t, h''')$, где величины $H(t) - 1$ и h''' удовлетворяют неравенству $H(t) - 1 > h'''$. Из этого неравенства и неравенства $v''' > v"$ по определению 2 следует вывод, что множество $V(t)$ вершин дерева t не является послойно упорядоченным. По условиям леммы 7 дерево t принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m})$.

Поэтому сделанный вывод находится в противоречии с замечанием 3, утверждающим, что множество $TRc(\mathbf{m})$ не содержит ни одного дерева t, множество $V(t)$ вершин которого не является послойно упорядоченным. Следовательно, сделанное нами предположение неверно, а верно равенство (35). Лемма 7 полностью доказана. ▶

Теорема 3. *При любом H-мерном векторе* $\mathbf{m}$ *с натуральными компонентами любая функция* $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, *имеющая древесное представление формулой* (19), *может быть* *представлена произведением*

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}}(h), \tag{39}$$

где число n определяется формулой (1)*, а функция $P_{\mathbf{m}}(h)$ — формулой* (23).

Прежде, чем приводить доказательство теоремы 3, мы приведем пример, в котором рассмотрим частный случай формулы (39), а также сформулируем и докажем две вспомогательные леммы и следствия из них.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $H = 1$. Тогда вектор $\mathbf{m}$ содержит всего одну компоненту m_1. Как замечено в примере 1, в этом случае множество $TRc(\mathbf{m})$ совпадает с множеством $T(\mathbf{m})$ и содержит только одно дерево t — звезду, центром которой является корень $v = 1$. Из формулы (20) следует: $\sigma_{\mathbf{m}}(0) = 1; \quad \sigma_{\mathbf{m}}(1) = 1 + m_1$. Отсюда, применяя формулы (21), находим множества вершин $V_{\mathbf{m}}(0) = \{1\}$ и

$$V_{\mathbf{m}}(1) = \{v : \quad \sigma_{\mathbf{m}}(0) < v \leq \sigma_{\mathbf{m}}(1)\} \tag{40}$$

Множество $X(t)$ дуг такого дерева представляется формулой

$$X(t) = \{(1, v) : \quad v \in V_{\mathbf{m}}(1)\}. \tag{41}$$

Используя эти результаты из формулы (22) получаем

$$S_{\mathbf{m}}(1, v) = g_{(1,v)}, \quad \text{где } v \in V_{\mathbf{m}}(1). \tag{42}$$

В рассматриваемом случае представление функции $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ формулой (19) имеет вид

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \prod_{(1,v)\in X(t)} g_{(1,v)}. \tag{43}$$

Отсюда и из формулы (42), а также из определений множеств $X(t)$ и $V_{\mathbf{m}}(1)$ формулами, соответственно, (41) и (40), вытекает следующее представление функции $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \prod_{v\in V_{\mathbf{m}}(h)} S(h, v), \tag{44}$$

где $H = h = 1$. Отсюда, применяя определение функции $P_{\mathbf{m}}(h)$ формулой (23), получаем представление функции $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ в виде:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = P_{\mathbf{m}}(1), \tag{45}$$

что является частным случаем формулы (39) при всех $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$, где $H = 1$. Таким образом, при $H = 1$ утверждение теоремы 3 доказано при всех $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$. ■

Лемма 8. *Допустим, что при данном натуральном числе H', удовлетворяющем неравенству $H' \geq 1$, и при всех векторах $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H')$ любая функция $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, имеющая древесное представление формулой* (19)*, может быть представлена формулой* (39)*, где $H = H'$, в виде произведения функций. Тогда и при всех векторах $\mathbf{m}$, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}(H'+1, 1)$, любая функция $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, имеющая древесное представление формулой* (19)*, может быть представлена формулой* (39)*, где $H = H' + 1$, в виде произведения функций.*

Доказательство. Пусть вектор $\mathbf{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(H' + 1, 1)$. В этом случае имеет место разложение (17) множества $TRc(\mathbf{m})$ корневых растущих деревьев на непересекающиеся подмножества. Используя это разложение, древесное представление функции $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ формулой (19) можно преобразовать следующим образом:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \sum_{t\in T^1(s)} \prod_{(u,v)\in X(t)} g_{(u,v)}, \tag{46}$$

где $\mathbf{m}'$ — принадлежащий множеству $\mathfrak{M}(H')$ H'-мерный вектор, все компоненты которого совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}$.

С целью упрощения обозначений обозначим $u(t) = B_s^{-1}(t)$. Из представления множества $X(t)$ дуг дерева $t \in T^1(s)$ формулой (13) следует

$$\prod_{(u,v)\in X(t)} g_{(u,v)} = g_{(u(t),w)} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)}, \tag{47}$$

где $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$. Подставляя в правую часть равенства (46) вместо произведения, являющегося левой частью равенства (47), правую часть равенства (47), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} \right) \sum_{t\in T^1(s)} g_{(u(t),w)}, \tag{48}$$

Так как дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, то, во-первых, по следствию 1 отображение B_s множества вершин $V(s, H(s))$ на множество $T^1(s)$ помеченных корневых растущих деревьев является биекцией. Поэтому отображение B_s^{-1} является взаимно однозначным отображением множества $T^1(s)$ на множество $V(s, H(s))$. Отсюда следует равенство

$$\sum_{t\in T^1(s)} g_{(u(t),w)} = \sum_{u\in V(s,H(s))} g_{(u,w)}. \tag{49}$$

Во-вторых, по лемме 7 имеет место равенство

$$V(s, H(s)) = V_{\mathbf{m}'}(H'), \tag{50}$$

где $H(s) = H'$, а множество вершин $V_{\mathbf{m}'}(H')$ определяется формулами (21).

Из формул (49) и (50) следует равенство

$$\sum_{t\in T^1(s)} g_{(u(t),w)} = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H')} g_{(u,w)}. \tag{51}$$

Заменив в правой части равенства (48) выражение, стоящее в левой части равенства (51), выражением, стоящим в правой части равенства (51), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} \right) \sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H')} g_{(u,w)}. \tag{52}$$

Заметим, что при $h = H' + 1$ и $v = w$ равенство (22) принимает вид

$$S_{\mathbf{m}}(H'+1, w) = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}}(H')} g_{(u,w)}, \quad \text{где} \quad w \in V_{\mathbf{m}}(H'+1); \tag{53}$$

Так как векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$, по их определению, удовлетворяют условиям леммы 6, то из леммы 6 следует, в частности, что имеет место равенство $V_{\mathbf{m}'}(H') = V_{\mathbf{m}}(H')$. Применяя это равенство, преобразуем равенство (53) следующим образом:

$$S_{\mathbf{m}}(H'+1, w) = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}}(H')} g_{(u,w)} = \sum_{u \in V_{\mathbf{m}'}(H')} g_{(u,w)}, \quad \text{где} \quad w \in V_{\mathbf{m}}(H'+1); \tag{54}$$

Заменив в правой части равенства (52) выражение, стоящее в правой части равенства (54), выражением, стоящим в левой части равенства (54), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)} \right) S_{\mathbf{m}}(H'+1, w), \tag{55}$$

Напомним, что в равенстве (55) вектор $\mathbf{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(H'+1, 1)$ и поэтому удовлетворяет условию $m_{H'+1} = 1$. Отсюда и из формул (20) и (21) следует

$$\sigma_{\mathbf{m}}(H') = ||\mathbf{m}||; \quad \sigma_{\mathbf{m}}(H'+1) = ||\mathbf{m}|| + 1; \quad V_{\mathbf{m}}(H'+1) = \{w\}, \tag{56}$$

где $w = ||\mathbf{m}|| + 1$. Из формул (23) и (56) следует

$$P_{\mathbf{m}}(H'+1) = S_{\mathbf{m}}(H'+1, w). \tag{57}$$

Заменив в правой части равенства (55) выражение, стоящее в правой части равенства (57), выражением, стоящим в левой части равенства (57), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)} \right) P_{\mathbf{m}}(H'+1), \tag{58}$$

Сумма в правой части равенства (58) является древесным представлением функции $\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n-1}$ по ее определению формулой (19):

$$\sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)} = \varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n-1}, \tag{59}$$

где n определяется формулой (1), $\mathbf{m}' \in \mathfrak{M}(H')$ — H'-мерный вектор, все компоненты которого совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}$. По предположению, утверждение теоремы 3 верно для функции $\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n-1}$. Стало быть, сумма в левой части равенства (59) может быть представлена в виде

$$\sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)} = \prod_{h=1}^{H'} P_{\mathbf{m}'}(h), \tag{60}$$

Заменив в правой части равенства (58) сумму, стоящую в левой части равенства (60), произведением, стоящим в правой части равенства (60), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H'} P_{\mathbf{m}'}(h) \right) P_{\mathbf{m}}(H'+1). \tag{61}$$

Далее, из определения векторов $\mathbf{m}'$ и $\mathbf{m}$ следует, что эти векторы удовлетворяют условиям леммы 6. Отсюда по лемме 6 следует, что при $h \leq H'$ имеют место равенства (28). Применяя эти равенства, из формулы (61) получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H'} P_{\mathbf{m}}(h)\right) P_{\mathbf{m}}(H'+1) = \prod_{h=1}^{H'+1} P_{\mathbf{m}}(h) = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}}(h), \tag{62}$$

где $H = H' + 1$. Таким образом, лемма 8 доказана. ►

Лемма 9. *Предположим, что при данном натуральном числе H, удовлетворяющем неравенству $H \geq 1$, при данном натуральном числе k и при всех векторах $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H, k)$ любая функция $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, имеющая древесное представление формулой* (19), *может быть представлена формулой* (39) *в виде произведения функций. Тогда и при всех векторах $\mathbf{m}$, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}(H, k+1)$, любая функция $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, имеющая древесное представление формулой* (19), *может быть представлена формулой* (39) *в виде произведения функций.*

Доказательство. Пусть вектор $\mathbf{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(H, k+1)$. В этом случае имеет место разложение (18) множества $TRc(\mathbf{m})$ корневых растущих деревьев на непересекающиеся подмножества. Используя это разложение, древесное представление функции $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ формулой (19) можно преобразовать следующим образом:

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \sum_{t \in T^2(s)} \prod_{(u,v) \in X(t)} g_{(u,v)}, \tag{63}$$

где $\mathbf{m}' \in \mathfrak{M}(H, k)$ — H-мерный вектор, удовлетворяющий условиям: $m'_H = k$, а все остальные его компоненты совпадают с соответствующими компонентами вектора $\mathbf{m}$.

С целью упрощения обозначений обозначим $\widetilde{u}(t) = \widetilde{B}_s^{-1}(t)$. Используя это обозначение и представление множества $X(t)$ дуг дерева $t \in T^2(s)$ формулой (16) получаем

$$\prod_{(u,v) \in X(t)} g_{(u,v)} = g_{(\widetilde{u}(t), w)} \prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)}, \tag{64}$$

где $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$.

Из определения векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ следует равенство $||\mathbf{m}|| = ||\mathbf{m}'|| + 1$. Поэтому вершину $w = ||\mathbf{m}'|| + 2$ можно представить следующим образом: $w = ||\mathbf{m}|| + 1$. Отсюда по замечанию 6 следует, что вершина $w = ||\mathbf{m}|| + 1$ принадлежит множеству $V_{\mathbf{m}}(H)$:

$$w \in V_{\mathbf{m}}(H). \tag{65}$$

Подставляя в правую часть равенства (63) вместо произведения, являющегося левой частью равенства (64), правую часть равенства (64), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s \in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v) \in X(s)} g_{(u,v)}\right) \sum_{t \in T^2(s)} g_{(u(t), w)}. \tag{66}$$

Так как дерево s принадлежит множеству $TRc(\mathbf{m}')$, то отсюда следуют два вывода: Во-первых, по следствию 2 отображение $\widetilde{B}_s$ множества вершин $V(s, H(s) - 1)$ на множество $T^2(s)$ помеченных корневых растущих деревьев является биекцией. Поэтому отображение $\widetilde{B}_s^{-1}$ является взаимно однозначным отображением множества $T^2(s)$ на множество $V(s, H(s) - 1)$. Отсюда следует равенство

$$\sum_{t \in T^2(s)} g_{(u(t), w)} = \sum_{u \in V(s, H(s)-1)} g_{(u, w)}. \tag{67}$$

Во-вторых, по лемме 7 имеет место равенство

$$V(s,H(s)-1)=V_{\mathbf{m}'}(H-1), \tag{68}$$

где $H(s)=H$, а множество вершин $V_{\mathbf{m}'}(H-1)$ определяется формулами (21).

Из формул (67) и (68) следует равенство

$$\sum_{t\in T^2(s)} g_{(u(t),w)} = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,w)}. \tag{69}$$

Заменив в правой части равенства (66) выражение, стоящее в левой части равенства (69), выражением, стоящим в правой части равенства (69), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \left(\prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)}\right) \sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,w)}. \tag{70}$$

Далее, из определения векторов $\mathbf{m}'$ и $\mathbf{m}$ следует, что размерности этих векторов равны одному и тому же числу H, а компоненты этих векторов удовлетворяют условиям леммы 6. Отсюда по лемме 6 следует, что при $h<H$ имеют место равенства (25), (26), (27) и (28).

Используя равенства (26) и формулы (65) и (22), получаем

$$\sum_{u\in V_{\mathbf{m}'}(H-1)} g_{(u,w)} = \sum_{u\in V_{\mathbf{m}}(H-1)} g_{(u,w)} = S_{\mathbf{m}}(H,w), \quad \text{где} \quad w\in V_{\mathbf{m}}(H); \tag{71}$$

Заменив в правой части равенства (70) выражение, стоящее в левой части равенств (71), выражением, стоящим в правой части равенств (71), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)}\right) S_{\mathbf{m}}(H,w), \tag{72}$$

Из определения функции $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$ формулой (19) следует

$$\sum_{s\in TRc(\mathbf{m}')} \prod_{(u,v)\in X(s)} g_{(u,v)} = \varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'}, \tag{73}$$

где n' — число $||\mathbf{m}'||+1$, определенное формулой (1). Заменив в правой части равенства (72) сумму, стоящую в левой части равенства (73), выражением, стоящим в правой части равенства (73), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'} S_{\mathbf{m}}(H,w), \tag{74}$$

По определению вектор $\mathbf{m}'$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(H,k)$. Отсюда следует, что по условию леммы 9 функция $\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'}$, имеющая древесное представление формулой (19), может быть представлена произведением

$$\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'} = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}'}(h). \tag{75}$$

Здесь функции $P_{\mathbf{m}'}(h)$ определяются формулой

$$P_{\mathbf{m}'}(h) = \prod_{v\in V_{\mathbf{m}'}(h)} S_{\mathbf{m}'}(h,v). \tag{76}$$

В частности,
$$P_{\mathbf{m}'}(H) = \prod_{v \in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H, v). \tag{77}$$

Из формул (75), (77) и (28) следует

$$\varphi_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r})_{n'} = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}'}(h)\right) P_{\mathbf{m}'}(H) = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right) \prod_{v \in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H, v). \tag{78}$$

Отсюда и из формулы (74) следует

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_{n} = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right) \left(\prod_{v \in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H, v)\right) S_{\mathbf{m}}(H, w). \tag{79}$$

Далее, из определений векторов $\mathbf{m}'$ и $\mathbf{m}$ следуют равенства $m_H = k+1$ и $m'_H = k$. Отсюда и из формул (20) и (21) следует, что при $h = H$ выполняются равенства

$$\sigma_{\mathbf{m}}(H) = \sigma_{\mathbf{m}'}(H) + 1 = w; \quad V_{\mathbf{m}'}(H) = \{v: \quad \sigma_{\mathbf{m}'}(H-1) + 1 \le v \le \sigma_{\mathbf{m}'}(H)\};$$
$$V_{\mathbf{m}}(H) = \{v: \quad \sigma_{\mathbf{m}}(H-1) + 1 \le v \le \sigma_{\mathbf{m}}(H)\}. \tag{80}$$

Введем в рассмотрение множество $V'_{\mathbf{m}}(H)$, полагая

$$V'_{\mathbf{m}}(H) = \{v: \quad \sigma_{\mathbf{m}}(H-1) + 1 \le v \le \sigma_{\mathbf{m}}(H) - 1\}. \tag{81}$$

Из формул (80) и (81) вытекает

$$V_{\mathbf{m}}(H) = V'_{\mathbf{m}}(H) \bigcup \{w\}. \tag{82}$$

Кроме того, из (80) следует равенство

$$\sigma_{\mathbf{m}'}(H) = \sigma_{\mathbf{m}}(H) - 1. \tag{83}$$

Как доказано выше, при всех натуральных значениях h, удовлетворяющих неравенствам $0 < h < H$, имеет место равенство (25). В частности, это равенство имеет место и при $h = H - 1$:
$$\sigma_{\mathbf{m}'}(H-1) = \sigma_{\mathbf{m}}(H-1). \tag{84}$$
Из определения множеств $V_{\mathbf{m}'}(H)$ и $V'_{\mathbf{m}}(H)$ формулами (80) и (81) соответственно, и из равенств (83) и (84) вытекает, что множества $V_{\mathbf{m}'}(H)$ и $V'_{\mathbf{m}}(H)$ совпадают. Отсюда и из равенства (82) следует равенство

$$V_{\mathbf{m}}(H) = V_{\mathbf{m}'}(H) \bigcup \{w\}. \tag{85}$$

Так как множества $V_{\mathbf{m}'}(H)$ и $V'_{\mathbf{m}}(H)$ совпадают, то из утверждения 2 леммы 6 следует, что суммы $S_{\mathbf{m}'}(H, v)$ и $S_{\mathbf{m}}(H, v)$ совпадают, если вершина v принадлежит множеству $V_{\mathbf{m}'}(H)$:
$$S_{\mathbf{m}}(H, v) = S_{\mathbf{m}'}(H, v), \quad \text{где} \quad v \in V_{\mathbf{m}'}(H). \tag{86}$$

Производя в формуле (79) замены, определенные формулой (86) и применяя равенство (85), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right)\left(\prod_{v\in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}'}(H,v)\right) S_{\mathbf{m}}(H,w) =$$

$$\left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right)\left(\prod_{v\in V_{\mathbf{m}'}(H)} S_{\mathbf{m}}(H,v)\right) S_{\mathbf{m}}(H,w) =$$

$$\left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right)\left(\prod_{v\in V_{\mathbf{m}}(H)} S_{\mathbf{m}}(H,v)\right). \qquad (87)$$

При $h = H$ определенная формулой (23) функция $P_{\mathbf{m}}(h)$ принимает вид

$$P_{\mathbf{m}}(H) = \prod_{v\in V_{\mathbf{m}}(H)} S_{\mathbf{m}}(H,v). \qquad (88)$$

Заменив в правой части равенств (87) выражение, стоящее в правой части равенства (88), выражением, стоящим в левой части равенства (88), получаем

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n = \left(\prod_{h=1}^{H-1} P_{\mathbf{m}}(h)\right) P_{\mathbf{m}}(H) = \prod_{h=1}^{H} P_{\mathbf{m}}(h). \qquad (89)$$

Таким образом, лемма 9 доказана. ▶

Из леммы 9 по методу математической мндукции вытекает

Следствие 3. *Допустим, что при натуральном числе* $H > 1$ *и при всех векторах* $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H,1)$ *любая функция* $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$*, имеющая древесное представление формулой* (19)*, может быть представлена формулой* (39) *в виде произведения функций. Тогда и при всех векторах* $\mathbf{m}$*, принадлежащих множеству* $\mathfrak{M}(H)$*, любая функция* $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$*, имеющая древесное представление формулой* (19)*, может быть представлена формулой* (39) *в виде произведения функций.*

Из следствия 3 и леммы 8 вытекает

Следствие 4. *Допустим, что при натуральном числе* $H \geq 1$ *и при всех векторах* $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$ *любая функция* $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$*, имеющая древесное представление формулой* (19)*, может быть представлена формулой* (39) *в виде произведения функций. Тогда и при всех векторах* $\mathbf{m}$*, принадлежащих множеству* $\mathfrak{M}(H+1)$*, любая функция* $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$*, имеющая древесное представление формулой* (19)*, может быть представлена формулой* (39) *в виде произведения функций.*

Доказательство. Допустим, что при натуральном числе $H \geq 1$ и при всех векторах $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$ любая функция $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, имеющая древесное представление формулой (19), удовлетворяет условиям следствия 4. Тогда по лемме 8 следует, что при всех векторах $\mathbf{m}$, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}(H+1,1)$, любая функция $\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})_n$, имеющая древесное представление формулой (19), может быть представлена формулой (39) в виде произведения функций. Отсюда по следствию 3 следует утверждение следствия 4. ▶

Доказательство теоремы 3. В примере 2 доказано, что при $H = 1$ утверждение теоремы 3 верно при всех $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}(H)$. Из этого результата и следствия 4 по методу математической индукции следует утверждение теоремы 3. ▶

Несомненно, что теорема 3 найдет свое применение в приложениях.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность к.ф.-м.н. В.И. Цебро за полезные советы и А.В. Беляеву за техническую поддержку.

Список литературы

[1] И.И. Иванчик. Метод ковариантного суммирования диаграмм в классической статистике. Дис. ... д — ра физ. — мат. наук. М., 1987.

[2] Г.И. Калмыков, Полуупорядочение деревьев. – М.: ВИНИТИ, 1988. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.02.88, № 2600–В88.

[3] Г.И. Калмыков. О представлении коэффициентов разложения Майера и вириальных коэффициентов.// Теоретическая и математическая физика, 1990. т. 84, № 2, с. 279–289.

[4] Г.И. Калмыков, Аналитическое продолжение разложений Майера и вириального разложения.// Теоретическая и математическая физика, 1992, т. 92, № 1, с. 139–149.

[5] Г.И. Калмыков, О частичном упорядочении деревьев и классификации связных графов и блоков.// Дискретная математика, 1992, т. 4, вып. 2, с. 66–73.

[6] Г.И. Калмыков, О представлении коэффициентов разложения в степенной ряд плотности распределения одной частицы в большом каноническом ансамбле.// Теоретическая и математическая физика, 1993, т. 97, № 3, с. 452–458.

[7] Г.И. Калмыков, О плотности распределения одной частицы в большом каноническом ансамбле.// Теоретическая и математическая физика. – 1994. – т. 100, № 1. – с. 45–58.

[8] Г.И. Калмыков, Разложение по степеням активности корреляционных функций большого канонического ансамбля.// Теоретическая и математическая физика, 1994, т. 101, № 1, с. 94–109.

[9] Г.И. Калмыков, Метод древесных сумм и его приложение к решению математических проблем классической статистической механики. Дис. ... д — ра физ. — мат. наук. М., 1998, 175 с.

[10] Г.И. Калмыков, О явлении асимптотической катастрофы майеровских рядов в классической статистической механики. // Теоретическая и математическая физика. 1999, т. 119, № 3, с. 475–497.

[11] Г.И. Калмыков, Представление вириальных коэффициентов, позволяющее избежать асимптотической катастрофы.// Теоретическая и математическая физика. – 2002. – т. 130, № 3. – с. 508–528.

[12] Г.И. Калмыков, Древесная классификация помеченных графов. М.: Физматлит, 2003, 188 с.

[13] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

[14] Дж. Майер, М. Гепперт-Майер, Статистическая механика. М.: Мир, 1980.

[15] Д. Рюэль, Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971.

[16] Ф.Харари, Теория графов. М.: Мир, 1973.

[17] Frank Harary, Graph Theory. Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusets Menio Park, California, london, 1969.

[18] I.I. Ivanchik, Generalized Mayer Series in Classical Statistical Mechanics.N.Y., US, Nova Science Publishers, Inc.,1993.

[19] G.I. Kalmykov, Analytic continuation of Mayer and virial expansions.// — 1993. Translated from Teoreticheskya i Matematicheskya Fizika, Vol. 92, № 1, pp. 139–149. Plenum Publishing Corporation 0040-5779/92/9201-0791. pp. 791–798.

[20] G.I. Kalmykov, Representation of the power-series coefficients for one-point correlation funtion in grand canonical ensemble.// — 1994. Translated from Teoreticheskya i Matematicheskya Fizika, V. 97, № 3, pp. 452–458. Plenum Publishing Corporation 0040-5779/93/9703-1405. pp. 1405-1408.

[21] G.I. Kalmykov, One-particle distribution density in the grand canonical ensemble.// Theoretical and Mathematical Physics. 1994. Vol. 100, № 1. pp. 834–845.

[22] G.I. Kalmykov, Expansion of the correlation functions of the grand canonical ensemble in powers of the activity.// Theoretical and Mathematical Physics. 1994, Vol. 101, № 1, pp. 1224–1234.

[23] G.I. Kalmykov, Mayer-series asymptotic catastrophe in classical statistical mechanics.// Theoretical and Mathematical Physics. — 1999. Vol. 119, № 3. pp. 778–795.

[24] G.I. Kalmykov, A representation of virial coeffcients that avoid the asymptotical catastrophe.// Theoretical and Mathematical Physics. 2002, Vol. 130, № 3, pp. 432–457.

[25] G.I. Kalmykov, Representations of coefficients of power series in classical statistical mechanics. Their classification and complexity criteria. // http: // arxiv.org / abs / 2007.02146 (in russian)

[26] G.I. Kalmykov, Complexity of representations of coefficients of power series in classical statistical mechanics. Their classification and complexity criteria. v1 // http: // viXra.org: 2110.0044 submitted on 2021-10-10 21:11:18 (english and russian versions)

[27] G.I. Kalmykov, Complexity of representations of coefficients of power series in classical statistical mechanics. Their classification and complexity criteria. // http: // arxiv.org / abs/2207.07583 (in english)

[28] J.E. Mayer and M. Geppert-Mayer, Statistical Mechanics, second edition. Wiley-Interscience Publishing, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney,Toronto, 1977.

[29] David Ruelle, Statistical Mechanics, Rigorous Results. W.A. Beniamin, inc. New York, Amsterdam, 1969.

[30] Francis R. Ree and Wiliam G. Hoover. Fifth and Sixth Virial coefficients for Hard Spheres and Hard Disks.// Journal of Chemical Physics, 40:4, February 15, 1964, pp. 939–950.

[31] Francis R. Ree and Wiliam G. Hoover. Seventh Virial coefficients for Hard Spheres and Hard Disks.// Journal of Chemical Physics, 46:11, June 01, 1967, pp. 4181–4197.

[32] Francis R. Ree and Wiliam G. Hoover. Reformulation of the Virial Series for Classical Fluids.// Journal of Chemical Physics, 41:6, September 15, 1964, pp. 1635–1645.